

Département de mathématiques
Université de Fribourg en Suisse

Caractérisation des automorphismes CR d'une
classe d'hypersurfaces dans \mathbb{C}^4 :
le problème *PQR*

THÈSE

présentée à

la Faculté des sciences et de médecine de l'Université de Fribourg, Suisse
pour l'obtention du grade académique de

Docteur ès sciences en mathématiques

par

Cyril Josy Rémy JULIEN

originaire de

Clos-du-Doubs, Jura

Thèse n° 5576
Uniprint Fribourg
2022

<https://doi.org/10.51363/unifr.sth.2024.011>

© Cyril Julien, 2024



Cet ouvrage est publié sous une licence Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) : <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0>

Accepté par la Faculté des sciences et de médecine de l'Université de Fribourg sous la recommandation des membres du jury de thèse, Dr. Christian Mazza, Dr. Martin Kolář, Dr. Léa Blanc-Centi, Dr. Florian Bertrand, et du président du jury, Prof. Enrico Le Donne.

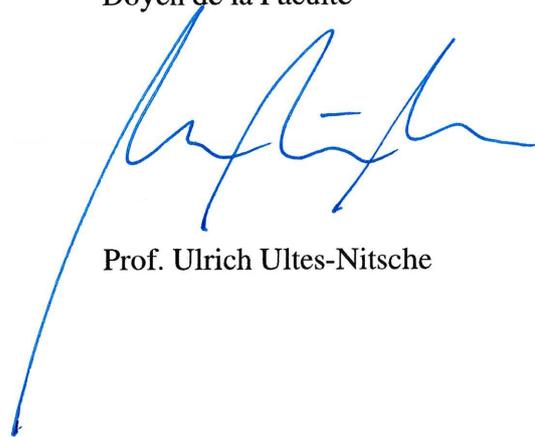
Fribourg, le 16 novembre 2022

Directrice de thèse



Priv.-Doz. Francine Meylan

Doyen de la Faculté



Prof. Ulrich Ultes-Nitsche

Département de mathématiques
Université de Fribourg
Suisse

Cyril Josy Rémy JULIEN

Caractérisation des automorphismes CR d'une
classe d'hypersurfaces dans \mathbb{C}^4 :
le problème *PQR*

Thèse pour l'obtention du grade de docteur ès sciences en mathématiques

Sous la direction de Francine Meylan

Soutenue
à Fribourg CH
le 16 novembre 2022

Membres du jury

Le jury de ce travail est constitué de

1. la Directrice de thèse, Dr. Francine Meylan, Priv.-Doz., Université de Fribourg ;
2. le Parrain de thèse, Dr. Christian Mazza, Professeur et Président du Département de Mathématiques, Université de Fribourg ;
3. Dr. Martin Kolář, expert, Associate professor, Department of Mathematics and Statistics, Masaryk University, Brno ;
4. Dr. Léa Blanc-Centi, experte, Maîtresse de conférence, Laboratoire Paul Painlevé, Département de Mathématiques, Université de Lille ;
5. Dr. Florian Bertrand, expert, Associate professor and Chairperson of the Department of Mathematics, American University of Beirut.

Historique du travail

Le premier contact avec la directrice de thèse a eu lieu en mai 2016 et les douze semestres d'études doctorales ont été articulées selon les étapes suivantes.

Septembre 2016, lecture de parties de [2]. Octobre 2017, lecture des articles et immersion. Août 2019, écriture et début des nouveautés. Octobre 2019, voyage à Brno, à l'Université Masaryk, rencontre de Martin Kolář. Avril 2020, fin du résumé des lectures et de quelques premiers petits résultats, 150 pages. Novembre 2020, nouveaux éléments, ajouts d'exemples, restructuration du texte. Juillet 21, preuve du théorème 4.3.1 avérée fautive, corrections, autres résultats presque aboutis. Janvier 22, résultat final du théorème 4.3.1. Mars 2022, relecture des 198 pages et concision. En 2022 : 6 juillet, dépôt ; 10 novembre, séminaire préparatif ; 16 novembre, soutenance à huis clos ; 23 novembre, présentation publique. Une publication sous forme d'article dans une revue est prévue dans le courant 2023.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier Francine Meylan. Son expérience, sa patience, sa confiance, sa passion, sa créativité et son dévouement se sont avérés décisifs pour l'élaboration de ce travail. Mille mercis !

Pour ces points de vue, ses apports et son accueil chaleureux lors du voyage à Brno en 2019, je remercie sincèrement Martin Kolář. Je remercie également tous les membres du jury pour leur relecture.

En outre, j'aimerais souligner l'influence importante que tous mes professeurs ont eu sur ma formation. Tant dans le domaine des mathématiques, de la rigueur, de la créativité, de la musique, de l'improvisation ou du savoir en général, ils m'ont tous guidé dans mon parcours intellectuel, « en quête d'harmonie ». Tous mes élèves, de mathématiques et de musique, m'ont également apporté beaucoup. Merci à tous !

Ensuite, mes remerciements les plus vifs vont également à mes amis, Sylvain, Dan, Jonas et Marc. Leur soutien personnel et leur compréhension amicale sont si précieux. Je remercie également Boris et Didier avec qui plusieurs années d'études des mathématiques ont été partagées. Je pense également à tous mes amis et connaissances plus larges. Merci à Hélène pour l'anglais !

Pour leur soutien et leur écoute sans faille, dans ces nombreuses années d'études, je remercie mes frères, Clément, Stéphane et Fabrice, présents depuis mes premières années de vie.

Je n'oublie pas mes parents, Rémy et Julienne, qui m'ont donné la vie et laissé suivre mon chemin. Je pense également à ma famille plus large et à ma belle-famille, Raymond, Marianne, ainsi qu'à tous ceux qui ont cru en moi.

Pour la source intarissable d'inspiration, de vivacité et de motivation qu'ils m'offrent, je remercie profondément mes enfants, Émile, Rose, Ambre et Louise.

Enfin, je n'en serais pas là sans la personne qui a le plus changé ma vie, mon épouse, Anne, que je remercie infiniment.

Résumé

Cette thèse de doctorat s'intéresse au groupe de stabilité, $\text{Aut}(M_g)$, qui est l'ensemble des automorphismes (ou biholomorphismes fixant un point) d'une hypersurface réelle et continue M_g . Pour étudier $\text{Aut}(M_g)$, il s'avère suffisant de classifier l'ensemble des automorphismes infinitésimaux réels analytiques CR, $\text{hol}(M)$, d'une hypersurface, M , plus simple, polynomiale, homogène et modèle. M est associée à M_g dans le sens que son équation définissante n'est constituée que des premiers termes du développement de Taylor de celle qui définit M_g . Certains résultats généraux, dans \mathbb{C}^{n+1} , existent; des résultats plus précis existent dans \mathbb{C}^3 ; et, nous apportons dans ce travail des résultats pour \mathbb{C}^4 . Les hypersurfaces qu'il s'avère pertinent d'étudier sont réelles, holomorphiquement non dégénérées, de type fini et Levi dégénérées.

Le chapitre 1 présente les notions élémentaires, une problématique ainsi que l'ensemble des résultats principaux.

Le chapitre 2 traite du cadre général, dans \mathbb{C}^{n+1} . Inspiré de « Chern-Moser operators and polynomial models in CR geometry », ce chapitre présente la description complète de la démarche générale qui a pour outil l'opérateur de Chern-Moser, appuyée par des précisions ainsi que des exemples.

Le but du chapitre 3 est double. D'une part, il est à considérer comme tremplin avant la généralisation dans \mathbb{C}^4 et dans ce sens, il reformule les résultats de « Infinitesimal CR automorphisms for a class of polynomial models » et offre une description des automorphismes infinitésimaux réels analytiques CR d'une hypersurface homogène et modèle de \mathbb{C}^3 , M , décrite par l'équation

$$\text{Im } w = P\bar{Q} + \bar{Q}P,$$

où $(z, w) = (z_1, z_2, w) \in \mathbb{C}^3$, et P et Q sont des polynômes en z . D'autre part, ce chapitre apporte plusieurs précisions importantes pour ce cas, notamment concernant la décomposition des rotations.

Le chapitre 4 présente les nouvelles contributions concernant une hypersurface homogène M de \mathbb{C}^4 décrite par

$$\operatorname{Im} w = P\bar{Q} + \bar{Q}P + R\bar{R},$$

où $(z, w) = (z_1, z_2, z_3, w) \in \mathbb{C}^4$, et P , Q et R sont à nouveau des polynômes en z . Ce cas est appelé problème PQR . Un cas modèle est à considérer comme une introduction, un cas découplé (pour lequel une variable est strictement réservée à R) donne des résultats intéressants, mais c'est surtout le cas général, toutefois monomial, qui semble important : le théorème qui décrit une décomposition des rotations s'avère être le résultat le plus important, mais la dimension de l'ensemble de tous les automorphismes infinitésimaux réels analytiques CR de l'hypersurface est détaillée.

Le chapitre 5 ouvre la porte aux perspectives nouvelles et propose de nouvelles pistes, tout en rappelant le lien fondamental entre M et M_g , entre les automorphismes infinitésimaux réels analytiques CR décrits de l'hypersurface modèle et les automorphismes de l'hypersurface générale.

Abstract

This dissertation is about the stability group $\text{Aut}(M_g)$, which is the set of all the automorphisms (or biholomorphisms stabilizing a point) of a real and smooth hypersurface M_g . In order to study $\text{Aut}(M_g)$, one can classify real-analytic infinitesimal CR-automorphisms $\text{hol}(M)$ of an easier homogeneous polynomial and model hypersurface M . M is associated with M_g in the sense that its defining equation is constituted only of the first terms of Taylor's development of the equation of M_g . Some general results exist in \mathbb{C}^{n+1} ; more detailed results appear in \mathbb{C}^3 ; and this dissertation will provide new results in \mathbb{C}^4 . Hypersurfaces that are relevant to study are real, holomorphically nondegenerate, of finite type and Levi degenerate.

Chapter 1 introduces the elementary notions, the study question as well as all the main results.

Chapter 2 is about the general framework in \mathbb{C}^{n+1} . Based on "Chern-Moser operators and polynomial models in CR geometry", this chapter introduces the complete approach that uses the Chern-Moser operator, supported by more precise explanations and examples.

Chapter 3 has a dual purpose. To begin with, it serves as a springboard before generalizing in \mathbb{C}^4 . In this sense, it rephrases the results of "Infinitesimal CR automorphisms for a class of polynomial models" and offers a description of the real-analytic infinitesimal CR-automorphisms of a homogeneous and model hypersurface of \mathbb{C}^3 , M , described by the following equation :

$$\text{Im } w = P\bar{Q} + \bar{Q}P,$$

where $(z, w) = (z_1, z_2, w) \in \mathbb{C}^3$, and P and Q are polynomials in z . In addition, this chapter provides important specifications on this case, particularly regarding the decomposition of rotations.

Chapter 4 introduces the newest contributions on a homogeneous hypersurface M of \mathbb{C}^4 described as follows :

$$\operatorname{Im} w = P\bar{Q} + \bar{Q}P + R\bar{R},$$

where $(z, w) = (z_1, z_2, z_3, w) \in \mathbb{C}^4$, and P , Q and R are polynomials in z . This case is called the PQR problem. A model case serves as an introduction to this chapter in section 4.1. A decoupled case (for which a variable is strictly reserved to R) gives interesting results in 4.2. However, as presented in 4.3, it is the general case, although monomial, that seems important : the theorem that describes the decomposition of rotations proves to be the most important result. The dimension of the set of the real-analytic infinitesimal CR-automorphisms of the hypersurface are detailed.

Chapter 5 broadens the perspectives and offers new leads, while keeping in mind the fundamental link between M and M_g , that is between real-analytic infinitesimal CR-automorphisms described from the model hypersurface, and the automorphisms of the general hypersurface.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Préliminaires et contexte	1
1.1.1	Notions de base	1
1.1.2	Hypersurfaces dans \mathbb{C}^N	3
1.1.3	Vecteurs holomorphes et antiholomorphes	7
1.1.4	Sous-variétés CR et champs vectoriels CR	11
1.1.5	Hypersurface de type fini	14
1.2	Problématique	18
1.2.1	Point historique	18
1.2.2	Notre sujet	20
1.3	Résultats principaux	21
2	Cas général	25
2.1	Considérations générales et démarche	25
2.1.1	L'opérateur de Chern-Moser généralisé	25
2.1.2	Champs vectoriels rigides et intégrations	32
2.1.3	Propriétés des hypersurfaces intéressantes	36
2.1.4	Description de \mathfrak{g}	37
2.2	Précisions importantes	40
2.2.1	Nombre de polynômes pour \mathcal{P}	40
2.2.2	Cas particulier, \mathcal{P} de degré 2	42
2.2.3	Algèbre linéaire sur les rotations	44
2.3	Exemples	50

3	Cas connus	57
3.1	Cas modèle	57
3.2	Problème PQ	63
3.2.1	Préliminaires	63
3.2.2	Lemmes auxiliaires	66
3.2.3	Résultats	74
4	Nouveaux cas	77
4.1	Cas modèle	78
4.1.1	Remarque de généralisation	89
4.2	Problème PQR découplé	92
4.2.1	Propriétés de \mathfrak{g}_t	93
4.2.2	Propriétés de \mathfrak{g}_0	95
4.2.3	Propriétés de $\mathfrak{g}_0^{\text{Re}}$	100
4.2.4	Propriétés de $\mathfrak{g}_0^{\text{Im}}$	101
4.2.5	Propriétés de $\mathfrak{g}_0^{\text{Nil.}}$	104
4.2.6	Propriétés de \mathfrak{g}_c	104
4.2.7	Propriétés de \mathfrak{g}_n	106
4.2.8	Propriétés de \mathfrak{g}_1	108
4.2.9	Résultat	108
4.3	Problème PQR	110
4.3.1	Propriétés de \mathfrak{g}_0	111
4.3.2	Propriétés de $\mathfrak{g}_0^{\text{Nil.}}$	138
4.3.3	Propriétés de $\mathfrak{g}_0^{\text{Re}}$	140
4.3.4	Propriétés de $\mathfrak{g}_0^{\text{Im}}$	141
4.3.5	Propriétés de \mathfrak{g}_c	143
4.3.6	Propriétés de \mathfrak{g}_t et \mathfrak{g}_n	154
4.3.7	Propriétés de \mathfrak{g}_1	156
4.3.8	Résultat	158
5	Conclusion	159
	Bibliographie	161
	Curriculum vitae	167

Chapitre 1

Introduction

Ce chapitre rassemble les diverses notions fondamentales dont nous aurons besoin tout au long de ce travail qui se situe dans l'Analyse complexe à plusieurs variables. Nous allons en particulier définir la notion d'hypersurface ainsi que la notion de type fini. Nous présentons également les questions que nous nous sommes posées ainsi que les résultats principaux obtenus dans ce travail.

1.1 Préliminaires et contexte

Dans ce paragraphe, nous proposons une présentation d'objets mathématiques qui vont nous intéresser et sur lesquels nous pouvons déjà faire quelques considérations introductives¹.

1.1.1 Notions de base

Définition 1.1.1.

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ avec un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. La fonction complexe $f \in C^1(\Omega)$ est dite *holomorphe* dans Ω si, pour tout $a \in \Omega$, f est holomorphe en a ; et la fonction f est dite *holomorphe en a* , si la limite suivante existe (pour $h \in \mathbb{C}$),

$$f'(a) := \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{a' \rightarrow a} \frac{f(a') - f(a)}{a' - a} \in \mathbb{C}.$$

1. Ce paragraphe est basé sur [2], pp.3-21.

La généralisation de la définition précédente à des applications $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^M$, avec un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, est la suivante.

Définition 1.1.2.

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ un ouvert. La fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^M$ est dite *holomorphe* si $f \in C^1(\Omega)$ et f est holomorphe en chaque variable. Nous notons

$$H(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^M \mid f \text{ holomorphe}\}.$$

De même, f , une application, notée

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_M \end{pmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^M,$$

où $\Omega \subset \mathbb{C}^N$, est *holomorphe* si chaque f_j est holomorphe².

Notation 1.1.3.

Dans \mathbb{C}^N , les variables sont z_j , pour $j = 1, \dots, N$. Nous identifions \mathbb{C}^N avec \mathbb{R}^{2N} en posant

$$z_j = x_j + iy_j,$$

avec $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, pour $j = 1, \dots, N$

Définition 1.1.4.

Une application est dite *biholomorphe* si elle est holomorphe, bijective avec une réciproque holomorphe. Nous notons qu'une telle application possède une même dimension pour les ensembles de départ et d'arrivée : $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^N$, avec $\Omega \subset \mathbb{C}^N$. Un *automorphisme* est un biholomorphisme allant d'un ensemble vers lui-même et qui fixe un point³. De plus, l'ensemble des automorphismes d'un ensemble Ω , noté $\text{Aut}(\Omega)$, ou $\text{Aut}(\Omega, p)$ (avec $p \in \Omega$ le point fixe), est appelé le *groupe de stabilité* de Ω .

2. Pour les définitions et théorèmes de base, cf. [35], pp.1-4 et pp.22-28. En particulier, supposer que la fonction soit C^1 n'est pas nécessaire, car cela peut être vu comme une conséquence de la définition. Cf. [35], p.4, corollaire 1.2.3 et p.26, corollaire 2.2.2.

3. Cf. [58], p.209 et [2], p.376. Le fait de considérer un point fixe ou non dans la définition est discutable. Nous notons qu'il ne s'agit pas d'une restriction de la généralité et adoptons le point de vue de [2].

1.1.2 Hypersurfaces dans \mathbb{C}^N

Définition 1.1.5.

Un sous-ensemble $M \subset \mathbb{C}^N$ est une *hypersurface réelle* de classe C^∞ si pour tout $p_0 \in M$ il existe $U \subset \mathbb{C}^N$, un voisinage de p_0 , et $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ tels que

$$M \cap U = \{z \in U \mid \rho(z, \bar{z}) = 0, z = (z_1 = x_1 + iy_1, \dots, z_N = x_N + iy_N)\}$$

et $d\rho$ n'est jamais nulle dans U , i.e.

$$\forall p \in U, d\rho(p, \bar{p}) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1}(p, \bar{p}), \frac{\partial \rho}{\partial y_1}(p, \bar{p}), \dots, \frac{\partial \rho}{\partial x_N}(p, \bar{p}), \frac{\partial \rho}{\partial y_N}(p, \bar{p}) \right) \neq 0,$$

La fonction ρ est appelée *fonction localement définissante de M près de p_0* . Si la fonction ρ peut être choisie analytique réelle, alors M est appelée *analytique réelle*.

Exemple 1.1.6.

Soit l'hypersurface donnée par l'équation $\text{Im } z_N = 0$. Selon la définition, le voisinage de p est $U = \mathbb{C}^N$ et la fonction $\rho : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $\rho(z, \bar{z}) = \rho(z_1, \dots, z_N) = \text{Im } z_N$. Vérifions que la différentielle de la fonction définissante est nulle en aucun point. Avec $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, \dots, N$. Ainsi, pour tout $p \in M$:

$$d\rho(p, \bar{p}) = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_j}(p, \bar{p}) dx_j + \frac{\partial \rho}{\partial y_j}(p, \bar{p}) dy_j \right) = \frac{\partial (\text{Im } z_N)}{\partial y_N}(p, \bar{p}) dy_N = 1 dy_N \neq 0.$$

Cet hyperplan est dit « plat ». Si $N = 2$, alors $M \simeq \mathbb{R}^3$.

Exemple 1.1.7.

L'hypersurface de Lewy est donnée par l'équation

$$\text{Im } z_N = \sum_{j=1}^{N-1} |z_j|^2, \quad |z_j|^2 = x_j^2 + y_j^2.$$

Montrons qu'il s'agit bien d'une hypersurface. Prenons donc un $p_0 = (z_1, \dots, z_N) \in M$ (avec le voisinage $U = \mathbb{C}^N$). Nous choisissons

$$\begin{aligned} \rho : U &\rightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto \rho(z, \bar{z}) := \text{Im } z_N - \sum_{j=1}^{N-1} |z_j|^2 \end{aligned}$$

Pour tout $p \in M$, $\rho(p, \bar{p}) = 0$ par définition. Il faut encore que $d\rho$ ne soit nulle en aucun point :

$$\begin{aligned}
d\rho(z, \bar{z}) &= \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial x_j}(z, \bar{z}) dx_j + \frac{\partial \rho_k}{\partial y_j}(z, \bar{z}) dy_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{\partial(-x_j^2)}{\partial x_j}(z, \bar{z}) dx_j + \frac{\partial(-y_j^2)}{\partial y_j}(z, \bar{z}) dy_j \right) + 0 dx_N + 1 dy_N \\
&= - \sum_{j=1}^{N-1} (2x_j dx_j + 2y_j dy_j) + \underbrace{1 dy_N}_{\neq 0} \neq 0.
\end{aligned}$$

Exemple 1.1.8.

Une autre hypersurface est la sphère

$$\partial B_N = S_N = \left\{ z \in \mathbb{C}^N \mid \sum_{j=1}^N |z_j|^2 = 1 \right\}.$$

Elle est compacte, car fermée bornée, un voisinage possible est $U = \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$, et une fonction définissante est $\rho(z, \bar{z}) = \sum_{j=1}^N |z_j|^2 - 1$. Comme $\frac{\partial \rho}{\partial x_j} = 2x_j$ (et de même avec les y_j), la dérivée $d\rho \neq 0$ (sauf pour $0 \notin S_N$).

Remarque 1.1.9.

L'hypersurface de Lewy, Lew , s'avère être holomorphiquement bijective à l'ensemble $S_N \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$. En effet, à l'aide de l'application

$$\begin{aligned}
H : S_N \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\} &\rightarrow Lew \\
z &\mapsto H(z) = (H_1(z), \dots, H_N(z)),
\end{aligned}$$

où $H_j(z) := \frac{iz_j}{1-z_N}$ pour $j = 1, \dots, N-1$ et $H_N(z) := \frac{i(z_N+1)}{1-z_N}$. Pour un $z \in S_N$, nous avons d'une part,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N-1} |H_j(z)|^2 &= \sum_{j=1}^{N-1} \left| \frac{iz_j}{1-z_N} \right|^2 = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{|iz_j|^2}{|1-z_N|^2} \\
&= \frac{1}{|1-z_N|^2} \sum_{j=1}^{N-1} |z_j|^2 \\
&= \frac{1}{(1-x_N)^2 + (-y_N)^2} (1 - |z_N|^2) \\
&= \frac{1}{(1-x_N)^2 + y_N^2} (1 - x_N^2 - y_N^2),
\end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} H_N(z) &= \operatorname{Im} \frac{i(z_N + 1)}{1 - z_N} = \operatorname{Im} \frac{i(x_N + iy_N + 1)}{1 - x_N - iy_N} \\
&= \operatorname{Im} \left(\frac{ix_N - y_N + i}{(1 - x_N) - iy_N} \cdot \frac{(1 - x_N) + iy_N}{(1 - x_N) + iy_N} \right) \\
&= \operatorname{Im} \frac{ix_N - y_N + i - ix_N^2 + x_N y_N - ix_N - x_N y_N - iy_N^2 - y_N}{(1 - x_N)^2 + y_N^2} \\
&= \operatorname{Im} i \frac{1 - x_N^2 - y_N^2}{(1 - x_N)^2 + y_N^2} = \frac{1 - x_N^2 - y_N^2}{(1 - x_N)^2 + y_N^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $z \in S_N \Leftrightarrow H(z) \in \text{Lew}$.

Remarques 1.1.10.

- Premièrement, pour toute hypersurface $M \subset \mathbb{C}^N$ et pour tout $p_0 \in M$, il existe des coordonnées holomorphes telles que nous pouvons supposer que $p_0 = 0$. En effet, pour ce faire, il suffit de considérer l'application " $- p_0$ " : $p \mapsto p - p_0$ définissant de nouvelles coordonnées. Ainsi, p_0 est envoyé sur 0 et la nouvelle fonction localement définissante, tenant compte de ce changement, est $\rho' := \rho \circ " + p_0$ ", qui jette 0 sur 0.
- Ensuite, nous allons montrer que pour toute fonction localement définissante ρ , nous pouvons supposer que $\frac{\partial \rho}{\partial x_1}(0) \neq 0$. En effet, comme par hypothèse, et toujours avec la notation $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, \dots, N$,

$$d\rho(0) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1}(0), \frac{\partial \rho}{\partial y_1}(0), \dots, \frac{\partial \rho}{\partial x_N}(0), \frac{\partial \rho}{\partial y_N}(0) \right) \neq 0,$$

il existe un $k \in \{1, \dots, N\}$ tel que $\frac{\partial \rho}{\partial x_k}(0) \neq 0$ ou $\frac{\partial \rho}{\partial y_k}(0) \neq 0$. Il suffit donc d'effectuer la permutation holomorphe de coordonnées

$$\sigma_{1k} : (z_1, z_2, \dots, z_N) \mapsto (z_k, z_2, \dots, z_N),$$

dans le cas où $\frac{\partial \rho}{\partial x_k}(0) \neq 0$. Dans le cas où $\frac{\partial \rho}{\partial y_k}(0) \neq 0$, nous prendrons comme permutation

$$\sigma_{1ik} : (z_1, z_2, \dots, z_N) \mapsto (iz_k, z_2, \dots, z_N).$$

Celle-ci permet en effet d'échanger les parties réelle et imaginaire, au signe près, de $z_k = x_k + iy_k$, qui deviendra $iz_k = -y_k + ix_k =: z'_1 = x'_1 + iy'_1$.

- c) Enfin, nous pourrions établir le fait que dans certaines coordonnées, toute hypersurface peut être décrite par $x'_1 = 0$, ou encore que toutes les fonctions définissantes sont équivalentes. Pour ces deux aspects, le changement de coordonnée n'est pas holomorphe et cela n'est pas intéressant de notre point de vue. Nous ne considérerons effectivement que des invariants biholomorphes.

Nous verrons qu'il s'avère intéressant de décrire une hypersurface avec une équation particulière que nous pourrions appeler « normale ». Voici un exemple de résultat qui va dans ce sens. La démonstration utilise le théorème des fonctions implicites.

Proposition 1.1.11. ([2], p.4, proposition 1.1.6)

Soit $M \subset \mathbb{C}^{n+1}$ une hypersurface réelle avec $p_0 \in M$. Alors il existe des coordonnées holomorphes $(z, w) \in \mathbb{C}^{n+1}$ près de p_0 , s'annulant en p_0 , avec $z \in \mathbb{C}^n$ et $w = s + it \in \mathbb{C}$ et il existe une fonction continue $\phi : \mathbb{R}^{2n+1} \mapsto \mathbb{R}$ définie près de 0, avec $\phi(0) = 0$, $d\phi(0) = 0$ telle que, près de p_0 , M est donnée par

$$\text{Im } w = \phi(z, \bar{z}, \text{Re } w).$$

Exemple 1.1.12.

Soient une hypersurface $M \subset \mathbb{C}^2$ et $p_0 = (1, 0)$ avec

$$\rho(z, \bar{z}) = 2(z_1 + \bar{z}_1) + i(z_1 - \bar{z}_1) + (z_2 + \bar{z}_2) + |z_1|^2 + |z_2|^2 - 5.$$

Nous pouvons effectivement facilement vérifier que $\rho(1, 0) = 0$ et que

$$\begin{aligned}
\rho(z, \bar{z}) &= 2x_1 + 2iy_1 + 2x_1 - 2iy_1 + ix_1 - y_1 - ix_1 - y_1 + x_2 + iy_2 \\
&\quad + x_2 - iy_2 + x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 5 \\
&= 4x_1 - 2y_1 + 2x_2 + x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 5 \\
\Rightarrow d\rho(x_1, x_2, y_1, y_2)|_{(1,0)} &= (4 - 2 + 2 + 2x_1 + 2y_1 + 2x_2 + 2y_2)|_{(1,0)} \\
&= 4 - 2 + 2 + 2 = 6 \neq 0.
\end{aligned}$$

Procédons au changement de variables $z'_1 := z_1 - 1$ et $z'_2 := z_2$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\rho(z, \bar{z}) = \rho'(z', \bar{z}') &= 4(x'_1 + 1) - 2y'_1 + 2x'_2 + (x'_1 + 1)^2 + y'^2_1 + x'^2_2 + y'^2_2 - 5 \\
&= 4x'_1 + 4 - 2y'_1 + 2x'_2 + x'^2_1 + 2x'_1 + 1 + y'^2_1 + x'^2_2 + y'^2_2 - 5 \\
&= 6x'_1 - 2y'_1 + 2x'_2 + x'^2_1 + y'^2_1 + x'^2_2 + y'^2_2 \\
&= 6 \operatorname{Re} z'_1 - 2 \operatorname{Im} z'_1 + 2 \operatorname{Re} z'_2 + |z'_1|^2 + |z'_2|^2 \\
&= \operatorname{Im}(6iz'_1) - \operatorname{Im}(2z'_1) + \operatorname{Im}(2iz'_2) + |z'_1|^2 + |z'_2|^2 \\
&=: \operatorname{Im}(z''_1) + O(2),
\end{aligned}$$

où un second changement de variables $z''_1 := 6iz'_1 - 2z'_1 + 2iz'_2$ et $z''_2 := z'_2$ a été effectué. En appliquant le théorème des fonctions implicites pour résoudre $\rho = 0$ pour $\operatorname{Im} z''_1$, nous obtenons une fonction ϕ comme dans la proposition 1.1.11, avec $w = z''_1$ et $z = z''_2$.

1.1.3 Vecteurs holomorphes et antiholomorphes

Définition 1.1.13.

Soit $p \in \mathbb{C}^N \simeq \mathbb{R}^{2N}$. L'espace tangent réel de \mathbb{C}^N en p est

$$T_p \mathbb{C}^N = T_p \mathbb{R}^{2N} = \left\{ X = \sum_{j=1}^N \left(a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \Big|_p \mid a_j, b_j \in \mathbb{R} \right\}.$$

Un vecteur $X \in T_p \mathbb{C}^N$ est dit *tangent* à M en $p \in M$ si, pour une fonction localement définissante ρ de M en p ,

$$\sum_{j=1}^N \left(a_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial \rho}{\partial y_j} \right) \Big|_p = 0, \quad (1.1)$$

Définition 1.1.14.

L'espace tangent de M en p est l'espace des vecteurs tangents à M en p , noté $T_p M$. Les espaces tangents complexifiés, $\mathbb{C}T_p \mathbb{C}^N$ et $\mathbb{C}T_p M$, sont définis de manière similaire en prenant des coefficients a_j et b_j complexes.

Remarque 1.1.15.

Pour un $p \in M$,

$$\dim_{\mathbb{R}} T_p M = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}T_p M = 2N - 1 =: \dim_{\mathbb{R}} M.$$

En effet, l'équation (pour une fonction localement définissante ρ),

$$\sum_{j=1}^N \left(a_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial \rho}{\partial y_j} \right) \Big|_p = 0$$

est équivalente à l'équation

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \\ b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} := \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \rho}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial \rho}{\partial y_N} \right) \Big|_p \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \\ b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} = 0,$$

où $A : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application linéaire. En appliquant le théorème du rang, nous obtenons $\dim \mathbb{R}^{2N} = \dim \ker A + \dim \operatorname{Im} A$ ou en d'autres termes,

$$2N = \dim T_p M + \dim \operatorname{Im} A.$$

De plus, le rang de A est trivialement de 1, $\dim \operatorname{Im} A = 1$, ce qui prouve l'affirmation.

Définition 1.1.16.

Les applications $p \mapsto T_pM$ et $p \mapsto \mathbb{C}T_pM$ définissent respectivement le *fibré tangent* TM et le *fibré tangent complexifié* $\mathbb{C}TM$, pour lesquels T_pM et $\mathbb{C}T_pM$ sont les fibres respectives.

Remarque 1.1.17.

Rappelons les notations usuelles

$$\frac{\partial}{\partial z_j} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right),$$

pour $j = 1, \dots, N$. Elles permettent effectivement de calculer que, pour tout $j = 1, \dots, N$,

$$\frac{\partial z_j}{\partial z_j} = 1, \quad \frac{\partial z_j}{\partial \bar{z}_j} = 0, \quad \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial z_j} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial \bar{z}_j} = 1.$$

Avec ces notations et à l'aide d'un changement de variables \mathbb{C} -linéaire, tout vecteur $X \in \mathbb{C}T_p\mathbb{C}^N$ peut s'écrire, avec des $a_j, b_j \in \mathbb{C}$,

$$X = \sum_{j=1}^N \left(a_j \frac{\partial}{\partial z_j} + b_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right) \Big|_p. \quad (1.2)$$

En effet, toujours pour $j = 1, \dots, N$, par définition de $\frac{\partial}{\partial z_j}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} &= 2 \frac{\partial}{\partial z_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} = 2 \frac{\partial}{\partial z_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \\ \frac{\partial}{\partial y_j} &= 2i \frac{\partial}{\partial z_j} - i \frac{\partial}{\partial x_j} = -2i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} + i \frac{\partial}{\partial x_j}, \end{aligned}$$

donc, par substitution,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} &= 2 \frac{\partial}{\partial z_j} + i \left(-2i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} + i \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y_j} &= 2i \frac{\partial}{\partial z_j} - i \left(2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \end{aligned}$$

système équivalent à

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \\ \frac{\partial}{\partial y_j} &= i \frac{\partial}{\partial z_j} - i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}.\end{aligned}$$

De la sorte, tout vecteur $X \in \mathbb{C}T_p\mathbb{C}^N$, décrit par (1.1), avec $a_j, b_j \in \mathbb{C}$, peut effectivement être réécrit comme (1.2), avec d'autres $a_j, b_j \in \mathbb{C}$.

Définition 1.1.18.

Un vecteur $X \in \mathbb{C}T_p\mathbb{C}^N$ est dit *holomorphe* si, pour tout $j = 1, \dots, N$, $b_j = 0$ dans la notation précédente, (1.2). Le vecteur est dit *antiholomorphe* si les $a_j = 0$.

Remarque 1.1.19.

La précédente définition est indépendante du choix des coordonnées holomorphes. En effet, si nous considérons le cas d'un vecteur holomorphe $X = \sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial}{\partial z_j}$ avec un changement de coordonnées holomorphe $z \mapsto z'$, la règle de la chaîne implique que pour tout $j = 1, \dots, N$,

$$\frac{\partial}{\partial z_j} \mapsto \frac{\partial}{\partial z'_j} \cdot \frac{\partial z'_j}{\partial z_j},$$

qui est holomorphe (les z'_j étant holomorphes).

Définition 1.1.20.

L'espace des vecteurs holomorphes est noté $T_p^{1,0}\mathbb{C}^N$ et celui des vecteurs antiholomorphes est noté $T_p^{0,1}\mathbb{C}^N$. L'espace des vecteurs holomorphes tangents à p est

$$\overline{V}_p := T_p^{1,0} \cap \mathbb{C}T_pM,$$

et celui des vecteurs antiholomorphes tangents à p est

$$V_p := T_p^{0,1} \cap \mathbb{C}T_pM.$$

Remarque 1.1.21.

Avec les précédentes définitions et en prenant une fonction localement définissante ρ ,

$$\dim_{\mathbb{C}} V_p = N - 1.$$

En effet, les vecteurs de V_p sont caractérisés pas des $b := (b_1, \dots, b_N)$, et satisfont l'équation

$$\sum_{j=1}^N b_j \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_j} \Big|_p = 0,$$

c'est-à-dire, sous forme matricielle,

$$A \cdot b := \left(\frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_N} \right) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} = 0,$$

avec l'application linéaire $A : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ sur laquelle nous appliquons le théorème du rang :

$$\dim \mathbb{C}^N = \dim \ker A + \dim \operatorname{Im} A, \quad \text{donc} \quad N = \dim V_p + \operatorname{rank} A,$$

avec $\operatorname{rank} A = 1$ évidemment.

1.1.4 Sous-variétés CR et champs vectoriels CR**Définition 1.1.22.**

Une sous-variété réelle⁴ $M \subset \mathbb{C}^N$ est une *sous-variété CR* si $\dim_{\mathbb{C}} V_p$ est constante par rapport à $p \in M$, cette constante étant appelée la *CR-dimension de M*. Le fibré complexe $V \subset \mathbb{C}TM$ est appelé le *fibré CR de M* et le fibré réel $T^c M \subset TM$ est le *fibré complexe de M*.

Remarque 1.1.23.

Dans ce travail, ce sont les hypersurfaces qui nous intéressent. Toute hypersurface est une sous-variété CR. En effet, nous avons vu que $\dim_{\mathbb{C}} M = N-1$, évidemment constante. La définition précédente reste importante pour généraliser le cas d'une hypersurface à

4. Nous rappelons qu'une sous-variété réelle est définie comme une hypersurface (cf. définition 1.1.5, p.3), mais avec, au lieu de ρ , une application $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_d)$ avec $d\rho_1, \dots, d\rho_d$ linéairement indépendants. Nous notons que d est appelé la codimension et elle vaut un pour une hypersurface. Cf. [2], p.6.

une sous-variété réelle M de dimension plus petite. Dans ce cas⁵, effectivement, $\dim_{\mathbb{C}} V_p$ n'est pas forcément constante par rapport à $p \in M$.

Rappel 1.1.24.

Pour une fonction réelle f définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}^N$,

$$\begin{aligned} df(p) &= \partial f(p) + \bar{\partial} f(p) = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial z_j}(p, \bar{p}) dz_j + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(p, \bar{p}) d\bar{z}_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) - i \frac{\partial f}{\partial y_j}(p) \right) (dx_j + idy_j) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) + i \frac{\partial f}{\partial y_j}(p) \right) (dx_j - idy_j) \right) \\ &= \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j}(p) dy_j \right). \end{aligned}$$

Définition 1.1.25.

Soit un ouvert $U \subset \mathbb{C}^N$. Alors un champ vectoriel complexe C^∞ sur U est une application continue

$$\begin{aligned} X : U &\rightarrow \mathbb{C}T_p\mathbb{C}^N \\ p &\mapsto X_p. \end{aligned}$$

Nous écrivons donc, avec des fonctions complexes continues a_k, b_k définies sur U ,

$$X = \sum_{k=1}^N \left(a_k(z, \bar{z}) \frac{\partial}{\partial z_k} + b_k(z, \bar{z}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right).$$

Définition 1.1.26.

De manière similaire, pour $M \subset \mathbb{C}^N$ une hypersurface, un champ vectoriel sur M est une application continue C^∞

$$\begin{aligned} X : M &\rightarrow \mathbb{C}T_pM \\ p &\mapsto X_p, \end{aligned}$$

et nous écrivons

$$X = \sum_{k=1}^N \left(a_k(p) \frac{\partial}{\partial z_k} + b_k(p) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right),$$

où a_k et b_k sont des fonctions complexes continues définies sur M qui satisfont, pour

5. Cf. [2], p.9, définition 1.3.1 et exemple.

toute fonction localement définissante ρ ,

$$\sum_{j=1}^N \left(a_k(p) \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(p) + b_k(p) \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_j}(p) \right) = 0.$$

Remarques 1.1.27.

- a) Un champ vectoriel X sur M est une section continue de M sur le fibré $\mathbb{C}TM$: $X \in \Gamma(M, \mathbb{C}TM)$.
- b) Pour $C^k(M)$, l'ensemble des fonctions complexes k -fois continument différentiables sur M et pour un champ X sur M ,

$$\begin{aligned} X : C^k(M) &\rightarrow C^{k-1}(M) \\ f &\mapsto Xf. \end{aligned}$$

- c) Nous nous intéresserons⁶ à de tels champs vectoriels, avec des coefficients holomorphes : les automorphismes infinitésimaux réels analytiques CR.

Définition 1.1.28.

Soit M une sous-variété CR et V son fibré CR. Un champ vectoriel L sur M est un *champ vectoriel CR sur M* . si, pour tout $p \in M$, $L_p \in V_p$. Nous pouvons donc noter

$$L = \sum_{j=1}^N c_j(p) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j},$$

où les c_j sont des fonctions continues définies sur M avec

$$\sum_{j=1}^N c_j(p) \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_j}(p) = 0,$$

pour une fonction localement définissante ρ .

Remarques 1.1.29.

- a) Un champ vectoriel CR L peut être vu comme une section continue sur M du fibré $V : L \in \Gamma(M, V)$.

6. Cf. définition 2.1.4, p.27.

b) Soit h une fonction holomorphe définie sur un voisinage ouvert d'une sous-variété CR M et sa restriction à M , $f := h|_M$. Alors pour tout champ vectoriel CR L sur M , $Lf \equiv 0$.

En effet, h étant holomorphe, $\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = 0$ et donc toute combinaison linéaire des $\frac{\partial h}{\partial \bar{z}_j} = 0$. Ainsi, chaque combinaison linéaire des $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$ tangente à M annule f .

Définition 1.1.30.

Soit M une sous-variété CR de CR-dimension n , avec $p_0 \in M$. Un ensemble de n champs vectoriels CR L_1, \dots, L_n est une *base locale du champ vectoriel CR sur M près de p_0* si chaque L_j est défini sur un voisinage U de p_0 et en tout point $p \in M$, les L_j sont linéairement indépendants.

Remarque 1.1.31.

Pour chaque base locale L_1, \dots, L_n , tout champ vectoriel CR L s'écrit de manière unique, dans un voisinage de p_0 , comme

$$L = \sum_{j=1}^n c_j(p)L_j$$

où les c_j sont des fonctions continues de p définies près de $p_0 \in M$.

1.1.5 Hypersurface de type fini

Définition 1.1.32.

Soient X et Y des champs vectoriels complexes définis sur une variété M , i.e. $X, Y \in \Gamma(M, \mathbb{C}TM)$. Nous dénotons par $[X, Y]$ le *commutateur* de X et Y , défini par

$$[X, Y]f(p) := X(Yf)(p) - Y(Xf)(p),$$

pour toute fonction continue f définie sur M . Ce commutateur est également un champ vectoriel complexe. Pour un ensemble de champs vectoriels X_1, \dots, X_k , un *commutateur itéré* est, pour des indices $1 \leq i_r \leq k$,

$$\left[X_{i_1}, \left[X_{i_2}, \dots, \left[X_{i_{j-1}}, X_{i_j} \right] \dots \right] \right].$$

Un tel commutateur sera dit de longueur j , et $[X, Y]$ de longueur 2.

Remarque 1.1.33.

Si X et Y sont des champs vectoriels réels, i.e. $X, Y \in \Gamma(M, TM)$, alors $[X, Y]$ est également un champ vectoriel réel.

Rappel 1.1.34.

Rappelons que pour une sous-variété CR $M \subset \mathbb{C}^N$, $T^c M \subset TM$ et, pour tout $p \in M$,

$$\dim_{\mathbb{R}} T_p^c M = 2 \text{ CR dim } M \leq \dim_{\mathbb{R}} M.$$

Définition 1.1.35.

Soit $M \subset \mathbb{C}^N$ une sous-variété CR et $p_0 \in M$. M est dit *de type fini* (au sens de Kohn et Bloom-Graham) au point p_0 s'il existe $X_1, \dots, X_k \in \Gamma(M, T^c M)$ des champs vectoriels continus tels que X_1, \dots, X_k et leurs commutateurs de toutes les longueurs engendrent l'espace tangent de M en p_0 , $T_{p_0} M$.

Remarques 1.1.36.

- a) Une sous-variété CR, M , est de type fini en p_0 si et seulement s'il existe L_1, \dots, L_j des champs vectoriels CR sur M tels que $L_1, \dots, L_j, \overline{L_1}, \dots, \overline{L_j}$ et leurs commutateurs de toutes les longueurs engendrent l'espace tangent complexifié de M en p_0 , $\mathbb{C}T_{p_0} M$.
En effet, comme $X_j|_p \in T_p^c M = \text{Re } V_p$, il existe un $L_j \in V_p$ tel que $X_j|_p = \text{Re } L_j|_p \in T_p^c M$. Or, les $X_j|_p = \text{Re } L_j|_p \in T_p^c M$ ainsi que leurs commutateurs engendrent $T_p M$. Ainsi ⁷, les $L_j|_p \in V_p$ et les $\overline{L_k}|_p \in \overline{V_p}$ sont dans $\mathbb{C}T_p^c M = V_p \oplus \overline{V_p}$ et engendrent, avec leurs commutateurs, $\mathbb{C}T_p M$.
- b) En plus de M , une sous-variété CR et $p_0 \in M$, considérons ⁸ L_1, \dots, L_n , une base locale des champs vectoriels CR dans un voisinage de p_0 .
Alors M est de type fini en $p_0 \Leftrightarrow$ les champs vectoriels $L_1, \dots, L_n, \overline{L_1}, \dots, \overline{L_n}$ et leurs commutateurs de toutes les longueurs engendrent $\mathbb{C}TM$, en p_0 , ce qui suit clairement de la précédente remarque.

Cas particulier 1.1.37.

Si M est une hypersurface dans \mathbb{C}^{n+1} , les $L_1, \dots, L_n, \overline{L_1}, \dots, \overline{L_n}$ engendrent un espace de dimension $2n$, ($\mathbb{C}T_{p_0}^c M = V_{p_0} \oplus \overline{V_{p_0}}$). Comme M est de dimension $2n+1$, nous avons donc que M est de type fini en $p_0 \Leftrightarrow$ les commutateurs de $L_1, \dots, L_n, \overline{L_1}, \dots, \overline{L_n}$ engendrent une nouvelle direction, n'étant pas dans $\mathbb{C}T_{p_0}^c M$, appelée la *direction manquante*.

7. Cf. [18], p.179, pour une autre approche.

8. Cf. définition 1.1.30, p.14.

Définition 1.1.38.

Soient $M \subset \mathbb{C}^{n+1}$ une hypersurface de type fini en p_0 et L_1, \dots, L_n une base locale des champs vectoriels CR dans un voisinage de p_0 . La longueur minimale d'un commutateur des $L_1, \dots, L_n, \overline{L_1}, \dots, \overline{L_n}$ qui, en p_0 , n'est pas dans $\mathbb{C}T_{p_0}^c M$, est le *type de M en p_0* .

Remarque 1.1.39.

Le type d'une hypersurface est indépendant du choix de la base locale des champs vectoriels CR et est donc un invariant par rapport à un changement holomorphe de coordonnées. Cela est clairement visible en effectuant des calculs de commutateurs, chaque $\frac{\partial}{\partial z_k}$ apparaissant une fois.

Exemple 1.1.40.

Soit $M = \{z \in \mathbb{C}^N \mid \text{Im } z_N = 0\}$. Alors $T^c M$ est engendré, en tout point, par

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{N-1}}, \frac{\partial}{\partial y_{N-1}}.$$

Donc $\Gamma(M, T^c M)$ est fermé sous l'opération du commutateur. Il n'existe pas de point de type fini dans M , car la direction $\frac{\partial}{\partial x_N}$ est manquante en tout point.

Exemple 1.1.41.

Soit l'hypersurface de Lewy $M = Lew = \{z \in \mathbb{C}^N \mid \text{Im } z_N = \sum_{j=1}^{N-1} |z_j|^2\}$ qui est holomorphiquement bijectif à $S_N \setminus \{0, \dots, 0, 1\}$. Comme

$$T_p Lew = \left\{ \sum_{j=1}^N \left(a_j \frac{\partial}{\partial z_j} + b_j \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} \right) \Big|_p \mid \sum_{j=1}^{N-1} (a_j \overline{z_j} + b_j z_j) - \frac{1}{2i} a_N + \frac{1}{2i} b_N = 0 \right\}$$

est de dimension impaire $2N - 1$, $T_p Lew \neq T_p^c Lew$. Plus précisément,

$$T_p^c Lew = V_p \oplus \overline{V_p} = \left\{ \sum_{j=1}^N \left(a_j \frac{\partial}{\partial z_j} + b_j \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} \right) \Big|_p \mid a_N = b_N = 0 \right\} \subset T_p Lew,$$

étant de dimension $2N - 2$.

Concernant les champs vectoriels CR, qui sont de la forme $L = \sum_{j=1}^N c_j(\cdot) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$ avec la condition $\sum_{j=1}^{N-1} c_j(\cdot) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \Big|_p - \frac{i}{2} c_N(p) = 0$, une base CR est formée des

$$L_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - 2iz_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_N},$$

où $1 \leq j \leq N - 1$. De même, toujours pour $1 \leq j \leq N - 1$, les $\bar{L}_j = \frac{\partial}{\partial z_j} + 2i\bar{z}_j \frac{\partial}{\partial z_N}$ forment une base de $\Gamma(M, \bar{V})$. Ainsi, les L_j et les \bar{L}_j forment une base de $\Gamma(M, T^c M)$. Nous pouvons alors calculer la direction manquante

$$[L_1, \bar{L}_1] = 2i \left(\frac{\partial}{\partial z_N} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_N} \right) = 2i \frac{\partial}{\partial x_N},$$

qui, effectivement, ne peut être engendrée par les L_j et les \bar{L}_j et qui remplit le critère $[L_1, \bar{L}_1] \Big|_{\rho(\cdot)} = 0$. Cela étant vrai pour tout $p \in Lew$, l'hypersurface de Lewy est de type 2 en tout point.

En revenant aux espaces vectoriels, nous pouvons considérer les bases, au point $p \in Lew$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{N-1}}, \frac{\partial}{\partial y_{N-1}} & \text{ de } T_p^c Lew, \text{ et} \\ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{N-1}}, \frac{\partial}{\partial y_{N-1}}, \frac{\partial}{\partial x_N} & \text{ de } T_p Lew, \end{aligned}$$

avec la direction manquante en plus, les deux espaces vectoriels étant respectivement de dimensions $2N - 2$ et $2N - 1$.

Exemple 1.1.42.

La sous-variété $M = \{z \in \mathbb{C}^3 \mid \text{Im } z_2 = |z_1|^2, \text{Im } z_3 = |z_1|^4\}$ est de type fini en tout point. En effet, nous pouvons calculer que deux directions manquantes sont obtenues par des commutateurs de longueur 2 et 4.

Remarques 1.1.43.

- Pour une hypersurface, au lieu de N , nous considérons $n = N - 1$ et z_1, \dots, z_n, w . Selon un réarrangement approprié de la base, la notation usuelle considère et note $\frac{\partial}{\partial \text{Re } w}$ comme la direction manquante.
- Les exemples ci-avant proposent des sous-variétés décrites à l'aide de polynômes. Nous verrons⁹ que les hypersurfaces polynomiales homogènes, dite modèle, sans

9. Cf. définition 2.2.1, p.40.

termes pluriharmoniques, nous intéresserons. Dans ce cas, si nous considérons un polynôme \mathcal{P} de degré m , alors l'hypersurface est de type fini avec m le type. En effet, si nous considérons une hypersurface M polynomiale et homogène de degré m dans \mathbb{C}^{n+1} , et à la lumière de l'exemple de l'hypersurface de Lewy, nous observons qu'un commutateur de longueur m sera nécessaire pour supprimer les n premières variables sur l'hypersurface. Un choix judicieux des champs vectoriels CR de base engendrera la direction manquante.

- c) Nous pouvons noter que $[V, \bar{V}] \subset V$, c'est-à-dire que le commutateur de deux champs vectoriels CR est un champ CR. En effet, nous pouvons calculer directement d'une part que le commutateur de deux champs complexes continus et tangents à M est tangent à M , et que, d'autre part, le commutateur de champs antiholomorphes est antiholomorphe.

1.2 Problématique

1.2.1 Point historique

Le but est de décrire les automorphismes, $h \in \text{Aut}(M, p)$, de sous-variétés M de \mathbb{C}^N , et en particulier d'hypersurfaces de \mathbb{C}^{n+1} .

Un automorphisme est un biholomorphisme allant de la sous-variété M sur elle-même et fixant p . Cette notion a été proposée par Poincaré¹⁰, dans le cadre de la boule unité de \mathbb{C}^2 . Plusieurs résultats existent déjà, notamment lorsque M est Levi non dégénérée¹¹. Poincaré, E. Cartan¹², Tanaka¹³, Chern et Moser¹⁴ ou encore Vitushkin¹⁵ ont notamment étudié ce cas pour lequel les symétries¹⁶ sont très rares. Notons que le cas des hyperquadriques aura été le point de départ de cette démarche¹⁷.

10. Cf. [66].

11. Cf. définition 2.1.22, p.36, pour la définition.

12. Cf. [19].

13. Cf. [72] ou [73].

14. Cf. [25].

15. Cf. [75].

16. Nous entendons par symétrie un champ vectoriel CR ou plus précisément un automorphisme infinitésimal réel analytique CR, cf. plus loin.

17. Cf. [4], [38], [60], [74], [76] ou [79].

Une question est donc de savoir s'il est possible de caractériser les automorphismes d'une variété avec un nombre fini de dérivées partielles. En géométrie différentielle riemannienne, nous savons que toute isométrie est déterminée uniquement par ses dérivées d'ordre au plus un (en un point fixe). En analyse complexe à plusieurs variables, des résultats similaires sont proposés par H. Cartan avec ses théorèmes d'unicités¹⁸ : entre autres, tout automorphisme d'un domaine borné de \mathbb{C}^N est déterminé par ses dérivées partielles d'ordre au plus un (en un point fixe). Des résultats similaires existent dans le cadre de sous-variétés Levi non dégénérées¹⁹ : les automorphismes sont uniquement déterminés par leurs dérivées partielles d'ordre deux au plus.

Dans ce cas, nous prenons donc une variété dans $M \subset \mathbb{C}^N$ sur lesquelles les automorphismes vont nous intéresser, $h \in \text{Aut}(M, p)$. Le groupe de stabilité de M est $\text{Aut}(M, p)$ et il s'agit donc de l'ensemble des automorphismes ou biholomorphismes fixant un point. D'ailleurs, $\text{Aut}(M, p)$ est un invariant fondamental d'une variété. L'équation définissant la variété, dans laquelle intervient un polynôme \mathcal{P} , après transformation par l'automorphisme $h \in \text{Aut}(M, p)$ et à l'aide du développement de Taylor, nous amènera à une caractérisation technique sous forme de champ vectoriel : l'opérateur de Chern-Moser. Cet opérateur a un noyau qui est donc un invariant CR de la variété, sans doute le plus important. En effet, l'opérateur de Chern-Moser est un puissant outil algébrique pour comprendre la géométrie CR locale de variétés Levi non dégénérées.

Nous nous intéressons au cas Levi dégénéré. Des résultats similaires sont impossibles²⁰ pour une sous-variété M de \mathbb{C}^N . Bien que la question de généraliser cet outil au cas Levi dégénéré ait longtemps été ouverte²¹, ce cas a été approfondi par Kohn²² et il a conduit à des avancées notables en analyse comme en géométrie²³.

L'extension de cette théorie est donc possible dans le cadre naturel du cas Levi dégénéré, mais les adaptations sont les suivantes : il n'est plus possible de décrire concrètement $\text{Aut}(M_g)$ pour une variété générale M_g . Nous pouvons toutefois stipuler le nombre de dérivées partielles nécessaires pour déterminer de manière unique $\text{Aut}(M_g, p)$. En

18. Cf. [68], pp.23-24, théorèmes 2.1.1 et 2.1.2. Cf. [20].

19. Cf. [19], [72] ou [25].

20. L'hypersurface « plate » de Levi, dans \mathbb{C}^2 , décrite par $\text{Im } w = 0$, contient des automorphismes $h(z, w) = (z + f(w), w)$ qui ne sont pas déterminés par ses dérivées partielles d'un quelconque ordre.

21. Cf. [2], [5], [26], [27], [29], [31], [37] ou [76].

22. Cf. [43] ou [44], dans le contexte de la régularité au bord de l'opérateur $\bar{\partial}$.

23. Cf. [2], [29] ou [78].

outre, il est possible de caractériser $\text{Aut}(M, p)$, le groupe de stabilité de la variété modèle : M est associée à M_g dans le sens que son équation définissante reprend les premiers termes du développement de Taylor de celle qui définit M_g . L'opérateur de Chern-Moser nous amène à considérer, au lieu des automorphismes de M_g , l'ensemble des symétries, $\mathfrak{g} = \text{hol}(M, p)$, ou des automorphismes infinitésimaux réels analytiques CR de M .

Nous ajoutons que notre variété est généralement supposée de type fini (dans le sens de Kohn et Bloom-Graham)²⁴. Ce type est un invariant CR, à cause des degrés pondérés, qui sont essentiels pour appliquer la théorie de Chern-Moser.

En résumé, il s'agit d'adapter le contexte de la détermination de dérivées partielles (les « jets », avec les techniques de Chern-Moser) à la classe des variétés de type fini. Cela peut être considéré comme une étape ayant pour but une approche plus générale, qui permet de comprendre le problème de la détermination des dérivées partielles ainsi que le groupe de stabilité de variétés ou d'hypersurfaces²⁵.

1.2.2 Notre sujet

Dans ce travail, nous nous restreignons à des hypersurfaces réelles de \mathbb{C}^{n+1} . Nous les supposons Levi dégénérées, holomorphiquement non dégénérées²⁶ et de type fini.

Les champs vectoriels, ou symétries, ou plutôt ces automorphismes infinitésimaux analytiques réels CR, sont classables (selon leurs degrés pondérés) et il y en a un nombre fini (des rigides, qui sont intégrables quelques fois au plus²⁷).

L'hypersurface homogène et modèle est décrite par

$$\text{Im } w = \mathcal{P}(z, \bar{z}).$$

24. Cf. définition 1.1.35, p.15, et [17].

25. À propos des dérivées partielles et d'un procédé standard similaire, cf. [33]. Cf. [2], pp.377-378.

26. Sinon la dimension du groupe des symétries est infinie, cf. [71] et remarque 2.1.24, p.36. Cf. section 2.1.3, p.36, pour les définitions.

27. Cf. section 2.1.4, p.37.

Par rapport à ce polynôme \mathcal{P} , nous pouvons supposer qu'il s'exprime comme combinaison de plusieurs polynômes²⁸. Dans \mathbb{C}^3 , le cas

$$\mathcal{P} = P\bar{Q} + Q\bar{P}$$

a déjà été traité²⁹ (toujours pour décrire les automorphismes de l'hypersurface). Il s'agit du problème PQ .

Pour généraliser ce résultat, nous nous plongeons dans \mathbb{C}^4 et étudions l'hypersurface lorsque

$$\mathcal{P} = P\bar{Q} + Q\bar{P} + R\bar{R},$$

que nous appelons problème PQR . Un cas particulier du problème PQR est le cas découplé, avec d'une part P et Q qui dépendent de deux variables et d'autre part R qui dépend de la troisième uniquement (la quatrième variable étant réservée afin de lui ôter une dimension réelle).

1.3 Résultats principaux

Ce travail est organisé comme suit : le premier chapitre pose les bases de l'analyse complexe qui nous intéresse ; le deuxième chapitre donne l'idée principale de travail, ainsi que les outils complets, pour aborder et comprendre la démarche³⁰ ; le troisième chapitre concerne la cas connu du problème PQ avec quelques précisions importantes ; et, le quatrième et dernier chapitre expose les nouveaux résultats à propos du problème PQR .

Les résultats importants et nouveaux de ce travail sont au nombre de six et concernent les problèmes PQ et PQR . Nous les présentons.

Premièrement, un apport considérable a été apporté pour préciser un résultat du problème PQ . Il s'agit du lemme 3.3, p.259 de [49]. La preuve, qui comportait des lacunes, a été largement complétée pour aboutir au résultat suivant.

28. Cf. proposition 2.2.2, p.40, par rapport au nombre de polynômes en fonction de la dimension de l'hypersurface.

29. Cf. [49].

30. Il s'agit d'un condensé des résultats de [55].

Lemme 3.2.13 (p.68)

Soit une hypersurface de type PQ , monomiale, holomorphiquement non dégénérée et dans \mathbb{C}^3 .

Alors toute rotation $X \in \mathfrak{g}_0$ peut être décomposée en une rotation purement diagonale, $X_1 \in \mathfrak{g}_0^{\text{Re}} \oplus \mathfrak{g}_0^{\text{Im}}$, et une rotation sans diagonale qui elle, est nilpotente, $X_2 \in \mathfrak{g}_0^{\text{Nil.}}$:

$$X = X_1 + X_2.$$

Deuxièmement, ce dernier résultat a été généralisé pour le modèle PQR , ce qui a été une tâche considérable et totalement nouvelle.

Théorème 4.3.1 (p.111)

Soit une hypersurface de type PQR , monomiale, holomorphiquement non dégénérée et dans \mathbb{C}^4 .

Alors toute rotation $X \in \mathfrak{g}_0$ peut être décomposée en une rotation purement diagonale, $D = D_{\text{Re}} + D_{\text{Im}} \in \mathfrak{g}_0^{\text{Re}} \oplus \mathfrak{g}_0^{\text{Im}}$, et en au plus deux rotations nilpotentes, $N_1 + N_2 \in \mathfrak{g}_0^{\text{Nil.}}$:

$$X = D + N = D_{\text{Re}} + D_{\text{Im}} + N_1 + N_2.$$

De plus, dans ce cas monomial,

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0^{\text{Nil.}} \in \{0; 1; 2; 3\}.$$

Troisièmement, nous pouvons citer un résultat technique qui, dans ce travail, s'avère être détaillé et présenté de manière complète pour la première fois : un critère pour vérifier le fait qu'une hypersurface polynomiale soit holomorphiquement non dégénérée.

Lemme 4.1.8 (p.90)

Soit M une hypersurface monomiale de type PQR , dans \mathbb{C}^4 , décrite par

$$\text{Im } w = P\bar{Q} + Q\bar{P} + R\bar{R},$$

où $P = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}$, $Q = z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3}$ et $R = z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3}$. Alors M est holomorphiquement non dégénérée si et seulement si

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Les résultats suivants, dans \mathbb{C}^4 , exposent les possibilités concernant la dimension des automorphismes infinitésimaux analytiques réels CR. Ainsi, ils synthétisent chacun plusieurs résultats en un seul. Le quatrième résultat important et nouveau de ce travail concerne un cas modèle.

Théorème 4.1.6 (p.89)

Si $\ell > 1$ et si M est une hypersurface de \mathbb{C}^4 monomiale, holomorphiquement non dégénérée et donnée par l'équation

$$\text{Im } w = z_1 \bar{z}_2^\ell + z_2^\ell \bar{z}_1 + R\bar{R},$$

avec R un monôme dépendant de z_3 , alors $\dim \mathfrak{g} \in \{6; 11; 12\}$. De plus,

$$\dim \mathfrak{g} = 12 \Leftrightarrow M \text{ est biholomorphe à une hypersurface avec } R = z_2^{\frac{\ell-1}{2}} z_3,$$

$$\dim \mathfrak{g} = 11 \Leftrightarrow M \text{ est dans les autres cas, mais avec } R_{z_1} = 0,$$

$$\dim \mathfrak{g} = 6 \Leftrightarrow M \text{ est dans les autres cas.}$$

Cinquièmement, il y a le cas découplé du problème PQR , c'est-à-dire que P et Q ne dépendent que de z_1 et z_2 et R ne dépend que de z_3 .

Théorème 4.2.11 (p.109)

Soit M une hypersurface de type PQR , découplée, holomorphiquement non dégénérée et dans \mathbb{C}^4 . Alors $\dim \mathfrak{g} \in \{2; 3; 4; 5; 6; 11\}$. Plus précisément,

$$\dim \mathfrak{g} = 11 \Leftrightarrow M \text{ est biholomorphe à } \operatorname{Im} w = z_1 \overline{z_2}^\ell + z_2^\ell \overline{z_1} + z_3^{\frac{1+\ell}{2}} \overline{z_3}^{\frac{1+\ell}{2}}, \ell \text{ impair,}$$

$$\dim \mathfrak{g} = 6 \Leftrightarrow M \text{ est biholomorphe à } \operatorname{Im} w = iz_1^k z_2 \overline{z_1}^{k+1} - iz_1^{k+1} \overline{z_1}^k \overline{z_2} + z_3^{k+1} \overline{z_3}^{k+1},$$

$$\dim \mathfrak{g} = 5 \text{ ou } 6 \Leftrightarrow M \text{ est une autre hypersurface monomiale balancée,}$$

$$\dim \mathfrak{g} = 4 \text{ ou } 5 \Leftrightarrow M \text{ est une autre hypersurface non monomiale balancée,}$$

$$\dim \mathfrak{g} = 2 \text{ ou } 3 \Leftrightarrow M \text{ n'est pas balancée.}$$

Le sixième et dernier résultat important et nouveau est le suivant.

Théorème 4.3.24 (p.158)

Soit M une hypersurface de type PQR , monomiale, holomorphiquement non dégénérée et dans \mathbb{C}^4 . Alors

$$6 \leq \dim \mathfrak{g} \leq 11.$$

Plus précisément,

$$\begin{array}{lll} \dim \mathfrak{g}_{-1} = 1, & \dim \mathfrak{g}_t \in \{0; 1\}, & \dim \mathfrak{g}_n \in \{0; 1\}, \\ \dim \mathfrak{g}_0^{\text{Nil.}} \in \{0; 1; 2; 3\}, & \dim \mathfrak{g}_0^{\text{Re}} = 1, & \dim \mathfrak{g}_0^{\text{Im}} = 2, \\ \dim \mathfrak{g}_t \in \{0; 1; 2; 3\}, & & \dim \mathfrak{g}_1 = 1. \end{array}$$

Remarque 1.3.1.

Plusieurs autres résultats semblent également intéressants, comme l'exemple 4.3.16, p.148, qui répond à une question posée sous forme de problème ouvert dans [54], p.18, section 8.

Chapitre 2

Cas général

Nous présentons dans ce chapitre la démarche générale pour décrire les automorphismes d'une hypersurface³¹. L'outil fondamental est l'opérateur de Chern-Moser, L , dont le noyau fait le lien entre les automorphismes de l'hypersurface M_g et une classe de champs vectoriels sur une hypersurface polynomiale simplifiée, l'hypersurface modèle M . Nous présentons cette méthode dans \mathbb{C}^{n+1} . Des précisions et des exemples viennent ensuite appuyer cette présentation.

2.1 Considérations générales et démarche

2.1.1 L'opérateur de Chern-Moser généralisé

Soit $M_g \subset \mathbb{C}^{n+1}$ une hypersurface réelle continue et $p \in M_g$ un point de type fini $m \geq 2$ dans le sens de Kohn et Bloom-Graham. Ainsi, par le théorème des fonctions implicites, M_g est décrite, près de p , par

$$\operatorname{Im} w = \psi(z, \bar{z}, \operatorname{Re} w), \quad (2.1)$$

où ψ est une fonction réelle dérivable³² (puisque'il s'agit d'hypersurface réelle).

31. Il s'agit de la méthode présentée et employée dans tous les articles traitant cette problématique. Pour \mathbb{C}^{n+1} , cf. [46] ou [50].

32. Cf. [58], p.113.

Remarques 2.1.1.

- a) Dans ce travail, nous utilisons la notation suivante : l'hypersurface générale est notée M_g (souvent M dans la littérature), et, celle sur laquelle les calculs seront établis, comme nous le verrons, c'est-à-dire l'hypersurface polynomiale modèle, est notée M (souvent M_H dans la littérature).
- b) Nous pouvons supposer que $p = 0$. De telles coordonnées existent toujours³³, et ce à un changement de variables biholomorphe près.

Nous considérons des coordonnées locales holomorphes $(z, w) = (z_1, z_2, \dots, z_n, w)$, s'annulant donc en p . Par un résultat de [2]³⁴, M_g peut être décrite par

$$\operatorname{Im} w = \mathcal{P}(z, \bar{z}) + o(\operatorname{Re} w, |z|^m), \quad (2.2)$$

où \mathcal{P} est un polynôme réel, non nul, homogène, de degré m et sans termes harmoniques ($o(\operatorname{Re} w, |z|^m)$ représentant des termes dépendant de $\operatorname{Re} w$ et de z et \bar{z} de degré plus grand que m). Nous notons l'hypersurface *modèle*, M , et nous la définissons par

$$M = \{(z, w) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \operatorname{Im} w = \mathcal{P}(z, \bar{z})\},$$

une telle hypersurface est également appelée *polynomiale*³⁵.

Remarque 2.1.2.

Ce n'est pas une restriction de la généralité que de considérer \mathcal{P} sans terme harmonique. En effet, si nous imaginons un tel \mathcal{P} avec des termes harmoniques du type $cz^m + \bar{c}\bar{z}^m$, la variété s'exprime par

$$\operatorname{Im} w = cz^m + \bar{c}\bar{z}^m + \dots,$$

et il suffit de considérer le changement de variables $w' = w - 2icz^m$, c'est-à-dire $w = w' + 2icz^m$ pour que les termes harmoniques disparaissent. Effectivement, $\operatorname{Im} w = cz^m + \bar{c}\bar{z}^m + \dots$ devient

$$\frac{w' + 2icz^m - (\bar{w}' - 2i\bar{c}\bar{z}^m)}{2i} = cz^m + \bar{c}\bar{z}^m + \dots$$

33. Cf. remarque 1.1.10.a), p.5.

34. Cf. p.99, théorème 4.2.16. Nous notons que toute hypersurface est forcément une variété générique selon la définition de [2], p.9. définition 1.3.4.

35. Cf. définition 2.2.1, p.40, où une distinction est faite.

Remarque 2.1.3.

Nous nous intéressons au *groupe de stabilité* de M_g , $\text{Aut}(M_g, p)$. Nous rappelons qu'il est défini comme l'ensemble des germes³⁶ en p des biholomorphismes de M_g sur elle-même et fixant p .

Définition 2.1.4.

Nous définissons³⁷ $\text{hol}(M, p)$, ou \mathfrak{g} , comme l'ensemble des germes des *automorphismes infinitésimaux réels analytiques CR* de M en p , ces champs vectoriels sont parfois également appelés *symétries*.

Remarque 2.1.5.

Nous présentons un critère³⁸, pour que $X \in \text{hol}(M, p)$. Un champ X appartient à $\text{hol}(M, p)$ si et seulement s'il existe un germe Z en p d'un champ vectoriel holomorphe dans \mathbb{C}^{n+1} tel que $\text{Re } Z$ est tangent à M et $X = \text{Re } Z|_M$. Par abus de notation, nous dirons également que $Z \in \text{hol}(M, p)$.

Soit $h = (z', w') \in \text{Aut}(M_g, 0)$. Ainsi, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} z' &= z'(z, w) = z + f(z, w) \\ w' &= w'(z, w) = w + g(z, w), \end{aligned}$$

ou plus précisément, avec $f = (f_1, \dots, f_n)$,

$$\begin{aligned} z'_j &= z'_j(z, w) = z_j + f_j(z, w), \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, n, \\ w' &= w'(z, w) = w + g(z, w), \end{aligned}$$

où, pour la partie fixant 0, $f_j(0) = g(0) = 0$, et, selon l'équation (2.2), $\frac{\partial^k g}{\partial z^k}(0) = 0$ pour $k = 1, \dots, m$ (donc la somme des puissances de z et \bar{z} commence à $m + 1$ pour g). En effet, cela évite que le polynôme \mathcal{P} ne dépende de w .

Nous assignons maintenant un poids aux variables. La variable $w = u + iv$ (ou $\text{Im } w$ au lieu de v) a un poids de 1. Les autres variables, tangentielles, z_j , ont un poids de $\frac{1}{m}$.

36. Cf. [35], p.152 pour une définition.

37. Cf. [71] ou, [2], p.363, définition 12.4.16. Il ne faut pas confondre $\text{hol}(M, p)$ avec $\text{aut}(M, p)$. En effet, $\text{aut}(M, p)$ est l'ensemble des germes des automorphismes infinitésimaux CR de M en p , cf. [2], p. 363, définition 12.4.16. En particulier, $\text{hol}(M, p) \subset \text{aut}(M, p) \neq \text{Aut}(M, p)$. Également, cf. [2], p.361, définition 12.4.1.

38. Cf. [2], p.364, proposition 12.4.22.

Ainsi, un monôme $c_{\alpha\beta\ell} z^\alpha \bar{z}^\beta u^\ell$ a pour degré pondéré

$$\ell + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j).$$

Comme $\frac{\partial^k g}{\partial z^k}(0) = 0$ pour $k = 1, \dots, m$, g ne peut contenir de termes en z et \bar{z} de degré plus petit que m . Ces termes en z et \bar{z} sont donc de degré pondéré au minimum 1. Finalement, en plus, avec l'ajout de facteur en u , g est de degré pondéré au moins égal à 1. Par contre, les f_j contiennent des termes de degrés pondérés au moins égaux à $\frac{1}{m}$. Nous notons que le polynôme homogène \mathcal{P} de degré m est toujours de degré pondéré 1. En outre, toute dérivée partielle sera de poids négatif (-1 pour ∂w et $-\frac{1}{m}$ pour ∂z_j).

Il est possible de réécrire simplement f et g comme sommes de polynômes de degrés pondérés homogènes f_μ et g_μ , par leur développement de Taylor (qui existe si et seulement si les fonctions sont holomorphes). Nous écrivons donc,

$$f_j = \sum_{\mu \geq \frac{1}{m}} f_{j,\mu} \quad \text{et} \quad g = \sum_{\mu \geq 1} g_\mu.$$

Nous allons maintenant transformer l'équation (2.1) avec l'automorphisme h . Pour des questions de lisibilité, nous effectuons ces calculs pour $n = 1$. Dans ces nouvelles coordonnées,

$$\begin{array}{l}
 \psi(z', \bar{z}', \text{Re } w') = \text{Im } w' \\
 \Leftrightarrow \text{Substitution} \\
 \psi(z + f, \bar{z} + \bar{f}, u + \text{Re } g) = \text{Im } w + \text{Im } g \\
 \Leftrightarrow \text{Taylor et 2.1} \\
 \psi(z, \bar{z}, u) + \frac{\partial \psi}{\partial z} f + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} \bar{f} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \text{Re } g + \dots = \psi(z, \bar{z}, u) + \text{Im } g \\
 \Leftrightarrow \psi = \mathcal{P} + \dots \\
 \mathcal{P}_{\bar{z}} = \overline{\mathcal{P}_z} \text{ car } \mathcal{P} \text{ est réel} \\
 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \mathcal{P}_z f + \overline{\mathcal{P}_z f} + \dots = \text{Im } g \\
 \Leftrightarrow 2 \text{Re } \mathcal{P}_z(z, \bar{z}) f(z, w) + \dots = \text{Im } g(z, w) \\
 \Leftrightarrow w = u + i(\mathcal{P} + \dots) \\
 2 \text{Re } \mathcal{P}_z(z, \bar{z}) f(z, u + i\mathcal{P}(z, \bar{z})) + \dots = \text{Im } g(z, u + i\mathcal{P}(z, \bar{z})) \\
 \Leftrightarrow \text{Par degr. pond. regroupés} \\
 2 \text{Re } \mathcal{P}_z(z, \bar{z}) f_{\mu-1+\frac{1}{m}}(z, u + i\mathcal{P}(z, \bar{z})) + \dots = \text{Im } g_\mu(z, u + i\mathcal{P}(z, \bar{z})),
 \end{array}$$

où la dernière équation est vraie pour tout $\mu \geq 1$, (le tout étant de degré pondéré μ car \mathcal{P}_z est de degré pondéré $1 - \frac{1}{m}$). Pour n quelconque, les calculs sont identiques et nous

obtenons,

$$\begin{aligned}
& 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \mathcal{P}_{z_j}(z, \bar{z}) f_j(z, u + i\mathcal{P}(z, \bar{z})) + \dots = \operatorname{Im} g(z, u + i\mathcal{P}(z, \bar{z})) \\
\Leftrightarrow & 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \mathcal{P}_{z_j}(z, \bar{z}) f_{j, \mu-1+\frac{1}{m}}(z, u + i\mathcal{P}(z, \bar{z})) + \dots = \operatorname{Im} g_\mu(z, u + i\mathcal{P}(z, \bar{z})).
\end{aligned}$$

Définition 2.1.6.

Soient F_j , pour $j = 1, \dots, n$, et G des fonctions holomorphes. Nous notons

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}.$$

L'opérateur de Chern-Moser généralisé, noté par L , est défini par

$$L(F, G) := \operatorname{Re} \left(iG(z, u + i\mathcal{P}(z, \bar{z})) + 2 \sum_{j=1}^n \mathcal{P}_{z_j} F_j(z, u + i\mathcal{P}(z, \bar{z})) \right),$$

où nous notons que justement, par rapport aux équations ci-avant, $\operatorname{Re}(iG) = -\operatorname{Im}(G)$.

Lemme 2.1.7.

Soit L l'opérateur de Chern-Moser généralisé et (F_1, \dots, F_n, G) des fonctions holomorphes. Alors

$$(F, G) \in \ker L \Leftrightarrow Y = \sum_{j=1}^n F_j(z, w) \frac{\partial}{\partial z_j} + G(z, w) \frac{\partial}{\partial w} \in \operatorname{hol}(M, p).$$

Démonstration. Il suffit de contempler l'équation

$$\begin{aligned}
& 2 \operatorname{Re} Y(\mathcal{P} - \operatorname{Im} w)|_M \\
&= \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^n F_j(z, u + i\mathcal{P}(z, \bar{z})) \frac{\partial}{\partial z_j} + G(z, u + i\mathcal{P}(z, \bar{z})) \frac{\partial}{\partial w} \right) (2\mathcal{P} - 2 \operatorname{Im} w) \\
&= \operatorname{Re} \left(2 \sum_{j=1}^n \mathcal{P}_{z_j} F_j(z, u + i\mathcal{P}(z, \bar{z})) + iG(z, u + i\mathcal{P}(z, \bar{z})) \right) \\
&= L(F, G),
\end{aligned}$$

puisque lorsque nulle, elle vérifie le lemme. \square

Proposition 2.1.8.

Soient $h = (z + f, w + g) \in \operatorname{Aut}(M_g, p)$ comme ci-dessus,

$$(f, g) = \sum_{\mu \geq 1} (f, g)_\mu, \quad \text{où } (f, g)_\mu = (f_{1, \mu-1+\frac{1}{m}} \cdots, f_{n, \mu-1+\frac{1}{m}}, g_\mu),$$

et μ_0 minimal tel que $(f, g)_{\mu_0} \neq 0$. Alors,

$$Y = \sum_{j=1}^n f_{j, \mu_0-1+\frac{1}{m}} \frac{\partial}{\partial z_j} + g_{\mu_0} \frac{\partial}{\partial w} \in \operatorname{hol}(M, p).$$

Définition 2.1.9.

Le champ vectoriel

$$Y = \sum_{j=1}^n F_j(z, w) \frac{\partial}{\partial z_j} + G(z, w) \frac{\partial}{\partial w},$$

a un poids homogène de $\mu \geq -1$ si, par définition, les F_j sont des polynômes de degré pondéré homogène $\mu + \frac{1}{m}$ et G est un polynôme de degré pondéré homogène $\mu + 1$.

Remarque 2.1.10.

Ces poids introduisent une décomposition naturelle de $\operatorname{hol}(M, p)$,

$$\operatorname{hol}(M, p) = \mathfrak{g} = \bigoplus_{\mu} \mathfrak{g}_\mu,$$

où \mathfrak{g}_μ est l'ensemble des champs vectoriels de \mathfrak{g} de poids μ . En effet, soit un champ vectoriel $X \in \mathfrak{g}$. Alors chacune de ces composantes $X_\mu \in \mathfrak{g}_\mu$ est également dans \mathfrak{g} . En

effet, comme $\mathcal{P} - \text{Im } w$ est toujours de poids homogène, avec $X \in \mathfrak{g}$,

$$0 = \text{Re } X(\mathcal{P} - \text{Im } w) = \text{Re } \sum_{\mu} X_{\mu}(\mathcal{P} - \text{Im } w) = \sum_{\mu} \underbrace{\text{Re } X_{\mu}(\mathcal{P} - \text{Im } w)}_{\text{tous de degrés différents}},$$

donc $X_{\mu} \in \mathfrak{g}$.

Théorème 2.1.11. ([46], p.6, théorème 3.10)

Soient une hypersurface continue M_g de type fini et son hypersurface modèle M . Supposons qu'il existe un μ_0 tel que

$$\text{hol}(M, p) = \mathfrak{g} = \bigoplus_{-1 \leq \mu \leq \mu_0} \mathfrak{g}_{\mu}.$$

Alors tout $h = (z + f, w + g) \in \text{Aut}(M_g, p)$ construit comme ci-dessus, avec $(f, g)_{\mu} = 0$ pour tout $\mu < \mu_0$, est l'application identité.

Remarques 2.1.12.

a) Ce résultat³⁹ établit le fait de passer de $\text{hol}(M, p)$ à $\text{Aut}(M_g, p)$. Pour la preuve, nous considérons deux automorphismes différents qui ne dépendent, dans leur développement de Taylor, que de l'identité et de dérivées partielles. Une simple comparaison en formant la composition d'une application avec la réciproque de l'autre donne l'identité.

Le fait de passer de $\text{Aut}(M_g, p)$ à $\text{hol}(M, p)$ se voit dans la construction ci-dessus, notamment par la proposition 2.1.8, p.30.

b) Plus précisément, si M est décrite à l'aide d'un polynôme \mathcal{P} homogène, sans terme pluriharmonique et de degré m , alors $\text{Aut}(M_g)$ est uniquement déterminée par ces dérivées partielles d'ordre plus petit ou égal à m .

c) Pour décrire ou classifier \mathfrak{g} , nous verrons qu'il suffit d'étudier les champs vectoriels dits rigides, puis de les « intégrer »⁴⁰ pour obtenir la totalité de \mathfrak{g} . La remarque précédente nous invite à traiter les éléments de la décomposition de \mathfrak{g} et nous verrons qu'il y en a un nombre fini. Comme à chaque automorphisme infinitésimal CR correspond un automorphisme de l'hypersurface (et vice versa), nous décrirons $\text{Aut}(M_g, p)$ de cette façon⁴¹.

39. Cf. [46], p.6, théorème 3.10.

40. Cf. définition 2.1.19, p.35.

41. Cf. [46], p.6, théorème 3.10 pour une conséquence directe sur ces automorphismes.

2.1.2 Champs vectoriels rigides et intégrations

Définition 2.1.13.

Un champ vectoriel

$$X = \sum_{j=1}^n f_j(z, w) \frac{\partial}{\partial z_j} + g(z, w) \frac{\partial}{\partial w} \in \mathfrak{g}$$

est dit *rigide* si les f_j et g ne dépendent pas de w . Forcément, s'il est de poids homogène et non nul, un tel champ est de poids $\mu \in [-1; 1[$. Le résultat suivant nous le montre.

Théorème 2.1.14. ([55], p.334, théorème 3.3)

Soient M une hypersurface polynomiale holomorphiquement non dégénérée et $X \in \text{hol}(M, p)$ un champ non nul et rigide. Alors toutes les composantes de poids homogènes ont un poids strictement plus petit qu'un.

Exemple 2.1.15.

Le champ vectoriel rigide contenant une seule dérivée partielle en w , de poids -1 est

$$W = a \frac{\partial}{\partial w} \in \mathfrak{g}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

En effet, toujours pour $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} W(\mathcal{P} - \operatorname{Im} w) &= -2 \operatorname{Re} W(\operatorname{Im} w) \\ &= -2 \operatorname{Re} a \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{w - \bar{w}}{2i} \right) \\ &= -\operatorname{Re} \frac{a}{i} = \operatorname{Re} ai = 0. \end{aligned}$$

Exemple 2.1.16.

Il existe toujours un champ non rigide dans \mathfrak{g} , le champ vectoriel d'Euler,

$$E = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + w \frac{\partial}{\partial w}.$$

Nous pouvons vérifier que $E \in \mathfrak{g}$ de la manière suivante. Commençons par noter

$$\mathcal{P} = \sum_{k,\ell} (a_{k\ell} z^k \bar{z}^\ell + \overline{a_{k\ell}} z^\ell \bar{z}^k),$$

où nous avons la notation

$$z^k = z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdot \dots \cdot z_n^{k_n},$$

pour k , et de manière similaire pour ℓ et pour les conjugués. Nous spécifions que les k et ℓ parcourent le nombre de monômes présents dans \mathcal{P} . Nous notons que nous écrivons les termes de la somme directement avec leurs conjugués, car \mathcal{P} est réel. Nous calculons donc

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{Re} E(\mathcal{P} - \operatorname{Im} w) &= E(\mathcal{P} - \operatorname{Im} w) + \overline{E(\mathcal{P} - \operatorname{Im} w)} \\
&= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n \sum_{k,\ell} (a_{k\ell} k_j z^k \bar{z}^\ell + \overline{a_{k\ell}} \ell_j z^\ell \bar{z}^k) + \frac{i}{2} w \\
&\quad + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n \sum_{k,\ell} (\overline{a_{k\ell}} k_j z^\ell \bar{z}^k + a_{k\ell} \ell_j z^k \bar{z}^\ell) - \frac{i}{2} \bar{w} \\
&= \frac{1}{m} \sum_{k,\ell} \sum_{j=1}^n (a_{k\ell} (k_j + \ell_j) z^k \bar{z}^\ell + \overline{a_{k\ell}} (k_j + \ell_j) z^\ell \bar{z}^k) + \frac{i}{2} (w - \bar{w}) \\
&= \frac{1}{m} \sum_{k,\ell} \underbrace{\sum_{j=1}^n (k_j + \ell_j)}_{=m} (a_{k\ell} z^k \bar{z}^\ell + \overline{a_{k\ell}} z^\ell \bar{z}^k) + \frac{i}{2} (u + i\mathcal{P} - u + i\mathcal{P}) \\
&= \sum_{k,\ell} (a_{k\ell} z^k \bar{z}^\ell + \overline{a_{k\ell}} z^\ell \bar{z}^k) + \frac{i}{2} 2i\mathcal{P} \\
&= \mathcal{P} - \mathcal{P} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Le prochain résultat est donné à titre informatif.

Théorème 2.1.17. ([46], p.7, théorème 4.6)

Soit une hypersurface polynomiale holomorphiquement non dégénérée. Soit un champ vectoriel non nul et rigide

$$X = \sum_{j=1}^n f_j(z_1, \dots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_j} \in \mathfrak{g},$$

où les f_j sont des fonctions holomorphes (autour de p). Alors les coefficients f_j sont des sommes de monômes de degrés pondérés toujours strictement plus petits que 1.

Lemme 2.1.18.

Pour un champ vectoriel de poids homogène $X \in \mathfrak{g}$, il existe un entier $\ell > 1$ et un champ vectoriel rigide $Y \in \mathfrak{g}$ tels que

$$[[\dots [[X; W]; W]; \dots]; W] = Y,$$

où sont présents ℓ crochets de Lie ou commutateurs⁴².

Démonstration. Soit $X = \sum_{j=1}^n f_j(z, w) \frac{\partial}{\partial z_j} + g(z, w) \frac{\partial}{\partial w} \in \mathfrak{g}$. Nous calculons tout d'abord, pour toute fonction continue f définie sur M_g ,

$$\begin{aligned} [X; W](f) &= X(W(f)) - W(X(f)) = X \frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial w} X(f) \\ &= \sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial}{\partial z_j} \frac{\partial f}{\partial w} + g \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} - \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial w} \frac{\partial f}{\partial z_j} + f_j \frac{\partial}{\partial z_j} \frac{\partial f}{\partial w} \right) + \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial f}{\partial w} + g \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} \right) \\ &= - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial w} \frac{\partial f}{\partial z_j} - \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial f}{\partial w}, \end{aligned}$$

donc par itération,

$$[[\dots [[X; W]; W]; \dots]; W](f) = (-1)^\ell \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^\ell f_j}{\partial w^\ell} \frac{\partial f}{\partial z_j} + \frac{\partial^\ell g}{\partial w^\ell} \frac{\partial f}{\partial w} \right) =: Y(f),$$

et nous voyons clairement que Y est rigide pour un ℓ suffisamment grand. Il faut encore s'assurer que $Y \in \mathfrak{g}$. Nous calculons⁴³,

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re}[X; W](\mathcal{P} - \operatorname{Im} w) &= 2 \operatorname{Re}[X; W](\mathcal{P} - \operatorname{Im} w) \\ &= 2 \operatorname{Re}(X(W(\mathcal{P} - \operatorname{Im} w)) - W(X(\mathcal{P} - \operatorname{Im} w))) \\ &= 2 \operatorname{Re}(X(W(-\operatorname{Im} w)) - W(X(\mathcal{P}))) \\ &= 0, \end{aligned}$$

car \mathcal{P} ne dépend que des z et $\operatorname{Im} w$ que de w . Ainsi, $[X; W] \in \operatorname{hol}(M, p)$, et par itération, $Y \in \operatorname{hol}(M, p)$. \square

42. Cf. définition 1.1.32, p.14.

43. Nous notons qu'il est même possible de montrer que $2 \operatorname{Re}[X; W] = [2 \operatorname{Re} X; 2 \operatorname{Re} W]$.

Définition 2.1.19.

Un champ $X \in \mathfrak{g}$ est une ℓ -intégration d'un champ rigide $Y \in \mathfrak{g}$ si le crochet de Lie est appliqué ℓ fois dans le lemme précédent.

Exemple 2.1.20.

Le champ W possède toujours une 1-intégration qui est E . En effet, une 1-intégration de $W = a \frac{\partial}{\partial w}$, $a \in \mathbb{R}$, est de la forme

$$W^1 = \sum_{j=1}^n \phi_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j} + (aw + \phi(z)) \frac{\partial}{\partial w},$$

qui satisfait, pour appartenir à \mathfrak{g} ,

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \operatorname{Re} W^1(\mathcal{P} - \operatorname{Im} w) \\ &= \sum_{j=1}^n \phi_j(z) \mathcal{P}_{z_j} + \frac{i}{2} aw + \frac{i}{2} \phi(z) + \sum_{j=1}^n \overline{\phi_j(z)} \mathcal{P}_{\bar{z}_j} - \frac{i}{2} a \bar{w} - \frac{i}{2} \overline{\phi(z)} \\ &= \sum_{j=1}^n (\phi_j(z) \mathcal{P}_{z_j} + \overline{\phi_j(z)} \mathcal{P}_{\bar{z}_j}) + \frac{i}{2} a (\mu + i\mathcal{P}) - \frac{i}{2} a (\mu - i\mathcal{P}) \\ &= \sum_{j=1}^n (\phi_j(z) \mathcal{P}_{z_j} + \overline{\phi_j(z)} \mathcal{P}_{\bar{z}_j}) - a\mathcal{P}, \end{aligned}$$

où les annulations de la deuxième ligne sont dues au fait que ces termes sont purement holomorphes (et respectivement antiholomorphes), tandis que tous les autres termes sont mixtes. L'annulation de l'équation est possible uniquement si $\phi_j = ac_j z_j$, avec une constante c_j facilement choisie⁴⁴ comme $c_j = \frac{1}{m}$. Nous obtenons

$$W^1 = aE = \frac{a}{m} \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + aw \frac{\partial}{\partial w}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Remarque 2.1.21.

Comme déjà mentionner plus haut, nous constatons qu'il suffit d'étudier les champs rigides, puis de les intégrer autant de fois qu'il le faut pour obtenir absolument tous les éléments de \mathfrak{g} .

44. Cf. exemple 2.1.16, p.32.

2.1.3 Propriétés des hypersurfaces intéressantes

Nous nous intéresserons donc aux hypersurfaces réelles, Levi dégénérées, de types finis et holomorphiquement non dégénérées. En effet, le cas des hypersurfaces Levi non dégénérée a déjà été traité⁴⁵ ; il implique d'ailleurs forcément que l'hypersurface soit holomorphiquement non dégénérée. En outre, une hypersurface holomorphiquement dégénérée est inintéressante dans notre contexte, tandis que le type fini est nécessaire pour notre théorie.

Définition 2.1.22.

Une hypersurface réelle continue M_g de \mathbb{C}^{n+1} donnée autour de 0 par

$$\operatorname{Im} w = \phi(z, \bar{z}, \operatorname{Re} w),$$

avec ϕ une fonction réelle continue telle que $\phi(0) = 0$ et $d\phi(0) = 0$ ⁴⁶, est dite *Levi non dégénérée* si la matrice

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} (0, 0, 0) \right)_{j,k=1,\dots,n}$$

est inversible. Il s'agit d'une définition qui découle d'une réflexion autour d'une base locale CR des champs vectoriels CR⁴⁷ et d'une définition plus générale⁴⁸. Un cas particulier⁴⁹, plus simple, apparaît lorsque le degré du polynôme vaut 2.

Définition 2.1.23.

Une hypersurface réelle analytique⁵⁰ M de \mathbb{C}^{n+1} est *holomorphiquement non dégénérée* s'il n'existe pas de champ vectoriel holomorphe X tangent à M tel que $X|_M \neq 0$. Pour une hypersurface connexe, si elle est holomorphiquement non dégénérée en un point, elle l'est en tout point⁵¹.

Remarque 2.1.24.

Concernant le fait que l'hypersurface soit holomorphiquement dégénérée ou non, comme nous nous intéressons à $\dim \mathfrak{g}$, nous observons que cette dimension ne fait sens que si

45. Notamment par Chern et Moser, cf. [25].

46. Cf. [2], p.10, proposition 1.3.6.

47. Cf. définition 1.1.30, p.14.

48. Cf. [2], pp.40-42, définition 2.2.6, proposition 2.2.10 et application pour les hypersurfaces et p.247.

49. Cf. section 2.2.2, p.43.

50. Cf. [2], p.322, définition 11.3.2. La notation est d'ailleurs abusive : il faudrait plus précisément dire que l'action de X sur la fonction définissante de M se s'annule pas (au lieu de $X|_M \neq 0$).

51. Cf. [2], p.323, théorème 11.3.3, et les hypothèses rentreront dans notre contexte.

l'hypersurface est holomorphiquement non dégénérée. En effet ⁵²,

$$\text{l'hypersurface est holomorphiquement dégénérée} \Leftrightarrow \dim \mathfrak{g} = +\infty.$$

Par exemple, dans \mathbb{C}^3 , l'hypersurface $\text{Im } w = z_1 \bar{z}_1$, holomorphiquement dégénérée, a pour automorphisme infinitésimal CR $X = H(z) \frac{\partial}{\partial z_2}$ quelle que soit la fonction H . Nous voyons ainsi que la dimension de \mathfrak{g} d'une telle hypersurface est infinie.

2.1.4 Description de \mathfrak{g}

Nous rassemblons les résultats généraux, dus à [55], toujours pour une hypersurface réelle, Levi dégénérée, holomorphiquement non dégénérée et de type fini. Nous connaissons la décomposition suivante de l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux CR,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_t \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_c \oplus \mathfrak{g}_n \oplus \mathfrak{g}_1,$$

avec $t = -\mu = -\frac{1}{m} \in]-1; 0[$, et c et $n \in]0; 1[$. Les champs vectoriels appartenant à un \mathfrak{g}_j , avec $j < 0$ sont forcément réguliers (c'est-à-dire avec coefficients constants), et ceux de \mathfrak{g}_0 sont forcément linéaires ⁵³.

Détaillons chaque partie de cette décomposition. Tout d'abord,

$$\mathfrak{g}_{-1} = \{aW \mid a \in \mathbb{R}\}, \quad \text{avec } \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{-1} = 1,$$

est formé uniquement de $W = \frac{\partial}{\partial w}$, et ce, quelle que soit l'hypersurface. Une fois de plus, les poids nous montrent que d'autres champs sont impossibles. Ces éléments ne possèdent pas de 3-intégrations ⁵⁴. Ensuite,

$$\mathfrak{g}_t = \left\{ \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial z_j} + g(z) \frac{\partial}{\partial w} \mid a_j \in \mathbb{C}, g \in \mathbb{C}_{m-1}[z], 2i \sum_{j=1}^n (a_j \mathcal{P}_{z_j} + \bar{a}_j \mathcal{P}_{\bar{z}_j}) = g - \bar{g} \right\},$$

est formé de champs rigides. Ils s'intègrent au plus qu'une fois ⁵⁵. Ensuite,

52. Cf. [82], p.4.

53. Cf. [55], p.336, proposition 3.9.

54. Cf. [55], p.344, théorème 4.7.

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ \sum_{j=1}^n f_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j} + aw \frac{\partial}{\partial w} \mid f_j \in \mathbb{C}_1[z], a \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^n (f_j \mathcal{P}_{z_j} + \bar{f}_j \mathcal{P}_{\bar{z}_j}) = a\mathcal{P} \right\}$$

est composé de l'intégration de W , le champ d'Euler⁵⁶, E , et des rotations, linéaires et rigides, qu'il est possible de décomposer encore en rotations nilpotentes et rotations diagonales (complexes et réelles)⁵⁷. Une rotation n'est pas intégrable⁵⁸. Les rotations amènent à l'algèbre linéaire⁵⁹. Ensuite,

$$\mathfrak{g}_c = \bigoplus_{\tau=1}^{m-2} \mathfrak{g}_m^{\tau} = \bigoplus_{\tau=1}^{m-2} \left\{ \sum_{j=1}^n f_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j} \mid f_j \in \mathbb{C}_{\tau+1}[z], \sum_{j=1}^n (f_j \mathcal{P}_{z_j} + \bar{f}_j \mathcal{P}_{\bar{z}_j}) = 0 \right\}$$

est formé des rotations généralisées, ou rotations exotiques, toujours rigides, c'est-à-dire qu'elles commutent avec W ($[Y; W] = 0$, d'où le c). Une rotation généralisée n'est pas intégrable⁶⁰. Ensuite,

$$\mathfrak{g}_n = \left\{ \sum_{j=1}^n (f_j(z) + a_j w) \frac{\partial}{\partial z_j} + g(z)w \frac{\partial}{\partial w} \mid a_j \in \mathbb{C}, f_j \in \mathbb{C}_m[z], g \in \mathbb{C}_{m-1}[z], \right. \\ \left. \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial z_j} + g(w) \frac{\partial}{\partial w} \in \mathfrak{g}_t, 2 \sum_{j=1}^n (f_j \mathcal{P}_{z_j} + \bar{f}_j \mathcal{P}_{\bar{z}_j} + i\mathcal{P}(a_j \mathcal{P}_{z_j} + \bar{a}_j \mathcal{P}_{\bar{z}_j})) = \mathcal{P}(g + \bar{g}), \right\},$$

avec $n = 1 - \frac{1}{m} = \frac{m-1}{m}$, est formé des intégrations de \mathfrak{g}_t . Non rigides (d'où le n), ces champs ne commutent pas avec W . Enfin,

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ \sum_{j=1}^n f_j(z)w \frac{\partial}{\partial z_j} + aw^2 \frac{\partial}{\partial w} \mid f_j \in \mathbb{C}_1[z], a \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^n f_j \mathcal{P}_{z_j} = a\mathcal{P} \right\}$$

est formé des 2-intégrations de W , qui existe si l'hypersurface est balancée⁶¹, c'est-

55. Cf. [55], p.351, théorème 6.2.

56. Cf. exemple 2.1.20, p.35.

57. Cf. lemmes 3.2.13, p.68 et 4.2.3, p.96, ainsi que théorème 4.3.1, p.111.

58. Cf. [55], p.348, théorème 5.5.

59. Cf. section 2.2.3, p.44.

60. Cf. [55], p.348, théorème 5.5.

à-dire s'il existe un champ complexe reproducteur. Nous formulons le résultat comme suit⁶².

Théorème 2.1.25. ([55], p.323, théorème 1.1)

Soit M une hypersurface de \mathbb{C}^{n+1} , réelle, holomorphiquement non dégénérée et dont les éléments, $(z, w) \in \mathbb{C}^{n+1}$, satisfont

$$\text{Im } w = \mathcal{P},$$

où \mathcal{P} est un polynôme homogène sans termes pluriharmoniques. Alors l'algèbre de Lie \mathfrak{g} des germes des automorphismes infinitésimaux réels analytiques CR admet la décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_t \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_c \oplus \mathfrak{g}_n \oplus \mathfrak{g}_1,$$

avec $t = -\mu = -\frac{1}{m} \in]-1; 0[$, c et $n \in]0; 1[$, et où les composantes possèdent la description explicite suivante :

$$\mathfrak{g}_{-1} = \{aW \mid a \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathfrak{g}_t = \left\{ \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial z_j} + g(z) \frac{\partial}{\partial w} \mid a_j \in \mathbb{C}, g \in \mathbb{C}_{m-1}[z], 2i \sum_{j=1}^n (a_j \mathcal{P}_{z_j} + \bar{a}_j \mathcal{P}_{\bar{z}_j}) = g - \bar{g} \right\},$$

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ \sum_{j=1}^n f_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j} + aw \frac{\partial}{\partial w} \mid f_j \in \mathbb{C}_1[z], a \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^n (f_j \mathcal{P}_{z_j} + \bar{f}_j \mathcal{P}_{\bar{z}_j}) = a\mathcal{P} \right\},$$

$$\mathfrak{g}_c = \bigoplus_{\tau=1}^{m-2} \mathfrak{g}_m^\tau = \bigoplus_{\tau=1}^{m-2} \left\{ \sum_{j=1}^n f_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j} \mid f_j \in \mathbb{C}_{\tau+1}[z], \sum_{j=1}^n (f_j \mathcal{P}_{z_j} + \bar{f}_j \mathcal{P}_{\bar{z}_j}) = 0 \right\},$$

$$\mathfrak{g}_n = \left\{ \sum_{j=1}^n (f_j(z) + a_j w) \frac{\partial}{\partial z_j} + g(z) w \frac{\partial}{\partial w} \mid a_j \in \mathbb{C}, f_j \in \mathbb{C}_m[z], g \in \mathbb{C}_{m-1}[z], \right. \\ \left. \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial z_j} + g(w) \frac{\partial}{\partial w} \in \mathfrak{g}_t, 2 \sum_{j=1}^n (f_j \mathcal{P}_{z_j} + \bar{f}_j \mathcal{P}_{\bar{z}_j} + i\mathcal{P}(a_j \mathcal{P}_{z_j} + \bar{a}_j \mathcal{P}_{\bar{z}_j})) = \mathcal{P}(g + \bar{g}) \right\},$$

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ \sum_{j=1}^n f_j(z) w \frac{\partial}{\partial z_j} + aw^2 \frac{\partial}{\partial w} \mid f_j \in \mathbb{C}_1[z], a \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^n f_j \mathcal{P}_{z_j} = a\mathcal{P} \right\}.$$

61. Cf. définition 3.2.7, p.65.

62. Cf. également [54], p.557, théorème 6.1.

Corollaire 2.1.26.

Soit une hypersurface réelle holomorphiquement non dégénérée. Alors le degré de tout automorphisme infinitésimal réel analytique CR, X , satisfait

$$-1 \leq \deg X \leq 1.$$

Remarque 2.1.27.

La preuve du corollaire est une conséquence directe de [55]. En effet, les champs rigides ne possèdent que des degrés strictement plus petits qu'un⁶³ et ils sont intégrables de manière limitée⁶⁴. Aucune intégration n'a, en particulier, un degré plus grand qu'un.

2.2 Précisions importantes**2.2.1 Nombre de polynômes pour \mathcal{P}**

Nous verrons que le cas où seul \mathcal{P} intervient (comme hypersurface modèle) s'avérera intéressant. En effet, dans \mathbb{C}^3 , le problème PQ sera $\mathcal{P} = P\bar{Q} + Q\bar{P}$ et dans \mathbb{C}^4 , le problème PQR sera $\mathcal{P} = P\bar{Q} + Q\bar{P} + R\bar{R}$, où P, Q et R sont des polynômes holomorphes⁶⁵. Nous nous posons maintenant la question du nombre de ces polynômes holomorphes à choisir dans \mathbb{C}^{n+1} .

Définition 2.2.1.

Une hypersurface est dite *polynomiale* si $\text{Im } w = \mathcal{P}$ avec un \mathcal{P} un polynôme en z et \bar{z} . Si \mathcal{P} est homogène, alors l'hypersurface est dite *modèle*. Notons que \mathcal{P} est toujours réel et que nous pouvons supposer que \mathcal{P} ne contient pas de termes pluriharmoniques, en effectuant un changement de variables local et holomorphe⁶⁶.

Proposition 2.2.2.

Soit une hypersurface polynomiale M de \mathbb{C}^{n+1} que nous supposons holomorphiquement non dégénérée. Nous notons

$$\text{Im } w = \mathcal{P} \left(P^1, P^2, \dots, P^m, \bar{P}^1, \bar{P}^2, \dots, \bar{P}^m \right),$$

63. Cf. [55], p.334, théorème 3.3.

64. Cf. [55], p.337, p.346 et p.349.

65. Dans ces cas, la dépendance linéaire des polynômes sera intéressante, cf. lemme 4.1.8, p.90.

66. Cf. remarque 2.1.2, p.26.

où les P^j , $j = 1, \dots, m$ sont des polynômes holomorphes. Alors

$$n \leq m.$$

Démonstration. Soient m polynômes holomorphes

$$P^1, P^2, \dots, P^m,$$

qui dépendent de $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ et dont dépend \mathcal{P} . Ainsi, et selon la définition ci-dessus, nous pouvons noter :

$$\mathcal{P} = \sum_{j,k=1}^m c_{jk} P^j \overline{P^k},$$

où les $c_{jk} \in \mathbb{C}$ et \mathcal{P} est réel.

Nous allons étudier le ou les champs vectoriels

$$X = \sum_{j=1}^n f_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j}$$

qui satisfont, pour tout $k = 1, \dots, m$,

$$X(P^k) = 0.$$

Il est donc clair que dans ce cas, $X(\mathcal{P}) = 0$ et nous savons également que comme l'hypersurface est holomorphiquement non dégénérée, $X = 0$.

Nous allons prouver l'affirmation par l'absurde, en supposant que $n > m$. Dans ce cas, pour étudier X , nous étudions le système d'équation

$$X(P^k) = 0, \quad k = 1, \dots, m,$$

qui n'est autre que

$$\begin{aligned}
f_1(z)P_{z_1}^1 + f_2(z)P_{z_2}^1 + f_3(z)P_{z_3}^1 + \dots + f_n(z)P_{z_n}^1 &= 0 \\
f_1(z)P_{z_1}^2 + f_2(z)P_{z_2}^2 + f_3(z)P_{z_3}^2 + \dots + f_n(z)P_{z_n}^2 &= 0 \\
&\vdots \\
f_1(z)P_{z_1}^m + f_2(z)P_{z_2}^m + f_3(z)P_{z_3}^m + \dots + f_n(z)P_{z_n}^m &= 0,
\end{aligned}$$

ou sous forme matricielle

$$M_J f = 0,$$

avec M_J la matrice jacobienne des polynômes P^k et f le vecteur inconnu des f_j . Comme par l'absurde, nous avons supposé que $n > m$, en notant r le rang de la matrice M_J ,

$$r \leq m.$$

Or, nous savons⁶⁷ que l'espace des solutions f du système d'équation possède $n - r$ solutions, nous pouvons conclure que

$$\dim_{\mathbb{R}} \left\{ X = \sum_{j=1}^n f_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j} \mid M_J f = 0 \right\} = n - r \stackrel{r \leq m}{\geq} n - m \stackrel{n > m}{>} m - m = 0.$$

Cette dimension étant au moins égale à un, il existe toujours un X non nul pour lequel $X(\mathcal{P}) = 0$, ce qui est une contradiction avec le fait que l'hypersurface est holomorphiquement non dégénérée. \square

2.2.2 Cas particulier, \mathcal{P} de degré 2

Forme hermitienne

Nous savons que le polynôme $\mathcal{P}(z, \bar{z})$ est réel, car l'hypersurface l'est. Supposons que $\mathcal{P}(z, \bar{z})$ soit de degré homogène 2. Ainsi, nous pouvons noter l'hypersurface modèle

$$\text{Im } w = {}^t \bar{z} A z,$$

67. Cf. [34], p.148, Proposition 5.4.

et \mathcal{P} est réel implique que

$$\mathcal{P} = {}^t\bar{z}Az = {}^t({}^t\bar{z}Az) = {}^t_z{}^tA\bar{z} \quad \text{et} \quad \bar{\mathcal{P}} = \overline{{}^t\bar{z}Az} = {}^t_z\bar{A}\bar{z},$$

doivent être égaux. Ainsi $A = {}^t\bar{A}$, qui est donc hermitienne. \mathcal{P} correspond donc à une forme hermitienne (sesquilinéaire, antilinéaire par rapport au premier argument et linéaire par rapport au second argument) avec même premier et second arguments, z . (Si \mathcal{P} est toujours positif et s'il est nul si et seulement si $z = 0$ (si \mathcal{P} est défini positif), nous pouvons même parler de produit scalaire hermitien ainsi que d'hypersurface strictement convexe.)

Hypersurface Levi non dégénérée

Reprenons $\text{Im } w = {}^t\bar{z}Az$, avec A hermitienne et \mathcal{P} de degré 2. Nous disons que l'hypersurface est Levi non dégénérée⁶⁸ si $\det A \neq 0$. Par exemple, $\text{Im } w = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$ est Levi dégénérée, car sa matrice A a un déterminant nul :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'hypersurface $\text{Im } w = \sum_{j=1}^n z_j\bar{z}_j$ est Levi non dégénérée. Pour une hypersurface, être Levi non dégénérée implique être holomorphiquement non dégénérée.

Hyperquadrique

Une hyperquadrique est une hypersurface modèle Levi non dégénérée avec un polynôme homogène de degré 2. Notons que $\text{Im } w = \lambda_1|z_1|^2 + \dots$. Il s'agit d'une généralisation de $\text{Im } w = z\bar{z}$ dans \mathbb{C}^2 . Une hyperquadrique n'est pas forcément définie positive. En effet, l'exemple $\text{Im } w = z_1\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_2$ nous le montre. Le cas des hyperquadriques est bien connu⁶⁹ et n'est pas traité dans ce travail.

68. Cf. définition 2.1.22, p.36, pour le cas général.

69. Cf. section 1.2.1 pour le point historique, p.18.

2.2.3 Algèbre linéaire sur les rotations

Lien

Nous appelons une rotation un champ vectoriel linéaire de degré pondéré 0 et rigide (sans même de $\frac{\partial}{\partial w}$, pour des raisons de degré et par rigidité). Notons un tel champ

$$X = (a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \dots + a_{1n}z_n) \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + (a_{n1}z_1 + a_{n2}z_2 + \dots + a_{nn}z_n) \frac{\partial}{\partial z_n}.$$

Formons donc la matrice $A = (a_{jk})_{1 \leq j, k \leq n}$, complexe et de dimension $n \times n$. L'élément a_{jk} de la matrice correspond au coefficient devant $z_k \frac{\partial}{\partial z_j}$. Nous réécrivons donc

$$X = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} z_k \frac{\partial}{\partial z_j} = {}^t z {}^t A \partial z \quad (= {}^t \partial z A z),$$

où z et ∂z sont les vecteurs colonnes composés respectivement des z_k et des $\frac{\partial}{\partial z_j}$. Plus précisément,

$$X = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_k & \dots & z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{j1} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{j2} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{1k} & a_{2k} & \dots & a_{jk} & \dots & a_{nk} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{jn} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} \\ \frac{\partial}{\partial z_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial z_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial z_n} \end{pmatrix}.$$

Changement de variables

La matrice A correspondant à un champ vectoriel linéaire est complexe donc diagonalisable ou trigonalisable. En effet, le polynôme caractéristique s'avère toujours scindé. Rappelons que A est diagonalisable si et seulement si chaque sous-espace propre a une dimension maximale (c'est le cas en particulier si toutes les valeurs propres sont différentes), mais également si et seulement si le polynôme minimal n'a que des racines simples (les valeurs propres). Si ce n'est pas le cas, A est trigonalisable. Dans tous les cas, la décomposition de Dunford nous indique que la matrice peut être décomposée en

la somme d'une matrice diagonalisable et d'une matrice nilpotente⁷⁰. Pour être encore plus précis, pensons, évidemment, à la réduction de Jordan⁷¹, même si ni celle-ci, ni celle de Jordan seront celles que nous emploierons. Nous aurons effectivement besoin d'en imaginer une autre⁷².

Préparons donc la formule générale d'un changement de variable. Nous avons donc, comme vu ci-dessus, $X = {}^t z {}^t A \partial z$, où A donne, avec une matrice de passage P , une nouvelle matrice $A' = P^{-1}AP$, le changement de variable étant, $z = Pz'$ (ou $z' = P^{-1}z$). Sur les dérivées partielles, $\partial z = {}^t P^{-1} \partial z'$ (ou $\partial z' = {}^t P \partial z$). En effet, si nous notons $P^{-1} = (\tilde{p}_{jk})_{1 \leq j, k \leq n}$, nous voyons que (comme $z' = P^{-1}z$),

$$\frac{\partial}{\partial z_\ell} = \frac{\partial}{\partial z'_1} \frac{\partial z'_1}{\partial z_\ell} + \frac{\partial}{\partial z'_2} \frac{\partial z'_2}{\partial z_\ell} + \dots + \frac{\partial}{\partial z'_n} \frac{\partial z'_n}{\partial z_\ell} = \tilde{p}_{1\ell} \frac{\partial}{\partial z'_1} + \tilde{p}_{2\ell} \frac{\partial}{\partial z'_2} + \dots + \tilde{p}_{n\ell} \frac{\partial}{\partial z'_n},$$

ce qui implique effectivement que

$$\partial z' = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z'_1} \\ \frac{\partial}{\partial z'_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial z'_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_{11} & \tilde{p}_{21} & \cdots & \tilde{p}_{n1} \\ \tilde{p}_{12} & \tilde{p}_{22} & \cdots & \tilde{p}_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ \tilde{p}_{1n} & \tilde{p}_{2n} & \cdots & \tilde{p}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} \\ \frac{\partial}{\partial z_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial z_n} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en appliquant ces changements sur X ,

$$X = {}^t z {}^t A \partial z = {}^t (Pz') {}^t A {}^t P^{-1} \partial z' = {}^t z' {}^t P {}^t A {}^t P^{-1} \partial z' = {}^t z' {}^t (P^{-1}AP) \partial z'.$$

Justement, $A' = P^{-1}AP$ peut être une certaine décomposition. S'il s'agit de la décomposition de Jordan, avec, $A' = D + N$, D diagonale, encore décomposable en deux parties réelle et complexe, et N triangulaire supérieure, nous obtenons, par exemple dans \mathbb{C}^2 , les deux configurations suivantes possibles :

70. Cf. [34], p.188, théorème 6.32. Nous créerons une décomposition similaire. En effet, tout automorphisme infinitésimal CR qui est une rotation peut être décomposé en deux ou trois champs, un diagonal et un ou deux nilpotents, tous étant également des automorphismes infinitésimaux CR. Cf. [55], p.341, lemme 4.6.

71. Cf. [34], p.193, théorème 6.35.

72. Cf. théorème 4.3.1, p.111.

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les champs correspondants sont respectivement $\lambda_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$ et $(\lambda z_1 + z_2) \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$.

Exemple diagonalisable

Dans \mathbb{C}^2 , soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle correspond au champ vectoriel

$$X = -z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2},$$

qui peut être une rotation d'une certaine hypersurface de \mathbb{C}^3 . Diagonalisons la matrice A . Son polynôme caractéristique est $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Il y a donc deux valeurs propres $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$. La matrice A sera donc similaire, à un changement de variables près, à

$$D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

qui correspond au champ,

$$X = iz'_1 \frac{\partial}{\partial z'_1} - iz'_2 \frac{\partial}{\partial z'_2}.$$

Effectuons les détails en commençant par calculer une matrice de passage P . Les colonnes de cette dernière sont les vecteurs propres des valeurs propres. Pour $\lambda_1 = i$, cherchons $z_i = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, tel que $Az = iz$. Posant $z_1 = 1$, nous choisissons $z_i = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$. Pour $\lambda_2 = -i$, nous obtenons par exemple $z_{-i} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Une matrice de passage est donc ⁷³

73. Cf. [34], pp.75-76. Une matrice 2x2 est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul. Dans ce cas,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^t \text{com} P = \begin{pmatrix} 1/2 & i/2 \\ 1/2 & -i/2 \end{pmatrix};$$

elle satisfait effectivement $P^{-1}AP = D$ et implique le changement de variables

$$\begin{aligned} z'_1 &= z_1 - iz_2 \\ z'_2 &= z_1 + iz_2. \end{aligned}$$

Enfin, rappelons les calculs sur le champ, qui sont

$$\begin{aligned} X &= -z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} \\ &= {}^t z' A \partial z = {}^t z' {}^t P {}^t A {}^t P^{-1} \partial z' \\ &= \begin{pmatrix} z'_1 & z'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ i/2 & -i/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z'_1} \\ \frac{\partial}{\partial z'_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z'_1 & z'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ i/2 & -i/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z'_1} \\ \frac{\partial}{\partial z'_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z'_1 & z'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z'_1} \\ \frac{\partial}{\partial z'_2} \end{pmatrix} = {}^t z' {}^t D \partial z' \\ &= iz'_1 \frac{\partial}{\partial z'_1} - iz'_2 \frac{\partial}{\partial z'_2}. \end{aligned}$$

Exemple non diagonalisable

Dans \mathbb{C}^2 , soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 2i \end{pmatrix}.$$

Elle correspond au champ vectoriel

$$X = -iz_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + (iz_1 + 2iz_2) \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Le polynôme caractéristique est $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id}) = (\lambda - i)^2$. Il y a donc une seule valeur propre $\lambda = i$. Notons qu'un vecteur propre possible est $z_i = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Pour savoir si la matrice est diagonalisable, calculons le polynôme minimal $m_A(\lambda)$, c'est-à-dire le

polynôme normalisé, annulateur, de plus petit degré et ayant les valeurs propres pour racines. Comme $P_A(\lambda) = (\lambda - i)^2$, $m_A(\lambda) = (\lambda - i)$ ou $(\lambda - i)^2$. La première possibilité est impossible, car $A - i\text{Id} \neq 0$ (ce polynôme n'est donc pas annulateur de A). Par contre, $(A - i\text{Id})^2 = 0$, toujours du point de vue matriciel. Nous en déduisons que le sous-espace propre de $\lambda = i$ n'est pas de dimension 2 et que A n'est pas diagonalisable. Elle est toutefois trigonalisable. La matrice A sera donc similaire, à un changement de variables près, à

$$A' = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

qui correspond au champ,

$$X = (iz'_1 + z'_2) \frac{\partial}{\partial z'_1} + iz'_2 \frac{\partial}{\partial z'_2}.$$

Pour trouver la matrice de passage, et donc le changement de variables, nous cherchons les quatre éléments d'une matrice P telle que $AP = PA'$. Nous obtenons

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & i-1 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -i & -i \\ i & 1+i \end{pmatrix}.$$

Le changement de variables est donc

$$\begin{aligned} z'_1 &= z_1 - z_2 \\ z'_2 &= z_1 + (i-1)z_2, \end{aligned}$$

qui donne

$$A \sim A' = D + N,$$

où $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, purement imaginaire (avec diagonale réelle nulle), et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, cette décomposition étant valable pour X également.

Autre exemple

Prenons un dernier exemple, dans \mathbb{C}^4 . Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 2i \end{pmatrix}.$$

Elle correspond au champ vectoriel

$$X = iz_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + (z_1 + (1-i)z_2) \frac{\partial}{\partial z_2} - iz_4 \frac{\partial}{\partial z_3} + (iz_3 + 2iz_4) \frac{\partial}{\partial z_4},$$

qui peut être une rotation d'une certaine hypersurface de \mathbb{C}^5 . La sous-matrice $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ en haut à gauche est diagonalisable en

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

car le polynôme caractéristique se factorise en $-\lambda(1-i-\lambda) - i = (\lambda-1)(\lambda+i)$. Celle qui est en bas à droite est, comme vu dans l'exemple précédent, trigonalisable. Ainsi, nous pouvons réécrire le champ X dans des nouvelles coordonnées telles que

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix},$$

et

$$X = z'_1 \frac{\partial}{\partial z'_1} - iz'_2 \frac{\partial}{\partial z'_2} + (iz'_3 + z'_4) \frac{\partial}{\partial z'_3} + iz'_4 \frac{\partial}{\partial z'_4}.$$

2.3 Exemples

Il y a de multiples exemples que nous pouvons présenter⁷⁴, les cas modèles qui suivent dans le travail pouvant être vus comme des exemples également. Nous en proposons ici deux.

Exemple 2.3.1.

Le cas de \mathbb{C}^2 est bien particulier⁷⁵. Tous les champs vectoriels rigides de poids nul ou positif donné par $X = f(z)\frac{\partial}{\partial z}$ sont forcément de la forme

$$X = cz\frac{\partial}{\partial z},$$

où $c \in \mathbb{C}$. De plus, chacun de ces champs n'est pas intégrable. W ne s'intègre que deux fois. Une translation non transversale $\frac{\partial}{\partial z}$ ne s'intègre pas⁷⁶.

Prenons comme exemple concret, l'hypersurface de \mathbb{C}^2 donnée par

$$\text{Im } w = \mathcal{P}(z, \bar{z}) = z^2\bar{z}^2.$$

N'importe quel champ vectoriel rigide (qu'il s'agira d'intégrer plus tard) s'écrit comme

$$X = f(z)\frac{\partial}{\partial z} + g(z)\frac{\partial}{\partial w},$$

et ce dernier est un automorphisme infinitésimal CR si

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \text{Re } X(\mathcal{P} - \text{Im } w) \\ &= 2f(z)z\bar{z}^2 + \frac{i}{2}g(z) + 2z^2\overline{f(z)\bar{z}} - \frac{i}{2}\overline{g(z)}, \end{aligned}$$

ce qui est possible seulement si g est non nul avec $X = W$ (les autres coefficients étant nuls) ou si, avec g nul, $f(z) = iz$, c'est-à-dire,

$$X = iz\frac{\partial}{\partial z}.$$

74. Cf. [55], p.354, exemple 6.4.

75. Cf. [50].

76. Pour aller plus loin, cf. [55], p.209, proposition 4.4.

Il s'agit du seul champ rigide, avec W , à intégrer. Nous rappelons ⁷⁷ que W s'intègre en E . X est une rotation et ne peut être intégrée ⁷⁸. Effectuons les calculs d'une intégration de E (il n'est pas nécessaire ici de combiner E avec X , ce sera le cas plus tard). Ainsi, une intégration de E est

$$E^1 = \left(\frac{1}{4}zw + \phi(z) \right) \frac{\partial}{\partial z} + \left(\frac{1}{2}w^2 + \phi_g(z) \right) \frac{\partial}{\partial w},$$

qui est un automorphisme infinitésimal CR si

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \operatorname{Re} E^1(\mathcal{P} - \operatorname{Im} w) \\ &= 2 \left(\frac{1}{4}zw + \phi(z) \right) z\bar{z}^2 + \left(\frac{1}{2}w^2 + \phi_g(z) \right) \frac{i}{2} \\ &\quad + 2 \left(\frac{1}{4}\bar{z}w + \overline{\phi(z)} \right) z^2\bar{z} - \left(\frac{1}{2}\bar{w}^2 + \overline{\phi_g(z)} \right) \frac{i}{2} \\ &= \frac{1}{2}(u + i\mathcal{P})z^2\bar{z}^2 + 2\phi(z)z\bar{z}^2 + \frac{i}{4}(u + i\mathcal{P})^2 + \overline{(\dots)} \\ &= \frac{1}{2}(u + iz^2\bar{z}^2)z^2\bar{z}^2 + 2\phi(z)z\bar{z}^2 + \frac{i}{4}(u^2 + 2iu z^2\bar{z}^2 - z^4\bar{z}^4) + \overline{(\dots)} \\ &= \frac{1}{2}uz^2\bar{z}^2 + \frac{i}{2}z^4\bar{z}^4 + 2\phi(z)z\bar{z}^2 + \frac{i}{4}u^2 - \frac{1}{2}uz^2\bar{z}^2 - \frac{i}{4}z^4\bar{z}^4 + \overline{(\dots)} \\ &= \frac{i}{2}z^4\bar{z}^4 + 2\phi(z)z\bar{z}^2 + \frac{i}{4}u^2 - \frac{i}{4}z^4\bar{z}^4 \\ &\quad - \frac{i}{2}z^4\bar{z}^4 + 2z^2\bar{z}\overline{\phi(z)} - \frac{i}{4}u^2 + \frac{i}{4}z^4\bar{z}^4 \\ &= 2\phi(z)z\bar{z}^2 + 2z^2\bar{z}\overline{\phi(z)}. \end{aligned}$$

Dans ce développement, $\phi_g(z)$ a été supprimé pour des raisons de mixités. En effet, tous les autres termes sont mixtes, c'est-à-dire avec parties holomorphe et antiholomorphe, tandis que $\phi_g(z)\frac{i}{2}$ est uniquement holomorphe (et $\overline{\phi_g(z)}\frac{i}{2}$ uniquement antiholomorphe). À part si nous prenons W comme champ, nous avons toujours $\phi_g = 0$. Cette équation n'est vérifiée que lorsque $\phi = 0$. L'intégration de E est donc

$$W^2 = E^1 = \frac{1}{4}zw \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial}{\partial w},$$

Pour résumer cet exemple en termes de dimension, si $\mathcal{P}(z, \bar{z}) = z^2\bar{z}^2$,

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = 4, \quad \text{avec}$$

77. Cf. exemple 2.1.20, p.35.

78. Cf. [55], p.348, théorème 5.5.

$$\mathfrak{g}_{-1} = \{aW \mid a \in \mathbb{R}^*\}, \quad \mathfrak{g}_0 = \left\{ aiz \frac{\partial}{\partial z} \text{ ou } bE \mid a, b \in \mathbb{R}^* \right\}, \quad \mathfrak{g}_1 = \left\{ azw \frac{\partial}{\partial z} + 2aw^2 \frac{\partial}{\partial w} \mid a \in \mathbb{R}^* \right\},$$

et $\mathfrak{g}_j = \emptyset$, avec $j = t, c, n$.

Exemple 2.3.2.

Dans \mathbb{C}^3 , prenons l'hypersurface holomorphiquement non dégénérée⁷⁹ donnée par⁸⁰

$$\mathcal{P}(z, \bar{z}) = -\operatorname{Re}(z_1^2 \bar{z}_1^{-2} \bar{z}_2^{-2}) + |z_1^2 z_2|^2 = -\frac{1}{2} z_1^2 \bar{z}_1^{-2} \bar{z}_2^{-2} - \frac{1}{2} z_1^2 z_2^2 \bar{z}_1^{-2} + z_1^2 z_2 \bar{z}_1^{-2} \bar{z}_2.$$

Supposons un champ vectoriel rigide $X = f_1(z) \frac{\partial}{\partial z_1} + f_2(z) \frac{\partial}{\partial z_2} + g(z) \frac{\partial}{\partial w} \in \operatorname{hol}$. Par définition, nous avons

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \operatorname{Re} X(\mathcal{P} - \operatorname{Im} w) \\ &= -f_1(z) z_1 \bar{z}_1^{-2} \bar{z}_2^{-2} - f_1(z) z_1 z_2^2 \bar{z}_1^{-2} + 2f_1(z) z_1 z_2 \bar{z}_1^{-2} \bar{z}_2 \\ &\quad - f_2(z) z_1^2 z_2 \bar{z}_1^{-2} + f_2(z) z_1^2 \bar{z}_1^{-2} \bar{z}_2 + \frac{i}{2} g(z) \\ &\quad - \overline{f_1(z)} z_1^2 z_2^2 \bar{z}_1 - \overline{f_1(z)} z_1^2 \bar{z}_1 \bar{z}_2^2 + 2\overline{f_1(z)} z_1^2 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 \\ &\quad - \overline{f_2(z)} z_1^2 \bar{z}_1^{-2} \bar{z}_2 + \overline{f_2(z)} z_1^2 z_2 \bar{z}_1^{-2} - \frac{i}{2} \overline{g(z)}. \end{aligned}$$

Le but est de déterminer les coefficients de X pour que cette équation soit valide. Par rapport à g , nous voyons soit que g est une constante réelle avec tous les autres coefficients nuls, soit que g doit être nul, car les sixième et douzième termes de la dernière expression ne sont pas mixtes (purements holomorphe et respectivement purements antiholomorphe). Ils ne peuvent s'annuler avec d'autres termes. Dans le premier cas, nous obtenons le champ

$$W = \frac{\partial}{\partial w}.$$

Le premier terme, en comparant avec les parties antiholomorphes, ne peut s'annuler ni avec le deuxième, ni avec le troisième, le quatrième ou le cinquième. Si le premier terme s'annulait avec le septième, nous aurions $f_1(z) = iz_1 z_2^2$, ce qui engendrerait une contradiction pour les autres termes. En effet, dans ce cas, il faudrait à la fois que $f_2(z) =$

79. La vérification est simple. En supposant un champ $X = f_1(z_1, z_2) \frac{\partial}{\partial z_1} + f_2(z_1, z_2) \frac{\partial}{\partial z_2}$, nous travaillons sur l'équation $X(\mathcal{P}) = 0$ pour conclure que $X = 0$.

80. Cf. [55], p.349, exemple 5.6.

iz_2^3 et $f_2(z) = -2iz_2^3$. Nous le voyons en contemplant l'équation (avec $f_1(z) = iz_1z_2^2$)

$$\begin{aligned} 0 &= -iz_1^2z_2^2\bar{z}_1^2\bar{z}_2^2 - iz_1^2z_2^4\bar{z}_1^2 + 2iz_1^2z_2^3\bar{z}_1^2\bar{z}_2 \\ &\quad - f_2(z)z_1^2z_2\bar{z}_1^2 + f_2(z)z_1^2\bar{z}_1^2\bar{z}_2 \\ &\quad + iz_1^2z_2^2\bar{z}_1^2\bar{z}_2^2 + iz_1^2\bar{z}_1^2\bar{z}_2^4 - 2iz_1^2z_2\bar{z}_1^2\bar{z}_2^3 \\ &\quad - \overline{f_2(z)}z_1^2\bar{z}_1^2\bar{z}_2 + \overline{f_2(z)}z_1^2z_2\bar{z}_1^2. \end{aligned}$$

Par contre, le premier terme peut s'annuler avec le huitième et le dixième, nous avons dans ce cas $f_1(z) = z_1$ et $f_2(z) = -2z_2$. En effet, dans ce cas, l'équation devient

$$\begin{aligned} 0 &= \cancel{-z_1^2\bar{z}_1^2\bar{z}_2^2} - \cancel{z_1^2z_2^2\bar{z}_1^2} + \cancel{2z_1^2z_2\bar{z}_1^2\bar{z}_2} \\ &\quad + \cancel{2z_1^2z_2^2\bar{z}_1^2} - \cancel{2z_1^2z_2\bar{z}_1^2\bar{z}_2} \\ &\quad - \cancel{z_1^2z_2^2\bar{z}_1^2} - \cancel{z_1^2\bar{z}_1^2\bar{z}_2^2} + \cancel{2z_1^2z_2\bar{z}_1^2\bar{z}_2} \\ &\quad + \cancel{2z_1^2\bar{z}_1^2\bar{z}_2^2} - \cancel{2z_1^2z_2\bar{z}_1^2\bar{z}_2}, \end{aligned}$$

ce qui donne la rotation

$$X = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - 2z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Si le premier terme s'annule avec le neuvième ou avec le onzième, alors $f_1(z) = z_1z_2$, avec $f_2(z) = -z_2^2$ pour compenser. Dans ce cas, l'équation devient

$$\begin{aligned} 0 &= -z_1^2z_2\bar{z}_1^2\bar{z}_2^2 - z_1^2z_2^3\bar{z}_1^2 + 2z_1^2z_2^2\bar{z}_1^2\bar{z}_2 \\ &\quad + z_1^2z_2^3\bar{z}_1^2 - z_1^2z_2^2\bar{z}_1^2\bar{z}_2 \\ &\quad - z_1^2z_2^2\bar{z}_1^2\bar{z}_2 - z_1^2\bar{z}_1^2\bar{z}_2^3 + 2z_1^2z_2\bar{z}_1^2\bar{z}_2^2 \\ &\quad + z_1^2\bar{z}_1^2\bar{z}_2^3 - z_1^2z_2\bar{z}_1^2\bar{z}_2^2. \end{aligned}$$

Nous obtenons le champ

$$Y = z_1z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2^2 \frac{\partial}{\partial z_2},$$

qui est une rotation généralisée. Cet exemple est donc plus riche que le précédent avec cette rotation généralisée Y qui complète les champs rigides de notre hypersurface, aux côtés de W et X .

Pour compléter la liste des champs vectoriels CR, il s'agit maintenant d'intégrer ces trois champs rigides. Nous savons que W s'intègre en E , que Y ne s'intègre pas tout comme X s'il est pris seul. Intégrons donc E en le combinant éventuellement avec un facteur de X . Une intégration de $(6\lambda E + aX)$ peut s'écrire, W^2 , ou

$$(6\lambda E + aX)^1 = (\lambda z_1 w + a z_1 w + \phi_1(z)) \frac{\partial}{\partial z_1} + (\lambda z_2 w - 2a z_2 w + \phi_2(z)) \frac{\partial}{\partial z_2} + (3\lambda w^2 + \phi(z)) \frac{\partial}{\partial w},$$

qui, pour être un champ vectoriel CR, doit satisfaire (nous rappelons que sur l'hypersurface, $w = u + i\mathcal{P}$)

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \operatorname{Re}(6\lambda E + aX)^1 (\mathcal{P} - \operatorname{Im} w) \\ &= ((\lambda + a)z_1 w + \phi_1(z))\mathcal{P}_1 + ((\lambda - 2a)z_2 w + \phi_2(z))\mathcal{P}_2 + \frac{3\lambda}{2} i w^2 + \frac{i}{2} \phi(z) \\ &\quad + \overline{(\dots)} \\ &= ((\lambda + a)z_1 w + \phi_1(z)) (-z_1 \overline{z_1}^2 \overline{z_2}^2 - z_1 z_2^2 \overline{z_1}^2 + 2z_1 z_2 \overline{z_1}^2 \overline{z_2}) \\ &\quad + ((\lambda - 2a)z_2 w + \phi_2(z)) (-z_1^2 z_2 \overline{z_1}^2 + z_1^2 \overline{z_1}^2 \overline{z_2}) \\ &\quad + \frac{3\lambda}{2} i w^2 + \frac{i}{2} \phi(z) + \overline{(\dots)} \\ &= \phi_1(z)(\dots) + \phi_2(z)(\dots) + u(\dots) + \frac{i}{2} \phi(z) - \frac{i}{2} \overline{\phi(z)} \\ &\quad + i(\lambda + a)z_1 (-z_1 \overline{z_1}^2 \overline{z_2}^2 - z_1 z_2^2 \overline{z_1}^2 + 2z_1 z_2 \overline{z_1}^2 \overline{z_2}) \mathcal{P} \\ &\quad + i(\lambda - 2a)z_2 (-z_1^2 z_2 \overline{z_1}^2 + z_1^2 \overline{z_1}^2 \overline{z_2}) \mathcal{P} \\ &\quad + \frac{3\lambda}{2} i (i\mathcal{P})^2 + \overline{(\dots)} = \dots \\ &= \phi_1(z)(\dots) + \phi_2(z)(\dots) + u(\dots) + \frac{i}{2} \phi(z) - \frac{i}{2} \overline{\phi(z)} \\ &\quad + i(\lambda + a) \left(\frac{1}{2} z_1^4 \overline{z_1}^4 \overline{z_2}^4 + 3z_1^4 z_2^2 \overline{z_1}^4 \overline{z_2}^2 - 2z_1^4 z_2 \overline{z_1}^4 \overline{z_2}^3 + \frac{1}{2} z_1^4 z_2^4 \overline{z_1}^4 - 2z_1^4 z_2^3 \overline{z_1}^4 \overline{z_2} \right) \\ &\quad + i(\lambda - 2a) \left(\frac{3}{2} z_1^4 z_2^2 \overline{z_1}^4 \overline{z_2}^2 - \frac{1}{2} z_1^4 z_2 \overline{z_1}^4 \overline{z_2}^3 + \frac{1}{2} z_1^4 z_2^4 \overline{z_1}^4 - \frac{3}{2} z_1^4 z_2^3 \overline{z_1}^4 \overline{z_2} \right) \\ &\quad - \frac{3\lambda}{2} i \left(\frac{1}{4} z_1^4 \overline{z_1}^4 \overline{z_2}^4 + \frac{3}{2} z_1^4 z_2^2 \overline{z_1}^4 \overline{z_2}^2 - z_1^4 z_2 \overline{z_1}^4 \overline{z_2}^3 + \frac{1}{4} z_1^4 z_2^4 \overline{z_1}^4 - z_1^4 z_2^3 \overline{z_1}^4 \overline{z_2} \right) \\ &\quad + \overline{(\dots)}. \end{aligned}$$

La première ligne (conjugué compris) ne contiendra jamais de variables holomorphes et antiholomorphes de degré 4 en même temps. Elle est donc incompatible avec les trois suivantes. Pour celles-ci, nous remarquons que la ligne du milieu (troisième ligne) pose problème pour les termes en $z_1^4 \overline{z_1}^4 \overline{z_2}^4$ et en $z_1^4 z_2^2 \overline{z_1}^4 \overline{z_2}^2$ (le terme en $z_1^4 z_2^2 \overline{z_1}^4 \overline{z_2}^2$ s'annule automatiquement avec son conjugué). En effet, pour ces deux derniers termes,

$$\frac{1}{2}(\lambda + a) - \frac{1}{2}(\lambda + a) - \frac{1}{2}(\lambda - 2a) - \frac{3\lambda}{8} + \frac{3\lambda}{8} = 0, \quad \text{et}$$

$$-2(\lambda + a) + 2(\lambda + a) - \frac{1}{2}(\lambda - 2a) + \frac{3}{2}(\lambda - 2a) + \frac{3\lambda}{2} - \frac{3\lambda}{2} = 0.$$

Ainsi, il est nécessaire que $\lambda = 2a$. De plus, la partie contenant u s'annule d'elle-même :

$$\frac{3\lambda}{2}u \cdot 2\mathcal{P} + \frac{3\lambda}{2}u^2i - 3\lambda u\mathcal{P} + \overline{(\dots)} = 0.$$

Nous obtenons donc le champ

$$\begin{aligned} (6\lambda E + aX)^1 &= (2az_1w + az_1w)\frac{\partial}{\partial z_1} + (2az_2w - 2az_2w)\frac{\partial}{\partial z_2} + 6aw^2\frac{\partial}{\partial w} \\ &= 3az_1w\frac{\partial}{\partial z_1} + 6aw^2\frac{\partial}{\partial w}, \\ \text{ou plutôt } W^2 &= az_1w\frac{\partial}{\partial z_1} + 2aw^2\frac{\partial}{\partial w}. \end{aligned}$$

Pour résumer cet exemple en termes de degré, si

$$\mathcal{P}(z, \bar{z}) = -\frac{1}{2}z_1^2\bar{z}_1^2\bar{z}_2^2 - \frac{1}{2}z_1^2z_2^2\bar{z}_1^2 + z_1^2z_2\bar{z}_1^2\bar{z}_2,$$

alors $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = 5$, avec

$$\mathfrak{g}_{-1} = \{aW \mid a \in \mathbb{R}^*\},$$

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ az_1\frac{\partial}{\partial z_1} - 2az_2\frac{\partial}{\partial z_2} \text{ ou } bE \mid a, b \in \mathbb{R}^* \right\}, \quad \mathfrak{g}_t = \left\{ az_1z_2\frac{\partial}{\partial z_1} - az_2^2\frac{\partial}{\partial z_2} \mid a \in \mathbb{R}^* \right\},$$

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ az_1w\frac{\partial}{\partial z_1} + 2aw^2\frac{\partial}{\partial w} \mid a \in \mathbb{R}^* \right\},$$

$$\mathfrak{g}_j = \emptyset, \quad \text{pour } j = t, n.$$

Chapitre 3

Cas connus

Dans ce chapitre, nous rappelons les récents résultats à propos des hypersurfaces de \mathbb{C}^3 . Le but est maintenant d'entrer plus spécifiquement dans les détails d'une sorte de méthode pour classifier l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux CR d'hypersurfaces de \mathbb{C}^3 . En outre, ce chapitre tire son importance d'un apport considérable effectué dans ce travail par rapport au lemme 3.3 de [49]. Il s'agit de décomposer les rotations (en une partie diagonale et une partie nilpotente sans diagonale) et en effet, un contreexemple de ce lemme est donnée et un ajustement du lemme est proposé dans ce chapitre⁸¹.

3.1 Cas modèle

Cette section traite d'un premier exemple important⁸². Nous considérons l'hypersurface définie par

$$M = \{(z_1, z_2, w) \in \mathbb{C}^3 \mid \operatorname{Im} w = z_1 \bar{z}_2^\ell + z_2^\ell \bar{z}_1\},$$

pour un $\ell > 1$, que nous appelons hypersurface modèle. Une certaine symétrie est apparente, mais il s'agit maintenant de classifier \mathfrak{g} , selon ses composantes. Nous notons que M est de type fini⁸³ $m = \ell + 1$. Cette hypersurface est également holomorphiquement non dégénérée si $\ell > 0$ et Levi dégénérée si $\ell > 1$. Intéressons-nous d'abord aux champs

81. Cf. contreexemple 3.2.12, p.66 et lemme 3.2.13, p.68.

82. Cf. [46], pp.8-13, section 5, mais reformulée.

83. Cf. remarque 1.1.43.b), p.17.

vectoriels CR qui sont rigides.

Proposition 3.1.1.

Les seuls automorphismes infinitésimaux CR rigides et homogènes de M sont,

- i) $X_i = aW = a \frac{\partial}{\partial w}$, $a \in \mathbb{R}^*$, de degré -1 ;
- ii) $X_{ii} = a \frac{\partial}{\partial z_1} + 2i\bar{a}z_2^\ell \frac{\partial}{\partial w}$, $a \in \mathbb{C}^*$, de degré $-\frac{1}{\ell+1}$;
- iii) $X_{iii} = az_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\bar{a}}{\ell} z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$, $a \in \mathbb{C}^*$, de degré 0 ;
- iv) $X_{iv} = iaz_2^\ell \frac{\partial}{\partial z_1}$, $a \in \mathbb{R}^*$, de degré $\frac{\ell-1}{\ell+1}$.

Démonstration. Notons que ces quatre champs vectoriels sont bien rigides et homogènes. Considérons un champ qui est un automorphisme infinitésimal CR, de manière générale. Il s'écrit

$$X = \sum_{j=1}^2 f_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j} + g(z) \frac{\partial}{\partial w}.$$

et il faut donc que, par définition,

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \operatorname{Re} X(\mathcal{P} - \operatorname{Im} w) \\ &= f_1(z) \bar{z}_2^\ell + \ell f_2(z) z_2^{\ell-1} \bar{z}_1 + \frac{i}{2} g(z) + \overline{f_1(z)} z_2^\ell + \ell \overline{f_2(z)} \bar{z}_2^{\ell-1} z_1 - \frac{i}{2} \overline{g(z)}. \end{aligned}$$

Nous observons l'annulation de chacun des six termes, l'un après l'autre, avec les autres. Notons que le champ trivial nul ne nous intéresse pas, c'est pourquoi l'annulation d'un terme avec lui-même est écartée.

Le premier terme ne peut s'annuler ni avec le deuxième, ni avec le troisième terme, en comparant les parties antiholomorphes. Une annulation est possible avec le quatrième terme, son conjugué, avec $f_1(z) = iz_2^\ell$. Avec un coefficient réel ajouté (et avec $f_2 = g = 0$), nous obtenons X_{iv} . L'annulation avec le cinquième terme, avec $f_1(z) = z_1$ et $f_2(z) = -\frac{1}{\ell} z_2$, donne X_{iii} (avec l'ajout d'un coefficient complexe). Par conjugaison, il s'agit également de l'annulation du deuxième terme avec le quatrième. Enfin, l'annulation du premier terme avec le dernier terme, avec $f_1(z) = \frac{1}{2}$ constante et $g(z) = iz_2^\ell$, donne X_{ii} .

Concernant le deuxième terme, son annulation avec le terme précédent ainsi qu'avec le quatrième terme ont déjà été observées (donnant en particulier X_{iii}) et une annulation est impossible avec les troisième, cinquième et sixième termes.

Pour le troisième terme, seule l'annulation avec son conjugué nous intéresse (les autres sont impossibles ou donnent X_{ii}). Elle nous amène, avec g une constante réelle (et $f_1 = f_2 = 0$), à X_i . Tous les cas de figures ont été traités. \square

Pour compléter la liste des champs CR, intégrons ces quatre champs.

Proposition 3.1.2.

Le champ X_i possède une 1-intégration, une 2-intégration, mais pas de 3-intégration.

Démonstration. La première intégration de W est bien connue, il s'agit du champ d'Euler⁸⁴,

$$E = \frac{1}{\ell + 1} \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) + w \frac{\partial}{\partial w}.$$

Intégrant E , nous obtenons

$$E^1 = \left(\phi_1(z) + \frac{1}{\ell + 1} z_1 w \right) \frac{\partial}{\partial z_1} + \left(\phi_2(z) + \frac{1}{\ell + 1} z_2 w \right) \frac{\partial}{\partial z_2} + \left(\phi(z) + \frac{1}{2} w^2 \right) \frac{\partial}{\partial w},$$

et pour que ce champ appartienne à $\text{hol}(M, p)$, nous posons

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \operatorname{Re} E^1(\mathcal{P} - \operatorname{Im} w) \\ &= \phi_1(z) \bar{z}_2^\ell + \frac{1}{\ell+1} w z_1 \bar{z}_2^\ell + \ell \phi_2(z) z_2^{\ell-1} \bar{z}_1 \\ &\quad + \frac{\ell}{\ell+1} w z_2^\ell \bar{z}_1 + \frac{i}{2} \phi(z) + \frac{i}{4} w^2 + (\dots) \\ &= \phi_1(z) \bar{z}_2^\ell + \frac{1}{\ell+1} (u + i\mathcal{P}) z_1 \bar{z}_2^\ell + \ell \phi_2(z) z_2^{\ell-1} \bar{z}_1 \\ &\quad + \frac{\ell}{\ell+1} (u + i\mathcal{P}) z_2^\ell \bar{z}_1 + \frac{i}{2} \phi(z) + \frac{i}{4} (u + i\mathcal{P})^2 + (\dots) \\ &= \phi_1(z) \bar{z}_2^\ell + \ell \phi_2(z) z_2^{\ell-1} \bar{z}_1 + \frac{i}{2} \phi(z) + \overline{\phi_1(z) z_2^\ell} + \ell \overline{\phi_2(z) z_1 \bar{z}_2^{\ell-1}} - \frac{i}{2} \overline{\phi(z)} \\ &\quad + \frac{1}{\ell+1} (u + i\mathcal{P}) z_1 \bar{z}_2^\ell + \frac{\ell}{\ell+1} (u + i\mathcal{P}) z_2^\ell \bar{z}_1 + \frac{i}{4} (\mathcal{U}^\mathcal{Z} + 2iu\mathcal{P} - \mathcal{P}^\mathcal{Z}) \\ &\quad + \frac{1}{\ell+1} (u - i\mathcal{P}) z_2^\ell \bar{z}_1 + \frac{\ell}{\ell+1} (u - i\mathcal{P}) z_1 \bar{z}_2^\ell - \frac{i}{4} (\mathcal{U}^\mathcal{Z} - 2iu\mathcal{P} - \mathcal{P}^\mathcal{Z}) \\ &= \phi_1(z) \bar{z}_2^\ell + \ell \phi_2(z) z_2^{\ell-1} \bar{z}_1 + \overline{\phi_1(z) z_2^\ell} + \ell \overline{\phi_2(z) z_1 \bar{z}_2^{\ell-1}} \\ &\quad + u\mathcal{P} + \frac{1}{\ell+1} i\mathcal{P} z_1 \bar{z}_2^\ell + \frac{\ell}{\ell+1} i\mathcal{P} z_2^\ell \bar{z}_1 - \frac{1}{2} u\mathcal{P} - \frac{1}{\ell+1} i\mathcal{P} z_2^\ell \bar{z}_1 - \frac{\ell}{\ell+1} i\mathcal{P} z_1 \bar{z}_2^\ell - \frac{1}{2} u\mathcal{P} \\ &= \phi_1(z) \bar{z}_2^\ell + \ell \phi_2(z) z_2^{\ell-1} \bar{z}_1 + \overline{\phi_1(z) z_2^\ell} + \ell \overline{\phi_2(z) z_1 \bar{z}_2^{\ell-1}} \\ &\quad + \frac{1-\ell}{\ell+1} i \left(z_1^2 \bar{z}_2^{2\ell} + z_1 z_2^\ell \bar{z}_1 \bar{z}_2^\ell - z_1 z_2^\ell \bar{z}_1 \bar{z}_2^\ell - z_2^{2\ell} \bar{z}_1^{-2} \right) \\ &= \frac{1-\ell}{\ell+1} i \left(z_1^2 \bar{z}_2^{2\ell} - z_2^{2\ell} \bar{z}_1^{-2} \right) \end{aligned}$$

84. Cf. exemple 2.1.20, p.35, une constante réelle est d'ailleurs présente.

où les $\phi(z) = \phi_1(z) = \phi_2(z) = \phi_3(z) = 0$. En effet, les différents ϕ_j pourraient éventuellement s'annuler, mais ne seraient pas de degré $\ell + 2$ (pour que le champ soit de degré pondéré 1). Nous observons donc que E ne peut s'intégrer seul. Par contre, il est possible de combiner E avec une rotation $X_{iii} = az_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\bar{a}}{\ell} z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$, $a \in \mathbb{C}^*$, avant d'intégrer. Une 1-intégration de X_{iii} s'écrit

$$X_{iii}^1 = (\phi_1(z) + az_1 w) \frac{\partial}{\partial z_1} + \left(\phi_2(z) - \frac{\bar{a}}{\ell} z_2 w \right) \frac{\partial}{\partial z_2} + \phi(z) \frac{\partial}{\partial w}$$

et satisfait

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \operatorname{Re} X_{iii}^1(\mathcal{P} - \operatorname{Im} w) \\ &= \phi_1(z) \bar{z}_2^\ell + awz_1 \bar{z}_2^\ell + \ell \phi_2(z) z_2^{\ell-1} \bar{z}_1 \\ &\quad - \bar{a} w z_2^\ell \bar{z}_1 + \frac{i}{2} \phi(z) + \overline{(\dots)} \\ &= a(u + i\mathcal{P})_{z_1 \bar{z}_2} - \bar{a}(u + i\mathcal{P})_{z_2 \bar{z}_1} + \overline{(\dots)} \\ &= auz_1 \bar{z}_2^\ell - \bar{a}uz_2^\ell \bar{z}_1 + ia\mathcal{P}_{z_1 \bar{z}_2} - i\bar{a}\mathcal{P}_{z_2 \bar{z}_1} \\ &\quad + \bar{a}uz_2^\ell \bar{z}_1 - auz_1 \bar{z}_2^\ell - i\bar{a}\mathcal{P}_{z_2 \bar{z}_1} + ia\mathcal{P}_{z_1 \bar{z}_2} \\ &= ia \left(z_1^2 \bar{z}_2^{2\ell} + z_1 z_2^\ell \bar{z}_1 \bar{z}_2^\ell \right) - i\bar{a} \left(z_1 z_2^\ell \bar{z}_1 \bar{z}_2^\ell + z_2^{2\ell} \bar{z}_1^2 \right) \\ &\quad - i\bar{a} \left(z_1 z_2^\ell \bar{z}_1 \bar{z}_2^\ell + z_2^{2\ell} \bar{z}_1^2 \right) + ia \left(z_1^2 \bar{z}_2^{2\ell} + z_1 z_2^\ell \bar{z}_1 \bar{z}_2^\ell \right) \\ &= 2i(a - \bar{a})z_1 z_2^\ell \bar{z}_1 \bar{z}_2^\ell + 2iaz_1^2 \bar{z}_2^{2\ell} - 2i\bar{a}z_2^{2\ell} \bar{z}_1^2 \\ &= 2ia \left(z_1^2 \bar{z}_2^{2\ell} - z_2^{2\ell} \bar{z}_1^2 \right), \quad \text{si } a \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

où les ϕ_1 , ϕ_2 et ϕ sont nuls pour les mêmes raisons que précédemment pour E^1 . Nous imposons que $a \in \mathbb{R}$ pour que les intégrations simultanées de E^1 et X_{iii}^1 puissent se compenser. En comparant ces deux équations respectives, nous obtenons

$$a = \frac{\ell - 1}{2(\ell + 1)}.$$

Le champ correspondant, dans \mathfrak{g}_1 , qui est l'intégration de $E + \lambda X_{iii}$ est

$$\begin{aligned} W^2 &= \left(\frac{1}{\ell + 1} + \frac{\ell - 1}{2(\ell + 1)} \right) z_1 w \frac{\partial}{\partial z_1} + \left(\frac{1}{\ell + 1} - \frac{\ell - 1}{2\ell(\ell + 1)} \right) z_2 w \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial}{\partial w} \\ &= \frac{\ell + 1}{2(\ell + 1)} z_1 w \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\ell + 1}{2\ell(\ell + 1)} z_2 w \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial}{\partial w}. \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} z_1 w \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{1}{2\ell} z_2 w \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial}{\partial w}.$$

Il est évident qu'une constante réelle est envisageable et il s'avère impossible d'intégrer ce dernier champ, car le degré de son intégration serait trop grand ⁸⁵. \square

Remarque 3.1.3.

Le caractère indispensable de la rotation X_{iii} employée dans la démonstration précédente peut également être abordée comme suit. Nous savons ⁸⁶ que toute 1-intégration

$$W^1 = \sum_{j=1}^2 \phi_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j} + (\dots) \frac{\partial}{\partial w}$$

de W satisfait le critère

$$2 \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^2 \phi_j(z) \mathcal{P}_{z_j} \right) = \mathcal{P}.$$

Si nous supposons deux de ces 1-intégrations, en soustrayant les deux équations correspondantes au critère, nous obtenons une rotation.

Proposition 3.1.4.

Le champ X_{ii} possède une 1-intégration, mais pas de 2-intégration. Aucun des champs X_{iii} et X_{iv} ne possèdent d'1-intégration.

Démonstration. Une 1-intégration de X_{ii} est de type

$$X_{ii}^1 = (\phi_1(z) + aw) \frac{\partial}{\partial z_1} + \phi_2(z) \frac{\partial}{\partial z_2} + (\phi(z) + 2i\bar{a}wz_2^\ell) \frac{\partial}{\partial w},$$

et pour que ce champ appartienne à $\operatorname{hol}(M, p)$, nous posons

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \operatorname{Re} X_{ii}^1(\mathcal{P} - \operatorname{Im} w) \\ &= \phi_1(z) \bar{z}_2^\ell + aw\bar{z}_2^\ell + \ell\phi_2(z) z_2^{\ell-1} \bar{z}_1 + \frac{i}{2}\phi(z) + \frac{i}{2}2i\bar{a}wz_2^\ell \\ &\quad + (\dots) \\ &= \phi_1(z) \bar{z}_2^\ell + \ell\phi_2(z) z_2^{\ell-1} \bar{z}_1 + a(u + i\mathcal{P})\bar{z}_2^\ell - \bar{a}(u + i\mathcal{P})z_2^\ell \\ &\quad + \overline{\phi_1(z)} z_2^\ell + \overline{\ell\phi_2(z)} z_1 \bar{z}_2^{\ell-1} + \bar{a}(u - i\mathcal{P})z_2^\ell - a(u - i\mathcal{P})\bar{z}_2^\ell \end{aligned}$$

85. Cf. corollaire 2.1.26, p.40.

86. Cf. [46], p.10, équation (5.9).

$$\begin{aligned}
&= \phi_1(z) \bar{z}_2^{-\ell} + \ell \phi_2(z) z_2^{\ell-1} \bar{z}_1 + \overline{\phi_1(z)} z_2^\ell + \ell \overline{\phi_2(z)} z_1 \bar{z}_2^{\ell-1} \\
&\quad + 2ai \mathcal{P} \bar{z}_2^{-\ell} - 2\bar{a}i \mathcal{P} z_2^\ell \\
&= \phi_1(z) \bar{z}_2^{-\ell} + \ell \phi_2(z) z_2^{\ell-1} \bar{z}_1 + \overline{\phi_1(z)} z_2^\ell + \ell \overline{\phi_2(z)} z_1 \bar{z}_2^{\ell-1} \\
&\quad + 2ai \left(z_1 \bar{z}_2^{-2\ell} + z_2^\ell \bar{z}_1 \bar{z}_2^{-\ell} \right) - 2\bar{a}i \left(z_1 z_2^\ell \bar{z}_2^{-\ell} + z_2^{2\ell} \bar{z}_1 \right)
\end{aligned}$$

ce qui est valide dans un seul cas, avec $\phi(z) = 0$ (déjà enlevé au début), $\phi_1(z) = 2\bar{a}i z_1 z_2^\ell$ et $\phi_2(z) = \frac{2\bar{a}i}{\ell} z_2^{\ell+1}$. Cela nous donne

$$X_{ii}^1 = \left(2\bar{a}i z_1 z_2^\ell + aw \right) \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{2\bar{a}i}{\ell} z_2^{\ell+1} \frac{\partial}{\partial z_2} + 2i\bar{a}w z_2^\ell \frac{\partial}{\partial w}, \quad a \in \mathbb{C}^*.$$

Nous pouvons maintenant observer que X_{iii} ne possède pas d'intégration. En effet, une rotation ne possède jamais d'intégration. Nous pouvons également nous en convaincre en considérant une telle 1-intégration qui s'écrirait

$$X_{iii}^1 = (\phi_1(z) + az_1 w) \frac{\partial}{\partial z_1} + \left(\phi_2(z) - \frac{\bar{a}}{\ell} z_2 w \right) \frac{\partial}{\partial z_2} + \phi(z) \frac{\partial}{\partial w}.$$

Nous arriverions à une contradiction (ou à une solution nulle) en développant l'équation

$$0 = 2 \operatorname{Re} X_{iii}^1 (\mathcal{P} - \operatorname{Im} w).$$

Le dernier champ, X_{iv} ne peut être intégré dans hol à cause d'un degré qui serait trop grand ⁸⁷. □

Nous pouvons formuler le résultat final de ce cas modèle comme suit.

Théorème 3.1.5.

Soit M une hypersurface décrite par $\operatorname{Im} w = z_1 \bar{z}_2^{-\ell} + z_2^\ell \bar{z}_1$, avec $\ell > 1$. Alors $\dim \mathfrak{g} = 10$. Plus précisément, $\dim \mathfrak{g}_{-1} = 1$, $\dim \mathfrak{g}_{-\frac{1}{\ell+1}} = 2$, $\dim \mathfrak{g}_0 = 3$, $\dim \mathfrak{g}_{\frac{\ell-1}{\ell+1}} = 1$, $\dim \mathfrak{g}_{\frac{\ell}{\ell+1}} = 2$ et $\dim \mathfrak{g}_1 = 1$.

⁸⁷. Cf. corollaire 2.1.26, p.40.

3.2 Problème PQ

Cette section propose une généralisation du cas modèle précédant⁸⁸. Toujours dans \mathbb{C}^3 , nous nous intéressons à l'hypersurface modèle M réelle, Levi dégénérée, holomorphiquement non dégénérée, de type fini et dont les éléments (z_1, z_2, w) satisfont

$$\text{Im } w = P\bar{Q} + Q\bar{P},$$

où P et Q sont des polynômes homogènes et holomorphes qui dépendent de la variable $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Une telle hypersurface est dite *de type PQ* . Nous notons qu'il faut au minimum deux polynômes dans \mathbb{C}^3 pour obtenir une hypersurface holomorphiquement non dégénérée⁸⁹.

Cette section s'organise un peu différemment que précédemment, car les champs vectoriels ne peuvent pas être donnés explicitement. De fait, ils dépendent des particularités de l'hypersurface. Celle-ci peut être monomiale, peut contenir une paire symétrique d'une chaîne d'un champ vectoriel, peut être balancée – autant de notions qu'il faut définir. Nous rappelons que le lemme 3.2.13, p.68, est un apport nouveau.

3.2.1 Préliminaires

Notons qu'une telle variété est forcément holomorphiquement dégénérée dans \mathbb{C}^4 ou plus⁹⁰.

Lemme 3.2.1.

Toute hypersurface de type PQ est holomorphiquement dégénérée dans \mathbb{C}^4 .

Démonstration. Formons le champ

$$X = (P_{z_2} Q_{z_3} - P_{z_3} Q_{z_2}) \frac{\partial}{\partial z_1} + (P_{z_3} Q_{z_1} - P_{z_1} Q_{z_3}) \frac{\partial}{\partial z_2} + (P_{z_1} Q_{z_2} - P_{z_2} Q_{z_1}) \frac{\partial}{\partial z_3}.$$

Nous remarquons que $X(\mathcal{P}) = 0$, car

88. Cf. [49]. Remarquons que seul le cas d'une hypersurface de type fini sera pris en compte et non celui de multitype de Catlin fini. Plusieurs détails et compléments sont également ajoutés pour faciliter la lecture.

89. Cf. proposition 2.2.2, p.40.

90. Cf. proposition 2.2.2, p.40.

$$\begin{aligned}
X(\mathcal{P}) &= (P_{z_2} Q_{z_3} - P_{z_3} Q_{z_2})(P_{z_1} \bar{Q} + Q_{z_1} \bar{P}) \\
&\quad + (P_{z_3} Q_{z_1} - P_{z_1} Q_{z_3})(P_{z_2} \bar{Q} + Q_{z_2} \bar{P}) \\
&\quad + (P_{z_1} Q_{z_2} - P_{z_2} Q_{z_1})(P_{z_3} \bar{Q} + Q_{z_3} \bar{P}) \\
&= P_{z_1} P_{z_2} Q_{z_3} \bar{Q} - P_{z_1} P_{z_3} Q_{z_2} \bar{Q} + P_{z_2} Q_{z_1} Q_{z_3} \bar{P} - P_{z_3} Q_{z_1} Q_{z_2} \bar{P} \\
&\quad P_{z_2} P_{z_3} Q_{z_1} \bar{Q} - P_{z_1} P_{z_2} Q_{z_3} \bar{Q} + P_{z_3} Q_{z_1} Q_{z_2} \bar{P} - P_{z_1} Q_{z_2} Q_{z_3} \bar{P} \\
&\quad P_{z_1} P_{z_3} Q_{z_2} \bar{Q} - P_{z_2} P_{z_3} Q_{z_1} \bar{Q} + P_{z_1} Q_{z_2} Q_{z_3} \bar{P} - P_{z_2} Q_{z_1} Q_{z_3} \bar{P} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Remarque 3.2.2.

Nous pouvons affirmer que, comme \mathcal{P} est homogène, P et Q le sont également (ces polynômes n'ont toutefois pas forcément le même degré). Effectivement, les éventuels doubles produits de $P\bar{Q} + Q\bar{P}$ doivent donner un polynôme homogène.

Définition 3.2.3.

Soit Y un champ vectoriel homogène. Une paire de suites de polynômes holomorphes homogènes $\{U^1, \dots, U^n\}$ et $\{V^1, \dots, V^n\}$ est une *paire symétrique de Y -chaînes* si,

$$\begin{aligned}
Y(U^n) &= 0, \quad Y(U^j) = c_j U^{j+1}, \quad \text{pour } j = 1, \dots, n-1, \\
Y(V^n) &= 0, \quad Y(V^j) = d_j V^{j+1}, \quad \text{pour } j = 1, \dots, n-1,
\end{aligned}$$

où les c_j et d_j sont des constantes non nulles complexes, satisfaisant

$$c_j = -\overline{d_{n-j}}.$$

Si les deux suites sont identiques, nous pouvons parler d'une *Y -chaîne symétrique*.

Théorème 3.2.4. ([49], p.258, théorème 2.3)

Soit une hypersurface modèle M qui est holomorphiquement non dégénérée et qui contient un champ vectoriel non nul $Y \in \mathfrak{g}_c$. Alors, \mathcal{P} se décompose en

$$\mathcal{P} = \sum_{j=1}^M T_j,$$

où chaque T_j est donné par

$$T_j = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{N_j} U_j^k \overline{V_j^{N_j-k+1}} \right),$$

où $\{U_j^1, \dots, U_j^{N_j}\}$ et $\{V_j^1, \dots, V_j^{N_j}\}$ forment une paire symétrique de Y -chaînes. Inversement, si un Y et un \mathcal{P} satisfont toutes ces conditions, alors $Y \in \mathfrak{g}_c$.

Exemple 3.2.5.

Soit le champ vectoriel ⁹¹

$$Y = iz_2^\ell \frac{\partial}{\partial z_1}.$$

Alors $U^1 = z_1$ et $U^2 = z_2^\ell$ forment une Y -chaîne symétrique. En effet, $Y(U^2) = 0$, $Y(U^1) = iz_2^\ell$, donc $c_1 = i = -\overline{d_1} = -i$ et $\mathcal{P} = T_1 = \operatorname{Re} U^1 \overline{U^2}$, ce qui donne l'hypersurface modèle.

Remarque 3.2.6.

Le dernier théorème est valable ⁹² pour toute hypersurface polynomiale dans \mathbb{C}^3 .

Définition 3.2.7.

Un polynôme \mathcal{P} est dit *balancé* si nous pouvons l'écrire comme

$$\mathcal{P}(z, \bar{z}) = \sum_{|\alpha|_\Lambda = |\bar{\alpha}|_\Lambda = 1} A_{\alpha, \bar{\alpha}} z^\alpha \bar{z}^{\bar{\alpha}},$$

pour une paire de réels non nuls $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, où

$$|\alpha|_\Lambda := \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2.$$

L'hypersurface associée est également dite *balancée*.

Remarque 3.2.8.

Une hypersurface est balancée si et seulement si le champ

$$Y = \lambda_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2},$$

91. Cf. [48], p.4809.

92. Cf. [54], pp.14-15, définition 7.1 et théorème 7.2.

avec les notations ci-dessus, est un *champ complexe reproducteur*, i.e. $Y(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$, avec λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Les calculs découlent de la définition

Théorème 3.2.9. ([49], p.259, théorème 2.5)

L'hypersurface de type PQ est balancée (dans certaines coordonnées) si et seulement si $\dim \mathfrak{g}_1 = 1$. Sinon, $\dim \mathfrak{g}_1 = 0$.

Définition 3.2.10.

Une hypersurface est dite *monomiale* s'il existe des coordonnées biholomorphes pour lesquels P et Q sont des monômes.

3.2.2 Lemmes auxiliaires

Propriétés de \mathfrak{g}_r

Lemme 3.2.11. ([49], p.261, lemme 3.6)

Soit une hypersurface M de type PQ . Si M admet une symétrie tubulaire, alors M est biholomorphe à

$$\text{Im } w = z_1 \overline{z_2}^\ell + z_2^\ell \overline{z_1},$$

ou à

$$\text{Im } w = z_1 z_2^\ell \overline{z_2}^\ell + z_2^\ell \overline{z_1 z_2}^\ell.$$

De plus, la dimension réelle des symétries tubulaires de la seconde hypersurface est 1.

Propriétés de \mathfrak{g}_0

Contrexemple 3.2.12.

Voici un exemple qui précise le lemme 3.3, p.259 de [49]. Il semble effectivement que la distinction et la comparaison entre rotations diagonale et diagonalisable doivent être précisées. Pour le problème PQ dans \mathbb{C}^3 , soit $P = z_1 z_2^2$ et $Q = z_2^3$ monomiaux. L'hypersurface est donc déterminée par l'équation

$$\text{Im } w = z_1 z_2^2 \overline{z_2}^3 + z_2^3 \overline{z_1 z_2}^2,$$

et elle est holomorphiquement non dégénéré⁹³. La rotation

$$X = 5z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + iz_2 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

est diagonalisable, car sa matrice correspondante est

$$A_X = \begin{pmatrix} 5 & i \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

qui a pour valeurs propres 5 et -1 . Cette matrice n'est pourtant pas diagonale. Par contre, en contrôlant que X est bien un automorphisme infinitésimal CR, nous voyons que ses parties diagonale et non diagonale n'interfèrent pas. En effet,

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} X \left(z_1 z_2^2 \bar{z}_2^3 + z_2^3 \bar{z}_1 \bar{z}_2^2 \right) &= 5z_1 z_2^2 \bar{z}_2^3 + iz_2^3 \bar{z}_2^3 \\ &\quad - 2z_1 z_2^2 \bar{z}_2^3 - 3z_2^3 \bar{z}_1 \bar{z}_2^2 \\ &\quad + 5z_2^3 \bar{z}_1 \bar{z}_2^2 - iz_2^3 \bar{z}_2^3 \\ &\quad - 2z_2^3 \bar{z}_1 \bar{z}_2^2 - 3z_1 z_2^2 \bar{z}_2^3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le champ $X_1 = 5z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$ est donc un automorphisme infinitésimal CR à lui seul et $X_2 = iz_2 \frac{\partial}{\partial z_1}$ également. X est donc décomposable en partie diagonale et partie non diagonale (qui est ici en particulier nilpotente), $X = X_1 + X_2$. Du point de vue matriciel,

$$A_X = \begin{pmatrix} 5 & i \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous remarquons qu'il s'agit de la décomposition qui nous intéresse et qu'il ne s'agit ni de la décomposition de Jordan, clairement, ni de celle de Dunford (qui décompose toute matrice en une matrice diagonalisable et une nilpotente⁹⁴).

93. Elle vérifie le lemme 4.1.8, p.90, qui est facilement adaptable au cas PQ .

94. Cf. [34], p.188, théorème 6.32. La décomposition de Dunford de A_X est A_X elle-même, déjà diagonalisable.

Lemme 3.2.13.

Soit une hypersurface monomiale de type PQ .

Alors toute rotation $X \in \mathfrak{g}_0$ peut être décomposée en une rotation purement diagonale, $X_1 \in \mathfrak{g}_0^{\text{Re}} \oplus \mathfrak{g}_0^{\text{Im}}$, et une rotation sans diagonale qui elle, est nilpotente, $X_2 \in \mathfrak{g}_0^{\text{Nil}}$:

$$X = X_1 + X_2.$$

Remarque 3.2.14.

Ce lemme nous permet de séparer les rotations en plusieurs sous-groupes. Les rotations diagonales sont séparées en deux : les rotations réelles, purement réelles, et les rotations imaginaires, purement imaginaire⁹⁵. Enfin, pour les rotations non diagonales, le lemme nous indiquent qu'elles sont nilpotentes dans le cas monomial.

Démonstration. $X \in \mathfrak{g}_0$. Soit une rotation

$$X = a_{11}z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + a_{22}z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + a_{12}z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + a_{21}z_1 \frac{\partial}{\partial z_2},$$

ou du point de vue matriciel⁹⁶,

$$A_X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

et nous considérons les monômes $P = c_P z_1^\alpha z_2^\beta$ et $Q = c_Q z_1^\gamma z_2^\delta$, où c_P et c_Q sont des constantes complexes. Alors,

$$0 = 2 \operatorname{Re} X \left(c_P \overline{c_Q} z_1^\alpha z_2^\beta \overline{z_1^\gamma z_2^\delta} + c_Q \overline{c_P} z_1^\gamma z_2^\delta \overline{z_1^\alpha z_2^\beta} \right)$$

\Leftrightarrow

95. Pour plus de précision sur cette décomposition, cf. théorème 4.3.1, p.111, même s'il s'agit d'un cas plus général.

96. Cf. section 2.2.3, p.44.

$$\begin{aligned}
0 &= a_{11}c_P\overline{c_Q}\alpha z_1^\alpha z_2^\beta \overline{z_1}^\gamma \overline{z_2}^\delta + a_{11}c_Q\overline{c_P}\gamma z_1^\delta z_2^\alpha \overline{z_1}^\alpha \overline{z_2}^\beta \\
&+ a_{12}c_P\overline{c_Q}\alpha z_1^{\alpha-1} z_2^{\beta+1} \overline{z_1}^\gamma \overline{z_2}^\delta + a_{12}c_Q\overline{c_P}\gamma z_1^{\gamma-1} z_2^{\delta+1} \overline{z_1}^\alpha \overline{z_2}^\beta \\
&+ a_{21}c_P\overline{c_Q}\beta z_1^{\alpha+1} z_2^{\beta-1} \overline{z_1}^\gamma \overline{z_2}^\delta + a_{21}c_Q\overline{c_P}\delta z_1^{\gamma+1} z_2^{\delta-1} \overline{z_1}^\alpha \overline{z_2}^\beta \\
&+ a_{22}c_P\overline{c_Q}\beta \alpha z_1^\alpha z_2^\beta \overline{z_1}^\gamma \overline{z_2}^\delta + a_{22}c_Q\overline{c_P}\delta z_1^\delta z_2^\alpha \overline{z_1}^\alpha \overline{z_2}^\beta \\
&+ \overline{a_{11}}c_Q\overline{c_P}\alpha z_1^\gamma z_2^\delta \overline{z_1}^\alpha \overline{z_2}^\beta + \overline{a_{11}}c_P\overline{c_Q}\gamma z_1^\alpha z_2^\beta \overline{z_1}^\gamma \overline{z_2}^\delta \\
&+ \overline{a_{12}}c_Q\overline{c_P}\alpha z_1^\gamma z_2^{\delta-\alpha-1} \overline{z_1}^{\beta+1} + \overline{a_{12}}c_P\overline{c_Q}\gamma z_1^\alpha z_2^{\beta-\gamma-1} \overline{z_1}^{\delta+1} \\
&+ \overline{a_{21}}c_Q\overline{c_P}\beta z_1^\gamma z_2^{\delta-\alpha+1} \overline{z_1}^{\beta-1} + \overline{a_{21}}c_P\overline{c_Q}\delta z_1^\alpha z_2^{\beta-\gamma+1} \overline{z_1}^{\delta-1} \\
&+ \overline{a_{22}}c_Q\overline{c_P}\beta z_1^\gamma z_2^\delta \overline{z_1}^\alpha \overline{z_2}^\beta + \overline{a_{22}}c_P\overline{c_Q}\delta z_1^\alpha z_2^\beta \overline{z_1}^\gamma \overline{z_2}^\delta \\
&= (a_{11}c_P\overline{c_Q}\alpha + a_{22}c_P\overline{c_Q}\beta + \overline{a_{11}}c_P\overline{c_Q}\gamma + \overline{a_{22}}c_P\overline{c_Q}\delta) z_1^\alpha z_2^\beta \overline{z_1}^\gamma \overline{z_2}^\delta \\
&+ (a_{11}c_Q\overline{c_P}\gamma + a_{22}c_Q\overline{c_P}\delta + \overline{a_{11}}c_Q\overline{c_P}\alpha + \overline{a_{22}}c_Q\overline{c_P}\beta) \alpha z_1^\gamma z_2^\delta \overline{z_1}^\alpha \overline{z_2}^\beta \\
&+ a_{12}c_P\overline{c_Q}\alpha z_1^{\alpha-1} z_2^{\beta+1} \overline{z_1}^\gamma \overline{z_2}^\delta + a_{12}c_Q\overline{c_P}\gamma z_1^{\gamma-1} z_2^{\delta+1} \overline{z_1}^\alpha \overline{z_2}^\beta \\
&+ a_{21}c_P\overline{c_Q}\beta z_1^{\alpha+1} z_2^{\beta-1} \overline{z_1}^\gamma \overline{z_2}^\delta + a_{21}c_Q\overline{c_P}\delta z_1^{\gamma+1} z_2^{\delta-1} \overline{z_1}^\alpha \overline{z_2}^\beta \\
&+ \overline{a_{12}}c_Q\overline{c_P}\alpha z_1^\gamma z_2^{\delta-\alpha-1} \overline{z_1}^{\beta+1} + \overline{a_{12}}c_P\overline{c_Q}\gamma z_1^\alpha z_2^{\beta-\gamma-1} \overline{z_1}^{\delta+1} \\
&+ \overline{a_{21}}c_Q\overline{c_P}\beta z_1^\gamma z_2^{\delta-\alpha+1} \overline{z_1}^{\beta-1} + \overline{a_{21}}c_P\overline{c_Q}\delta z_1^\alpha z_2^{\beta-\gamma+1} \overline{z_1}^{\delta-1}.
\end{aligned}$$

Les deux premières lignes de la dernière expression doivent s'annuler seules. En effet, il suffit de contrôler les degrés des monômes pour s'en convaincre. Nous rappelons également qu'il n'est pas possible que $\alpha = \gamma$ et $\beta = \delta$, car l'hypersurface doit être holomorphiquement non dégénérée⁹⁷. Ainsi, le champ diagonal

$$X_1 = a_{11}z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + a_{22}z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \in \text{hol.} \quad \text{Il s'agit de la matrice } A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Nous en concluons que le champ

$$X_2 = X - X_1 = a_{12}z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + a_{21}z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} \in \text{hol.}, \quad \text{qui correspond à } A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

97. Cf. lemme 4.1.8, p.90. Le cas PQ est une simplification claire de ce dernier énoncé.

Nous allons montrer que X_2 est nilpotent. Comme X_2 est une rotation, cela signifie en particulier que

$$\begin{aligned}
0 = & a_{12}c_P\overline{c_Q}\alpha z_1^{\alpha-1}z_2^{\beta+1}\overline{z_1}^{\gamma-\delta} + a_{12}c_Q\overline{c_P}\gamma z_1^{\gamma-1}z_2^{\delta+1}\overline{z_1}^{\alpha-\beta} \\
& + a_{21}c_P\overline{c_Q}\beta z_1^{\alpha+1}z_2^{\beta-1}\overline{z_1}^{\gamma-\delta} + a_{21}c_Q\overline{c_P}\delta z_1^{\gamma+1}z_2^{\delta-1}\overline{z_1}^{\alpha-\beta} \\
& + \overline{a_{12}}c_Q\overline{c_P}\alpha z_1^\gamma z_2^{\delta-\alpha-1}\overline{z_2}^{\beta+1} + \overline{a_{12}}c_P\overline{c_Q}\gamma z_1^\alpha z_2^\beta \overline{z_1}^{\gamma-1}\overline{z_2}^{\delta+1} \\
& + \overline{a_{21}}c_Q\overline{c_P}\beta z_1^\gamma z_2^{\delta-\alpha+1}\overline{z_2}^{\beta-1} + \overline{a_{21}}c_P\overline{c_Q}\delta z_1^\alpha z_2^\beta \overline{z_1}^{\gamma+1}\overline{z_2}^{\delta-1},
\end{aligned}$$

ce qui n'est valide que si au moins a_{12} ou a_{21} est nul. En effet, trivialement, $a_{12} = a_{21} = 0$ fonctionne, mais il est également possible d'avoir

$$\begin{aligned}
a_{12}c_P\overline{c_Q}\alpha + \overline{a_{12}}c_Q\overline{c_P}\alpha &= 0 \\
\alpha - 1 &= \gamma \\
\beta + 1 &= \delta,
\end{aligned}$$

mais dans ce cas, le terme $a_{12}c_Q\overline{c_P}\gamma z_1^{\gamma-1}z_2^{\delta+1}\overline{z_1}^{\alpha-\beta}$ ne peut s'annuler. Il pose problème à cause des degrés (avec $a_{12} \neq 0$) et la seule possibilité est que $\gamma = 0$. Donc $\alpha = 1$. Nous avons aussi que $a_{12}c_P\overline{c_Q}$ est purement imaginaire et $a_{21} = 0$. Il est également possible d'avoir, pour les mêmes raisons,

$$\begin{aligned}
a_{21}c_P\overline{c_Q}\beta + \overline{a_{21}}c_Q\overline{c_P}\beta &= 0 \\
\alpha + 1 &= \gamma \\
\beta = 1 \text{ et } \delta = 0,
\end{aligned}$$

et dans ce cas, c'est $a_{21}c_P\overline{c_Q}$ qui est purement imaginaire et $a_{12} = 0$. Nous notons également que si a_{12} et a_{21} sont tous deux non nuls, alors $\beta = 1$, $\delta = 0$, $\gamma = 0$ et $\alpha = 1$. Nous obtenons dans ce cas une hypersurface qui est une hyperquadrique, cas déjà traité. En résumé, la matrice correspondante à X_2 a les trois configurations suivantes possibles :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Or, clairement, nous voyons que ces matrices sont nilpotentes. Nous venons même de montrer que, pour $i \neq j$,

$$a_{ij} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a_{ji} = 0.$$

□

Exemple 3.2.15.

L'hypersurface non monomiale de type PQ avec $P = z_1 z_2^2 + \frac{1}{2} z_2^3$ et $Q = z_2^3$, donnée par l'équation

$$\text{Im } w = z_1 z_2^2 \bar{z}_2^3 + z_2^3 \bar{z}_1 \bar{z}_2^2 + z_2^3 \bar{z}_2^3,$$

ne satisfait pas le lemme. En effet, les parties diagonale et non diagonale de la rotation

$$X = 5z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + 3z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

interfèrent et demeurent donc inséparables. En effet,

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \text{Re } X \left(z_1 z_2^2 \bar{z}_2^3 + z_2^3 \bar{z}_1 \bar{z}_2^2 + z_2^3 \bar{z}_2^3 \right) \\ &= 5z_1 z_2^2 \bar{z}_2^3 + 3z_2^3 \bar{z}_2^3 \\ &\quad - 2z_1 z_2^2 \bar{z}_2^3 - 3z_2^3 \bar{z}_1 \bar{z}_2^2 - 3z_2^3 \bar{z}_2^3 \\ &\quad + 5z_2^3 \bar{z}_1 \bar{z}_2^2 + 3z_2^3 \bar{z}_2^3 \\ &\quad - 2z_2^3 \bar{z}_1 \bar{z}_2^2 - 3z_1 z_2^2 \bar{z}_2^3 - 3z_2^3 \bar{z}_2^3. \end{aligned}$$

Lemme 3.2.16. ([49], p.259, lemme 3.2)

Soit une hypersurface monomiale de type PQ . Alors l'hypersurface est balancée.

Propriétés de $\mathfrak{g}_0^{\text{Re}}$

Lemme 3.2.17. ([49], p.260, lemme 3.5)

Soit une hypersurface M de type PQ . M admet une rotation réelle si et seulement si M est monomiale. De plus, dans ce cas, $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0^{\text{Re}} = 1$.

Propriétés de $\mathfrak{g}_0^{\text{Im}}$

Remarque 3.2.18.

Il n'est pas possible d'étudier $\mathfrak{g}_0^{\text{Im}}$ en adaptant une situation de $\mathfrak{g}_0^{\text{Re}}$. En effet, en partant d'une certaine hypersurface polynomiale $\text{Im } w = \mathcal{P}$, l'hypersurface $\text{Im } w = i\mathcal{P}$ est inimaginable, car non réelle.

Lemme 3.2.19. ([49], p.259, lemme 3.4)

Soit une hypersurface M de type PQ .

Alors M admet une rotation imaginaire si et seulement si M est une hypersurface balancée. De plus, X est une rotation imaginaire si et seulement si cX , $c \in \mathbb{R}^$, est un champ complexe reproducteur.*

Propriétés de $\mathfrak{g}_0^{\text{Nil}}$

Lemme 3.2.20. ([49], p.261, lemme 3.6)

Soit une hypersurface M de type PQ . Si M admet une rotation nilpotente, alors M est biholomorphe à

$$\text{Im } w = iz_1^k z_2 \bar{z}_1^{-k+1} - iz_1^{k+1} \bar{z}_1^k \bar{z}_2.$$

De plus, la dimension réelle des rotations nilpotentes est 1.

Théorème 3.2.21. ([49], p.263, théorème 4.4)

Soit une hypersurface M de type PQ . Alors $1 \leq \dim \mathfrak{g}_0 \leq 4$. De plus,

$$\dim \mathfrak{g}_0 = 4 \Leftrightarrow M \text{ est biholomorphe à } \text{Im } w = iz_1^{k+1} \bar{z}_1^k \bar{z}_2 - iz_1^k z_2 \bar{z}_1^{-k+1},$$

$$\dim \mathfrak{g}_0 = 3 \Leftrightarrow M \text{ n'est pas biholomorphe à l'hypersurface précédente et } M \text{ est monomiale,}$$

$$\dim \mathfrak{g}_0 = 2 \Leftrightarrow M \text{ est balancée et non monomiale,}$$

Démonstration. Premièrement, notons que $\dim \mathfrak{g}_0^{\text{Im}} \in \{0; 1\}$ et que $\dim \mathfrak{g}_0^{\text{Re}} \in \{1; 2\}$. En effet, si nous considérons deux rotations diagonales,

$$\begin{aligned} X &= az_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + bz_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \\ X' &= cz_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + dz_2 \frac{\partial}{\partial z_2}, \end{aligned}$$

alors les combinaisons linéaires de ces rotations

$$z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} = \frac{(dX - bX')}{ad - cb} \quad \text{et} \quad z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} = \frac{(cX - aX')}{cb - ad}$$

sont elles-mêmes des rotations. Toutefois, si au champ d'Euler, qui est formellement une rotation, nous soustrayons les combinaisons linéaires ci-dessus, nous obtenons que $w \frac{\partial}{\partial w}$ est un champ CR, ce qui est absurde ! Cette réflexion vaut pour des constantes complexes, mais nous pouvons les imaginer purement réelles ou purement imaginaires. Ainsi, en dimensions réelles, $\dim \mathfrak{g}_0^{\text{Im}} \leq 1$ et $\dim \mathfrak{g}_0^{\text{Re}} \leq 1$. Or, il faut ajouter le champ d'Euler, $E \in \mathfrak{g}_0^{\text{Re}}$, que nous ajoutons, bien que non rigide, formellement à $\mathfrak{g}_0^{\text{Re}}$.

Considérons maintenant la seule hypersurface (au biholomorphisme près) contenant une et une seule rotation nilpotente : $\text{Im } w = iz_1^{k+1} \bar{z}_1^k \bar{z}_2 - iz_1^k z_2 \bar{z}_1^{k+1}$ (cf. lemme 3.2.20). Cette dernière est monomiale donc contient une rotation réelle (lemme 3.2.17) et est en particulier balancée (lemme 3.2.16), donc contient une rotation imaginaire (lemme 3.2.19). Ainsi, pour cette hypersurface, la dimension des rotations est maximale,

$$\dim \mathfrak{g}_0 = \dim \mathfrak{g}_0^{\text{Re}} + \dim \mathfrak{g}_0^{\text{Im}} + \dim \mathfrak{g}_0^{\text{Nil}} = 2 + 1 + 1 = 4.$$

Pour une hypersurface monomiale, mais non biholomorphe à la précédente, le raisonnement est le même, rotation nilpotente omise : $\dim \mathfrak{g}_0 = 3$. Pour une hypersurface non monomiale (sans rotation réelle) et balancée (avec une rotation imaginaire), $\dim \mathfrak{g}_0 = 2$, et pour une hypersurface non balancée, $\dim \mathfrak{g}_0 = 1$. □

Propriétés de \mathfrak{g}_c

Lemme 3.2.22. ([49], p.261, lemme 3.8)

Soit une hypersurface M de type PQ . M admet une rotation généralisée si et seulement si le jacobien $J(P, Q)$ divise QQ_{z_1} et QQ_{z_2} .

Propriétés de \mathfrak{g}_n

Théorème 3.2.23. ([49], p.257, théorème 2.1)

Soit $\mathcal{P}(z, \bar{z})$ un polynôme homogène de degré 1 tel que l'hypersurface

$$M := \{ \text{Im } w = \mathcal{P}(z, \bar{z}) \mid (z, w) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C} \}$$

soit holomorphiquement non dégénérée et avec

$$\dim \mathfrak{g}_n > 0.$$

Alors⁹⁸ M est biholomorphe à

$$\text{Im } w = z_1 \bar{z}_2^\ell + z_2^\ell \bar{z}_1$$

ou à

$$\text{Im } w = |z_1|^2 \pm |z_2|^{2\ell}.$$

3.2.3 Résultats

Théorème 3.2.24.

Soit une hypersurface M de type PQ avec $\dim \mathfrak{g}_c = 1$. Alors $\dim \mathfrak{g} \in \{10; 7; 6; 3\}$. De plus,

$$\dim \mathfrak{g} = 10 \Leftrightarrow M \text{ est biholomorphe à } \text{Im } w = z_1 \bar{z}_2^\ell + z_2^\ell \bar{z}_1,$$

$$\dim \mathfrak{g} = 7 \Leftrightarrow M \text{ est biholomorphe à } \text{Im } w = z_1 z_2^\ell \bar{z}_2^\ell + z_2^\ell \bar{z}_1 \bar{z}_2^\ell,$$

$$\dim \mathfrak{g} = 6 \Leftrightarrow M \text{ n'est pas biholomorphe aux deux hypersurfaces précédentes et } \\ M \text{ est monomiale,}$$

$$\dim \mathfrak{g} = 3 \Leftrightarrow M \text{ n'est pas monomiale.}$$

98. Cf. [51], p.3, théorème 1.4.

Démonstration. La première équivalence est prouvée dans le cas modèle de la section précédente. Pour tous les autres cas, nous avons $\dim \mathfrak{g}_n = 0$, par le théorème 3.2.23 (la seconde hypersurface de ce théorème est Levi non dégénérée). Supposons donc que M ne soit pas biholomorphe à l'hypersurface modèle pour la fin de la preuve (donc $\dim \mathfrak{g}_n = 0$).

Supposons que $\dim \mathfrak{g}_t \neq 0$, dans ce cas, par le lemme 3.2.11, $\dim \mathfrak{g}_t = 1$ et M est biholomorphe à $\text{Im } w = z_1 z_2^\ell \bar{z}_2^{-\ell} + z_2^\ell \bar{z}_1 \bar{z}_2^{-\ell}$. M est donc monomiale et, par le théorème 3.2.21, $\dim \mathfrak{g}_0 = 3$. M est également balancée (car monomiale, lemme 3.2.16), donc $\dim \mathfrak{g}_1 = 1$ par le théorème 3.2.9. De plus, par hypothèse, $\dim \mathfrak{g}_c = 0$. Ainsi, $\dim \mathfrak{g} = 7$ car

$$\dim \mathfrak{g}_{-1} + \dim \mathfrak{g}_t + \dim \mathfrak{g}_0 + \dim \mathfrak{g}_n + \dim \mathfrak{g}_c + \dim \mathfrak{g}_1 = 1 + 1 + 3 + 0 + 1 + 1 = 7.$$

Supposons que $\dim \mathfrak{g}_t = 0$ et que M soit monomiale, alors le raisonnement est le même et $\dim \mathfrak{g} = 6$ (en ayant enlevé la symétrie tubulaire).

Supposons enfin que M soit non monomiale. Nous savons donc que $\dim \mathfrak{g}_t = 0$ (lemme 3.2.11), $\dim \mathfrak{g}_0^{Re} = 1$ (lemme 3.2.17 avec le champ d'Euler) et $\dim \mathfrak{g}_0^{Nil} = 0$ (lemmes 3.2.11 et 3.2.20). Nous pouvons également prouver que, comme $\dim \mathfrak{g}_c = 1$, M n'est pas balancée⁹⁹, donc $\dim \mathfrak{g}_0^{Im} = 0$ (lemme 3.2.19) et $\dim \mathfrak{g}_1 = 0$ (théorème 3.2.4). □

Théorème 3.2.25.

Soit une hypersurface M de type PQ avec $\dim \mathfrak{g}_c = 0$. Alors $\dim \mathfrak{g} \in \{6; 5; 4; 2\}$. De plus,

$$\dim \mathfrak{g} = 6 \Leftrightarrow M \text{ est biholomorphe à } \text{Im } w = iz_1^{k+1} \bar{z}_1^{-k} \bar{z}_2 - iz_1^k z_2 \bar{z}_1^{-k+1},$$

$$\dim \mathfrak{g} = 4 \Leftrightarrow M \text{ n'est pas biholomorphe à l'hypersurface précédente et } \\ M \text{ est monomiale,}$$

$$\dim \mathfrak{g} = 5 \Leftrightarrow M \text{ est balancée et non monomiale,}$$

$$\dim \mathfrak{g} = 2 \Leftrightarrow M \text{ est dans les autres cas.}$$

99. Cf. corollaire 2.1.26, p.40

Démonstration. Nous avons $\dim \mathfrak{g}_{-1} = 1$ comme toujours, $\dim \mathfrak{g}_c = 0$ par hypothèse, et $\dim \mathfrak{g}_t = 0$ par le lemme 3.2.11, et donc $\dim \mathfrak{g}_n = 0$.

Si M est biholomorphe à $\text{Im } w = iz_1^{k+1}\overline{z_1^k z_2} - iz_1^k z_2 \overline{z_1^{k+1}}$, par le théorème 3.2.21, $\dim \mathfrak{g}_0 = 4$. De plus, $\dim \mathfrak{g}_1 = 1$, car M est équilibrée (car monomiale, lemme 3.2.16). Ainsi, $\dim \mathfrak{g} = 6$. La réflexion est la même pour une hypersurface monomiale non biholomorphe à l'hypersurface précédente, en enlevant la symétrie nilpotente, $\dim \mathfrak{g} = 5$. De même, avec une hypersurface non monomiale, mais équilibrée, toujours avec le théorème 3.2.21 et $\dim \mathfrak{g}_1 = 1$, $\dim \mathfrak{g} = 4$. Pour tous les autres cas, $\dim \mathfrak{g}_0 = 1$ et $\dim \mathfrak{g}_1 = 0$, donc $\dim \mathfrak{g} = 2$. \square

Théorème 3.2.26. ([49], p.263, théorème 4.3)

Il existe un modèle non monomial M tel que $\dim \mathfrak{g}_c > 0$.

Démonstration. Prenons les polynômes non monomiaux

$$P(z_1, z_2) = iz_1^2 z_2^3 (z_1 - z_2)$$

$$Q(z_1, z_2) = 3z_1^3 z_2^5 (z_1 - z_2)$$

avec le champ vectoriel

$$X = z_1 z_2^2 (5z_1 - 6z_2) \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2^3 (4z_1 - 3z_2) \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Nous calculons aisément que $X(P) = iQ$ et $X(Q) = 0$. Ainsi, par le théorème 3.2.4 (et $M = 1$, $\mathcal{P} = T_1 = \text{Re } P\overline{Q}$, et dans la définition 3.2.3, $n = 2$, $U^1 = V^1 = P$, $U^2 = V^2 = Q$ et $c = d = i$), $X \in \mathfrak{g}_c$. \square

Corollaire 3.2.27.

Soit M une hypersurface de type PQ . Alors

$$\dim \mathfrak{g} \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 10\}.$$

Chapitre 4

Nouveaux cas

Ce chapitre est le cœur de ce travail. La première section, avec le cas modèle, est à considérer comme une introduction. Un résultat important de cette partie, pour la généralisation à suivre, est le lemme 4.1.8, p.90, qui donne un outil pratique pour vérifier qu'une hypersurface homogène est holomorphiquement dégénérée ou non.

Le deuxième section, au sujet du problème PQR découplé (une variable est réservée à R) généralise le problème PQ et donne un résultat complet, le théorème 4.2.11, p.109.

La dernière section traite du problème PQR monomial, et requiert des outils algébriques développés. L'algèbre linéaire s'avère effectivement nécessaire, notamment pour décrire les rotations généralisées, mais le résultat le plus important reste le théorème 4.3.1, p.111, qui présente une décomposition originale des rotations et ouvre la voie à de nouveaux horizons. La dimension de l'ensemble des automorphismes infinitésimaux réels analytiques CR de toute hypersurface monomiale de type PQR est décrite dans le théorème 4.3.24, p.158.

4.1 Cas modèle

Dans \mathbb{C}^3 , le cas modèle où $\mathcal{P} = z_1 \bar{z}_2^\ell + z_2^\ell \bar{z}_1$ a déjà été étudié et il se révèle riche ¹⁰⁰. Dans \mathbb{C}^4 , une généralisation possible de ce cas est l'hypersurface modèle M de \mathbb{C}^4 dont les éléments (z_1, z_2, z_3, w) satisfont

$$\operatorname{Im} w = z_1 \bar{z}_2^\ell + z_2^\ell \bar{z}_1 + R \bar{R},$$

où R est un monôme qui dépend de z_1, z_2 et obligatoirement de z_3 (pour que l'hypersurface soit holomorphiquement non dégénérée) et qui est homogène de degré $\frac{\ell+1}{2}$, avec $\ell \geq 1$ impair. Nous observons que le fait que R soit un monôme restreint considérablement la généralité. Notons également que ce cas modèle nous servira de tremplin pour aborder une généralisation du problème $\operatorname{Im} w = P \bar{Q} + Q \bar{P}$ de \mathbb{C}^3 , à savoir $\operatorname{Im} w = P \bar{Q} + Q \bar{P} + R \bar{R}$ dans \mathbb{C}^4 . Nous rappelons enfin les conditions nécessaires que l'hypersurface réelle soit Levi dégénérée, holomorphiquement non dégénérée et de type fini.

Pour le type fini ¹⁰¹, le degré du polynôme est $\ell + 1$, cette hypersurface est donc de type fini $\ell + 1$. Le cas $\ell = 1$ n'est que relativement intéressant, car très particulier - l'hypersurface est Levi non dégénérée ¹⁰². D'autre part, il faut s'assurer que l'hypersurface soit bel et bien holomorphiquement non dégénérée.

Proposition 4.1.1.

Soit $\ell \geq 1$. L'hypersurface M de \mathbb{C}^4 dont les éléments (z_1, z_2, z_3, w) satisfont $\operatorname{Im} w = z_1 \bar{z}_2^\ell + z_2^\ell \bar{z}_1 + R \bar{R}$, avec R qui dépend obligatoirement de z_3 , est holomorphiquement non dégénérée.

Démonstration. Selon la définition ¹⁰³ supposons qu'il existe un champ vectoriel X holomorphe qui est tangent à M . Un tel champ s'écrit

$$X = \sum_{j=1}^3 a_j(z, w) \frac{\partial}{\partial z_j} + b(z, w) \frac{\partial}{\partial w},$$

100. Avec $\dim \mathfrak{g} = 10$, cf. théorème 3.1.5, p.62.

101. Cf. remarque 1.1.43.b), p.17.

102. Dans ce cas, nous pouvons calculer que, pour $\operatorname{Im} w = z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_3 \bar{z}_3$, alors $\dim \mathfrak{g} = 24$. Plus précisément, $\dim \mathfrak{g}_{-1} = 1$, $\dim \mathfrak{g}_{-\frac{1}{2}} = 6$, $\dim \mathfrak{g}_0 = 10$, $\dim \mathfrak{g}_{\frac{1}{2}} = 6$, et $\dim \mathfrak{g}_1 = 1$.

103. Cf. définition 2.1.23, p.36.

où les fonctions a_j et b sont holomorphes. Supposé tangent, ce champ satisfait donc

$$\begin{aligned} 0 &= X|_M = X(\mathcal{P} - \text{Im } w) \\ &= X(z_1 \bar{z}_2^\ell + z_2^\ell \bar{z}_1 + R\bar{R} - \text{Im } w) \\ &= a_1(z, w) \bar{z}_2^\ell + \ell a_2(z, w) z_2^{\ell-1} \bar{z}_1 + a_3(z, w) R_{z_3} \bar{R} + \frac{i}{2} b(z, w), \end{aligned}$$

ce qui est impossible si X n'est pas nul. En effet, avec le fait que R dépend de z_3 , les parties antiholomorphes de tous ces termes sont incompatibles. Aucun terme ne peut donc se compenser et $X = 0$. \square

Déterminons tout d'abord tous les champs vectoriels homogènes et rigides qui sont des automorphismes infinitésimaux CR.

Proposition 4.1.2.

Les seuls automorphismes infinitésimaux CR rigides et homogènes de M sont, de manière générale,

-) $X_1 = aW = a \frac{\partial}{\partial w}$, $a \in \mathbb{R}^*$, de degré -1 ;
-) $X_2 = i\ell a z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + i a z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$, $a \in \mathbb{R}^*$, de degré 0 ;
-) $X_3 = i a z_3 \frac{\partial}{\partial z_3}$, $a \in \mathbb{R}^*$, de degré 0 ;
-) $X_4 = \ell a z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - a z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{\ell+1-2 \deg_{z_1} R(\ell+1)-2 \deg_{z_3} R}{2 \deg_{z_3} R} a z_3 \frac{\partial}{\partial z_3}$, $a \in \mathbb{R}^*$, de degré 0 .

En particulier, si $R = z_3^{\frac{\ell+1}{2}}$, nous trouvons un cas particulier de X_4 ,

·) $X_{4'} = \ell a z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - a z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$, $a \in \mathbb{R}^*$, de degré 0 .

Si, de plus, R ne dépend pas de z_1 , nous pouvons ajouter

-) $X_5 = \frac{i}{2} a \frac{\partial}{\partial z_1} + a z_2^\ell \frac{\partial}{\partial w}$, $a \in \mathbb{R}^*$, de degré $-\frac{1}{\ell+1}$;
-) $X_{5'} = \frac{1}{2} a \frac{\partial}{\partial z_1} + i a z_2^\ell \frac{\partial}{\partial w}$, $a \in \mathbb{R}^*$, de degré $-\frac{1}{\ell+1}$;
-) $X_6 = i a z_2^\ell \frac{\partial}{\partial z_1}$, $a \in \mathbb{R}^*$, de degré $\frac{\ell-1}{\ell+1}$.

D'autre part, si $R\bar{R} = a z_2^{\frac{\ell-1}{2}} z_3 \bar{z}_2^{\frac{\ell-1}{2}} \bar{z}_3$, nous avons

·) $X_7 = -a z_2^{\frac{\ell-1}{2}} z_3 \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{1}{a} z_2^{\frac{\ell+1}{2}} \frac{\partial}{\partial z_3}$, $a \in \mathbb{R}^*$, de degré $\frac{\ell-1}{2(\ell+1)}$.

Démonstration. Comme de coutume, nous écrivons un automorphisme infinitésimal CR homogène et rigide

$$X = \sum_{j=1}^3 f_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j} + g(z) \frac{\partial}{\partial w}.$$

Il satisfait

$$\begin{aligned}
0 &= 2 \operatorname{Re} X(\mathcal{P} - \operatorname{Im} w) \\
&= \overset{1}{f_1(z) \overline{z_2}^\ell} + \overset{2}{f_1(z) R_{z_1} \overline{R}} + \overset{3}{\ell f_2(z) z_2^{\ell-1} \overline{z_1}} + \overset{4}{f_2(z) R_{z_2} \overline{R}} + \overset{5}{f_3(z) R_{z_3} \overline{R}} + \overset{6}{\frac{i}{2} g(z)} \\
&\quad + \overset{7}{f_1(z) z_2^\ell} + \overset{8}{f_1(z) R \overline{R_{z_1}}} + \overset{9}{\ell f_2(z) \overline{z_2}^{\ell-1} z_1} + \overset{10}{f_2(z) R \overline{R_{z_2}}} + \overset{11}{f_3(z) R \overline{R_{z_3}}} - \overset{12}{\frac{i}{2} g(z)}.
\end{aligned}$$

Pour être certain de ne pas oublier toutes les annulations possibles des 12 termes numérotés ci-dessus, nous articulons notre réflexion en prenant chacun des coefficients, $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$ et $g(z)$ l'un après l'autre, puis, pour chaque coefficient, nous prenons un terme après l'autre et regardons avec quel autre des douze termes il peut s'annuler. Nous remarquons également qu'une annulation qui fait intervenir trois termes ou plus, tous dépendants, est impossible. En effet, si tel était le cas, il ne serait pas difficile de déduire une contradiction ¹⁰⁴.

Par rapport au premier coefficient de X , $f_1(z)$. Première partie.

Le premier terme, $f_1(z) \overline{z_2}^\ell$, ne peut s'annuler avec le deuxième terme, car par rapport aux parties antiholomorphes, R ne peut être égal à $\overline{z_2}^\ell$. Il doit effectivement dépendre de z_3 . Pour la même raison, toujours du point de vue des parties antiholomorphes, ce premier terme ne peut s'annuler avec les quatre termes qui suivent ($\ell f_2(z) z_2^{\ell-1} \overline{z_1}$, $f_2(z) R_{z_2} \overline{R}$, $f_3(z) R_{z_3} \overline{R}$ et $\frac{i}{2} g(z)$).

Une annulation, toujours du premier terme, est possible avec le septième terme, son conjugué, $\overline{f_1(z) z_2^\ell}$, prenant uniquement $f_1(z) = iz_2^\ell$. Toutefois, dans ce cas, le deuxième terme, $f_1(z) R_{z_1} \overline{R}$, pose problème. En effet, sa partie antiholomorphe implique qu'elle ne pourrait s'annuler qu'avec des termes en R , mais sa partie holomorphe est trop pauvre en z_1 (à la fois R_{z_2} , R_{z_3} et R ont un exposant correspondant à z_1 plus élevé). Nous en concluons que $R_{z_1} = 0$. Nous obtenons X_6 (f_2 est indépendant donc remis à plus tard).

L'annulation est impossible avec $\overline{f_1(z) R \overline{R_{z_1}}}$, huitième terme. En effet, comme R dépend de z_3 , en regardant les parties antiholomorphes, $f_1(z) R_{z_1}$ dépend également de z_3 et ne peut annuler z_2^ℓ . Le même argument est valable avec le dixième terme, $\overline{f_2(z) R \overline{R_{z_2}}}$ qui n'a aucune chance d'annulation.

104. Nous pouvons également considérer que l'annulation de trois termes consiste en deux annulations imbriquées de deux termes. En parcourant la démonstration, il est possible de conclure que cela est impossible.

Concernant le neuvième terme, $\ell \overline{f_2(z)} \overline{z_2}^{\ell-1} z_1$, il peut s'annuler avec le premier si $f_1(z) = \ell z_1$ et $f_2(z) = -z_2$ ou si $f_1(z) = i\ell z_1$ et $f_2(z) = iz_2$. Mais dans ces deux cas, à cause des autres termes touchés par $f_1(z)$ et $f_2(z)$, il faut également que les deuxième, quatrième, huitième et dixième termes s'annulent (avec $g(z) = 0$ et nous notons que, par conjugaison, l'annulation du troisième avec le neuvième terme est une simple conséquence). Les cinquième et onzième termes peuvent également intervenir.

Séparons les deux possibilités de cette annulation des premier et neuvième termes. Pour la première possibilité, $f_1(z) = \ell z_1$ et $f_2(z) = -z_2$, et nous avons

$$\ell z_1 R_{z_1} \overline{R} - z_2 R_{z_2} \overline{R} + \ell R \overline{z_1} \overline{R_{z_1}} - R \overline{z_2} \overline{R_{z_2}} + f_3(z) R_{z_3} \overline{R} + \overline{f_3(z)} R \overline{R_{z_3}} = 0. \quad (4.1)$$

La partie avec f_3 peut être nulle, mais elle peut également intervenir avec $f_3(z) = cz_3$, $c \in \mathbb{C}^*$. En outre, le monôme R a une grande importance ici. Nous le notons

$$R = z_1^\alpha z_2^\beta z_3^\gamma,$$

avec $\gamma \neq 0$. Ainsi, l'équation (4.1) devient

$$\ell\alpha - \beta + c\gamma = 0, \quad (4.2)$$

si $f_3(z) = cz_3$ ou

$$\ell\alpha - \beta = 0, \quad (4.3)$$

si $f_3(z) = 0$. Dans tous les cas, pour des raisons d'homogénéité de \mathcal{P} ,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\ell + 1}{2}. \quad (4.4)$$

Nous distinguons donc les deux cas où f_3 est nul ou non. Si $f_3(z) = 0$ alors, $\beta = \ell\alpha$, par l'équation (4.3). D'une part, si $\alpha = \beta = 0$, autrement dit si R ne dépend que de $z_3^{\frac{\ell+1}{2}}$, nous obtenons

$$X_{4'} = \ell z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

D'autre part, si $\beta = \ell\alpha \neq 0$, nous observons l'équation (4.4), qui devient

$$\begin{aligned}
\alpha + \ell\alpha + \gamma &= \frac{\ell+1}{2} \\
\Leftrightarrow 2\alpha(1 + \ell) + 2\gamma &= \ell + 1 \\
\Leftrightarrow 2\alpha(\ell + 1) + 2\gamma &= \ell + 1 \\
\Leftrightarrow \gamma &= \frac{\ell + 1 - 2\alpha(\ell + 1)}{2} \\
&\stackrel{\alpha \geq 1}{\leq} \frac{\ell + 1 - 2(\ell + 1)}{2} = -\frac{\ell + 1}{2} \\
&\stackrel{\ell \geq 1}{\leq} -\frac{1 + 1}{2} = -1 < 0.
\end{aligned}$$

Cela n'est pas possible, car il s'agit d'une contradiction. Pour conclure avec cette première possibilité sous-jacente à l'annulation des premier et neuvième termes, supposons que f_3 n'est pas nul, avec $c \neq 0$. Additionnant les équations (4.2) et (4.4), nous avons

$$\alpha(\ell + 1) + \gamma(c + 1) = \frac{\ell + 1}{2} \Leftrightarrow c = \frac{\ell + 1 - 2\alpha(\ell + 1) - 2\gamma}{2\gamma}.$$

Nous obtenons X_4 . Nous remarquons également que c est toutefois nul lorsque R ne dépend que de z_3 . En effet, $\alpha = 0$ et $\ell + 1 = 2\gamma$. Nous observons donc que X_4 est une généralisation de X_4' .

Pour la seconde possibilité de l'annulation des premier et neuvième termes, nous rappelons que $f_1(z) = iz_1$ et $f_2(z) = iz_2$, et nous avons,

$$iz_1 R_{z_1} \bar{R} + iz_2 R_{z_2} \bar{R} - i\ell R_{\bar{z}_1} \overline{R_{z_1}} - iR_{\bar{z}_2} \overline{R_{z_2}} + f_3(z) R_{z_3} \bar{R} + \overline{f_3(z)} R \overline{R_{z_3}} = 0$$

ce qui est le cas puisque

$$iz_1 R_{z_1} \bar{R} - i\ell R_{\bar{z}_1} \overline{R_{z_1}} = 0 \quad \text{et} \quad iz_2 R_{z_2} \bar{R} - iR_{\bar{z}_2} \overline{R_{z_2}} = 0,$$

(ce qui ne pose jamais de problème). La partie avec f_3 est laissée indépendante (avec X_3). Nous obtenons X_2 et venons donc d'étudier l'annulation du deuxième terme avec le huitième, celle du troisième avec le septième, et celle du quatrième avec le dixième terme.

Une annulation, toujours du premier terme, est possible avec le onzième terme, $\overline{f_3(z)R}R_{z_3}$, si $R = -f_1$ (parties holomorphes) et $z_2^\ell = f_3(z)R_{z_3}$ (parties antiholomorphes). R ne peut dépendre de z_1 et a pour facteur z_3 . Vu son degré,

$$R = z_2^{\frac{\ell-1}{2}} z_3 = -f_1(z).$$

Ainsi, pour compenser, $f_3(z) = z_2^{\frac{\ell+1}{2}}$. En ajoutant un coefficient réel a , nous obtenons X_7 . Le coefficient ne peut être que réel, car il est celui de $R\overline{R}$ et de f_1 .

Une autre annulation est possible avec $-\frac{i}{2}\overline{g(z)}$, douzième terme, en prenant $f_1(z) = \frac{i}{2}$ et $g(z) = z_2^\ell$ ou $f_1(z) = \frac{1}{2}$ et $g(z) = iz_2^\ell$. Toutefois, dans ces deux cas, le deuxième terme, $f_1(z)R_{z_1}\overline{R}$, pose problème. En effet, comme ci-dessus, sa partie holomorphe est trop pauvre en z_1 . Ainsi, $R_{z_1} = 0$. Nous obtenons donc X_4 et $X_{5'}$.

Par rapport au premier coefficient de X , $f_1(z)$. Seconde partie.

Il faut maintenant étudier les annulations possibles par rapport au deuxième terme, $f_1(z)R_{z_1}\overline{R}$. L'annulation entre le premier et le deuxième terme a déjà été traitée (nous ne reviendrons désormais plus sur ce genre de redite).

L'annulation avec le troisième terme est impossible (en comparant les parties antiholomorphes). Avec le quatrième terme, l'annulation serait possible avec $f_1(z) = z_1$ et $f_2(z) = -z_2$, mais cela est incompatible avec les autres termes (cf. le champ X_4 , ci-dessus, avec $f_1(z) = \ell z_1$ et $f_2(z) = -z_2$).

Par rapport au cinquième terme, il faudrait, que $f_1(z) = iz_1$, $f_3(z) = -iz_3$ avec les mêmes degrés de R par rapport à z_1 et z_3 . Le i est nécessaire pour l'annulation de premier et du septième terme. Mais $f_1(z) = iz_1$ implique déjà une annulation (du deuxième avec le huitième termes) qui est plus simple (sans la condition sur R). En parallèle, $f_3(z) = -iz_3$ implique une annulation du cinquième et du onzième terme que nous traitons plus loin (annulations croisées). La réflexion est la même quant à l'annulation avec le dixième ou le onzième terme.

L'annulation est impossible avec les sixième, douzième (pour des raisons de mixité), septième et neuvième termes (cf. parties holomorphes).

L'annulation avec le huitième terme est possible avec $f_1(z) = iz_1$, ce qui est inclus dans X_2 .

Par rapport au deuxième coefficient de X , $f_2(z)$.

Le troisième terme, $\ell f_2(z) z_2^{\ell-1} \bar{z}_1$, ne peut s'annuler avec le quatrième, le cinquième et le dixième terme pour des raisons de terme en z_3 manquant dans la partie antiholomorphe. C'est aussi le cas avec le neuvième terme (pour des raisons de terme en z_2 manquant dans la partie antiholomorphe). Par rapport aux premier, deuxième, septième et huitième termes, la démarche a déjà été faite plus haut (à une conjugaison près si besoin). En écartant les cas triviaux du troisième terme (lui-même), du sixième et du douzième terme (avec $\ell > 1$), il reste le onzième terme, $\overline{f_3(z) R R_{z_3}}$, qui n'est pas concluant non plus. En effet, les parties holomorphes impliquent en particulier que R dépende de z_2 , ce qui est contradictoire avec les parties antiholomorphes.

Le quatrième terme, $f_2(z) R_{z_2} \bar{R}$, n'a pas de chance d'annulation avec le sixième, le septième, le neuvième et le douzième terme. Pour les cinquième, dixième et onzième termes, nous arrivons forcément à $f_2(z) = z_2$ ou iz_2 en plus d'autres contraintes, mais celle-ci est déjà contenue dans le cas général de X_2 (même réflexion que ci-dessus)¹⁰⁵. Les autres termes ont déjà été traités ci-dessus.

Par rapport au troisième coefficient de X , $f_3(z)$.

Il suffit de traiter les annulations du cinquième terme, $f_3(z) R_{z_3} \bar{R}$, mais elles ont toutes déjà été effectuées plus haut (à une conjugaison près si besoin, ce qui est également valable par rapport au onzième terme), sauf celle avec le onzième terme, son conjugué. Dans ce cas, nous prenons $f_3(z) = iz_3$ et nous obtenons ainsi X_3 .

Par rapport au dernier coefficient de X , $g(z)$.

Nous avons déjà analysé les annulations de $\frac{i}{2}g(z)$ avec les termes précédents. Il ne reste que $X_1 = W$, qui, dans l'équation, annule $\frac{i}{2}g(z)$ avec son conjugué. \square

Nous connaissons maintenant tous les champs vectoriels rigides et nous les intégrons.

Proposition 4.1.3.

Le champ W possède une 1-intégration ainsi qu'une 2-intégration pour l'hypersurface M .

105. L'annulation du quatrième et du cinquième terme revient à combiner X_2 et X_3 , en plus compliqué ; l'annulation du quatrième avec le dixième terme est comprise dans X_2 ; enfin, celle des quatrième et onzième termes est également une combinaison de X_2 et X_3 .

Démonstration. Nous savons déjà que W possède une intégration qui est le champ d'Euler¹⁰⁶, $E = \frac{1}{\ell+1} \sum_{j=1}^3 z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + w \frac{\partial}{\partial w}$.

Concernant la 2-intégration, il suffit de prouver que l'hypersurface est balancée¹⁰⁷, c'est-à-dire qu'il existe un champ reproducteur. Construisons ce champ. Soit

$$X = \sum_{j=1}^3 f_j \frac{\partial}{\partial z_j}$$

un champ reproducteur, c'est-à-dire que, pour un $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} X(\mathcal{P}) &= a\mathcal{P} \\ \Leftrightarrow f_1 \bar{z}_2^\ell + f_1 R_{z_1} \bar{R} + \ell f_2 z_2^{\ell-1} \bar{z}_1 + f_2 R_{z_2} \bar{R} + f_3 R_{z_3} \bar{R} &= a(z_1 \bar{z}_2^\ell + z_2^\ell \bar{z}_1 + R\bar{R}) \\ \Leftrightarrow \text{en observant les termes en } \bar{R} : & f_1 R_{z_1} + f_2 R_{z_2} + f_3 R_{z_3} = aR \\ \text{en observant les termes en } \bar{z}_2^\ell : & f_1 = az_1 \\ \text{en observant les termes en } \bar{z}_1 : & \ell f_2 = az_2. \end{aligned}$$

Ce système d'équation est clairement résoluble. □

Proposition 4.1.4.

Les champs X_5 et $X_{5'}$ ne possèdent pas de 2-intégrations et ont une seule 1-intégration chacun,

$$\begin{aligned} X_5^1 &= (z_1 z_2^\ell + \frac{i}{2} w) \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{1}{\ell} z_2^{\ell+1} \frac{\partial}{\partial z_2} + z_2^\ell w \frac{\partial}{\partial w}, \\ X_{5'}^1 &= (iz_1 z_2^\ell + \frac{1}{2} w) \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{i}{\ell} z_2^{\ell+1} \frac{\partial}{\partial z_2} + iz_2^\ell w \frac{\partial}{\partial w}. \end{aligned}$$

Démonstration. Nous rappelons que $R_{z_1} = 0$, qui est un critère pour l'existence des deux champs à intégrer. Nous commençons par fusionner les deux champs en un seul,

$$Y_5 = a \frac{\partial}{\partial z_1} + 2i\bar{a}z_2^\ell \frac{\partial}{\partial w}, \quad a \in \mathbb{C}^*.$$

Une 1-intégration de Y_5 est donc de type

$$Y_5^1 = (\phi_1(z) + aw) \frac{\partial}{\partial z_1} + \phi_2(z) \frac{\partial}{\partial z_2} + \phi_3(z) \frac{\partial}{\partial z_3} + (2i\bar{a}z_2^\ell w + \phi(z)) \frac{\partial}{\partial w},$$

106. Cf. exemple 2.1.20, p.35.

107. Cf. théorème 3.2.9, p.66. Cf. également définition 3.2.7, p.65, remarque 4.2.4, p.98 et théorème 2.1.25, p.39. Citer le lemme 4.2.5, p.99, serait d'ailleurs suffisant pour cette démonstration.

et pour que ce champ appartienne à $\text{hol}(M, p)$, nous posons

$$\begin{aligned}
0 &= 2 \operatorname{Re} Y_5^1(\mathcal{P} - \operatorname{Im} w) \\
&= \phi_1(z) \bar{z}_2^\ell + a w \bar{z}_2^\ell + \ell \phi_2(z) z_2^{\ell-1} \bar{z}_1 + \phi_2(z) R_{z_2} \bar{R} + \phi_3(z) R_{z_3} \bar{R} + 2i \bar{a} z_2^\ell w \frac{i}{2} + \frac{i}{2} \phi(z) \\
&\quad + (\dots) \\
&= \phi_1(z) \bar{z}_2^\ell + \ell \phi_2(z) z_2^{\ell-1} \bar{z}_1 + \phi_2(z) R_{z_2} \bar{R} + \phi_3(z) R_{z_3} \bar{R} \\
&\quad + \overline{\phi_1(z) \bar{z}_2^\ell} + \overline{\ell \phi_2(z) z_2^{\ell-1} \bar{z}_1} + \overline{\phi_2(z) R_{z_2} \bar{R}} + \overline{\phi_3(z) R_{z_3} \bar{R}} \\
&\quad + a(\mu + i\mathcal{P}) \bar{z}_2^\ell + \bar{a}(\mu - i\mathcal{P}) z_2^\ell - \bar{a} z_2^\ell (\mu + i\mathcal{P}) - a \bar{z}_2^\ell (\mu - i\mathcal{P}) \\
&= \phi_1(z) \bar{z}_2^\ell + \ell \phi_2(z) z_2^{\ell-1} \bar{z}_1 + \phi_2(z) R_{z_2} \bar{R} + \phi_3(z) R_{z_3} \bar{R} \\
&\quad + \overline{\phi_1(z) \bar{z}_2^\ell} + \overline{\ell \phi_2(z) z_2^{\ell-1} \bar{z}_1} + \overline{\phi_2(z) R_{z_2} \bar{R}} + \overline{\phi_3(z) R_{z_3} \bar{R}} + 2ia\mathcal{P} \bar{z}_2^\ell - 2i\bar{a}\mathcal{P} z_2^\ell \\
&= \phi_1(z) \bar{z}_2^\ell + \ell \phi_2(z) z_2^{\ell-1} \bar{z}_1 + \phi_2(z) R_{z_2} \bar{R} + \phi_3(z) R_{z_3} \bar{R} \\
&\quad + \overline{\phi_1(z) \bar{z}_2^\ell} + \overline{\ell \phi_2(z) z_2^{\ell-1} \bar{z}_1} + \overline{\phi_2(z) R_{z_2} \bar{R}} + \overline{\phi_3(z) R_{z_3} \bar{R}} \\
&\quad + 2ia z_1 \bar{z}_2^{2\ell} + 2ia z_2^\ell \bar{z}_1 \bar{z}_2^\ell + 2ia R_{z_2} \bar{R} - 2i\bar{a} z_1 z_2^\ell \bar{z}_2^\ell - 2i\bar{a} z_2^{2\ell} \bar{z}_1 - 2i\bar{a} z_2^\ell R \bar{R}.
\end{aligned}$$

Nous rappelons que le ϕ disparaît pour des questions de mixité. La dernière ligne de l'équation ci-dessus s'avère intéressante.

Le terme $2ia z_1 \bar{z}_2^{2\ell}$ ne peut s'annuler qu'avec $\overline{\ell \phi_2(z) z_2^{\ell-1} \bar{z}_1}$. Ainsi, $\phi_2(z) = \frac{2i\bar{a}}{\ell} z_2^{\ell+1}$. Le terme $2ia z_2^\ell \bar{z}_1 \bar{z}_2^\ell$ ne peut s'annuler qu'avec $\overline{\phi_1(z) \bar{z}_2^\ell}$. Ainsi, $\phi_1(z) = 2i\bar{a} z_1 \bar{z}_2^\ell$. Par conjugaison, d'autres termes s'annulent également et il reste, à cette étape,

$$\begin{aligned}
0 &= \phi_2(z) R_{z_2} \bar{R} + \phi_3(z) R_{z_3} \bar{R} + \overline{\phi_2(z) R_{z_2} \bar{R}} + \overline{\phi_3(z) R_{z_3} \bar{R}} \\
&\quad + 2ia R_{z_2} \bar{R} - 2i\bar{a} z_2^\ell R \bar{R}.
\end{aligned}$$

Une comparaison des parties antiholomorphes, en partant du terme $2ia R_{z_2} \bar{R}$ par exemple, permet d'affirmer que

$$0 = \overline{\phi_2(z) R_{z_2} \bar{R}} + \overline{\phi_3(z) R_{z_3} \bar{R}} + 2ia R_{z_2} \bar{R},$$

autrement dit, avec $\phi_2(z) = \frac{2i\bar{a}}{\ell} z_2^{\ell+1}$,

$$0 = \frac{2i\bar{a}}{\ell} z_2^{\ell+1} R_{z_2} + \phi_3(z) R_{z_3} - 2i\bar{a} z_2^\ell R.$$

Ainsi,

$$\phi_3(z) = 2i\bar{a} \frac{\ell - \deg_{z_2} R}{\ell \deg_{z_3} R} z_2^\ell z_3.$$

Le champ intégré est donc

$$Y_5^1 = (2i\bar{a}z_1z_2^\ell + aw) \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{2i\bar{a}}{\ell} z_2^{\ell+1} \frac{\partial}{\partial z_2} + 2i\bar{a} \frac{\ell - \deg_{z_2} R}{\ell \deg_{z_3} R} z_2^\ell z_3 \frac{\partial}{\partial z_3} + 2i\bar{a}z_2^\ell w \frac{\partial}{\partial w}, \quad a \in \mathbb{C}^*.$$

Notons qu'intégrer Y_5^1 ne fait pas sens pour des raisons de degré ¹⁰⁸. □

Proposition 4.1.5.

Aucun des champs $X_{4'}$, X_2 , X_3 , X_6 et X_7 ne possède d'1-intégration.

Démonstration. Nous savons que $X_{4'}$, X_2 et X_3 ne peuvent être intégrés. Il s'agit de rotations qui ne s'intègrent donc pas ¹⁰⁹. Il est également possible d'arriver à cette conclusion avec les calculs. Nous les effectuons donc uniquement pour $X_{4'}$, avec $R = \frac{\ell+1}{z_3^2}$, comme exemple. Une 1-intégration de $X_{4'} = \ell z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$ est de type

$$X_{4'}^1 = (\phi_1(z) + \ell z_1 w) \frac{\partial}{\partial z_1} + (\phi_2(z) - z_2 w) \frac{\partial}{\partial z_2} + \phi_3(z) \frac{\partial}{\partial z_3} + \phi(z) \frac{\partial}{\partial w}.$$

Pour que ce champ appartienne à $\text{hol}(M, p)$, nous posons

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \operatorname{Re} X_{4'}^1(\mathcal{P} - \operatorname{Im} w) \\ &= \phi_1(z) \bar{z}_2^\ell + \ell \phi_2(z) z_2^{\ell-1} \bar{z}_1 + \frac{\ell+1}{2} \phi_3(z) z_3^{\frac{\ell-1}{2}} \bar{z}_3^{\frac{\ell+1}{2}} + \ell z_1 \bar{z}_2^\ell w - \ell z_2^\ell \bar{z}_1 w + \frac{i}{2} \phi(z) \\ &\quad + \overline{(\dots)}. \end{aligned}$$

Pour des questions de mixité, $\phi(z) = 0$ et cette équation doit en particulier être vraie pour $u = 0$. Posons donc $w = i\mathcal{P}$. L'équation devient

108. Cf. corollaire 2.1.26, p.40.

109. Cf. [55], p.348, théorème 5.5.

$$\begin{aligned}
0 &= \phi_1(z) \overline{z_2}^\ell + \ell \phi_2(z) z_2^{\ell-1} \overline{z_1} + \frac{\ell+1}{2} \phi_3(z) z_3^{\frac{\ell-1}{2}} \overline{z_3}^{\frac{\ell+1}{2}} \\
&\quad + \overline{\phi_1(z)} z_2^\ell + \ell \overline{\phi_2(z)} z_1 \overline{z_2}^{\ell-1} + \frac{\ell+1}{2} \overline{\phi_3(z)} z_3^{\frac{\ell+1}{2}} \overline{z_3}^{\frac{\ell-1}{2}} \\
&\quad + \ell i z_1 \overline{z_2}^\ell \mathcal{P} - \ell i z_2^\ell \overline{z_1} \mathcal{P} - \ell i z_2^\ell \overline{z_1} \mathcal{P} + \ell i z_1 \overline{z_2}^\ell \mathcal{P} \\
&= \phi_1(z) \overline{z_2}^\ell + \ell \phi_2(z) z_2^{\ell-1} \overline{z_1} + \frac{\ell+1}{2} \phi_3(z) z_3^{\frac{\ell-1}{2}} \overline{z_3}^{\frac{\ell+1}{2}} \\
&\quad + \overline{\phi_1(z)} z_2^\ell + \ell \overline{\phi_2(z)} z_1 \overline{z_2}^{\ell-1} + \frac{\ell+1}{2} \overline{\phi_3(z)} z_3^{\frac{\ell+1}{2}} \overline{z_3}^{\frac{\ell-1}{2}} \\
&\quad + 2\ell i (z_1^2 \overline{z_2}^{2\ell} + z_1 z_2^\ell \overline{z_1} \overline{z_2}^\ell + z_1 z_3^{\frac{\ell+1}{2}} \overline{z_2} \overline{z_3}^{\frac{\ell+1}{2}}) - 2\ell i (z_1 z_2^\ell \overline{z_1} \overline{z_2}^\ell + z_2^{2\ell} \overline{z_1}^{-2} + z_2^\ell z_3^{\frac{\ell+1}{2}} \overline{z_1} \overline{z_3}^{\frac{\ell+1}{2}}),
\end{aligned}$$

ce qui est impossible, les termes étant incompatibles. Par exemple, le terme $z_1^2 \overline{z_2}^{2\ell}$ ne peut s'annuler avec aucun autre terme (toujours en comparant les parties holomorphes et antiholomorphes).

Il reste à traiter de X_6 et X_7 . Leur intégration n'est pas possible pour des raisons de degrés ¹¹⁰. X_6^1 aurait un degré de

$$\frac{\ell-1}{\ell+1} + 1 = \frac{2\ell}{\ell+1} > 1, \text{ et } X_7^1 \text{ de } \frac{\ell-1}{2(\ell+1)} + 1 = \frac{3\ell+1}{2(\ell+1)} > 1.$$

Effectivement, comme $\ell > 1$,

$$2\ell = \ell + \ell > \ell + 1 \text{ et } 3\ell + 1 = 2\ell + \ell + 1 > 2\ell + 2.$$

□

Nous pouvons formuler le résultat final comme suit.

110. Cf. corollaire 2.1.26, p.40.

Théorème 4.1.6.

Si $\ell > 1$ et si M est donnée par l'équation

$$\operatorname{Im} w = z_1 \overline{z_2}^\ell + z_2^\ell \overline{z_1} + R \overline{R},$$

avec R un monôme dépendant de z_3 , alors $\dim \mathfrak{g} \in \{6; 11; 12\}$. De plus,

$$\dim \mathfrak{g} = 12 \Leftrightarrow M \text{ est biholomorphe à une hypersurface avec } R = z_2^{\frac{\ell-1}{2}} z_3,$$

$$\dim \mathfrak{g} = 11 \Leftrightarrow M \text{ est dans les autres cas, mais avec } R_{z_1} = 0,$$

$$\dim \mathfrak{g} = 6 \Leftrightarrow M \text{ est dans les autres cas.}$$

Démonstration. Toutes les hypersurfaces contiennent X_1 (et donc E et W^2), X_2 , X_3 et X_4 . Ces champs ont un coefficient réel, donc nous avons les six dimensions réelles. Si $R_{z_1} = 0$, nous ajoutons Y_5 et Y_5^1 , toutes deux avec coefficient complexe, ainsi que X_6 , avec coefficient réel. Cinq dimensions sont donc ajoutées. Enfin, le cas $R = z_2^{\frac{\ell-1}{2}} z_3$ permet X_7 (une dimension réelle supplémentaire). \square

Proposition 4.1.7.

Si $\ell > 1$ et si M est donnée par l'équation

$$\operatorname{Im} w = z_1 \overline{z_2}^\ell + z_2^\ell \overline{z_1} + z_3^{\frac{\ell+1}{2}} \overline{z_3}^{\frac{\ell+1}{2}},$$

alors $\dim \mathfrak{g} = 11$. Plus précisément, nous avons $\dim \mathfrak{g}_{-1} = 1$, $\dim \mathfrak{g}_{-\frac{1}{\ell+1}} = 2$, $\dim \mathfrak{g}_0 = 4$, $\dim \mathfrak{g}_{\frac{\ell-1}{\ell+1}} = 1$, $\dim \mathfrak{g}_{\frac{\ell}{\ell+1}} = 2$ et $\dim \mathfrak{g}_1 = 1$.

4.1.1 Remarque de généralisation

Le problème PQR consiste à considérer l'hypersurface modèle réelle M de \mathbb{C}^4 Levi dégénérée, holomorphiquement non dégénérée, de type fini et dont les éléments, notés $(z_1, z_2, z_3, w) \in \mathbb{C}^4$, satisfont

$$\operatorname{Im} w = P \overline{Q} + Q \overline{P} + R \overline{R},$$

où P , Q et R sont des polynômes dépendant de (z_1, z_2, z_3) . Nous verrons que le cas monomial - c'est-à-dire avec les trois polynômes qui sont des monômes - nous intéressera.

Dans ce cas, nous pouvons spécifier le fait que l'hypersurface soit holomorphiquement non dégénérée en fonction des degrés de chaque variable des monômes.

Lemme 4.1.8.

Soit M une hypersurface monomiale de type PQR , décrite par

$$\text{Im } w = P\bar{Q} + Q\bar{P} + R\bar{R},$$

où $P = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}$, $Q = z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3}$ et $R = z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3}$. Alors M est holomorphiquement non dégénérée si et seulement si

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Démonstration. Par le lemme suivant, l'hypersurface PQR est holomorphiquement non dégénérée si et seulement si le jacobien de P , Q et R est non nul. Dans notre cas monomial,

$$\begin{aligned} 0 \neq J(P, Q, R) &= \begin{vmatrix} P_{z_1} & Q_{z_1} & R_{z_1} \\ P_{z_2} & Q_{z_2} & R_{z_2} \\ P_{z_3} & Q_{z_3} & R_{z_3} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \alpha_1 z_1^{\alpha_1-1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} & \beta_1 z_1^{\beta_1-1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3} & \gamma_1 z_1^{\gamma_1-1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3} \\ \alpha_2 z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2-1} z_3^{\alpha_3} & \beta_2 z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2-1} z_3^{\beta_3} & \gamma_2 z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2-1} z_3^{\gamma_3} \\ \alpha_3 z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3-1} & \beta_3 z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3-1} & \gamma_3 z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3-1} \end{vmatrix} \\ &= \alpha_1 z_1^{\alpha_1-1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} \begin{vmatrix} \beta_2 z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2-1} z_3^{\beta_3} & \gamma_2 z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2-1} z_3^{\gamma_3} \\ \beta_3 z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3-1} & \gamma_3 z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3-1} \end{vmatrix} \\ &\quad - \beta_1 z_1^{\beta_1-1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3} \begin{vmatrix} \alpha_2 z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2-1} z_3^{\alpha_3} & \gamma_2 z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2-1} z_3^{\gamma_3} \\ \alpha_3 z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3-1} & \gamma_3 z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3-1} \end{vmatrix} \\ &\quad + \gamma_1 z_1^{\gamma_1-1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3} \begin{vmatrix} \alpha_2 z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2-1} z_3^{\alpha_3} & \beta_2 z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2-1} z_3^{\beta_3} \\ \alpha_3 z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3-1} & \beta_3 z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3-1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} z_1^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1-1} z_2^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2-1} z_3^{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3-1}. \end{aligned}$$

Grâce aux variables z_1, z_2 et z_3 , qui sont en particulier non nulles, l'affirmation est démontrée. \square

Lemme 4.1.9.

Soit M une hypersurface de type PQR . Alors M est holomorphiquement non dégénérée si et seulement si le jacobien de P, Q et R est non nul.

Démonstration. Nous prouvons le premier sens de la double implication par contraposée. Supposons donc que le jacobien de P, Q et R soit nul. Nous voulons montrer que M est holomorphiquement dégénérée.

Notons M_J la matrice jacobienne dont le déterminant est le jacobien de P, Q et R , noté $J(P, Q, R)$. Alors, nous étudions le champ vectoriel

$$X = \sum_{j=1}^3 f_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j}$$

qui satisfait

$$X(P) = 0, \quad X(Q) = 0, \quad \text{et} \quad X(R) = 0,$$

et il est clair que dans ce cas, $X(\mathcal{P}) = 0$. Les trois équations forment le système

$$\begin{aligned} f_1(z)P_{z_1} + f_2(z)P_{z_2} + f_3(z)P_{z_3} &= 0 \\ f_1(z)Q_{z_1} + f_2(z)Q_{z_2} + f_3(z)Q_{z_3} &= 0 \\ f_1(z)R_{z_1} + f_2(z)R_{z_2} + f_3(z)R_{z_3} &= 0, \end{aligned}$$

ou sous forme matricielle,

$$M_J f = 0.$$

Dans ce cas, $J(P, Q, R) = 0$ implique que le système d'équation homogène n'a pas un rang maximal. Il existe donc au moins une solution non nulle pour f , c'est-à-dire pour X . L'hypersurface est par conséquent holomorphiquement dégénérée.

Pour l'autre direction de la double implication, supposons que $J(P, Q, R) \neq 0$ et montrons que l'hypersurface est holomorphiquement non dégénérée. Soit un champ vectoriel

$$X = \sum_{j=1}^3 f_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j} \quad \text{tel que} \quad X(\mathcal{P}) = 0.$$

Or,

$$X(\mathcal{P}) = 0 \Leftrightarrow X(P)\overline{Q} + X(Q)\overline{P} + X(R)\overline{R} = 0.$$

Il est dès lors important de constater que les trois termes de cette dernière équation ne peuvent se compenser. En effet, si cela était le cas, en comparant les parties antiholomorphes par exemple, nous aurions, à des constantes près, $P = Q$ (avec $X(R) = 0$), $P = R$ (avec $X(Q) = 0$), $Q = R$ (avec $X(P) = 0$) ou $P = Q = R$. Cela serait une contradiction avec $J(P, Q, R) \neq 0$.

Ainsi,

$$X(\mathcal{P}) = 0 \Leftrightarrow X(P) = 0, X(Q) = 0, \text{ et } X(R) = 0.$$

Cette dernière équation revient à l'équation matricielle $M_J f = 0$ décrite ci-avant. Comme $J(P, Q, R) \neq 0$, ce système d'équations homogène a un rang maximal et il existe une seule solution, $X = 0$. L'hypersurface est par conséquent holomorphiquement non dégénérée. \square

4.2 Problème PQR découplé

Définition 4.2.1.

Un polynôme \mathcal{P} est dit *découplé* s'il s'écrit comme deux polynômes ne dépendant pas des mêmes variables.

Nous traitons le cas découplé où l'équation définissant l'hypersurface (réelle, Levi dégénérée, holomorphiquement non dégénérée et de type fini) pour le problème PQR admet deux polynômes, P et Q , qui ne dépendent que de (z_1, z_2) , et un polynôme, R , qui ne dépend que de z_3 :

$$\text{Im } w = P(z_1, z_2)\overline{Q(z_1, z_2)} + Q(z_1, z_2)\overline{P(z_1, z_2)} + R(z_3)\overline{R(z_3)}.$$

Une telle hypersurface est dite *de type PQR découplée*. Pour des questions d'homogénéité, R est monomial. En effet, deux monômes homogènes, différents et ne dépendant qu'uniquement d'une variable, z_3 ici, sont forcément regroupables en un monôme. Nous notons également que le degré de R

$$\deg R = \frac{\deg P + \deg Q}{2} \quad (\in \mathbb{N}^*).$$

En toute logique, nous prenons la décomposition de \mathfrak{g} en commençant par les degrés pondérés les plus petits. Nous rappelons qu'évidemment, $\dim \mathfrak{g}_{-1} = 1$, avec W comme élément. Nous notons également que ce cas généralise relativement aisément le problème PQ précédent.

4.2.1 Propriétés de \mathfrak{g}_t

Lemme 4.2.2.

Soit M une hypersurface de type PQR découplée. Si M admet une symétrie tubulaire, alors M est biholomorphiquement équivalente à

$$\text{Im } w = z_1 \bar{z}_2^\ell + z_2^\ell \bar{z}_1 + z_3^{\frac{1+\ell}{2}} \bar{z}_3^{\frac{1+\ell}{2}}$$

où ℓ est impair.

Démonstration. Pour des questions de degré pondéré, une symétrie tubulaire s'écrit comme

$$X = a \frac{\partial}{\partial z_1} + b \frac{\partial}{\partial z_2} + c \frac{\partial}{\partial z_3} + g(z_1, z_2, z_3) \frac{\partial}{\partial w},$$

où a , b et c sont des constantes complexes. Nous voyons premièrement que $c = 0$, car l'hypersurface est découplée. En effet, si nous calculons

$$\begin{aligned} 2 \text{Re } X(P\bar{Q} + Q\bar{P} + R\bar{R}) &= a(P_{z_1}\bar{Q} + Q_{z_1}\bar{P}) + \bar{a}(Q\bar{P}_{z_1} + P\bar{Q}_{z_1}) \\ &\quad + b(P_{z_2}\bar{Q} + Q_{z_2}\bar{P}) + \bar{b}(Q\bar{P}_{z_2} + P\bar{Q}_{z_2}) \\ &\quad + c R_{z_3}\bar{R} + \bar{c} R\bar{R}_{z_3} + \frac{i}{2}g - \frac{i}{2}\bar{g}, \end{aligned}$$

nous constatons, à cause du découplage (et en écartant la possibilité d'hyperquadrique), que $c = 0$ et que g ne dépend pas de z_3 .

Nous détaillons ensuite deux changements de variables qui ont pour but l'aplatissement de l'hypersurface. Le premier changement de variables est le suivant :

$$\begin{aligned} z_1 &= az'_1, \\ z_2 &= bz'_1 + z'_2, \\ z_3 &= z'_3 \quad (= cz'_1 + z'_3). \end{aligned}$$

Cela implique en particulier, par la règle de la chaîne, que

$$\frac{\partial}{\partial z'_1} = \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial z'_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} \frac{\partial z_2}{\partial z'_1} + \frac{\partial}{\partial z_3} \frac{\partial z_3}{\partial z'_1} = a \frac{\partial}{\partial z_1} + b \frac{\partial}{\partial z_2},$$

$$\frac{\partial}{\partial z'_2} = \frac{\partial}{\partial z_2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z'_3} = \frac{\partial}{\partial z_3}.$$

Nous pouvons donc réécrire $X = \frac{\partial}{\partial z'_1} + g(z'_1, z'_2) \frac{\partial}{\partial w}$, mais g ne dépend que de z'_2 . En effet, si g dépendait de z'_1 , alors, dans les nouvelles coordonnées, $X \in \mathfrak{g}$ donnerait

$$0 = P_{z'_1} \overline{Q} + Q_{z'_1} \overline{P} + \cancel{R_{z'_1} \overline{R}} + \frac{i}{2} g_{z'_1} + \overline{Q P_{z'_1}} + \overline{P Q_{z'_1}} + \cancel{R \overline{R_{z'_1}}} - \frac{i}{2} \overline{g_{z'_1}},$$

ce qui est impossible. Dans ce cas, nous aurions effectivement, sans restriction de la généralité, $P_{z'_1} \overline{Q} + \overline{Q P_{z'_1}} = 0$ et $Q_{z'_1} \overline{P} + \frac{i}{2} g_{z'_1} + \overline{P Q_{z'_1}} - \frac{i}{2} \overline{g_{z'_1}} = 0$, donc $P_{z'_1} = iQ$ et $Q_{z'_1} = c \in \mathbb{C}^*$. Or, si $Q = c z'_1$, alors $P = \frac{c}{2} i z_1'^2$, et l'hypersurface serait holomorphiquement dégénérée. Nous écrivons donc $g = g(z'_2)$.

Le second changement de variables est le suivant :

$$z''_j = z'_j, \quad \text{pour } j = 1, 2, 3,$$

$$w'' = w - z'_1 g(z'_2).$$

Il implique en particulier que $\frac{\partial}{\partial w''} = \frac{\partial}{\partial w}$, et que

$$\frac{\partial}{\partial z''_1} = \frac{\partial}{\partial z'_1} \frac{\partial z'_1}{\partial z''_1} + \frac{\partial}{\partial z'_2} \frac{\partial z'_2}{\partial z''_1} + \frac{\partial}{\partial z'_3} \frac{\partial z'_3}{\partial z''_1} + \frac{\partial}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z''_1} = \frac{\partial}{\partial z'_1} + g(z'_2) \frac{\partial}{\partial w}.$$

Nous obtenons un champ qui s'écrit comme

$$X = \frac{\partial}{\partial z''_1},$$

et qui agit sur une hypersurface modifiée, où le terme $-z'_1 g(z'_2)$ de w'' a ajouté un terme pluriharmonique dans l'équation. En effet,

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} w &= \frac{w - \bar{w}}{2i} = \frac{w'' + z'_1 g(z'_2) - \overline{w''} - \overline{z'_1 g(z'_2)}}{2i} \\ &= \operatorname{Im} w'' + \frac{z'_1 g(z'_2)}{2i} + \overline{\left(\frac{z'_1 g(z'_2)}{2i} \right)},\end{aligned}$$

et si nous posons

$$H(z'_1, z'_2) = -\frac{z'_1 g(z'_2)}{2i},$$

l'équation définissant l'hypersurface s'écrit

$$\operatorname{Im} w'' = P\bar{Q} + Q\bar{P} + R\bar{R} + H + \bar{H}.$$

Nous observons finalement que ce modèle reste découplé après les changements de variables, et le lemme 3.2.11¹¹¹ reste applicable pour le champ $X = \frac{\partial}{\partial z''_1}$ avec simplement un polynôme muet R , car il est découplé et ne dépend pas de z''_1 . Cependant, dans ce dernier lemme, l'hypersurface définie par $\operatorname{Im} w = z_1 z_2^\ell \bar{z}_2^\ell + z_2^\ell \bar{z}_1 \bar{z}_2 + R\bar{R}$ est impossible, car $\deg R = \frac{2\ell+1}{2} \notin \mathbb{N}$. Nous ne gardons donc que l'hypersurface particulière donnée par $\operatorname{Im} w = z_1 \bar{z}_2^\ell + z_2^\ell \bar{z}_1 + R\bar{R}$, avec ℓ impair. Le fait que R ne dépende que de z_3 implique qu'il est monomial par homogénéité et l'affirmation est prouvée.

Prenons également $X = \frac{\partial}{\partial z''_3}$, pour vérifier qu'il n'y a pas d'autre élément de \mathfrak{g}_l . Appliqué à l'équation définissante, $0 = R_{z_3} \bar{R} - R \bar{R}_{z_3}$, nous voyons immédiatement que ce champ n'a pas de sens une fois de plus pour des raisons de découplage. \square

4.2.2 Propriétés de \mathfrak{g}_0

Le lemme suivant, qui permet la décomposition des rotations en trois sous-groupes (les nilpotentes, les diagonales réelles et imaginaires) reste valable.

111. Dans la démonstration de ce lemme, le champ $X = i \frac{\partial}{\partial z_1}$ apparaît. Nous pouvons voir cela comme un troisième changement de variable, $z''_1 = iz'''_1$, qui transforme $X = \frac{\partial}{\partial z''_1}$ en $X = i \frac{\partial}{\partial z'''_1}$. Cf. [49], p.261, lemme 3.6.

Lemme 4.2.3.

Soit M une hypersurface monomiale de type PQR découplée ¹¹².

Alors toute rotation $X \in \mathfrak{g}_0$ peut être décomposée en une rotation purement diagonale, $X_1 \in \mathfrak{g}_0^{\text{Re}} \oplus \mathfrak{g}_0^{\text{Im}}$, et une rotation sans diagonale qui elle, est nilpotente, $X_2 \in \mathfrak{g}_0^{\text{Nil}}$:

$$X = X_1 + X_2.$$

Démonstration. Soit une rotation

$$X = (a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + a_{13}z_3) \frac{\partial}{\partial z_1} + (a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + a_{23}z_3) \frac{\partial}{\partial z_2} + (a_{31}z_1 + a_{32}z_2 + a_{33}z_3) \frac{\partial}{\partial z_3},$$

ou du point de vue matriciel ¹¹³,

$$A_X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = A_{X_1} + A_{X_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix},$$

avec X_1 diagonale. Nous considérons les monômes $P = c_P z_1^\alpha z_2^\beta$, $Q = c_Q z_1^\gamma z_2^\delta$ et $R = c_R z_3^\epsilon$, où c_P , c_Q et c_R sont des constantes complexes et où nous notons que

$$\epsilon = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} > 1.$$

Alors, en laissant de côté les constantes pour l'instant,

112. Cf. lemme 3.2.13, p.68, pour le problème PQ .

113. Cf. section 2.2.3, p.44.

$$\begin{aligned}
0 &= 2 \operatorname{Re} X \left(z_1^\alpha z_2^\beta \overline{z_1}^\gamma \overline{z_2}^\delta + z_1^\gamma z_2^\delta \overline{z_1}^\alpha \overline{z_2}^\beta + z_3^\epsilon \overline{z_3}^\epsilon \right) \\
&= (a_{11}\alpha + a_{22}\beta + \overline{a_{11}}\gamma + \overline{a_{22}}\delta) z_1^\alpha z_2^\beta \overline{z_1}^\gamma \overline{z_2}^\delta + (\overline{a_{11}}\alpha + \overline{a_{22}}\beta + a_{11}\gamma + a_{22}\delta) z_1^\gamma z_2^\delta \overline{z_1}^\alpha \overline{z_2}^\beta \\
&\quad + \epsilon (a_{33} + \overline{a_{33}}) z_3^\epsilon \overline{z_3}^\epsilon
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
&+ a_{12}\alpha z_1^{\alpha-1} z_2^{\beta+1} \overline{z_1}^\gamma \overline{z_2}^\delta + a_{12}\gamma z_1^{\gamma-1} z_2^{\delta+1} \overline{z_1}^\alpha \overline{z_2}^\beta \\
&+ a_{21}\beta z_1^{\alpha+1} z_2^{\beta-1} \overline{z_1}^\gamma \overline{z_2}^\delta + a_{21}\delta z_1^{\gamma+1} z_2^{\delta-1} \overline{z_1}^\alpha \overline{z_2}^\beta \\
&+ \overline{a_{12}}\alpha z_1^\gamma z_2^\delta \overline{z_1}^{\alpha-1} \overline{z_2}^{\beta+1} + \overline{a_{12}}\gamma z_1^\alpha z_2^\beta \overline{z_1}^{\gamma-1} \overline{z_2}^{\delta+1} \\
&+ \overline{a_{21}}\beta z_1^\gamma z_2^\delta \overline{z_1}^{\alpha+1} \overline{z_2}^{\beta-1} + \overline{a_{21}}\delta z_1^\alpha z_2^\beta \overline{z_1}^{\gamma+1} \overline{z_2}^{\delta-1}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
&+ a_{13}\alpha z_1^{\alpha-1} z_2^\beta \overline{z_3} z_1^\gamma \overline{z_2}^\delta + a_{13}\gamma z_1^{\gamma-1} z_2^\delta \overline{z_3} z_1^\alpha \overline{z_2}^\beta \\
&+ a_{23}\beta \alpha z_1^\alpha z_2^{\beta-1} \overline{z_3} z_1^\gamma \overline{z_2}^\delta + a_{23}\delta z_1^\gamma z_2^{\delta-1} \overline{z_3} z_1^\alpha \overline{z_2}^\beta \\
&+ \overline{a_{13}}\alpha z_1^\gamma z_2^\delta \overline{z_3} \overline{z_1}^{\alpha-1} \overline{z_2}^\beta + \overline{a_{13}}\gamma z_1^\alpha z_2^\beta \overline{z_3} \overline{z_1}^{\gamma-1} \overline{z_2}^\delta \\
&+ \overline{a_{23}}\beta \alpha z_1^\gamma z_2^\delta \overline{z_3} \overline{z_1}^{\alpha+1} \overline{z_2}^{\beta-1} + \overline{a_{23}}\delta z_1^\alpha z_2^\beta \overline{z_3} \overline{z_1}^{\gamma+1} \overline{z_2}^{\delta-1}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
&+ a_{31}\epsilon z_1 z_3^{\epsilon-1} \overline{z_3}^\epsilon + a_{32}\epsilon z_2 z_3^{\epsilon-1} \overline{z_3}^\epsilon \\
&+ \overline{a_{31}}\epsilon z_3 \overline{z_1} \overline{z_3}^{\epsilon-1} + \overline{a_{32}}\epsilon z_3 \overline{z_2} \overline{z_3}^{\epsilon-1}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Étudions ce membre de droite de l'équation. La première partie, (4.5), ne peut se simplifier avec le reste. En effet, nous le voyons en comparant les degrés des parties holomorphes ou antiholomorphes et nous savons également que P et Q ne peuvent être égaux. Nous avons donc que le champ diagonal

$$X_1 = a_{11}z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + a_{22}z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + a_{33}z_3 \frac{\partial}{\partial z_3} \in \operatorname{hol}(M, p).$$

Nous en concluons que le champ $X_2 = X - X_1 \in \operatorname{hol}(M, p)$. Montrons que X_2 est une rotation nilpotente.

Comme rotation, cela signifie en particulier que les parties (4.6), (4.7) et (4.8) s'annulent. Pour la partie (4.8), en contemplant les degrés, nous voyons que ces termes ne peuvent s'annuler sans que $a_{31} = a_{32} = 0$. Il en va de même pour la partie (4.7). En effet, cette partie contient toujours un z_3 mal placé qui ne peut aider l'annulation en regardant les degrés des différentes variables. Chaque terme de cette partie s'annule donc seul. Pour l'instant,

$$a_{13} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0.$$

La partie (4.6) est similaire au cas du modèle PQ dans \mathbb{C}^3 . Les mêmes possibilités sont donc déduites ¹¹⁴, à savoir

$$a_{12} = a_{21} = 0,$$

$$a_{21} = 0, \quad a_{12} \neq 0, \quad \text{avec} \quad \alpha - 1 = \gamma, \quad \beta + 1 = \delta, \quad \text{ou}$$

$$a_{12} = 0, \quad a_{21} \neq 0, \quad \text{avec} \quad \alpha + 1 = \gamma, \quad \beta - 1 = \delta.$$

Notre champ X_2 a donc trois matrices différentes possibles :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui sont nilpotentes. □

Pour classifier ces différentes rotations, nous rappelons la définition suivante.

Remarque 4.2.4.

Une hypersurface polynomiale, avec équation $\text{Im } w = \mathcal{P}$, est dite *balancée* s'il existe un champ complexe reproducteur. C'est-à-dire qu'il existe Y tel que ¹¹⁵

$$Y(\mathcal{P}) = \mathcal{P}.$$

Un tel Y est en fait un champ linéaire

$$Y = \sum_{j=1}^3 \lambda_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j},$$

tel que, si nous notons

$$\mathcal{P} = \sum_{k=1}^m \left(z_1^{\alpha_{1k}} z_2^{\alpha_{2k}} z_3^{\alpha_{3k}} \bar{z}_1^{\beta_{1k}} \bar{z}_2^{\beta_{2k}} \bar{z}_3^{\beta_{3k}} + z_1^{\beta_{1k}} z_2^{\beta_{2k}} z_3^{\beta_{3k}} \bar{z}_1^{\alpha_{1k}} \bar{z}_2^{\alpha_{2k}} \bar{z}_3^{\alpha_{3k}} \right) + \sum_{\ell=1}^{m_R} z_1^{\gamma_{1\ell}} z_2^{\gamma_{2\ell}} z_3^{\gamma_{3\ell}} \bar{z}_1^{\gamma_{1\ell}} \bar{z}_2^{\gamma_{2\ell}} \bar{z}_3^{\gamma_{3\ell}},$$

avec m le nombre de monômes de $P\bar{Q}$ et m_R celui de $R\bar{R}$,

114. Cf. démonstration du lemme 3.2.13, p.68.

115. Cf. définition 3.2.7, p.65, ou [49], p.114, définition 2.4.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \alpha_{1k} + \lambda_2 \alpha_{2k} + \lambda_3 \alpha_{3k} &= 1 \\
\lambda_1 \beta_{1k} + \lambda_2 \beta_{2k} + \lambda_3 \beta_{3k} &= 1 \\
\lambda_1 \gamma_{1\ell} + \lambda_2 \gamma_{2\ell} + \lambda_3 \gamma_{3\ell} &= 1,
\end{aligned}$$

pour tout $k = 1, \dots, m$ et $\ell = 1, \dots, m_R$, ceci venant d'être défini dans le cas général, pas forcément découplé.

Lemme 4.2.5.

Soit M une hypersurface de type PQR découplé. Si M est monomiale, alors M est balancée.

Démonstration. Comme M est monomiale, nous supposons que

$$P = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}, \quad Q = z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2}, \quad \text{et} \quad R = z_3^{\gamma_3}.$$

R étant de toute façon indépendant par rapport à P ou Q , pour que l'hypersurface soit holomorphiquement non dégénérée, il faut que (α_1, α_2) et (β_1, β_2) soient linéairement indépendants¹¹⁶. Sinon, avec $(\alpha_1, \alpha_2) = \lambda(\beta_1, \beta_2)$ le champ $\alpha_2 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - \alpha_1 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$ annulerait \mathcal{P} . Comme (α_1, α_2) et (β_1, β_2) sont linéairement indépendants, le système d'équations

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 &= 1 \\
\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 &= 1 \\
\lambda_3 \gamma_3 &= 1
\end{aligned}$$

possède une unique solution $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ qui implique que le champ $X = \sum_{j=1}^3 \lambda_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$ est un champ complexe reproducteur, car

$$X(\mathcal{P}) = \lambda_1 \alpha_1 P \bar{Q} + \lambda_1 \beta_1 Q \bar{P} + \lambda_2 \alpha_2 P \bar{Q} + \lambda_2 \beta_2 Q \bar{P} + \lambda_3 \gamma_3 R \bar{R} = \mathcal{P}.$$

□

116. Cf. lemme 4.1.8, p.90.

4.2.3 Propriétés de $\mathfrak{g}_0^{\text{Re}}$

Lemme 4.2.6.

Soit une hypersurface de type PQR découplée. Alors M possède une rotation réelle si et seulement si M est monomiale. De plus, dans ce cas, $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0^{\text{Re}} = 1$.

Démonstration. Soit une rotation réelle dans sa forme normale, après un éventuel changement de variables linéaire

$$X = \sum_{j=1}^3 \lambda_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j}.$$

Concernant R , nous savons, par homogénéité, que ce polynôme est monomial. En outre, par rapport à λ_3 , nous avons

$$\lambda_3 z_3^{\gamma_3} \bar{z}_3^{-\gamma_3} = 0,$$

impliquant que $\lambda_3 = 0$. La réflexion est revient à se ramener au problème PQ ¹¹⁷.

Ainsi, d'une part, pour tout monôme $z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \bar{z}_1^{\beta_1} \bar{z}_2^{\beta_2}$ dans le développement de $P\bar{Q}$,

$$\lambda_1(\alpha_1 + \beta_1) + \lambda_2(\alpha_2 + \beta_2) = 0,$$

avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, M étant holomorphiquement non dégénérée. En effet, si, par l'absurde, $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, alors le champ $X = \lambda \sum_{j=1}^2 z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$ implique, vu qu'il est un automorphisme infinitésimal CR,

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \operatorname{Re} X(\mathcal{P} - \operatorname{Im} w) \\ &= \lambda (\alpha_1 P\bar{Q} + \beta_1 Q\bar{P} + \alpha_2 P\bar{Q} + \beta_2 Q\bar{P} + \alpha_1 Q\bar{P} + \beta_1 P\bar{Q} + \alpha_2 Q\bar{P} + \beta_2 P\bar{Q}) \\ &= \lambda (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2) (P\bar{Q} + Q\bar{P}) \\ &\Rightarrow P\bar{Q} + Q\bar{P} = 0 \quad (\text{contradiction}). \end{aligned}$$

D'autre part, à cause de l'homogénéité du degré pondéré, m , nous avons

$$(\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) = m.$$

Ces deux équations donnent une unique solution pour $\alpha_1 + \beta_1$ et $\alpha_2 + \beta_2$. Cette réflexion est valable pour tout monôme de $P\bar{Q}$. Ainsi, le degré total, en z_1 et en z_2 , dans $P\bar{Q}$ est

117. Cf. lemme 3.2.17, p.71.

constant. Par conséquent, P et Q sont des monômes (l'effet double produit jouant son rôle). Le sens inverse découle des mêmes réflexions.

De plus, l'équation

$$\lambda_1(\alpha_1 + \beta_1) + \lambda_2(\alpha_2 + \beta_2) = 0,$$

pour une hypersurface monomiale donnée, comporte des solutions, λ_1 et λ_2 , qui forment un ensemble de dimension réelle égale à un. \square

4.2.4 Propriétés de $\mathfrak{g}_0^{\text{Im}}$

Lemme 4.2.7.

Soit une hypersurface M de type PQR découplée. Alors il existe une rotation imaginaire si et seulement si M est balancée.

Démonstration. Si M est balancée, par définition, il existe un champ complexe reproducteur

$$Y = \sum_{j=1}^3 \lambda_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j},$$

où λ_1, λ_2 et $\lambda_3 \in \mathbb{R}$. Il suffit de former le champ purement imaginaire $X := iY$, qui, comme

$$2 \operatorname{Re}(X(\mathcal{P} - \operatorname{Im} w)) = 2 \operatorname{Re}(iY(\mathcal{P})) = 2 \operatorname{Re}(i\mathcal{P}) = 0,$$

est une rotation.

L'autre direction est plus intéressante¹¹⁸. Nous considérons une rotation imaginaire

$$X = i \sum_{j=1}^3 \lambda_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$$

dans sa forme normale, avec $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Si M est monomiale, alors elle est balancée et une rotation imaginaire existe, c'est ce que nous venons de démontrer. Supposons donc que M soit non monomiale. Comme, par homogénéité, R est un monôme, c'est $P\bar{Q}$ qui sera composé de plusieurs monômes. Nous supposons, sans restriction de la généralité que P possède plusieurs monômes. Nous choisissons un monôme de $P\bar{Q}$,

118. Cf. lemme 3.2.19, p.72. C'est également le cas.

$$z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \bar{z}_1^{-\beta_1} \bar{z}_2^{-\beta_2},$$

que nous comparons avec un autre,

$$z_1^{\alpha_1 - \eta} z_2^{\alpha_2 + \eta} \bar{z}_1^{-\beta_1} \bar{z}_2^{-\beta_2}.$$

Dans le développement suivant, nous ne nous intéressons donc qu'à ces deux monômes sachant qu'aucun autre monôme similaire ne peut apparaître.

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \operatorname{Re} X(P\bar{Q} + Q\bar{P} + R\bar{R}) \\ &= \dots + i\lambda_1 \alpha_1 z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \bar{z}_1^{-\beta_1} \bar{z}_2^{-\beta_2} && + i\lambda_1 \beta_1 z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} \bar{z}_1^{-\alpha_1} \bar{z}_2^{-\alpha_2} \\ &\quad - i\lambda_1 \alpha_1 z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} \bar{z}_1^{-\alpha_1} \bar{z}_2^{-\alpha_2} && - i\lambda_1 \beta_1 z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \bar{z}_1^{-\beta_1} \bar{z}_2^{-\beta_2} + \dots \\ &\quad \dots + i\lambda_1 (\alpha_1 - \eta) z_1^{\alpha_1 - \eta} z_2^{\alpha_2 + \eta} \bar{z}_1^{-\beta_1} \bar{z}_2^{-\beta_2} && + i\lambda_1 \beta_1 z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} \bar{z}_1^{-\alpha_1 - \eta} \bar{z}_2^{-\alpha_2 + \eta} \\ &\quad - i\lambda_1 (\alpha_1 - \eta) z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} \bar{z}_1^{-\alpha_1 - \eta} \bar{z}_2^{-\alpha_2 + \eta} && - i\lambda_1 \beta_1 z_1^{\alpha_1 - \eta} z_2^{\alpha_2 + \eta} \bar{z}_1^{-\beta_1} \bar{z}_2^{-\beta_2} + \dots \\ &\quad \dots + i\lambda_2 \alpha_2 z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \bar{z}_1^{-\beta_1} \bar{z}_2^{-\beta_2} && + i\lambda_2 \beta_2 z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} \bar{z}_1^{-\alpha_1} \bar{z}_2^{-\alpha_2} \\ &\quad - i\lambda_2 \alpha_2 z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} \bar{z}_1^{-\alpha_1} \bar{z}_2^{-\alpha_2} && - i\lambda_2 \beta_2 z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \bar{z}_1^{-\beta_1} \bar{z}_2^{-\beta_2} + \dots \\ &\quad \dots + i\lambda_2 (\alpha_2 + \eta) z_1^{\alpha_1 - \eta} z_2^{\alpha_2 + \eta} \bar{z}_1^{-\beta_1} \bar{z}_2^{-\beta_2} && + i\lambda_2 \beta_2 z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} \bar{z}_1^{-\alpha_1 - \eta} \bar{z}_2^{-\alpha_2 + \eta} \\ &\quad - i\lambda_2 (\alpha_2 + \eta) z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} \bar{z}_1^{-\alpha_1 - \eta} \bar{z}_2^{-\alpha_2 + \eta} && - i\lambda_2 \beta_2 z_1^{\alpha_1 - \eta} z_2^{\alpha_2 + \eta} \bar{z}_1^{-\beta_1} \bar{z}_2^{-\beta_2} + \dots \end{aligned}$$

Par conséquent, en comparant les coefficients respectivement devant $z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \bar{z}_1^{-\beta_1} \bar{z}_2^{-\beta_2}$ et devant $z_1^{\alpha_1 - \eta} z_2^{\alpha_2 + \eta} \bar{z}_1^{-\beta_1} \bar{z}_2^{-\beta_2}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \lambda_1 (\alpha_1 - \beta_1) + \lambda_2 (\alpha_2 - \beta_2) &= 0 \\ \lambda_1 (\alpha_1 - \eta - \beta_1) + \lambda_2 (\alpha_2 + \eta - \beta_2) &= 0, \end{aligned}$$

qui, en les soustrayant et après division par η , impliquent

$$\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda.$$

Dans la première des deux équations ci-dessus, cela implique

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2.$$

Nous observons ainsi que P et Q ont le même degré. En effet, cette réflexion reste valable sur tout monôme de $P\bar{Q}$ et \mathcal{P} est homogène.

Concernant $R = z_3^{\gamma_3} \bar{z}_3^{\gamma_3}$, par homogénéité, nous avons,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 = \gamma_3,$$

le degré de R , de P et de Q (à nouveau pour chaque monôme). En multipliant cette équation par $c := \frac{1}{\lambda \gamma_3}$, nous obtenons que

$$c\alpha_1 + c\alpha_2 = c\beta_1 + c\beta_2 = \frac{1}{\lambda},$$

cela étant valable pour tout monôme. Ainsi, nous formons le champ

$$R = c \sum_{j=1}^2 \lambda_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{1}{\gamma_3} z_3 \frac{\partial}{\partial z_3} = \frac{1}{\gamma_3} \sum_{j=1}^2 z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{1}{\gamma_3} z_3 \frac{\partial}{\partial z_3},$$

qui est un champ complexe reproducteur. En effet, pour effectuer les détails, si nous notons, avec m le nombre de monômes pour $P\bar{Q}$,

$$\mathcal{P} = \sum_{k=1}^m \left(z_1^{\alpha_{1k}} z_2^{\alpha_{2k}} \bar{z}_1^{\beta_{1k}} \bar{z}_2^{\beta_{2k}} + z_1^{\beta_{1k}} z_2^{\beta_{2k}} \bar{z}_1^{\alpha_{1k}} \bar{z}_2^{\alpha_{2k}} \right) + z_3^{\gamma_3} \bar{z}_3^{\gamma_3},$$

alors

$$R(\mathcal{P}) = \frac{1}{\gamma_3} \sum_{k=1}^m (\alpha_{1k} + \alpha_{2k}) z_1^{\alpha_{1k}} z_2^{\alpha_{2k}} \bar{z}_1^{\beta_{1k}} \bar{z}_2^{\beta_{2k}} + \frac{1}{\gamma_3} \sum_{k=1}^m (\beta_{1k} + \beta_{2k}) z_1^{\beta_{1k}} z_2^{\beta_{2k}} \bar{z}_1^{\alpha_{1k}} \bar{z}_2^{\alpha_{2k}} + z_3^{\gamma_3} \bar{z}_3^{\gamma_3} = \mathcal{P}.$$

□

4.2.5 Propriétés de $\mathfrak{g}_0^{\text{Nil}}$.

Lemme 4.2.8.

Soit une hypersurface M de type PQR découplée. Si M admet une rotation nilpotente, alors M est biholomorphe à

$$\text{Im } w = iz_1^k z_2 \overline{z_1}^{k+1} - iz_1^{k+1} \overline{z_1}^k \overline{z_2} + z_3^{k+1} \overline{z_3}^{k+1}.$$

De plus, la dimension réelle des rotations nilpotentes est 1.

Démonstration. Sans restriction de la généralité, après un éventuel changement de variables linéaire, nous pouvons supposer que $X = z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}$ est une rotation nilpotente. En effet, il est impossible de considérer R pour une rotation nilpotente vu que ce monôme est complètement indépendant : $z_1 \frac{\partial}{\partial z_3}$ ou $z_3 \frac{\partial}{\partial z_1}$ ne font pas de sens de ce contexte découplé. Revenons à X . Étant en particulier un champ vectoriel CR infinitésimal, X satisfait

$$z_1 P_{z_2} \overline{Q} + z_1 Q_{z_2} \overline{P} + \overline{Q_{z_1} P_{z_2}} + \overline{P_{z_1} Q_{z_2}} = 0.$$

La seule possibilité, pour que cette équation soit valide, est que

$$z_1 P_{z_2} \overline{Q} + \overline{Q_{z_1} P_{z_2}} = 0 \quad \text{et} \quad z_1 Q_{z_2} \overline{P} + \overline{P_{z_1} Q_{z_2}} = 0.$$

Donc, soit $P_{z_2} = 0$, soit $Q_{z_2} = 0$. Supposons que le degré maximum en z_2 soit réalisé par P . Ainsi $X(Q) = 0$, et nous écrivons $Q = z_1^{k+1}$. Selon la première équation ci-avant, $z_1 P_{z_2} = iQ$, donc $P = iz_1^k z_2$. \square

4.2.6 Propriétés de \mathfrak{g}_t

Lemme 4.2.9.

Soit une hypersurface de type PQR découplée. Alors,

$$\dim \mathfrak{g}_t \leq 1.$$

Plus précisément, si $J(P, Q)$ divise QQ_{z_j} pour $j = 1, 2$, alors $\dim \mathfrak{g}_t = 1$.

Démonstration. Soit une rotation généralisée $X \in \mathfrak{g}_c$. Alors son degré pondéré satisfait $\deg X > 0$, et

$$0 = X(P)\bar{Q} + X(Q)\bar{P} + X(R)\bar{R} \\ + Q\overline{X(P)} + P\overline{X(Q)} + R\overline{X(R)}.$$

Nous étudions cette équation en considérant deux cas : lorsque $\deg P = \deg Q$, ou, sans restriction de la généralité, $\deg P < \deg Q$.

Dans le premier cas, par homogénéité, nous avons $\deg R = \deg P = \deg Q$, et notre équation implique que

$$X(P)\bar{Q} + X(Q)\bar{P} + X(R)\bar{R} = 0$$

car par exemple, $\deg X(P) > \deg P$, et ces termes ne peuvent s'annuler. De plus, PQ et R étant découplés, nous en déduisons (pour la partie avec z_3), que $X(R)\bar{R} = 0$, mais également que

$$X(P)\bar{Q} + X(Q)\bar{P} = 0,$$

impliquant, en comparant les parties antiholomorphes, que $Q = \alpha P$. Or, si P et Q ont des degrés identiques, l'hypersurface est holomorphiquement dégénérée¹¹⁹. Nous écartons donc ce cas.

Dans le second cas, nous notons au passage que $\deg R = \frac{\deg P + \deg Q}{2}$, et notre équation devient

$$0 = X(P)\bar{Q} + X(R)\bar{R} + Q\overline{X(P)} + R\overline{X(R)}.$$

En effet, $\deg X(Q)$ est trop grand et ne peut s'annuler avec un autre terme¹²⁰. Cette équation n'a que deux possibilités pour être valide. La première est que

$$X(P)\bar{Q} + R\overline{X(R)} = 0, \quad \text{et} \quad X(Q) = 0,$$

et la seconde est que

$$X(P)\bar{Q} + Q\overline{X(P)}, \quad X(R) = 0, \quad \text{et} \quad X(Q) = 0.$$

119. Cf. lemme 4.1.8, p.90.

120. Cela nous donne des informations sur X par rapport à Q , mais nous laissons cela de côté pour le moment.

La première possibilité n'est pas réalisable, car l'hypersurface est découplée. La seule possibilité est donc la seconde. Comme $X(R) = 0$, $f_3 = 0$ donc $X = \sum_{j=1}^2 f_j(z_1, z_2, z_3) \frac{\partial}{\partial z_j}$. En outre, $X(P) = \alpha Q$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Mettant R de côté, alors inintéressant, nous avons le système d'équation

$$\begin{aligned} f_1(z_1, z_2, z_3)P_{z_1} + f_2(z_1, z_2, z_3)P_{z_2} &= \alpha Q, \\ f_1(z_1, z_2, z_3)Q_{z_1} + f_2(z_1, z_2, z_3)Q_{z_2} &= 0, \end{aligned}$$

et par Cramer ¹²¹,

$$\begin{aligned} f_1(z_1, z_2) &= \frac{\alpha Q Q_{z_2}}{J(P, Q)}, \text{ et} \\ f_2(z_1, z_2) &= \frac{-\alpha Q Q_{z_1}}{J(P, Q)}. \end{aligned}$$

Nous notons que cela est valide grâce au fait que l'hypersurface est holomorphiquement non dégénérée, ainsi ¹²², $J(P, Q) \neq 0$. Nous terminons en donnant explicitement

$$X = \alpha \frac{Q(z_1, z_2)}{J(P, Q)} \left(Q_{z_2} \frac{\partial}{\partial z_1} - Q_{z_1} \frac{\partial}{\partial z_2} \right).$$

□

4.2.7 Propriétés de \mathfrak{g}_Π

Lemme 4.2.10.

Soit M une hypersurface de type PQR découplée. Alors

$$\dim \mathfrak{g}_t = 1 \quad \Rightarrow \quad \dim \mathfrak{g}_\Pi = 1.$$

Démonstration. Intégrons le champ $X = i \frac{\partial}{\partial z_1}$ sur l'unique hypersurface sur laquelle ce champ existe, $\text{Im } w = z_1 \bar{z}_2^\ell + z_2^\ell \bar{z}_1 + R\bar{R} + H + \bar{H}$, où H est le fruit d'un changement de variables non linéaire, et comme nous l'avons vu, ce terme pluriharmonique ne dépend pas de z_3 . Seul R dépend de z_3 . Une intégration de X s'écrit comme

121. Cf. [34], p.143, théorème 5.2.

122. Cf. lemme 4.1.8, p.90.

$$X^1 = (\phi_1(z) + iw) \frac{\partial}{\partial z_1} + \phi_2(z) \frac{\partial}{\partial z_2} + \phi_3(z) \frac{\partial}{\partial z_3} + \phi(z) \frac{\partial}{\partial w}.$$

Pour qu'elle soit un automorphisme infinitésimal CR, nous posons,

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \operatorname{Re} X^1(\mathcal{P} - \operatorname{Im} w) \\ &= iw\bar{z}_2^\ell + \phi_1\bar{z}_2^\ell + \ell\phi_2z_2^{\ell-1}\bar{z}_1 + \phi_3R_{z_3}\bar{R} + iwH_{z_1} + \phi_1H_{z_1} + \phi_2H_{z_2} + \frac{i}{2}\phi \\ &\quad - i\bar{w}z_2^\ell + \bar{\phi}_1z_2^\ell + \ell\bar{\phi}_2z_1\bar{z}_2^{\ell-1} + \bar{\phi}_3RR_{z_3} - i\bar{w}H_{z_1} + \bar{\phi}_1H_{z_1} + \bar{\phi}_2H_{z_2} - \frac{i}{2}\bar{\phi}, \\ &= i(u + i\mathcal{P})\bar{z}_2^\ell + i(u + i\mathcal{P})H_{z_1} - i(u - i\mathcal{P})z_2^\ell - i(u - i\mathcal{P})\bar{H}_{z_1} \\ &\quad + \phi_1\bar{z}_2^\ell + \ell\phi_2z_2^{\ell-1}\bar{z}_1 + \phi_3R_{z_3}\bar{R} + \phi_1H_{z_1} + \phi_2H_{z_2} + \frac{i}{2}\phi \\ &\quad + \bar{\phi}_1z_2^\ell + \ell\bar{\phi}_2z_1\bar{z}_2^{\ell-1} + \bar{\phi}_3RR_{z_3} + \bar{\phi}_1H_{z_1} + \bar{\phi}_2H_{z_2} - \frac{i}{2}\bar{\phi} \\ &= i(u + i\mathcal{P})\bar{z}_2^\ell + i(u + i\mathcal{P})H_{z_1} - i(u - i\mathcal{P})z_2^\ell - i(u - i\mathcal{P})\bar{H}_{z_1} \\ &\quad + \dots \\ &= iu\bar{z}_2^\ell - \mathcal{P}\bar{z}_2^\ell + iuH_{z_1} - \mathcal{P}H_{z_1} - iuz_2^\ell - \mathcal{P}z_2^\ell - iu\bar{H}_{z_1} - \mathcal{P}\bar{H}_{z_1} \\ &\quad + \dots \\ &= iu\left(\bar{z}_2^\ell + H_{z_1} - z_2^\ell - \bar{H}_{z_1}\right) - \mathcal{P}\left(\bar{z}_2^\ell + H_{z_1} + z_2^\ell + \bar{H}_{z_1}\right) + \dots \end{aligned}$$

Par rapport à $u = \operatorname{Re} w$, nous voyons que $H_{z_1} = z_2^\ell$, donc que $H = z_1z_2^\ell$. Cette équation devient donc

$$\begin{aligned} 0 &= -2\mathcal{P}\left(\bar{z}_2^\ell + z_2^\ell\right) + \dots \\ &= -2\left(z_1\bar{z}_2^\ell + z_2^\ell\bar{z}_1 + R\bar{R} + z_1z_2^\ell + \bar{z}_1\bar{z}_2^\ell\right)\left(\bar{z}_2^\ell + z_2^\ell\right) + \dots \\ &= -4z_1z_2^\ell\bar{z}_2^\ell - 2z_1\bar{z}_2^{2\ell} - 2z_2^{2\ell}\bar{z}_1 - 4z_2^\ell\bar{z}_1\bar{z}_2^\ell - 2z_1z_2^{2\ell} - 2\bar{z}_1\bar{z}_2^{2\ell} - 2z_2^\ell R\bar{R} - 2R\bar{z}_2^\ell\bar{R} \\ &\quad + \phi_1\bar{z}_2^\ell + \ell\phi_2z_2^{\ell-1}\bar{z}_1 + \phi_3R_{z_3}\bar{R} + \phi_1z_2^\ell + \ell\phi_2z_1z_2^{\ell-1} + \frac{i}{2}\phi \\ &\quad + \bar{\phi}_1z_2^\ell + \ell\bar{\phi}_2z_1\bar{z}_2^{\ell-1} + \bar{\phi}_3RR_{z_3} + \bar{\phi}_1\bar{z}_2^\ell + \ell\bar{\phi}_2\bar{z}_1\bar{z}_2^{\ell-1} - \frac{i}{2}\bar{\phi}. \end{aligned}$$

Si nous prenons le premier terme, il ne peut s'annuler que de la manière suivante :

$$-4z_1z_2^\ell\bar{z}_2^\ell + \phi_1\bar{z}_2^\ell = 0.$$

Nous obtenons $\phi_1 = 4z_1\bar{z}_2^\ell$. Si nous prenons le deuxième terme, il ne peut s'annuler que de la manière suivante :

$$-2z_1\bar{z}_2^{2\ell} + \ell\bar{\phi}_2z_1\bar{z}_2^{\ell-1} = 0,$$

et nous obtenons $\phi_2 = \frac{2}{\ell}z_2^{\ell+1}$. Enfin, si nous prenons le septième terme, il ne peut s'annuler que de la manière suivante :

$$-2z_2^\ell R\bar{R} + \phi_3 R_{z_3} \bar{R} = 0,$$

et nous obtenons $\phi_3 = \frac{2}{\deg R}z_2^\ell z_3$. Ces calculs fonctionnent évidemment pour les paires de conjugués. La partie uniquement holomorphe de l'équation s'annule d'elle-même sans avoir recours à ϕ , impliquant en particulier $\phi = 0$, ce qui est également le cas pour la partie uniquement antiholomorphe. L'équation est donc valide et le champ CR est donc

$$X^1 = \left(4z_1z_2^\ell + iw\right) \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{2}{\ell}z_2^{\ell+1} \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{2}{\deg R}z_2^\ell z_3 \frac{\partial}{\partial z_3} \in \mathfrak{g}_1.$$

□

4.2.8 Propriétés de \mathfrak{g}_1

Nous savons que $\dim \mathfrak{g}_1 = 0$ ou 1. Cette dimension vaut 1 si et seulement si M est balancée ¹²³.

4.2.9 Résultat

Nous pouvons formuler le résultat final comme suit.

123. Cf. [55], p.323, théorème 1.1.

Théorème 4.2.11.

Soit M une hypersurface de type PQR découplée. Alors $\dim \mathfrak{g} \in \{2; 3; 4; 5; 6; 11\}$. Plus précisément,

$$\dim \mathfrak{g} = 11 \Leftrightarrow M \text{ est biholomorphe à } \operatorname{Im} w = z_1 \bar{z}_2^\ell + z_2^\ell \bar{z}_1 + z_3^{\frac{1+\ell}{2}} \bar{z}_3^{\frac{1+\ell}{2}}, \ell \text{ impair,}$$

$$\dim \mathfrak{g} = 6 \Leftrightarrow M \text{ est biholomorphe à } \operatorname{Im} w = iz_1^k z_2 \bar{z}_1^{k+1} - iz_1^{k+1} \bar{z}_1^k \bar{z}_2 + z_3^{k+1} \bar{z}_3^{k+1},$$

$$\dim \mathfrak{g} = 5 \text{ ou } 6 \Leftrightarrow M \text{ est une autre hypersurface monomiale balancée,}$$

$$\dim \mathfrak{g} = 4 \text{ ou } 5 \Leftrightarrow M \text{ est une autre hypersurface non monomiale balancée,}$$

$$\dim \mathfrak{g} = 2 \text{ ou } 3 \Leftrightarrow M \text{ n'est pas balancée.}$$

Démonstration. Dans les lemmes ci-avant, nous voyons que si M est biholomorphe à $\operatorname{Im} w = z_1 \bar{z}_2^\ell + z_2^\ell \bar{z}_1 + z_3^{\frac{1+\ell}{2}} \bar{z}_3^{\frac{1+\ell}{2}}$ avec ℓ impair, alors le résultat se trouve dans le cas modèle précédant ¹²⁴.

$$\text{Si } M \text{ est biholomorphe à } \operatorname{Im} w = iz_1^k z_2 \bar{z}_1^{k+1} - iz_1^{k+1} \bar{z}_1^k \bar{z}_2 + z_3^{k+1} \bar{z}_3^{k+1},$$

$$\dim \mathfrak{g}_t = \dim \mathfrak{g}_n = 0 \quad \dim \mathfrak{g}_0^{\operatorname{Re}} = 1 \quad \dim \mathfrak{g}_0^{\operatorname{Im}} = 1 \quad \dim \mathfrak{g}_0^{\operatorname{Nil.}} = 1 \quad \dim \mathfrak{g}_c = 1 \quad \dim \mathfrak{g}_1 = 1.$$

En effet, nous calculons aisément que le critère pour une rotation généralisée n'est pas satisfait ¹²⁵. De plus, nous vérifions facilement que cette hypersurface est balancée avec, comme champ complexe reproducteur $Y = \frac{i}{k+1} z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{(2k+1)i}{k+1} z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{1}{k+1} z_3 \frac{\partial}{\partial z_3}$. En ajoutant W et le champ d'Euler, nous obtenons l'affirmation correspondante.

Si M est une autre hypersurface monomiale balancée, alors la réflexion est la même avec la rotation nilpotente en moins. La rotation généralisée peut apparaitre ou non.

Pour toutes les autres hypersurfaces non monomiales, mais balancées, nous ôtons une dimension pour la rotation réelle.

Pour les autres hypersurfaces non balancées (donc non monomiales ¹²⁶), nous ôtons une dimension pour la rotation imaginaire ainsi qu'une dimension pour \mathfrak{g}_1 . \square

124. Cf. proposition 4.1.7, p.89.

125. Cf. lemme 4.2.9, p.104. Nous voyons que dans la preuve, il est essentiel que P et Q n'aient pas le même degré. Ce n'est pas le cas pour l'hypersurface en question.

126. Cf. lemme 4.2.5, p.99.

4.3 Problème PQR

Nous traitons le cas non découplé, où l'équation définissant l'hypersurface réelle, Levi dégénérée, holomorphiquement non dégénérée et de type fini, pour le problème PQR admet trois polynômes, P , Q et R , qui dépendent tous de $z = (z_1, z_2, z_3)$:

$$\operatorname{Im} w = P(z)\overline{Q(z)} + Q(z)\overline{P(z)} + R(z)\overline{R(z)}.$$

Une telle hypersurface est dite *de type PQR* . Nous notons que, comme pour le cas découplé, le degré de R

$$\deg R = \frac{\deg P + \deg Q}{2} \quad (\in \mathbb{N}^*).$$

Le cas monomial, avec les trois polynômes, P , Q et R qui sont des monômes, s'avère plus intéressant. En effet, sans la condition de monomialité, il semble pour l'instant difficile de s'exprimer sur la dimension du groupe des symétries. Nous notons également qu'il faut au minimum trois polynômes dans \mathbb{C}^4 pour obtenir une hypersurface holomorphiquement non dégénérée¹²⁷.

Nous soulignons également que le point le plus important de cette section est sans doute le théorème 4.3.1, p.111, qui propose une décomposition originale des rotations.

En toute logique, nous prenons la décomposition de \mathfrak{g} en commençant par les degrés pondérés les plus petits. Nous rappelons qu'évidemment, $\dim \mathfrak{g}_{-1} = 1$, avec W comme élément. En outre, le cas de \mathfrak{g} , sera abordé en même temps que \mathfrak{g}_1 .

127. Cf. proposition 2.2.2, p.40.

4.3.1 Propriétés de \mathfrak{g}_0

Théorème 4.3.1.

Soit une hypersurface monomiale de type PQR ¹²⁸.

Alors toute rotation $X \in \mathfrak{g}_0$ peut être décomposée en une rotation purement diagonale, $D = D_{\text{Re}} + D_{\text{Im}} \in \mathfrak{g}_0^{\text{Re}} \oplus \mathfrak{g}_0^{\text{Im}}$, et en au plus deux rotations nilpotentes, $N_1 + N_2 \in \mathfrak{g}_0^{\text{Nil}}$:

$$X = D + N = D_{\text{Re}} + D_{\text{Im}} + N_1 + N_2.$$

De plus, dans ce cas monomial,

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0^{\text{Nil}} \in \{0; 1; 2; 3\}.$$

La définition ainsi que le lemme suivants seront utilisé dans la démonstration du théorème.

Définition 4.3.2.

Soit une rotation

$$X = \sum_{j,k=1}^3 a_{jk} z_k \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad \text{avec } a_{jk} \in \mathbb{C}.$$

Une telle rotation est dite *irréductible* si tous les termes $a_{jk} z_k \frac{\partial}{\partial z_j}$ ($a_{jk} \in \mathbb{C}$) de cette rotation interfèrent entre eux dans l'annulation de l'équation définissante (stipulant que $X \in \mathfrak{g}$). Elle est dite *séparable* si elle n'est pas irréductible. Dans ce cas, les $a_{jk} z_k \frac{\partial}{\partial z_j}$ sont décomposables en au moins deux groupes qui n'interfèrent pas et qui correspondent à au moins deux rotations : $X = X_1 + X_2$ (chaque terme $a_{jk} z_k \frac{\partial}{\partial z_j}$ est dans une des deux rotations).

Exemple 4.3.3.

Toute rotation à un seul terme, $a_{jk} z_k \frac{\partial}{\partial z_j}$, est trivialement irréductible. Par contre, la rotation

$$X = iz_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + iz_3 \frac{\partial}{\partial z_3},$$

par rapport à l'hypersurface holomorphiquement non dégénérée

$$\text{Im } w = z_1 z_2^2 \overline{z_1 z_2 z_3} + z_1 z_2 z_3 \overline{z_1 z_2}^2 + z_2^2 z_3 \overline{z_2}^2 \overline{z_3}$$

128. Cf. lemme 3.2.13, p.68, pour le problème PQ et lemme 4.2.3, p.96, pour le problème PQR découpé. Cette décomposition n'a rien à voir avec celle de Dunford.

est séparable en

$$X_1 = iz_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \quad \text{et} \quad X_2 = iz_3 \frac{\partial}{\partial z_3}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} X & \left(z_1 z_2^2 \overline{z_1 z_2 z_3} + z_1 z_2 z_3 \overline{z_1 z_2}^2 + z_2^2 z_3 \overline{z_2 z_3} \right) \\ & = iz_1 z_2^2 \overline{z_1 z_2 z_3} + iz_1 z_2 z_3 \overline{z_1 z_2}^2 + iz_1 z_2 z_3 \overline{z_1 z_2}^2 + iz_2^2 z_3 \overline{z_2 z_3}, \end{aligned}$$

ce qui montre bien que X_1 et X_2 sont des rotations.

Lemme 4.3.4.

Soit une hypersurface monomiale de type PQR. Alors toute rotation irréductible

$$N = (a_{12}z_2 + a_{13}z_3) \frac{\partial}{\partial z_1} + (a_{21}z_1 + a_{23}z_3) \frac{\partial}{\partial z_2} + (a_{31}z_1 + a_{32}z_2) \frac{\partial}{\partial z_3},$$

avec diagonale nulle et pour laquelle $a_{12} \neq 0$, est nilpotente et satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{21} = a_{13} = a_{32} = 0 \\ a_{23} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Im } w = 2 \text{Re} \left(c_P \overline{c_Q} z_1^k z_3^{\overline{k+1}} \right) + c_R \overline{c_R} z_2^k z_3^{\overline{k}} \quad \text{et} \quad a_{31} = 0 \\ a_{31} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Im } w = 2 \text{Re} \left(c_P \overline{c_Q} z_2^k z_3^{\overline{k+1}} \right) + c_R \overline{c_R} z_1^k z_2^{\overline{k}} \quad \text{et} \quad a_{23} = 0 \\ a_{23} = 0, a_{31} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Im } w = 2 \text{Re} \left(c_P \overline{c_Q} z_1^{\alpha_2} z_2^{\alpha_3} z_3^{\overline{\alpha_2+1}} z_3^{\overline{\alpha_3}} \right) + c_R \overline{c_R} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3} z_1^{\overline{\gamma_1}} z_2^{\overline{\gamma_2}} z_3^{\overline{\gamma_3}}. \end{array} \right.$$

Démonstration du lemme.

Dans cette démonstration, nous travaillons sur une hypersurface monomiale de type PQR. Notons donc $P = c_P z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}$, $Q = c_Q z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3}$ et $R = c_R z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3}$, où c_P , c_Q et c_R sont des constantes complexes. L'équation de l'hypersurface en question est

$$\text{Im } w = c_P \overline{c_Q} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} z_1^{\overline{\beta_1}} z_2^{\overline{\beta_2}} z_3^{\overline{\beta_3}} + c_Q \overline{c_P} z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3} z_1^{\overline{\alpha_1}} z_2^{\overline{\alpha_2}} z_3^{\overline{\alpha_3}} + c_R \overline{c_R} z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3} z_1^{\overline{\gamma_1}} z_2^{\overline{\gamma_2}} z_3^{\overline{\gamma_3}}.$$

Considérons donc la rotation irréductible

$$N = (a_{12}z_2 + a_{13}z_3) \frac{\partial}{\partial z_1} + (a_{21}z_1 + a_{23}z_3) \frac{\partial}{\partial z_2} + (a_{31}z_1 + a_{32}z_2) \frac{\partial}{\partial z_3},$$

ou du point de vue matriciel ¹²⁹,

129. Cf. section 2.2.3, p.44.

$$A_N = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

L'équation à étudier, qui stipule que N est bien une rotation sur l'hypersurface en question, et que nous noterons (\star), est

$$0 =$$

$$2 \operatorname{Re} N \left(c_P \overline{c_Q} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} \overline{z_1}^{-\beta_1} \overline{z_2}^{-\beta_2} \overline{z_3}^{-\beta_3} + c_Q \overline{c_P} z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3} \overline{z_1}^{-\alpha_1} \overline{z_2}^{-\alpha_2} \overline{z_3}^{-\alpha_3} + c_R \overline{c_R} z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3} \overline{z_1}^{-\gamma_1} \overline{z_2}^{-\gamma_2} \overline{z_3}^{-\gamma_3} \right) =$$

$$\begin{aligned} & a_{12} c_P \overline{c_Q} \alpha_1 z_1^{\alpha_1-1} z_2^{\alpha_2+1} z_3^{\alpha_3} \overline{z_1}^{-\beta_1} \overline{z_2}^{-\beta_2} \overline{z_3}^{-\beta_3} & + a_{13} c_P \overline{c_Q} \alpha_1 z_1^{\alpha_1-1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3+1} \overline{z_1}^{-\beta_1} \overline{z_2}^{-\beta_2} \overline{z_3}^{-\beta_3} \\ & + a_{12} c_Q \overline{c_P} \alpha_1 z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3} \overline{z_1}^{-\alpha_1-1} \overline{z_2}^{-\alpha_2+1} \overline{z_3}^{-\alpha_3} & + a_{13} c_Q \overline{c_P} \alpha_1 z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3} \overline{z_1}^{-\alpha_1-1} \overline{z_2}^{-\alpha_2} \overline{z_3}^{-\alpha_3+1} \\ & + a_{12} c_Q \overline{c_P} \beta_1 z_1^{\beta_1-1} z_2^{\beta_2+1} z_3^{\beta_3} \overline{z_1}^{-\alpha_1} \overline{z_2}^{-\alpha_2} \overline{z_3}^{-\alpha_3} & + a_{13} c_Q \overline{c_P} \beta_1 z_1^{\beta_1-1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3+1} \overline{z_1}^{-\alpha_1} \overline{z_2}^{-\alpha_2} \overline{z_3}^{-\alpha_3} \\ & + a_{12} c_P \overline{c_Q} \beta_1 z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} \overline{z_1}^{-\beta_1-1} \overline{z_2}^{-\beta_2+1} \overline{z_3}^{-\beta_3} & + a_{13} c_P \overline{c_Q} \beta_1 z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} \overline{z_1}^{-\beta_1-1} \overline{z_2}^{-\beta_2} \overline{z_3}^{-\beta_3+1} \\ & + a_{12} c_R \overline{c_R} \gamma_1 z_1^{\gamma_1-1} z_2^{\gamma_2+1} z_3^{\gamma_3} \overline{z_1}^{-\gamma_1} \overline{z_2}^{-\gamma_2} \overline{z_3}^{-\gamma_3} & + a_{13} c_R \overline{c_R} \gamma_1 z_1^{\gamma_1-1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3+1} \overline{z_1}^{-\gamma_1} \overline{z_2}^{-\gamma_2} \overline{z_3}^{-\gamma_3} \\ & + a_{12} c_R \overline{c_R} \gamma_1 z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3} \overline{z_1}^{-\gamma_1-1} \overline{z_2}^{-\gamma_2+1} \overline{z_3}^{-\gamma_3} & + a_{13} c_R \overline{c_R} \gamma_1 z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3} \overline{z_1}^{-\gamma_1-1} \overline{z_2}^{-\gamma_2} \overline{z_3}^{-\gamma_3+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + a_{21} c_P \overline{c_Q} \alpha_2 z_1^{\alpha_1+1} z_2^{\alpha_2-1} z_3^{\alpha_3} \overline{z_1}^{-\beta_1} \overline{z_2}^{-\beta_2} \overline{z_3}^{-\beta_3} & + a_{23} c_P \overline{c_Q} \alpha_2 z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2-1} z_3^{\alpha_3+1} \overline{z_1}^{-\beta_1} \overline{z_2}^{-\beta_2} \overline{z_3}^{-\beta_3} \\ & + a_{21} c_Q \overline{c_P} \alpha_2 z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3} \overline{z_1}^{-\alpha_1+1} \overline{z_2}^{-\alpha_2-1} \overline{z_3}^{-\alpha_3} & + a_{23} c_Q \overline{c_P} \alpha_2 z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3} \overline{z_1}^{-\alpha_1} \overline{z_2}^{-\alpha_2-1} \overline{z_3}^{-\alpha_3+1} \\ & + a_{21} c_Q \overline{c_P} \beta_2 z_1^{\beta_1+1} z_2^{\beta_2-1} z_3^{\beta_3} \overline{z_1}^{-\alpha_1} \overline{z_2}^{-\alpha_2} \overline{z_3}^{-\alpha_3} & + a_{23} c_Q \overline{c_P} \beta_2 z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2-1} z_3^{\beta_3+1} \overline{z_1}^{-\alpha_1} \overline{z_2}^{-\alpha_2} \overline{z_3}^{-\alpha_3} \\ & + a_{21} c_P \overline{c_Q} \beta_2 z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} \overline{z_1}^{-\beta_1+1} \overline{z_2}^{-\beta_2-1} \overline{z_3}^{-\beta_3} & + a_{23} c_P \overline{c_Q} \beta_2 z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} \overline{z_1}^{-\beta_1} \overline{z_2}^{-\beta_2-1} \overline{z_3}^{-\beta_3+1} \\ & + a_{21} c_R \overline{c_R} \gamma_2 z_1^{\gamma_1+1} z_2^{\gamma_2-1} z_3^{\gamma_3} \overline{z_1}^{-\gamma_1} \overline{z_2}^{-\gamma_2} \overline{z_3}^{-\gamma_3} & + a_{23} c_R \overline{c_R} \gamma_2 z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2-1} z_3^{\gamma_3+1} \overline{z_1}^{-\gamma_1} \overline{z_2}^{-\gamma_2} \overline{z_3}^{-\gamma_3} \\ & + a_{21} c_R \overline{c_R} \gamma_2 z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3} \overline{z_1}^{-\gamma_1+1} \overline{z_2}^{-\gamma_2-1} \overline{z_3}^{-\gamma_3} & + a_{23} c_R \overline{c_R} \gamma_2 z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3} \overline{z_1}^{-\gamma_1} \overline{z_2}^{-\gamma_2-1} \overline{z_3}^{-\gamma_3+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + a_{31} c_P \overline{c_Q} \alpha_3 z_1^{\alpha_1+1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3-1} \overline{z_1}^{-\beta_1} \overline{z_2}^{-\beta_2} \overline{z_3}^{-\beta_3} & + a_{32} c_P \overline{c_Q} \alpha_3 z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2+1} z_3^{\alpha_3-1} \overline{z_1}^{-\beta_1} \overline{z_2}^{-\beta_2} \overline{z_3}^{-\beta_3} \\ & + a_{31} c_Q \overline{c_P} \alpha_3 z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3} \overline{z_1}^{-\alpha_1+1} \overline{z_2}^{-\alpha_2} \overline{z_3}^{-\alpha_3-1} & + a_{32} c_Q \overline{c_P} \alpha_3 z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3} \overline{z_1}^{-\alpha_1} \overline{z_2}^{-\alpha_2+1} \overline{z_3}^{-\alpha_3-1} \\ & + a_{31} c_Q \overline{c_P} \beta_3 z_1^{\beta_1+1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3-1} \overline{z_1}^{-\alpha_1} \overline{z_2}^{-\alpha_2} \overline{z_3}^{-\alpha_3} & + a_{32} c_Q \overline{c_P} \beta_3 z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2+1} z_3^{\beta_3-1} \overline{z_1}^{-\alpha_1} \overline{z_2}^{-\alpha_2} \overline{z_3}^{-\alpha_3} \\ & + a_{31} c_P \overline{c_Q} \beta_3 z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} \overline{z_1}^{-\beta_1+1} \overline{z_2}^{-\beta_2} \overline{z_3}^{-\beta_3-1} & + a_{32} c_P \overline{c_Q} \beta_3 z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} \overline{z_1}^{-\beta_1} \overline{z_2}^{-\beta_2+1} \overline{z_3}^{-\beta_3-1} \\ & + a_{31} c_R \overline{c_R} \gamma_3 z_1^{\gamma_1+1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3-1} \overline{z_1}^{-\gamma_1} \overline{z_2}^{-\gamma_2} \overline{z_3}^{-\gamma_3} & + a_{32} c_R \overline{c_R} \gamma_3 z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2+1} z_3^{\gamma_3-1} \overline{z_1}^{-\gamma_1} \overline{z_2}^{-\gamma_2} \overline{z_3}^{-\gamma_3} \\ & + a_{31} c_R \overline{c_R} \gamma_3 z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3} \overline{z_1}^{-\gamma_1+1} \overline{z_2}^{-\gamma_2} \overline{z_3}^{-\gamma_3-1} & + a_{32} c_R \overline{c_R} \gamma_3 z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3} \overline{z_1}^{-\gamma_1} \overline{z_2}^{-\gamma_2+1} \overline{z_3}^{-\gamma_3-1} \end{aligned}$$

Nous rappelons que nous travaillons uniquement sur une rotation irréductible avec l'hypothèse que $a_{12} \neq 0$ et articulons la démonstration en sept parties.

Partie 1. Pour commencer, *montrons que* $a_{13} = 0$ (pour notre rotation irréductible).

Certaines parties suivantes dans la démonstration utilisent des raisonnements similaires. Cette première partie sera donc effectuée avec suffisamment de détails, qui seront raccourcis par la suite. Il est important d'observer tout d'abord que nous allons montrer que $a_{13} \neq 0$ uniquement pour la rotation irréductible en question : le coefficient a_{13} pourrait exister pour une autre rotation, mais pas pour la rotation que nous étudions à présent. Autrement dit, nous montrons que a_{12} et a_{13} ne peuvent coexister pour la même rotation irréductible et donc que a_{13} ne peut être qu'indépendant par rapport à notre rotation irréductible.

Supposons par l'absurde, uniquement pour la rotation irréductible avec $a_{12} \neq 0$, que $a_{13} \neq 0$. L'idée est donc d'étudier l'annulation des termes de gauche avec les termes de droite suivants

$$\begin{aligned}
& a_{12}c_P\overline{c_Q}\alpha_1z_1^{\alpha_1-1}z_2^{\alpha_2+1}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1}\overline{z_2}^{\beta_2}\overline{z_3}^{\beta_3} & + a_{13}c_P\overline{c_Q}\alpha_1z_1^{\alpha_1-1}z_2^{\alpha_2}z_3^{\alpha_3+1}\overline{z_1}^{\beta_1}\overline{z_2}^{\beta_2}\overline{z_3}^{\beta_3} \\
& + \overline{a_{12}}c_Q\overline{c_P}\alpha_1z_1^{\beta_1}z_2^{\beta_2}z_3^{\beta_3}\overline{z_1}^{\alpha_1-1}\overline{z_2}^{\alpha_2+1}\overline{z_3}^{\alpha_3} & + \overline{a_{13}}c_Q\overline{c_P}\alpha_1z_1^{\beta_1}z_2^{\beta_2}z_3^{\beta_3}\overline{z_1}^{\alpha_1-1}\overline{z_2}^{\alpha_2}\overline{z_3}^{\alpha_3+1} \\
& + a_{12}c_Q\overline{c_P}\beta_1z_1^{\beta_1-1}z_2^{\beta_2+1}z_3^{\beta_3}\overline{z_1}^{\alpha_1}\overline{z_2}^{\alpha_2}\overline{z_3}^{\alpha_3} & + a_{13}c_Q\overline{c_P}\beta_1z_1^{\beta_1-1}z_2^{\beta_2}z_3^{\beta_3+1}\overline{z_1}^{\alpha_1}\overline{z_2}^{\alpha_2}\overline{z_3}^{\alpha_3} \\
& + \overline{a_{12}}c_P\overline{c_Q}\beta_1z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1-1}\overline{z_2}^{\beta_2+1}\overline{z_3}^{\beta_3} & + \overline{a_{13}}c_P\overline{c_Q}\beta_1z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1-1}\overline{z_2}^{\beta_2}\overline{z_3}^{\beta_3+1} \\
& + a_{12}c_R\overline{c_R}\gamma_1z_1^{\gamma_1-1}z_2^{\gamma_2+1}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1}\overline{z_2}^{\gamma_2}\overline{z_3}^{\gamma_3} & + a_{13}c_R\overline{c_R}\gamma_1z_1^{\gamma_1-1}z_2^{\gamma_2}z_3^{\gamma_3+1}\overline{z_1}^{\gamma_1}\overline{z_2}^{\gamma_2}\overline{z_3}^{\gamma_3} \\
& + \overline{a_{12}}c_R\overline{c_R}\gamma_1z_1^{\gamma_1}z_2^{\gamma_2}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1-1}\overline{z_2}^{\gamma_2+1}\overline{z_3}^{\gamma_3} & + \overline{a_{13}}c_R\overline{c_R}\gamma_1z_1^{\gamma_1}z_2^{\gamma_2}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1-1}\overline{z_2}^{\gamma_2}\overline{z_3}^{\gamma_3+1}.
\end{aligned}$$

Deux termes peuvent s'annuler uniquement deux à deux (pour des questions de degré, ce qui apparait clairement dans l'équation (★)). Des six termes en a_{12} , ce n'est pas une restriction de la généralité que d'étudier uniquement

$$a_{12}c_P\overline{c_Q}\alpha_1z_1^{\alpha_1-1}z_2^{\alpha_2+1}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1}\overline{z_2}^{\beta_2}\overline{z_3}^{\beta_3} \quad \text{et} \quad a_{12}c_R\overline{c_R}\gamma_1z_1^{\gamma_1-1}z_2^{\gamma_2+1}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1}\overline{z_2}^{\gamma_2}\overline{z_3}^{\gamma_3}.$$

En effet, le fait de prendre le conjugué ne change pas l'étude de cette annulation. Il en va de même avec la permutation de P et Q . Nous ajoutons que, comme l'hypersurface est holomorphiquement non dégénérée, α_1 , β_1 et γ_1 ne peuvent être tous nuls à la fois. Un de ces deux termes apparaît donc forcément (avec éventuellement une permutation de P et Q).

Concernant

$$a_{12}c_P\overline{c_Q}\alpha_1z_1^{\alpha_1-1}z_2^{\alpha_2+1}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1}\overline{z_2}^{\beta_2}\overline{z_3}^{\beta_3},$$

(avec $\alpha_1 \neq 0$), nous observons qu'il ne peut s'annuler qu'avec

$$\overline{a_{13}c_R\overline{c_R}}\gamma_1z_1^{\gamma_1}z_2^{\gamma_2}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1-1}\overline{z_2}^{\gamma_2}\overline{z_3}^{\gamma_3+1}.$$

En effet, une simple comparaison des puissances des variables holomorphes et antiholomorphes ainsi que le fait que l'hypersurface soit holomorphiquement non dégénérée (par exemple, il est impossible que $Q = R$) montrent l'impossibilité d'annulation du terme en question avec une autre terme en a_{13} ¹³⁰. Donc dans ce seul cas possible,

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \alpha_1 - 1 = \beta_1 + 1 \\ \gamma_2 &= \alpha_2 + 1 = \beta_2 \\ \gamma_3 &= \alpha_3 = \beta_3 - 1,\end{aligned}$$

et nous pouvons montrer que $\gamma_1 = 0$. Cela implique une contradiction avec l'homogénéité de l'hypersurface¹³¹. Nous montrons que $\gamma_1 = 0$ en observant que le terme

$$a_{12}c_R\overline{c_R}\gamma_1z_1^{\gamma_1-1}z_2^{\gamma_2+1}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1}\overline{z_2}^{\gamma_2}\overline{z_3}^{\gamma_3}$$

pose problème, car même réécrit,

$$\begin{aligned}& a_{12}c_R\overline{c_R}\gamma_1z_1^{\gamma_1-1}z_2^{\gamma_2+1}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1}\overline{z_2}^{\gamma_2}\overline{z_3}^{\gamma_3} \\ &= a_{12}c_R\overline{c_R}\gamma_1z_1^{\beta_1}z_2^{\beta_2+1}z_3^{\beta_3-1}\overline{z_1}^{\alpha_1-1}\overline{z_2}^{\alpha_2+1}\overline{z_3}^{\alpha_3} \\ &= a_{12}c_R\overline{c_R}\gamma_1z_1^{\alpha_1-2}z_2^{\alpha_2+2}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1+1}\overline{z_2}^{\beta_2}\overline{z_3}^{\beta_3-1},\end{aligned}$$

nous observons que cela n'est pas disponible dans l'ensemble de l'équation (★). Nous pourrions imaginer que ce terme s'annule avec des termes d'autres coefficients dans

130. Nous notons également que l'annulation de ce terme avec un autre terme en a_{12} est traité dans la partie 6. L'annulation de termes en a_{13} entre eux n'est pas l'objet de ce lemme, car il s'agirait d'une autre rotation, indépendante de notre rotation N étudiée ici (qui est irréductible).

131. En effet, si, en tentant de forcer cette hypersurface, avec $\beta_1 = 0$, pour ne pas être -1 , et $\alpha_1 = 1$ (ne pouvant être nul, sinon l'hypersurface est holomorphiquement dégénérée), l'hypersurface décrite par

$$\text{Im } w = c_P\overline{c_Q}z_1^{\alpha_2}z_3^{\alpha_3}\overline{z_2}^{\alpha_2+1}\overline{z_3}^{\alpha_3+1} + c_Q\overline{c_P}z_2^{\alpha_2+1}z_3^{\alpha_3+1}\overline{z_1}^{\alpha_2}\overline{z_3}^{\alpha_3} + c_R\overline{c_R}z_2^{\alpha_2+1}z_3^{\alpha_3}\overline{z_2}^{\alpha_2+1}\overline{z_3}^{\alpha_3}$$

n'est pas homogène.

l'équation (★), mais il faudrait que ces termes (qui ne sont autres que des termes en $P\overline{Q}$, en $\overline{Q}P$ ou en $R\overline{R}$ avec au maximum un degré de différence par variable) puissent s'écrire comme une des trois possibilités ci-dessus, ce qui n'est pas le cas.

Concernant

$$a_{12}c_R\overline{c_R}\gamma_1z_1^{\gamma_1-1}z_2^{\gamma_2+1}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1}\overline{z_2}^{\gamma_2}\overline{z_3}^{\gamma_3},$$

(avec $\gamma_1 \neq 0$), nous observons, pour les mêmes raisons, qu'il ne peut s'annuler qu'avec

$$\overline{a_{13}c_Q\overline{c_P}}\alpha_1z_1^{\beta_1}z_2^{\beta_2}z_3^{\beta_3}\overline{z_1}^{\alpha_1-1}\overline{z_2}^{\alpha_2}\overline{z_3}^{\alpha_3+1},$$

ce qui n'est pas une restriction par rapport au terme

$$\overline{a_{13}c_P\overline{c_Q}}\beta_1z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1-1}\overline{z_2}^{\beta_2}\overline{z_3}^{\beta_3+1},$$

le point de vue, de P ou de Q , pouvant être interverti. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \alpha_1 - 1 = \beta_1 + 1 \\ \gamma_2 &= \alpha_2 = \beta_2 - 1 \\ \gamma_3 &= \alpha_3 + 1 = \beta_3,\end{aligned}$$

et c'est maintenant le terme

$$a_{12}c_P\overline{c_Q}\alpha_1z_1^{\alpha_1-1}z_2^{\alpha_2+1}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1}\overline{z_2}^{\beta_2}\overline{z_3}^{\beta_3}$$

$$\left(= a_{12}c_R\overline{c_R}\gamma_1z_1^{\beta_1+1}z_2^{\beta_2}z_3^{\beta_3-1}\overline{z_1}^{\alpha_1-2}\overline{z_2}^{\alpha_2+1}\overline{z_3}^{\alpha_3+1} = a_{12}c_R\overline{c_R}\gamma_1z_1^{\gamma_1}z_2^{\gamma_2+1}z_3^{\gamma_3-1}\overline{z_1}^{\gamma_1-1}\overline{z_2}^{\gamma_2+1}\overline{z_3}^{\gamma_3} \right)$$

qui pose problème (dans toute l'équation (★)) en ne pouvant pas s'annuler, sauf si $\alpha_1 = 0$, ce qui est une contradiction avec l'homogénéité.

Partie 2. Pour poursuivre la démonstration, *montrons que $a_{21} = 0$.*

Nous travaillons de manière similaire. Supposons par l'absurde, uniquement pour notre rotation irréductible avec $a_{12} \neq 0$, que $a_{21} \neq 0$ et l'idée est donc d'étudier des annulations dans

$$\begin{aligned}
& a_{12}c_P\overline{c_Q}\alpha_1z_1^{\alpha_1-1}z_2^{\alpha_2+1}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1}\overline{z_2}^{\beta_2}\overline{z_3}^{\beta_3} & + a_{21}c_P\overline{c_Q}\alpha_2z_1^{\alpha_1+1}z_2^{\alpha_2-1}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1}\overline{z_2}^{\beta_2}\overline{z_3}^{\beta_3} \\
& + \overline{a_{12}}c_Q\overline{c_P}\alpha_1z_1^{\beta_1}z_2^{\beta_2}z_3^{\beta_3}\overline{z_1}^{\alpha_1-1}\overline{z_2}^{\alpha_2+1}\overline{z_3}^{\alpha_3} & + \overline{a_{21}}c_Q\overline{c_P}\alpha_2z_1^{\beta_1}z_2^{\beta_2}z_3^{\beta_3}\overline{z_1}^{\alpha_1+1}\overline{z_2}^{\alpha_2-1}\overline{z_3}^{\alpha_3} \\
& + a_{12}c_Q\overline{c_P}\beta_1z_1^{\beta_1-1}z_2^{\beta_2+1}z_3^{\beta_3}\overline{z_1}^{\alpha_1}\overline{z_2}^{\alpha_2}\overline{z_3}^{\alpha_3} & + a_{21}c_Q\overline{c_P}\beta_2z_1^{\beta_1+1}z_2^{\beta_2-1}z_3^{\beta_3}\overline{z_1}^{\alpha_1}\overline{z_2}^{\alpha_2}\overline{z_3}^{\alpha_3} \\
& + \overline{a_{12}}c_P\overline{c_Q}\beta_1z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1-1}\overline{z_2}^{\beta_2+1}\overline{z_3}^{\beta_3} & + \overline{a_{21}}c_P\overline{c_Q}\beta_2z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1+1}\overline{z_2}^{\beta_2-1}\overline{z_3}^{\beta_3} \\
& + a_{12}c_R\overline{c_R}\gamma_1z_1^{\gamma_1-1}z_2^{\gamma_2+1}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1}\overline{z_2}^{\gamma_2}\overline{z_3}^{\gamma_3} & + a_{21}c_R\overline{c_R}\gamma_2z_1^{\gamma_1+1}z_2^{\gamma_2-1}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1}\overline{z_2}^{\gamma_2}\overline{z_3}^{\gamma_3} \\
& + \overline{a_{12}}c_R\overline{c_R}\gamma_1z_1^{\gamma_1}z_2^{\gamma_2}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1-1}\overline{z_2}^{\gamma_2+1}\overline{z_3}^{\gamma_3} & + \overline{a_{21}}c_R\overline{c_R}\gamma_2z_1^{\gamma_1}z_2^{\gamma_2}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1+1}\overline{z_2}^{\gamma_2-1}\overline{z_3}^{\gamma_3}.
\end{aligned}$$

Il suffit à nouveau d'étudier les annulations des termes

$$a_{12}c_P\overline{c_Q}\alpha_1z_1^{\alpha_1-1}z_2^{\alpha_2+1}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1}\overline{z_2}^{\beta_2}\overline{z_3}^{\beta_3} \quad \text{et} \quad a_{12}c_R\overline{c_R}\gamma_1z_1^{\gamma_1-1}z_2^{\gamma_2+1}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1}\overline{z_2}^{\gamma_2}\overline{z_3}^{\gamma_3}$$

avec d'autres termes en a_{21} . Au moins un de ces termes existe, car α_1 (ou β_1 par permutation de P et Q) et γ_1 ne peuvent être nuls en même temps. En observant les exposants, et sans restriction de la généralité (avec la conjugaison ou la permutation de P et Q), nous observons comme précédemment deux possibilités.

La première est l'annulation de

$$a_{12}c_P\overline{c_Q}\alpha_1z_1^{\alpha_1-1}z_2^{\alpha_2+1}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1}\overline{z_2}^{\beta_2}\overline{z_3}^{\beta_3} \quad \text{avec} \quad \overline{a_{21}}c_R\overline{c_R}\gamma_2z_1^{\gamma_1}z_2^{\gamma_2}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1+1}\overline{z_2}^{\gamma_2-1}\overline{z_3}^{\gamma_3},$$

(avec $\alpha_1 \neq 0$), qui implique

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \alpha_1 - 1 = \beta_1 - 1 \\
\gamma_2 &= \alpha_2 + 1 = \beta_2 + 1 \\
\gamma_3 &= \alpha_3 = \beta_3.
\end{aligned}$$

Dans ce cas, P et Q sont des monômes semblables et ceci est une contradiction avec le fait que l'hypersurface est holomorphiquement non dégénérée.

La seconde possibilité est l'annulation de

$$a_{12}c_R\overline{c_R}\gamma_1z_1^{\gamma_1-1}z_2^{\gamma_2+1}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1}\overline{z_2}^{\gamma_2}\overline{z_3}^{\gamma_3} \quad \text{avec} \quad \overline{a_{21}}c_Q\overline{c_P}\alpha_2z_1^{\beta_1}z_2^{\beta_2}z_3^{\beta_3}\overline{z_1}^{\alpha_1+1}\overline{z_2}^{\alpha_2-1}\overline{z_3}^{\alpha_3}$$

(avec $\gamma_1 \neq 0$), qui implique

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \alpha_1 + 1 = \beta_1 + 1 \\ \gamma_2 &= \alpha_2 - 1 = \beta_2 - 1 \\ \gamma_3 &= \alpha_3 = \beta_3.\end{aligned}$$

Dans ce cas, P et Q sont également des monômes semblables et ceci est une contradiction.

Partie 3. Pour poursuivre la démonstration, *montrons que $a_{32} = 0$.*

Toujours avec la même démarche, en supposant par l'absurde que $a_{32} \neq 0$ (uniquement pour notre rotation irréductible avec $a_{12} \neq 0$), et sans restriction de la généralité, la situation se réduit à deux annulations possibles (nous pouvons nous référer à l'équation (★)),

$$a_{12} \overline{C_P C_Q} \alpha_1 z_1^{\alpha_1-1} z_2^{\alpha_2+1} z_3^{\alpha_3} \overline{z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3}} \quad \text{avec} \quad \overline{a_{32} C_R C_R} \gamma_3 z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3} \overline{z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2+1} z_3^{\gamma_3-1}},$$

et

$$a_{12} \overline{C_R C_R} \gamma_1 z_1^{\gamma_1-1} z_2^{\gamma_2+1} z_3^{\gamma_3} \overline{z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3}} \quad \text{avec} \quad \overline{a_{32} C_Q C_P} \alpha_3 z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3} \overline{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2+1} z_3^{\alpha_3-1}}.$$

La première annulation, avec $\alpha_1 \neq 0$, implique que

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \alpha_1 - 1 = \beta_1 \\ \gamma_2 &= \alpha_2 + 1 = \beta_2 - 1 \\ \gamma_3 &= \alpha_3 = \beta_3 + 1.\end{aligned}$$

avec $\alpha_3 = 0$, car le terme

$$a_{32} \overline{C_P C_Q} \alpha_3 z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2+1} z_3^{\alpha_3-1} \overline{z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3}}$$

$$\left(= a_{32} \overline{C_P C_Q} \alpha_3 z_1^{\beta_1+1} z_2^{\beta_2-1} z_3^{\beta_3} \overline{z_1^{\alpha_1-1} z_2^{\alpha_2+2} z_3^{\alpha_3-1}} = a_{32} \overline{C_P C_Q} \alpha_3 z_1^{\gamma_1+1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3-1} \overline{z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2+1} z_3^{\gamma_3-1}} \right)$$

pose problème dans (★). Il y a une contradiction avec l'homogénéité.

La seconde annulation, avec $\gamma_1 \neq 0$, implique que

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \alpha_1 = \beta_1 + 1 \\ \gamma_2 &= \alpha_2 + 1 = \beta_2 - 1 \\ \gamma_3 &= \alpha_3 - 1 = \beta_3.\end{aligned}$$

avec $\alpha_1 = 0$, car le terme

$$a_{12}c_P\overline{c_Q}\alpha_1z_1^{\alpha_1-1}z_2^{\alpha_2+1}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1}\overline{z_2}^{\beta_2}\overline{z_3}^{\beta_3}$$

$$\left(= a_{12}c_P\overline{c_Q}\alpha_1z_1^{\beta_1}\overline{z_2}^{\beta_2-1}\overline{z_3}^{\beta_3+1}\overline{z_1}^{\alpha_1-1}\overline{z_2}^{\alpha_2+2}\overline{z_3}^{\alpha_3-1} = a_{12}c_P\overline{c_Q}\alpha_1z_1^{\gamma_1-1}z_2^{\gamma_2}z_3^{\gamma_3+1}\overline{z_1}^{\gamma_1-1}\overline{z_2}^{\gamma_2+1}\overline{z_3}^{\gamma_3} \right)$$

pose problème dans (★). Il y a encore une contradiction avec l'homogénéité.

Partie 4. Pour poursuivre la démonstration, *montrons que*

$$a_{23} \neq 0 \Rightarrow \text{Im } w = 2 \text{Re} \left(c_P\overline{c_Q}z_1^k\overline{z_3}^{k+1} \right) + c_R\overline{c_R}z_2^k\overline{z_3}^k \text{ et } a_{31} = 0.$$

En rappelant que la rotation en question est irréductible (avec $a_{12} \neq 0$), nous supposons que $a_{23} \neq 0$ et étudions les annulations entre termes de gauche et de droite dans

$$\begin{aligned}& a_{12}c_P\overline{c_Q}\alpha_1z_1^{\alpha_1-1}z_2^{\alpha_2+1}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1}\overline{z_2}^{\beta_2}\overline{z_3}^{\beta_3} & + a_{23}c_P\overline{c_Q}\alpha_2z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2-1}z_3^{\alpha_3+1}\overline{z_1}^{\beta_1}\overline{z_2}^{\beta_2}\overline{z_3}^{\beta_3} \\ & + \overline{a_{12}c_P\overline{c_Q}\alpha_1}z_1^{\beta_1}z_2^{\beta_2}z_3^{\beta_3}\overline{z_1}^{\alpha_1-1}\overline{z_2}^{\alpha_2+1}\overline{z_3}^{\alpha_3} & + \overline{a_{23}c_P\overline{c_Q}\alpha_2}z_1^{\beta_1}z_2^{\beta_2}z_3^{\beta_3}\overline{z_1}^{\alpha_1}\overline{z_2}^{\alpha_2-1}\overline{z_3}^{\alpha_3+1} \\ & + a_{12}c_Q\overline{c_P}\beta_1z_1^{\beta_1-1}z_2^{\beta_2+1}z_3^{\beta_3}\overline{z_1}^{\alpha_1}\overline{z_2}^{\alpha_2}\overline{z_3}^{\alpha_3} & + a_{23}c_Q\overline{c_P}\beta_2z_1^{\beta_1}z_2^{\beta_2-1}z_3^{\beta_3+1}\overline{z_1}^{\alpha_1}\overline{z_2}^{\alpha_2}\overline{z_3}^{\alpha_3} \\ & + \overline{a_{12}c_P\overline{c_Q}\beta_1}z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1-1}\overline{z_2}^{\beta_2+1}\overline{z_3}^{\beta_3} & + \overline{a_{23}c_P\overline{c_Q}\beta_2}z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1}\overline{z_2}^{\beta_2-1}\overline{z_3}^{\beta_3+1} \\ & + a_{12}c_R\overline{c_R}\gamma_1z_1^{\gamma_1-1}z_2^{\gamma_2+1}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1}\overline{z_2}^{\gamma_2}\overline{z_3}^{\gamma_3} & + a_{23}c_R\overline{c_R}\gamma_2z_1^{\gamma_1}z_2^{\gamma_2-1}z_3^{\gamma_3+1}\overline{z_1}^{\gamma_1}\overline{z_2}^{\gamma_2}\overline{z_3}^{\gamma_3} \\ & + \overline{a_{12}c_R\overline{c_R}\gamma_1}z_1^{\gamma_1}z_2^{\gamma_2}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1-1}\overline{z_2}^{\gamma_2+1}\overline{z_3}^{\gamma_3} & + \overline{a_{23}c_R\overline{c_R}\gamma_2}z_1^{\gamma_1}z_2^{\gamma_2}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1}\overline{z_2}^{\gamma_2-1}\overline{z_3}^{\gamma_3+1}.\end{aligned}$$

Nous restons ouverts à l'intervention d'un autre coefficient dans (★), mais le but est d'observer uniquement les annulations de

$$a_{12}c_P\overline{c_Q}\alpha_1z_1^{\alpha_1-1}z_2^{\alpha_2+1}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1}\overline{z_2}^{\beta_2}\overline{z_3}^{\beta_3} \quad \text{et} \quad a_{12}c_R\overline{c_R}\gamma_1z_1^{\gamma_1-1}z_2^{\gamma_2+1}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1}\overline{z_2}^{\gamma_2}\overline{z_3}^{\gamma_3}.$$

avec des termes en a_{23} . Sans restriction de la généralité, seules deux possibilités se présentent : l'annulation de

$$a_{12}c_P\overline{c_Q}\alpha_1z_1^{\alpha_1-1}z_2^{\alpha_2+1}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1}\overline{z_2}^{\beta_2}\overline{z_3}^{\beta_3} \quad \text{avec} \quad \overline{a_{23}c_R\overline{c_R}}\gamma_2z_1^{\gamma_1}z_2^{\gamma_2}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1}\overline{z_2}^{\gamma_2-1}\overline{z_3}^{\gamma_3+1},$$

avec $\alpha_1 \neq 0$, et celle, avec $\gamma_1 \neq 0$, de

$$a_{12}c_R\overline{c_R}\gamma_1z_1^{\gamma_1-1}z_2^{\gamma_2+1}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1}\overline{z_2}^{\gamma_2}\overline{z_3}^{\gamma_3} \quad \text{avec} \quad \overline{a_{23}c_Q\overline{c_P}}\alpha_2z_1^{\beta_1}z_2^{\beta_2}z_3^{\beta_3}\overline{z_1}^{\alpha_1}\overline{z_2}^{\alpha_2-1}\overline{z_3}^{\alpha_3+1}.$$

Nous pouvons déjà éliminer la seconde possibilité, car, de manière similaire aux étapes précédente, nous avons

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \alpha_1 &= \beta_1 + 1 \\ \gamma_2 &= \alpha_2 - 1 &= \beta_2 - 1 \\ \gamma_3 &= \alpha_3 + 1 &= \beta_3. \end{aligned}$$

avec $\alpha_1 = 0$, car le terme

$$a_{12}c_P\overline{c_Q}\alpha_1z_1^{\alpha_1-1}z_2^{\alpha_2+1}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1}\overline{z_2}^{\beta_2}\overline{z_3}^{\beta_3}$$

$$\left(= a_{12}c_P\overline{c_Q}\alpha_1z_1^{\beta_1}z_2^{\beta_2+1}z_3^{\beta_3-1}\overline{z_1}^{\alpha_1-1}\overline{z_2}^{\alpha_2}\overline{z_3}^{\alpha_3+1} = a_{12}c_P\overline{c_Q}\alpha_1z_1^{\gamma_1-1}z_2^{\gamma_2+2}z_3^{\gamma_3-1}\overline{z_1}^{\gamma_1-1}\overline{z_2}^{\gamma_2+1}\overline{z_3}^{\gamma_3} \right)$$

pose problème dans toute l'équation (★). Il y a donc une contradiction avec l'homogénéité et cette possibilité n'en est pas une (comme précédemment).

Par contre, l'annulation entre

$$a_{12}c_P\overline{c_Q}\alpha_1z_1^{\alpha_1-1}z_2^{\alpha_2+1}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1}\overline{z_2}^{\beta_2}\overline{z_3}^{\beta_3} \quad \text{et} \quad \overline{a_{23}c_R\overline{c_R}}\gamma_2z_1^{\gamma_1}z_2^{\gamma_2}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1}\overline{z_2}^{\gamma_2-1}\overline{z_3}^{\gamma_3+1}$$

est féconde. En effet, dans ce cas

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \alpha_1 - 1 &= \beta_1 \\ \gamma_2 &= \alpha_2 + 1 &= \beta_2 + 1 \\ \gamma_3 &= \alpha_3 &= \beta_3 - 1, \end{aligned}$$

et nous pouvons constater deux conséquences : $\gamma_1 = 0$ et $\alpha_2 = 0$.

Pour monter que $\gamma_1 = 0$, il suffit d'observer que le terme

$$a_{12}c_R\overline{c_R}\gamma_1z_1^{\gamma_1-1}z_2^{\gamma_2+1}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1}\overline{z_2}^{\gamma_2}\overline{z_3}^{\gamma_3}$$

$$\left(= a_{12}c_R\overline{c_R}\gamma_1z_1^{\alpha_1-2}z_2^{\alpha_2+2}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1}\overline{z_2}^{\beta_2+1}\overline{z_3}^{\beta_3-1} = a_{12}c_R\overline{c_R}\gamma_1z_1^{\beta_1-1}z_2^{\beta_2+2}z_3^{\beta_3-1}\overline{z_1}^{\alpha_1-1}\overline{z_2}^{\alpha_2+1}\overline{z_3}^{\alpha_3} \right)$$

pose problème, car il n'est pas disponible dans (★) et donc doit être nul.

Pour monter que $\alpha_2 = 0$, il suffit d'observer que le terme

$$a_{23}c_P\overline{c_Q}\alpha_2z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2-1}z_3^{\alpha_3+1}\overline{z_1}^{\beta_1}\overline{z_2}^{\beta_2}\overline{z_3}^{\beta_3}$$

$$\left(= a_{23}c_P\overline{c_Q}\alpha_2z_1^{\beta_1+1}z_2^{\beta_2}z_3^{\beta_3-1}\overline{z_1}^{\alpha_1-1}\overline{z_2}^{\alpha_2}\overline{z_3}^{\alpha_3+1} = a_{23}c_P\overline{c_Q}\alpha_2z_1^{\gamma_1+1}z_2^{\gamma_2-2}z_3^{\gamma_3+1}\overline{z_1}^{\gamma_1}\overline{z_2}^{\gamma_2-1}\overline{z_3}^{\gamma_3+1} \right)$$

pose également problème dans (★). Le système devient alors

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 0 & \alpha_1 &= 1 & \beta_1 &= 0 \\ \gamma_2 &= 1 & \alpha_2 &= 0 & \beta_2 &= 0 \\ \gamma_3 &= k & \alpha_3 &= k & \beta_3 &= k+1, \end{aligned}$$

engendrant l'hypersurface décrite par

$$\text{Im } w = c_P\overline{c_Q}z_1^k\overline{z_3}^{k+1} + c_Q\overline{c_P}z_3^{k+1}\overline{z_1}^k\overline{z_3} + c_R\overline{c_R}z_2z_3^k\overline{z_2}^k\overline{z_3},$$

qui a une rotation irréductible

$$N = a_{12}z_2\frac{\partial}{\partial z_1} + a_{23}z_3\frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Nous observons que si $k = 0$, l'hypersurface est une hyperquadrique qui est donc Levi non dégénérée, ce qui ne nous intéresse pas dans ce travail. Nous supposons donc que $k > 1$.

En outre, nous rappelons que nous avons considéré l'équation (★) dans son ensemble pour l'annulation des termes problématiques. Ainsi, aucun autre coefficient, en plus de a_{12} et a_{23} , ne peut intervenir et donc, $a_{31} = 0$ (pour cette rotation irréductible uniquement).

Partie 5. Pour poursuivre la démonstration, *montrons que*

$$a_{31} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Im } w = 2 \text{Re} \left(c_P\overline{c_Q}z_2^kz_3^k\overline{z_2}^{k+1} \right) + c_R\overline{c_R}z_1z_2^k\overline{z_1}^k \quad \text{et} \quad a_{23} = 0.$$

Rappelons que pour la partie **4**, nous avons montré que pour une rotation irréductible,

$$a_{12}, a_{23} \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Im} w = 2 \operatorname{Re} \left(c_P \overline{c_Q} z_1 z_3^k \overline{z_3^{k+1}} \right) + c_R \overline{c_R} z_2 z_3^k \overline{z_2 z_3^k} \text{ et } a_{31} = 0.$$

Il suffit d'appliquer à ce résultat le changement de variable

$$z'_3 = z_1, \quad z'_1 = z_2, \quad z'_2 = z_3$$

pour que la partie **5** soit prouvée. Dans ces nouvelles coordonnées, l'hypersurface

$$\operatorname{Im} w = c_P \overline{c_Q} z_2^k z_3 z_2^{\overline{k+1}} + c_Q \overline{c_P} z_2^{k+1} \overline{z_2^k z_3} + c_R \overline{c_R} z_1 z_2^k \overline{z_1 z_2^k},$$

a donc une rotation irréductible

$$N = a_{12} z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + a_{31} z_1 \frac{\partial}{\partial z_3}.$$

Nous observons également que si $k = 0$, l'hypersurface est une hyperquadrique qui est donc Levi non dégénérée, ce qui ne nous intéresse pas dans ce travail. Nous supposons donc que $k > 1$.

En outre, comme auparavant, nous rappelons que nous avons considéré l'équation (★) dans son ensemble pour l'annulation des termes problématiques. Ainsi, aucun autre coefficient, en plus de a_{12} et a_{31} , ne peut intervenir et donc, $a_{23} = 0$ (pour cette rotation irréductible uniquement). D'ailleurs, $a_{23} \neq 0$ et $a_{31} \neq 0$ ne peuvent coexister car les deux hypersurfaces trouvées dans les parties **4** et **5** sont incompatibles.

Partie 6. Pour poursuivre la démonstration, *montrons que*

$$a_{23} = 0 \text{ et } a_{31} = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} w = 2 \operatorname{Re} \left(c_P \overline{c_Q} z_1 z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} \overline{z_2^{\alpha_2+1} z_3^{\alpha_3}} \right) + c_R \overline{c_R} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3} \overline{z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3}}$$

Nous supposons que seul $a_{12} \neq 0$, pour une rotation irréductible, et étudions les annulations dans

$$\begin{aligned}
& a_{12}c_P\overline{c_Q}\alpha_1z_1^{\alpha_1-1}z_2^{\alpha_2+1}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1}\overline{z_2}^{\beta_2}\overline{z_3}^{\beta_3} \\
& +\overline{a_{12}c_Q}\overline{c_P}\alpha_1z_1^{\beta_1}z_2^{\beta_2}z_3^{\beta_3}\overline{z_1}^{\alpha_1-1}\overline{z_2}^{\alpha_2+1}\overline{z_3}^{\alpha_3} \\
& +a_{12}c_Q\overline{c_P}\beta_1z_1^{\beta_1-1}z_2^{\beta_2+1}z_3^{\beta_3}\overline{z_1}^{\alpha_1}\overline{z_2}^{\alpha_2}\overline{z_3}^{\alpha_3} \\
& +\overline{a_{12}c_P}\overline{c_Q}\beta_1z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1-1}\overline{z_2}^{\beta_2+1}\overline{z_3}^{\beta_3} \\
& +a_{12}c_R\overline{c_R}\gamma_1z_1^{\gamma_1-1}z_2^{\gamma_2+1}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1}\overline{z_2}^{\gamma_2}\overline{z_3}^{\gamma_3} \\
& +\overline{a_{12}c_R}\overline{c_R}\gamma_1z_1^{\gamma_1}z_2^{\gamma_2}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1-1}\overline{z_2}^{\gamma_2+1}\overline{z_3}^{\gamma_3},
\end{aligned}$$

en observant uniquement, et sans restriction de la généralité, l'annulation de

$$a_{12}c_P\overline{c_Q}\alpha_1z_1^{\alpha_1-1}z_2^{\alpha_2+1}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1}\overline{z_2}^{\beta_2}\overline{z_3}^{\beta_3} \quad \text{avec} \quad \overline{a_{12}c_Q}\overline{c_P}\alpha_1z_1^{\beta_1}z_2^{\beta_2}z_3^{\beta_3}\overline{z_1}^{\alpha_1-1}\overline{z_2}^{\alpha_2+1}\overline{z_3}^{\alpha_3}$$

et celle de

$$a_{12}c_P\overline{c_Q}\alpha_1z_1^{\alpha_1-1}z_2^{\alpha_2+1}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1}\overline{z_2}^{\beta_2}\overline{z_3}^{\beta_3} \quad \text{avec} \quad \overline{a_{12}c_R}\overline{c_R}\gamma_1z_1^{\gamma_1}z_2^{\gamma_2}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1-1}\overline{z_2}^{\gamma_2+1}\overline{z_3}^{\gamma_3}.$$

La première annulation, avec $\alpha_1 \neq 0$, implique que

$$\begin{aligned}
\alpha_1 - 1 &= \beta_1 \\
\alpha_2 + 1 &= \beta_2 \\
\alpha_3 &= \beta_3,
\end{aligned}$$

avec γ_1, γ_2 et γ_3 libres. Montrons, dans ce cas, que $\beta_1 = 0$ et $\gamma_1 = 0$. Nous voyons que $\beta_1 = 0$, car le terme

$$\begin{aligned}
& a_{12}c_Q\overline{c_P}\beta_1z_1^{\beta_1-1}z_2^{\beta_2+1}z_3^{\beta_3}\overline{z_1}^{\alpha_1}\overline{z_2}^{\alpha_2}\overline{z_3}^{\alpha_3} \\
& \left(= a_{12}c_Q\overline{c_P}\beta_1z_1^{\alpha_1-2}z_2^{\alpha_2+2}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1+1}\overline{z_2}^{\beta_2-1}\overline{z_3}^{\beta_3} \right)
\end{aligned}$$

pose problème. Nous rappelons que tous les autres coefficients a_{jk} , avec $j, k = 1, 2, 3$, ne peuvent pas intervenir dans cette partie **6**, pour cette rotation irréductible. Il est possible que ce dernier terme s'annule avec un autre terme de (\star), un terme en γ . Dans ce cas, nous devons ajouter aux conditions précédentes des conditions similaires à celles de la partie **4**. Cela engendre une autre rotation qui est indépendante de la rotation que nous considérons dans cette partie **6**¹³² : par irréductibilité et par hypothèse, seul a_{12} est non

132. Nous considérons les rotations séparables en deux rotations, comme ce serait le cas ici, dans le

nul dans cette partie **6**.

De la même manière, $\gamma_1 = 0$, car le terme

$$a_{12}c_R\overline{c_R}\gamma_1z_1^{\gamma_1-1}z_2^{\gamma_2+1}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1}\overline{z_2}^{\gamma_2}\overline{z_3}^{\gamma_3}$$

pose problème. Ainsi,

$$\begin{array}{lll} \gamma_1 = 0 & \alpha_1 = 1 & \beta_1 = 0 \\ \gamma_2 \text{ libre} & \alpha_2 \text{ libre} & \beta_2 = \alpha_2 + 1 \\ \gamma_3 \text{ libre} & \alpha_3 \text{ libre} & \beta_3 = \alpha_3, \end{array}$$

(avec au moins γ_3 ou α_3 non nul) et l'hypersurface accueillant une telle rotation est décrite par

$$\text{Im } w = c_P\overline{c_Q}z_1^{\alpha_2}z_2^{\alpha_3}\overline{z_2}^{\alpha_2+1}\overline{z_3}^{\alpha_3} + c_Q\overline{c_P}z_2^{\alpha_2+1}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}\overline{z_2}^{\alpha_2}\overline{z_3}^{\alpha_3} + c_R\overline{c_R}z_2^{\gamma_2}z_3^{\gamma_3}\overline{z_2}^{\gamma_2}\overline{z_3}^{\gamma_3}.$$

La seconde annulation possible, avec $\alpha_1 \neq 0$ et $\gamma_1 \neq 0$, celle de

$$a_{12}c_P\overline{c_Q}\alpha_1z_1^{\alpha_1-1}z_2^{\alpha_2+1}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1}\overline{z_2}^{\beta_2}\overline{z_3}^{\beta_3} \quad \text{avec} \quad \overline{a_{12}c_R\overline{c_R}\gamma_1z_1^{\gamma_1}z_2^{\gamma_2}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1-1}\overline{z_2}^{\gamma_2+1}\overline{z_3}^{\gamma_3}},$$

implique que

$$\begin{array}{lll} \gamma_1 & = & \alpha_1 - 1 = \beta_1 + 1 \\ \gamma_2 & = & \alpha_2 + 1 = \beta_2 - 1 \\ \gamma_3 & = & \alpha_3 = \beta_3, \end{array}$$

Dans ce cas, $\beta_1 = 0$, car le terme

$$a_{12}c_Q\overline{c_P}\beta_1z_1^{\beta_1-1}z_2^{\beta_2+1}z_3^{\beta_3}\overline{z_1}^{\alpha_1}\overline{z_2}^{\alpha_2}\overline{z_3}^{\alpha_3}$$

$$\left(= a_{12}c_Q\overline{c_P}\beta_1z_1^{\alpha_1-3}z_2^{\alpha_2+3}z_3^{\alpha_3}\overline{z_1}^{\beta_1+2}\overline{z_2}^{\beta_2-2}\overline{z_3}^{\beta_3} = a_{12}c_Q\overline{c_P}\beta_1z_1^{\gamma_1-2}z_2^{\gamma_2+2}z_3^{\gamma_3}\overline{z_1}^{\gamma_1+1}\overline{z_2}^{\gamma_2-1}\overline{z_3}^{\gamma_3} \right)$$

pose problème. Nous rappelons que tous les autres coefficients a_{jk} , avec $j, k = 1, 2, 3$, ne peuvent pas intervenir dans cette partie **6**, pour cette rotation irréductible. Nous avons en effet déjà montré qu'ils étaient nuls ou nous le supposons (pour a_{31} et a_{23}). Ainsi,

théorème, plus précisément partie 3.2, p.137.

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= 1 & \alpha_1 &= 2 & \beta_1 &= 0 \\
\gamma_2 &= \alpha_2 + 1 & \alpha_2 & \text{ libre} & \beta_2 &= \alpha_2 + 2 \\
\gamma_3 &= \alpha_3 & \alpha_3 & \text{ libre} & \beta_3 &= \alpha_3,
\end{aligned}$$

(avec $\alpha_3 \neq 0$) et l'hypersurface accueillant une telle rotation est décrite par

$$\text{Im } w = c_P \overline{c_Q} z_1^2 z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} \overline{z_2}^{\alpha_2+2} \overline{z_3}^{\alpha_3} + c_Q \overline{c_P} z_2^{\alpha_2+2} z_3^{\alpha_3} \overline{z_1}^2 \overline{z_2}^{\alpha_2} \overline{z_3}^{\alpha_3} + c_R \overline{c_R} z_1 z_2^{\alpha_2+1} z_3^{\alpha_3} \overline{z_1} \overline{z_2}^{\alpha_2+1} \overline{z_3}^{\alpha_3}.$$

Nous pouvons écarter cette hypersurface, car elle s'avère holomorphiquement dégénérée. En effet, le champ

$$X = \alpha_3 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \alpha_3 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - (\alpha_2 + 2) z_3 \frac{\partial}{\partial z_3}$$

annule le polynôme. Nous vérifions effectivement que

$$\begin{aligned}
X(\mathcal{P}) &= 2\alpha_3 P \overline{Q} + \alpha_3 R \overline{R} \\
&= +\alpha_3 \alpha_2 P \overline{Q} + \alpha_3 (\alpha_2 + 2) Q \overline{P} + \alpha_3 (\alpha_2 + 1) R \overline{R} \\
&= -(\alpha_2 + 2) \alpha_3 P \overline{Q} - (\alpha_2 + 2) \alpha_3 Q \overline{P} - (\alpha_2 + 2) \alpha_3 R \overline{R} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Une autre possibilité aurait été de considérer la dépendance linéaire des exposants des trois polynômes¹³³.

Partie 7. Pour terminer la démonstration, *montrons que*

toutes les rotations rencontrées au long de cette preuve sont nilpotentes.

Les rotations sont au nombre de trois et nous pourrions également spécifier les constantes de l'hypersurface correspondante.

Partie 7.1. La première rotation est

$$N_I = a_{12} z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + a_{23} z_3 \frac{\partial}{\partial z_2},$$

133. Cf. lemme 4.1.8, p.90.

avec $a_{12} \neq 0$, $a_{23} \neq 0$ et $a_{31} = 0$, qui correspond à l'hypersurface

$$\text{Im } w = 2 \text{ Re } \left(c_P \overline{c_Q} z_1^k \overline{z_3}^{k+1} \right) + c_R \overline{c_R} z_2^k \overline{z_3}^k.$$

Nous constatons que

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \text{ Re } N_I(\mathcal{P} - \text{Im } w) \\ &= a_{12} c_P \overline{c_Q} z_2^k \overline{z_3}^{k+1} + a_{23} c_R \overline{c_R} z_3^{k+1} \overline{z_2}^k \\ &\quad + \overline{a_{12}} c_Q \overline{c_P} z_3^{k+1} \overline{z_2}^k + \overline{a_{23}} c_R \overline{c_R} z_2^k \overline{z_3}^{k+1} \\ &\Leftrightarrow a_{12} c_P \overline{c_Q} + \overline{a_{23}} c_R \overline{c_R} = 0. \end{aligned}$$

Pour des constantes c_P , c_Q et c_R données, la rotation s'exprime par la matrice

$$A_{N_I} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\overline{a_{12}} c_Q \overline{c_P}}{c_R \overline{c_R}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est clairement nilpotente avec $(A_{N_I})^3 = 0$. En résumé,

$$A_{N_I} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec a_{12} et a_{23} qui satisfont une équation simple. Il est important de noter qu'avec des constantes c_P , c_Q et c_R données, la dimension réelle des rotations d'une telle hypersurface est de 2.

Partie 7.2. La deuxième rotation est

$$N_{II} = a_{12} z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + a_{31} z_1 \frac{\partial}{\partial z_3},$$

avec $a_{12} \neq 0$, $a_{23} = 0$ et $a_{31} \neq 0$, qui correspond à l'hypersurface

$$\text{Im } w = 2 \text{ Re } \left(c_P \overline{c_Q} z_2^k \overline{z_3}^{k+1} \right) + c_R \overline{c_R} z_1^k \overline{z_2}^k.$$

Nous constatons que

$$\begin{aligned}
0 &= 2 \operatorname{Re} N_{II}(\mathcal{P} - \operatorname{Im} w) \\
&= a_{12} c_R \overline{c_R} z_2^{k+1} \overline{z_1} \overline{z_2}^k + a_{31} c_P \overline{c_Q} z_1^k \overline{z_2}^{k+1} \\
&\quad + \overline{a_{12}} \overline{c_R} \overline{c_R} z_1 \overline{z_2}^k \overline{z_2}^{k+1} + \overline{a_{31}} c_Q \overline{c_P} z_2^{k+1} \overline{z_1} \overline{z_2}^k \\
&\Leftrightarrow a_{12} c_R \overline{c_R} + \overline{a_{31}} c_Q \overline{c_P} = 0.
\end{aligned}$$

Pour des constantes c_P , c_Q et c_R données, la rotation s'exprime par la matrice

$$A_{N_{II}} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\overline{a_{12}} c_R \overline{c_R}}{c_P c_Q} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est clairement nilpotente avec $(A_{N_{II}})^3 = 0$. En résumé,

$$A_{N_{II}} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec a_{12} et a_{23} qui satisfont une équation simple. Il est important de noter qu'avec des constantes c_P , c_Q et c_R données, la dimension réelle des rotations d'une telle hypersurface est de 2.

Partie 7.3. La troisième rotation est

$$N_{III} = a_{12} z_2 \frac{\partial}{\partial z_1},$$

sur l'hypersurface

$$\operatorname{Im} w = 2 \operatorname{Re} \left(c_P \overline{c_Q} z_1 z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} \overline{z_2}^{-\alpha_2+1} \overline{z_3}^{-\alpha_3} \right) + c_R \overline{c_R} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3} \overline{z_2}^{-\gamma_2} \overline{z_3}^{-\gamma_3}.$$

Nous constatons que

$$\begin{aligned}
0 &= 2 \operatorname{Re} N_{III}(\mathcal{P} - \operatorname{Im} w) \\
&= a_{12} c_P \overline{c_Q} z_2^{\alpha_2+1} z_3^{\alpha_3} \overline{z_2}^{\alpha_2+1} \overline{z_3}^{\alpha_3} + \overline{a_{12}} c_Q \overline{c_P} z_2^{\alpha_2+1} z_3^{\alpha_3} \overline{z_2}^{\alpha_2+1} \overline{z_3}^{\alpha_3} \\
&\Leftrightarrow a_{12} c_P \overline{c_Q} + \overline{a_{12}} c_Q \overline{c_P} = 0.
\end{aligned}$$

Si nous notons $a_{12} = a + ib$ et $c_P \overline{c_Q} = u + iv$, avec $a, b, u, v \in \mathbb{R}$, il suffit de développer cette dernière équation pour obtenir

$$au = bv.$$

Autrement dit, si $v \neq 0$, nous avons

$$b = \frac{au}{v},$$

et ainsi,

$$a_{12} = a + i \frac{au}{v},$$

et si $v = 0$, alors $u \neq 0$ et $a = 0$. Dans ce cas,

$$a_{12} = ib.$$

Dans tous les cas, pour des constantes c_P , c_Q et c_R données, la rotation s'exprime par une matrice

$$A_{N_{III}} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui est à nouveau clairement nilpotente (avec $(A_{N_{III}})^2 = 0$), avec a_{12} qui satisfait une équation simple. Il est important de noter qu'avec des constantes c_P , c_Q et c_R données, la dimension réelle des rotations d'une telle hypersurface est de 1. \square

Démonstration du théorème.

Préparatifs :

Dans cette démonstration, nous travaillons sur une hypersurface monomiale de type PQR . Notons donc $P = c_P z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}$, $Q = c_Q z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3}$ et $R = c_R z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3}$, où c_P , c_Q et c_R sont des constantes complexes. L'équation de l'hypersurface en question étant donc

$$\text{Im } w = c_P \overline{c_Q} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} \overline{z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3}} + c_Q \overline{c_P} z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3} \overline{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}} + c_R \overline{c_R} z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3} \overline{z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3}}.$$

Nous considérons également une rotation

$$X = (a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + a_{13}z_3) \frac{\partial}{\partial z_1} + (a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + a_{23}z_3) \frac{\partial}{\partial z_2} + (a_{31}z_1 + a_{32}z_2 + a_{33}z_3) \frac{\partial}{\partial z_3},$$

ou du point de vue matriciel ¹³⁴,

$$A_X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

L'équation à étudier, que nous notons (\star), qui stipule que X est bien une rotation sur l'hypersurface en question, est

134. Cf. section 2.2.3, p.44.

Nous articulons la preuve en les affirmations suivantes, qui sont toutes des réflexions sur cette dernière équation.

1. $X = D + N$.

Toute rotation est séparable en une rotation purement diagonale et une rotation avec diagonale nulle.

2. $D = D_{\text{Re}} + D_{\text{Im}}$.

Toute rotation purement diagonale est séparable en une rotation diagonale purement réelle et une rotation diagonale purement imaginaire.

3. $N = N_1 + N_2$.

Toute rotation avec diagonale nulle (pas forcément nilpotente) est séparable en au plus deux rotations nilpotentes avec diagonale nulle. Ce dernier point amènera en outre à classifier les hypersurfaces monomiales qui possèdent des champs nilpotents. Il est lui-même articulé en plusieurs points.

3.1. Construction de N_1 .

Toute rotation irréductible non nulle avec diagonale nulle est nilpotente et engendre un certain type d'hypersurface.

Il y a 12 hypersurfaces différentes (mais dépendantes de paramètres) qui accueillent chacune une rotation nilpotente.

3.2. Ajout de N_2 .

Il est possible de fusionner au maximum deux de ces 12 hypersurfaces ensembles. Le résultat est une hypersurface qui accueille deux rotations irréductibles nilpotentes, N_1 et N_2 , et $N = N_1 + N_2$ est une rotation (pas forcément nilpotente).

1. $X = D + N$. Toute rotation est séparable en une rotation purement diagonale et une rotation avec diagonale nulle.

La séparation suivante est faisable

$$A_X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = A_D + A_N = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix},$$

avec D diagonale et N avec diagonale nulle. Le but est de montrer que D et N sont des rotations.

Le champ diagonal

$$D = a_{11}z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + a_{22}z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + a_{33}z_3 \frac{\partial}{\partial z_3} \text{ est une rotation.}$$

En effet, les 18 termes qui forment une sorte de diagonale ci-avant, avec trois blocs de 6 termes (les termes ne contenant aucune perturbation), ne peuvent s'annuler avec le reste pour des questions de degrés : il suffit d'une part de comparer les parties holomorphes et antiholomorphes, en comparant par exemple les termes

$$a_{11}c_P \overline{c_Q} \alpha_1 z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} \overline{z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3}} \text{ et } a_{12}c_P \overline{c_Q} \alpha_1 z_1^{\alpha_1-1} z_2^{\alpha_2+1} z_3^{\alpha_3} \overline{z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3}},$$

ou alors, d'autre part, de considérer que P , Q et R ne peuvent être des monômes semblables, car l'hypersurface doit être holomorphiquement non dégénérée, en comparant par exemple les termes

$$a_{11}c_R \overline{c_R} \gamma_1 z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3} \overline{z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3}} \text{ et } a_{12}c_P \overline{c_Q} \alpha_1 z_1^{\alpha_1-1} z_2^{\alpha_2+1} z_3^{\alpha_3} \overline{z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3}}.$$

Nous en concluons que le champ $N = X - D$ est également une rotation.

2. $D = D_{\text{Re}} + D_{\text{Im}}$. Toute rotation purement diagonale est séparable en une rotation diagonale purement réelle et une rotation diagonale purement imaginaire.

Notons la rotation diagonale

$$D = \sum_{j=1}^3 (a_j + ib_j) z_j \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad \text{où les } a_j, b_j \in \mathbb{R}.$$

En contemplant (★), nous pouvons affirmer que

$$\begin{aligned} 0 &= P\bar{Q} \sum_{j=1}^3 ((a_j + ib_j)\alpha_j + (a_j - ib_j)\beta_j) + Q\bar{P} \sum_{j=1}^3 ((a_j + ib_j)\beta_j + (a_j - ib_j)\alpha_j) \\ &\quad + R\bar{R} \sum_{j=1}^3 ((a_j + ib_j)\gamma_j + (a_j - ib_j)\gamma_j) \\ &= P\bar{Q} \sum_{j=1}^3 (a_j(\alpha_j + \beta_j) + ib_j(\alpha_j - \beta_j)) + Q\bar{P} \sum_{j=1}^3 (a_j(\alpha_j + \beta_j) - ib_j(\alpha_j - \beta_j)) \\ &\quad + 2R\bar{R} \sum_{j=1}^3 a_j \gamma_j. \end{aligned}$$

Cela est équivalent au système d'équations

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 a_j(\alpha_j + \beta_j) &= 0 \\ \sum_{j=1}^3 a_j \gamma_j &= 0 \\ \sum_{j=1}^3 b_j(\alpha_j - \beta_j) &= 0. \end{aligned}$$

Il est dès lors évident, les a_j et les b_j étant indépendants, que

$$D_{\text{Re}} = \sum_{j=1}^3 a_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j} \quad \text{et} \quad D_{\text{Im}} = i \sum_{j=1}^3 b_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$$

sont des rotations. Nous pouvons également ajouter que ces deux rotations ne sont pas

forcément irréductibles. En effet, pour l'hypersurface

$$\text{Im } w = 2 \text{Re} \left(z_1 z_2^2 z_3 \overline{z_1 z_2 z_3^2} \right) + z_1^4 \overline{z_1^4},$$

la rotation

$$D_{\text{Im}} = 25iz_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + iz_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + iz_3 \frac{\partial}{\partial z_3}$$

est séparable en

$$D_{\text{Im}}^I = 25iz_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \quad \text{et} \quad D_{\text{Im}}^{II} = iz_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + iz_3 \frac{\partial}{\partial z_3}$$

car

$$\begin{aligned} D_{\text{Im}} (\mathcal{P} - \text{Im } w) &= 25iP\overline{Q} + 25iQ\overline{P} + 100iR\overline{R} \\ &\quad + 2iP\overline{Q} + iQ\overline{P} \\ &\quad + iP\overline{Q} + 2iQ\overline{P} \end{aligned}$$

(évidemment pour $P = z_1 z_2^2 z_3$, $Q = z_1 z_2 z_3^2$ et $R = z_1^4 \overline{z_1^4}$), ce qui montre bien que D_{Im}^I et D_{Im}^{II} sont des rotations indépendantes¹³⁵.

3. $N = N_1 + N_2$. *Toute rotation avec diagonale nulle (pas forcément nilpotente) est séparable en au plus deux rotations nilpotentes avec diagonale nulle.*
- 3.1. Construction de N_1 . *Toute rotation irréductible non nulle avec diagonale nulle est nilpotente et engendre un certain type d'hypersurface. Il y a 12 hypersurfaces différentes (mais dépendantes de paramètres) qui accueillent chacune une rotation nilpotente.*

Nous considérons le cas non trivial d'une rotation irréductible N_1 qui n'est pas nulle et qui comporte une diagonale nulle.

135. Nous pouvons montrer que ce n'est que dans le cas où, pour au moins un $j = 1, 2, 3$, $\alpha_j = \beta_j$, qu'une rotation diagonale séparable apparaît. Elle est de plus imaginaire. Pour les autres cas de figures, ni D_{Re} ni D_{Im} ne sont séparables, car un coefficient (par exemple a_1) est obligatoirement au minimum lié à un autre pour l'annulation (par exemple a_2), le troisième étant forcément nul. Les trois coefficients peuvent également être liés dans une même rotation forcément irréductible.

Comme cette rotation n'est pas nulle, il existe forcément un $a_{jk} \neq 0$, avec $j, k = 1, 2, 3$ et $j \neq k$. Considérons pour un moment que ce a_{jk} est a_{12} . Dans ce cas, en rappelant l'irréductibilité de la rotation, nous utilisons le résultat du lemme 4.3.4, à savoir

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{1.} \quad a_{12} \neq 0 \quad \Rightarrow \\ a_{21} = a_{13} = a_{32} = 0, \\ a_{23} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a_{31} = 0 \text{ et } \operatorname{Im} w = 2 \operatorname{Re} \left(c_P \overline{c_Q} z_1^k \overline{z_3}^{-k+1} \right) + c_R \overline{c_R} z_2^k \overline{z_3}^{-k} \quad (\mathbf{1.1}) \\ a_{31} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a_{23} = 0 \text{ et } \operatorname{Im} w = 2 \operatorname{Re} \left(c_P \overline{c_Q} z_2^k \overline{z_3}^{-k+1} \right) + c_R \overline{c_R} z_1^k \overline{z_2}^{-k} \quad (\mathbf{1.2}) \\ a_{23} = 0, a_{31} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Im} w = 2 \operatorname{Re} \left(c_P \overline{c_Q} z_1^{\alpha_2} z_2^{\alpha_3} \overline{z_3}^{-\alpha_2+1} \overline{z_3}^{-\alpha_3} \right) + c_R \overline{c_R} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3} \overline{z_2}^{-\gamma_2} \overline{z_3}^{-\gamma_3} \quad (\mathbf{1.3}) \end{array} \right.$$

et lemme nous indique que toutes ces rotations, irréductibles, sont nilpotentes. Ce résultat peut être formulé si nous supposons a_{13} non nul, puis a_{21} , a_{23} , a_{31} et a_{32} , à leur tour non nuls. Nous adaptons le résultat du lemme aux 5 autres hypothèses de coefficients non nuls en effectuant simplement une permutation des trois variables complexes. Les 15 hypersurfaces suivantes s'ajoutent donc aux 3 précédentes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{2.} \quad a_{13} \neq 0 \quad \Rightarrow \\ a_{31} = a_{12} = a_{23} = 0, \\ a_{32} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a_{21} = 0 \text{ et } \operatorname{Im} w = 2 \operatorname{Re} \left(c_P \overline{c_Q} z_1^k \overline{z_2}^{-k+1} \right) + c_R \overline{c_R} z_2^k \overline{z_3}^{-k} \quad (\mathbf{2.1}) \\ a_{21} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a_{32} = 0 \text{ et } \operatorname{Im} w = 2 \operatorname{Re} \left(c_P \overline{c_Q} z_2^k \overline{z_3}^{-k+1} \right) + c_R \overline{c_R} z_1^k \overline{z_3}^{-k} \quad (\mathbf{2.2}) \\ a_{32} = 0, a_{21} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Im} w = 2 \operatorname{Re} \left(c_P \overline{c_Q} z_1^{\alpha_2} z_2^{\alpha_3} \overline{z_3}^{-\alpha_2} \overline{z_3}^{-\alpha_3+1} \right) + c_R \overline{c_R} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3} \overline{z_2}^{-\gamma_2} \overline{z_3}^{-\gamma_3} \quad (\mathbf{2.3}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{3.} \quad a_{21} \neq 0 \quad \Rightarrow \\ a_{12} = a_{23} = a_{31} = 0, \\ a_{13} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a_{32} = 0 \text{ et } \operatorname{Im} w = 2 \operatorname{Re} \left(c_P \overline{c_Q} z_2^k \overline{z_3}^{-k+1} \right) + c_R \overline{c_R} z_1^k \overline{z_3}^{-k} \quad (\mathbf{3.1}) \\ a_{32} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a_{13} = 0 \text{ et } \operatorname{Im} w = 2 \operatorname{Re} \left(c_P \overline{c_Q} z_1^k \overline{z_3}^{-k+1} \right) + c_R \overline{c_R} z_2^k \overline{z_1}^{-k} \quad (\mathbf{3.2}) \\ a_{13} = 0, a_{32} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Im} w = 2 \operatorname{Re} \left(c_P \overline{c_Q} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_3} \overline{z_3}^{-\alpha_1+1} \overline{z_3}^{-\alpha_3} \right) + c_R \overline{c_R} z_1^{\gamma_1} z_3^{\gamma_3} \overline{z_1}^{-\gamma_1} \overline{z_3}^{-\gamma_3} \quad (\mathbf{3.3}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{4.} \quad a_{23} \neq 0 \quad \Rightarrow \\ a_{32} = a_{21} = a_{13} = 0, \\ a_{31} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a_{12} = 0 \text{ et } \operatorname{Im} w = 2 \operatorname{Re} \left(c_P \overline{c_Q} z_1^k \overline{z_2}^{-k+1} \right) + c_R \overline{c_R} z_1^k \overline{z_3}^{-k} \quad (\mathbf{4.1}) \\ a_{12} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a_{31} = 0 \text{ et } \operatorname{Im} w = 2 \operatorname{Re} \left(c_P \overline{c_Q} z_1^k \overline{z_3}^{-k+1} \right) + c_R \overline{c_R} z_2^k \overline{z_3}^{-k} \quad (\mathbf{4.2}) \\ a_{31} = 0, a_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Im} w = 2 \operatorname{Re} \left(c_P \overline{c_Q} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_3} \overline{z_3}^{-\alpha_1} \overline{z_3}^{-\alpha_3+1} \right) + c_R \overline{c_R} z_1^{\gamma_1} z_3^{\gamma_3} \overline{z_1}^{-\gamma_1} \overline{z_3}^{-\gamma_3} \quad (\mathbf{4.3}) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
\mathbf{5.} \quad a_{31} \neq 0 \quad \Rightarrow \\
\left\{ \begin{array}{l}
a_{13} = a_{32} = a_{21} = 0, \\
a_{12} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a_{23} = 0 \text{ et } \operatorname{Im} w = 2 \operatorname{Re} \left(c_P \overline{c_Q} z_2^k z_3 \overline{z_2}^{k+1} \right) + c_R \overline{c_R} z_1^k z_2 \overline{z_1}^k \quad (5.1) \\
a_{23} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a_{12} = 0 \text{ et } \operatorname{Im} w = 2 \operatorname{Re} \left(c_P \overline{c_Q} z_1^k z_2 \overline{z_1}^{k+1} \right) + c_R \overline{c_R} z_1^k z_3 \overline{z_1}^k \quad (5.2) \\
a_{12} = 0, a_{23} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Im} w = 2 \operatorname{Re} \left(c_P \overline{c_Q} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3 \overline{z_1}^{\alpha_1+1} \overline{z_2}^{\alpha_2} \right) + c_R \overline{c_R} z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} \overline{z_1}^{\gamma_1} \overline{z_2}^{\gamma_2} \quad (5.3)
\end{array} \right.
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\mathbf{6.} \quad a_{32} \neq 0 \quad \Rightarrow \\
\left\{ \begin{array}{l}
a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0, \\
a_{21} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a_{13} = 0 \text{ et } \operatorname{Im} w = 2 \operatorname{Re} \left(c_P \overline{c_Q} z_1^k z_3 \overline{z_1}^{k+1} \right) + c_R \overline{c_R} z_1^k z_2 \overline{z_1}^k \quad (6.1) \\
a_{13} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a_{21} = 0 \text{ et } \operatorname{Im} w = 2 \operatorname{Re} \left(c_P \overline{c_Q} z_1^k z_2 \overline{z_2}^{k+1} \right) + c_R \overline{c_R} z_2^k z_3 \overline{z_2}^k \quad (6.2) \\
a_{21} = 0, a_{13} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Im} w = 2 \operatorname{Re} \left(c_P \overline{c_Q} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3 \overline{z_1}^{\alpha_1} \overline{z_2}^{\alpha_2+1} \right) + c_R \overline{c_R} z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} \overline{z_1}^{\gamma_1} \overline{z_2}^{\gamma_2} \quad (6.3)
\end{array} \right.
\end{array}$$

À ce stade de la démonstration, toutes les hypersurfaces monomiales admettant une rotation irréductible nilpotente ont été trouvées ¹³⁶. Certaines hypersurfaces apparaissent même deux fois :

$$\begin{array}{l}
(3.1) = (2.2) \\
(4.2) = (1.1) \\
(5.1) = (1.2) \\
(5.2) = (4.1) \\
(6.1) = (3.2) \\
(6.2) = (2.1).
\end{array}$$

Nous ne prendrons donc en compte que les hypersurfaces de droites, notées en gras parmi les 18 hypersurfaces ci-dessus. Il y a donc 12 hypersurfaces disponibles potentielles.

136. Nous rappelons qu'une matrice diagonale n'est de toute évidence pas nilpotente. Ainsi, les matrices nilpotentes ne s'avèrent disponibles que dans la partie N de la décomposition $X = D + N$.

3.2. Ajout de N_2 . *Il est possible de fusionner au maximum deux de ces 12 hypersurfaces ensembles. Le résultat est une hypersurface qui accueille deux rotations irréductibles nilpotentes, N_1 et N_2 .*

Certaines des 12 hypersurfaces peuvent s'unir. Par exemple, l'hypersurface **(1.1)** peut contenir **(2.3)** avec $\alpha_2 = 0$, $\gamma_2 = 1$, $\alpha_3 = \gamma_3 = k$. Nous rappelons que (4.2) n'est plus considérée ici. De plus, l'union avec **(3.2)** ou **(5.3)** implique que $k = 0$, ce qui sort du cadre des hypersurfaces Levi dégénérées. Nous venons de voir que l'hypersurface **(1.1)** peut contenir deux rotations irréductibles nilpotentes, mais pas plus. Ainsi, pour **(1.1)**,

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec trois dimensions réelles.}$$

Une même réflexion est possible en partant de **(1.2)**. Le résultat est le même à une permutation près.

La réflexion à partir de **(1.3)** amène un résultat. S'il est inutile de comparer cette hypersurface avec **(2.1)**, **(4.1)**, (5.2) ou (6.2), la comparaison avec **(3.3)** apporte une nouvelle hypersurface, à savoir,

$$\text{Im } w = 2 \text{Re} \left(c_P \overline{c_Q} z_1 z_3^{\alpha_3} \overline{z_2 z_3^{\alpha_3}} \right) + c_R \overline{c_R} z_3^{\gamma_3} \overline{z_3^{\gamma_3}},$$

avec $\gamma_3 = \alpha_3 + 1$ pour des questions d'homogénéité. Nous pouvons d'ailleurs noter $k = \alpha_3 > 0$ (pour une hypersurface Levi dégénérée). Pour cette hypersurface,

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec deux dimensions réelles.}$$

Considérer cette fusion ou cette intersection de types d'hypersurfaces à partir de **(2.1)**, **(2.2)**, ... est identique à ce qui vient d'être fait, à permutation près. Nous n'oublions pas l'hypersurface **(1.3)**, plus générale, qui n'a qu'une rotation nilpotente irréductible. □

4.3.2 Propriétés de $\mathfrak{g}_0^{\text{Nil}}$.

Corollaire 4.3.5.

Soit une hypersurface monomiale ¹³⁷ de type PQR . Alors, à permutation près, les seules hypersurfaces comportant des rotations nilpotentes sont – pour des $k, \alpha_2 \in \mathbb{N}^*$, $\ell, \alpha_3 \in \mathbb{N}$ et γ_2, γ_3 tels que l’hypersurface soit holomorphiquement non dégénérée –

1. $\text{Im } w = 2 \text{Re} \left(c_P \overline{c_Q} z_1 z_2^k \overline{z_2}^{k+1} \right) + c_R \overline{c_R} z_2^k z_3 \overline{z_2}^k \overline{z_3}$ avec $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0^{\text{Nil}} = 3$
2. $\text{Im } w = 2 \text{Re} \left(c_P \overline{c_Q} z_1 z_3^k \overline{z_2} \overline{z_3}^k \right) + c_R \overline{c_R} z_3^{k+1} \overline{z_3}^{k+1}$ avec $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0^{\text{Nil}} = 2$
3. $\text{Im } w = 2 \text{Re} \left(c_P \overline{c_Q} z_1 z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} \overline{z_2}^{\alpha_2+1} \overline{z_3}^{\alpha_3} \right) + c_R \overline{c_R} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3} \overline{z_2}^{\gamma_2} \overline{z_3}^{\gamma_3}$ ($\alpha_2 \neq 0$) avec $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0^{\text{Nil}} = 1$

Démonstration. Ces hypersurfaces sont rencontrées dans la démonstration du théorème 4.3.1 : **1.** \equiv **(1.1)** tandis que **2.** est à la fin de la démonstration (fusion ou intersection d’hypersurfaces). De plus, **3.** \equiv **(1.3)**. □

Exemple 4.3.6.

Comme exemple de dimension réelle trois, citons l’hypersurface définie par

$$\text{Im } w = z_1 z_3 \overline{z_3}^2 + z_3^2 \overline{z_1} \overline{z_3} + z_2 z_3 \overline{z_2} \overline{z_3},$$

avec, comme rotation nilpotente générale

$$N = \begin{pmatrix} 0 & a + ib & ic \\ 0 & 0 & -a + ib \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

137. Si nous supposons l’hypersurface non monomiale, les résultats sont difficiles à formuler. Une point de vue pourrait être de supposer qu’il existe une rotation nilpotente et d’étudier les conséquences sur l’hypersurface. Par exemple, pour les outils d’algèbre linéaire, cf. [63], pp.107-113, chapitre X.2 (Réduction de Jordan : cas nilpotent).

Exemple 4.3.7.

Un autre exemple, de dimension deux, est l'hypersurface

$$\operatorname{Im} w = iz_1 z_2 \overline{z_1 z_3} - iz_1 z_3 \overline{z_1 z_2} + z_1^2 \overline{z_1^2},$$

avec ses rotations nilpotentes

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix},$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Contrexemple 4.3.8.

Soit l'hypersurface de type PQR non monomiale avec

$$\begin{aligned} P &= z_1^2 z_2^2 + z_1^2 z_3^2 \\ Q &= z_1 z_2 z_3^2 + z_1 z_3^3 \\ R &= z_2^2 z_3^2 + z_2^4. \end{aligned}$$

Cette hypersurface est donc décrite par

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} w &= 2 \operatorname{Re} \left(z_1^2 z_2^2 \overline{z_1 z_2 z_3^2} + z_1^2 z_3^2 \overline{z_1 z_2 z_3^2} + z_1^2 z_2^2 \overline{z_1 z_3^3} + z_1^2 z_3^2 \overline{z_1 z_3^3} \right. \\ &\quad \left. + z_2^2 z_3^2 \overline{z_2^2 z_3^2} + z_2^4 \overline{z_2^2 z_3^2} + z_2^2 z_3^2 \overline{z_2^4} + z_2^4 \overline{z_2^4} \right). \end{aligned}$$

Elle comporte la rotation nilpotente $N = iz_2 \frac{\partial}{\partial z_1}$. En effet,

$$\begin{aligned} N(P\overline{Q} + Q\overline{P} + R\overline{R}) &= 2iz_1 z_2^3 \overline{z_1 z_2 z_3^2} + 2iz_1 z_2 z_3^2 \overline{z_1 z_2 z_3^2} + 2iz_1 z_2^3 \overline{z_1 z_3^3} + 2iz_1 z_2 z_3^2 \overline{z_1 z_3^3} \\ &\Rightarrow 2 \operatorname{Re} N(P\overline{Q} + Q\overline{P} + R\overline{R}) = 0. \end{aligned}$$

4.3.3 Propriétés de $\mathfrak{g}_0^{\text{Re}}$

Lemme 4.3.9.

Soit une hypersurface monomiale de type PQR . Alors

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0^{\text{Re}} = 1.$$

Démonstration. Soit une rotation réelle

$$X = \sum_{j=1}^3 \lambda_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j}.$$

Ainsi, avec les notations habituelles des monômes $P = c_P z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}$, $Q = c_Q z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3}$ et $R = c_R z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3}$,

$$\begin{aligned} \lambda_1(\alpha_1 + \beta_1) + \lambda_2(\alpha_2 + \beta_2) + \lambda_3(\alpha_3 + \beta_3) &= 0 \text{ et} \\ \lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \lambda_3\gamma_3 &= 0. \end{aligned}$$

Il s'agit d'un système de deux équations réelles avec trois inconnues réelles, λ_1 , λ_2 et λ_3 . L'ensemble des solutions a donc une dimension réelle égale à un.

Il faut toutefois s'assurer que le système est bien constitué de deux équations indépendantes. Par l'absurde, si les deux équations étaient linéairement dépendantes, il existerait un $\xi \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \alpha_3 + \beta_3 \end{pmatrix} = \xi \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, l'hypersurface serait holomorphiquement dégénérée par le lemme 4.1.8, ce qui est une contradiction. \square

Contreexemple 4.3.10.

L'hypothèse d'une hypersurface monomiale est nécessaire. En effet, le fait de considérer une rotation réelle sur l'hypersurface décrite par

$$\operatorname{Im} w = (z_1^2 + z_2 z_3) \overline{z_1^2 z_2 z_3} + z_1^2 z_2 z_3 (\overline{z_1^2 + z_2 z_3}) + z_1 z_3^2 \overline{z_1 z_3^2}$$

amène à résoudre un système homogène de trois équations linéairement indépendantes à trois inconnues (les coefficients réels de la rotation). Toute rotation réelle est donc nulle et $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0^{\operatorname{Re}} = 0$.

4.3.4 Propriétés de $\mathfrak{g}_0^{\operatorname{Im}}$

Lemme 4.3.11.

Soit une hypersurface monomiale de type PQR . Alors

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0^{\operatorname{Im}} = 2.$$

Démonstration. Soit une rotation imaginaire

$$X = i \sum_{j=1}^3 \lambda_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j}.$$

Ainsi, avec les notations habituelles des monômes $P = c_P z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}$, $Q = c_Q z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3}$ et $R = c_R z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3}$, nous obtenons l'unique équation

$$\lambda_1(\alpha_1 - \beta_1) + \lambda_2(\alpha_2 - \beta_2) + \lambda_3(\alpha_3 - \beta_3) = 0.$$

En effet, la partie $R\overline{R}$ s'annule automatiquement avec son conjugué. Il s'agit donc d'un système d'une équation réelle avec trois inconnues réelles, λ_1 , λ_2 et λ_3 . L'ensemble des solutions a donc une dimension réelle égale à deux. \square

Remarque 4.3.12.

Contrairement au problème PQ , il s'avère impossible d'énoncer un résultat avec une hypersurface non monomiale. Nous profitons de rappeler¹³⁸ que l'étude de $\mathfrak{g}_0^{\operatorname{Im}}$ est bel et bien différente de celle de $\mathfrak{g}_0^{\operatorname{Re}}$. Nous présentons donc un contreexemple qui démontre que

138. Cf. remarque 3.2.18, p.72.

le résultat du problème PQ n'est pas généralisable. Il n'est effectivement pas possible de mettre en équivalence, pour une hypersurface de type PQR , le fait d'être balancée et de posséder une rotation imaginaire.

Contrexemple 4.3.13.

Considérons l'hypersurface de \mathbb{C}^4 dont les éléments (z_1, z_2, z_3, w) satisfont

$$\text{Im } w = z_1^2 z_2 z_3^3 \bar{z}_1^{-2} + z_1 z_2^4 z_3 \bar{z}_1^{-2} + z_1^2 \bar{z}_1^{-2} \bar{z}_2 \bar{z}_3^{-3} + z_1^2 \bar{z}_1 \bar{z}_2^4 \bar{z}_3 + z_1^2 z_2^2 \bar{z}_1^{-2} \bar{z}_2^{-2}.$$

Cette hypersurface possède la rotation imaginaire

$$X = i11z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + i3z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - iz_3 \frac{\partial}{\partial z_3}.$$

En effet, si nous notons $P = z_1^2 z_2 z_3^3$, $P' = z_1 z_2^4 z_3$, $Q = z_1^2$ et $R = z_1^2 z_2^2$,

$$\begin{aligned} 2 \text{Re } X(\mathcal{P} - \text{Im } w) &= 2 \text{Re } X(P\bar{Q} + P'\bar{Q} + Q\bar{P} + Q\bar{P}' + R\bar{R}) \\ &= 22iP\bar{Q} + 11iP'\bar{Q} + 22iQ\bar{P} + 22iQ\bar{P}' + 22iR\bar{R} \\ &\quad - 22iQ\bar{P} - 11iQ\bar{P}' - 22iP\bar{Q} - 22iP'\bar{Q} - 22iR\bar{R} \\ &\quad + 3iP\bar{Q} + 12iP'\bar{Q} + 6iR\bar{R} \\ &\quad - 3iQ\bar{P} - 12iQ\bar{P}' - 6iR\bar{R} \\ &\quad - 3iP\bar{Q} - iP'\bar{Q} \\ &\quad + 3iQ\bar{P} + iQ\bar{P}' \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nous notons que cette hypersurface n'est pas balancée. Il faudrait qu'il existe un champ complexe reproducteur, noté

$$X = \sum_{j=1}^3 \lambda_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}, \quad \text{avec } X(\mathcal{P}) = \mathcal{P}.$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
X(\mathcal{P}) &= X(P\bar{Q} + P'\bar{Q} + Q\bar{P} + Q\bar{P}' + R\bar{R}) \\
&= 2\lambda_1 P\bar{Q} + \lambda_1 P'\bar{Q} + 2\lambda_1 Q\bar{P} + 2\lambda_1 Q\bar{P}' + 2\lambda_1 R\bar{R} \\
&\quad + \lambda_2 P\bar{Q} + 4\lambda_2 P'\bar{Q} + 2\lambda_2 R\bar{R} \\
&\quad + 3\lambda_3 P\bar{Q} + \lambda_3 P'\bar{Q} \\
&= (2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3)P\bar{Q} \\
&\quad + (\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3)P'\bar{Q} \\
&\quad + 2\lambda_1 Q\bar{P} \\
&\quad + 2\lambda_1 Q\bar{P}' \\
&\quad + (2\lambda_1 + 2\lambda_2)R\bar{R} \\
&\stackrel{!}{=} \mathcal{P} \\
&= P\bar{Q} + P'\bar{Q} + Q\bar{P} + Q\bar{P}' + R\bar{R},
\end{aligned}$$

équation équivalente au système

$$\begin{aligned}
2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 &= 1 \\
\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 &= 1 \\
2\lambda_1 &= 1 \\
2\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 1,
\end{aligned}$$

qui est lui-même impossible.

4.3.5 Propriétés de \mathfrak{g}_c

Lemme 4.3.14.

Soit une hypersurface de type PQR monomiale. Alors,

$$0 \leq \dim \mathfrak{g}_c \leq 3.$$

De plus,

$$\deg P = \deg Q = \deg R \Rightarrow \dim \mathfrak{g}_c = 0.$$

Démonstration. Soit une rotation généralisée $X \in \mathfrak{g}_c$. Par définition, son degré pondéré, $\deg X > 0$, et

$$0 = X(P)\bar{Q} + X(Q)\bar{P} + X(R)\bar{R} \\ + Q\overline{X(P)} + P\overline{X(Q)} + R\overline{X(R)}.$$

Nous étudions cette équation en considérant deux cas : lorsque $\deg P = \deg Q$, ou, sans restriction de la généralité, $\deg P < \deg Q$.

Dans le premier cas, par homogénéité, nous avons $\deg R = \deg P = \deg Q$, et notre équation implique que

$$X(P)\bar{Q} + X(Q)\bar{P} + X(R)\bar{R} = 0$$

car par exemple, $\deg X(P) > \deg P$, et ces termes ne peuvent s'annuler. Nous observons que, comme P , Q et R sont non nuls, cette annulation n'est possible que si $P = \alpha Q = \beta R$. Or, dans ce cas, l'hypersurface est holomorphiquement dégénérée¹³⁹. Nous écartons donc ce cas.

Dans le second cas, nous notons au passage que $\deg R = \frac{\deg P + \deg Q}{2}$, et ainsi,

$$\deg P < \deg R < \deg Q.$$

Notre équation devient

$$0 = X(P)\bar{Q} + X(R)\bar{R} + Q\overline{X(P)} + R\overline{X(R)},$$

car $X(Q) = 0$. En effet, $\deg X(Q)$ est trop grand et ne peut s'annuler avec un autre terme¹⁴⁰. Cette équation n'a que deux possibilités pour être valide. La première est que

$$X(P)\bar{Q} + R\overline{X(R)} = 0,$$

et la seconde est que

$$X(P)\bar{Q} + Q\overline{X(P)} = 0 \quad \text{et} \quad X(R) = 0.$$

139. Cf. lemme 4.1.8, p.90.

140. Cela nous donne des informations sur X par rapport à Q , mais nous laissons cela de côté pour le moment.

La première possibilité implique que

$$\begin{aligned} X(P) &= \alpha R, \\ X(R) &= \beta Q, \text{ et} \\ X(Q) &= 0, \end{aligned}$$

avec $\beta = -\bar{\alpha}$, car remplacée dans l'équation en question, nous obtenons

$$\alpha R\bar{Q} + R\bar{\beta}Q = 0.$$

Nous remarquons ainsi que les polynômes P , R et Q forment naturellement une X -chaîne selon la définition 3.2.3, p.64.

Précisons cette première possibilité avec $\alpha = a + ib$, $\beta = -a + ib$, a et b réels, et avec un champ holomorphe noté

$$X = \sum_{j=1}^3 f_j(z_1, z_2, z_3) \frac{\partial}{\partial z_j}.$$

Alors

$$\begin{aligned} f_1(z_1, z_2, z_3)P_{z_1} + f_2(z_1, z_2, z_3)P_{z_2} + f_3(z_1, z_2, z_3)P_{z_3} &= (a + ib)R, \\ f_1(z_1, z_2, z_3)R_{z_1} + f_2(z_1, z_2, z_3)R_{z_2} + f_3(z_1, z_2, z_3)R_{z_3} &= (-a + ib)Q, \text{ et} \\ f_1(z_1, z_2, z_3)Q_{z_1} + f_2(z_1, z_2, z_3)Q_{z_2} + f_3(z_1, z_2, z_3)Q_{z_3} &= 0. \end{aligned}$$

et par Cramer¹⁴¹,

$$\begin{aligned} f_1(z_1, z_2, z_3) &= \frac{(a + ib)R(R_{z_2}Q_{z_3} - Q_{z_2}R_{z_3}) + (a - ib)Q(P_{z_2}Q_{z_3} - Q_{z_2}P_{z_3})}{J(P, Q, R)}, \\ f_2(z_1, z_2, z_3) &= \frac{-(a + ib)R(R_{z_1}Q_{z_3} - Q_{z_1}R_{z_3}) + (-a + ib)Q(P_{z_1}Q_{z_3} - Q_{z_1}P_{z_3})}{J(P, Q, R)}, \text{ et} \\ f_3(z_1, z_2, z_3) &= \frac{(a + ib)R(R_{z_1}Q_{z_2} - Q_{z_1}R_{z_2}) + (a - ib)Q(P_{z_1}Q_{z_2} - Q_{z_1}P_{z_2})}{J(P, Q, R)}. \end{aligned}$$

141. Cf. [34], p.143, théorème 5.2.

La seconde possibilité implique que

$$\begin{aligned} X(P) &= \alpha Q, \\ X(R) &= 0, \text{ et} \\ X(Q) &= 0, \end{aligned}$$

avec $\alpha = ic$, $c \in \mathbb{R}$, car

$$\alpha Q\bar{Q} + Q\bar{\alpha}Q = 0$$

Donc plus précisément,

$$\begin{aligned} f_1(z_1, z_2, z_3)P_{z_1} + f_2(z_1, z_2, z_3)P_{z_2} + f_3(z_1, z_2, z_3)P_{z_3} &= icQ, \\ f_1(z_1, z_2, z_3)R_{z_1} + f_2(z_1, z_2, z_3)R_{z_2} + f_3(z_1, z_2, z_3)R_{z_3} &= 0, \text{ et} \\ f_1(z_1, z_2, z_3)Q_{z_1} + f_2(z_1, z_2, z_3)Q_{z_2} + f_3(z_1, z_2, z_3)Q_{z_3} &= 0, \end{aligned}$$

et par Cramer,

$$\begin{aligned} f_1(z_1, z_2, z_3) &= \frac{icQ(R_{z_2}Q_{z_3} - Q_{z_2}R_{z_3})}{J(P, Q, R)}, \\ f_2(z_1, z_2, z_3) &= \frac{-icQ(R_{z_1}Q_{z_3} - Q_{z_1}R_{z_3})}{J(P, Q, R)}, \text{ et} \\ f_3(z_1, z_2, z_3) &= \frac{icQ(R_{z_1}Q_{z_2} - Q_{z_1}R_{z_2})}{J(P, Q, R)}. \end{aligned}$$

Nous notons que cela est valide grâce au fait que l'hypersurface est holomorphiquement non dégénérée, ainsi $J(P, Q, R) \neq 0$. En outre, pour la rotation généralisée, qui est une champ holomorphe, les coefficients méromorphes sont exclus. Des conditions de divisibilité (par le jacobien) garantissent donc l'existence (ou la non-existence) de ces rotations généralisées. La réflexion qui précède expose deux conditions qui peuvent être satisfaites indépendamment ¹⁴².

Nous observons également que si les degrés des trois monômes ne sont pas égaux, la démonstration s'avère toujours vraie. Les rotations généralisées ne peuvent toutefois pas exister lorsque ces degrés sont identiques. \square

¹⁴². Cf. exemples 4.3.16, p.148 et 4.3.18, p.154.

Remarque 4.3.15.

Nous notons que si nous n'observons que des rotations généralisées

$$X = \sum_{j=1}^3 f_j(z_1, z_2, z_3) \frac{\partial}{\partial z_j},$$

où les f_j sont des monômes, alors $\dim \mathfrak{g}_c \leq 1$.

En effet, dans ce cas, la possibilité suivante de la démonstration précédente,

$$\begin{aligned} f_1(z_1, z_2, z_3)P_{z_1} + f_2(z_1, z_2, z_3)P_{z_2} + f_3(z_1, z_2, z_3)P_{z_3} &= \alpha R, \\ f_1(z_1, z_2, z_3)R_{z_1} + f_2(z_1, z_2, z_3)R_{z_2} + f_3(z_1, z_2, z_3)R_{z_3} &= \beta Q, \text{ et} \\ f_1(z_1, z_2, z_3)Q_{z_1} + f_2(z_1, z_2, z_3)Q_{z_2} + f_3(z_1, z_2, z_3)Q_{z_3} &= 0, \end{aligned}$$

pose problème. Nous aurions effectivement une hypersurface holomorphiquement dégénérée, car, laissant les coefficients de côté et en notant $P = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}$, $Q = z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3}$ et $R = z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3}$, nous voyons que la première équation du système ci-dessus devient

$$\alpha_1 f_1(z) z_1^{\alpha_1-1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} + \alpha_2 f_2(z) z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2-1} z_3^{\alpha_3} + \alpha_3 f_3(z) z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3-1} = c z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3},$$

ce qui implique, avec f_j des monômes,

$$\begin{aligned} f_1(z) &= k_1 z_1^{\gamma_1-\alpha_1+1} z_2^{\gamma_2-\alpha_2} z_3^{\gamma_3-\alpha_3}, \\ f_2(z) &= k_2 z_1^{\gamma_1-\alpha_1} z_2^{\gamma_2-\alpha_2+1} z_3^{\gamma_3-\alpha_3}, \\ f_3(z) &= k_3 z_1^{\gamma_1-\alpha_1} z_2^{\gamma_2-\alpha_2} z_3^{\gamma_3-\alpha_3+1}, \end{aligned}$$

avec k_j , $j = 1, 2, 3$, des constantes. Or la deuxième équation du système ci-dessus donne

$$\gamma_1 f_1(z) z_1^{\gamma_1-1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3} + \gamma_2 f_2(z) z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2-1} z_3^{\gamma_3} + \gamma_3 f_3(z) z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3-1} = c z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3},$$

ou encore, avec les $f_j(z)$ remplacés,

$$(\gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2 + \gamma_3 k_3) z_1^{2\gamma_1-\alpha_1} z_2^{2\gamma_2-\alpha_2} z_3^{2\gamma_3-\alpha_3} = c z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3},$$

ce qui implique que

$$\beta_j = 2\gamma_j - \alpha_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Il s'agit d'une contradiction avec le fait que l'hypersurface est holomorphiquement non dégénérée¹⁴³. La possibilité

$$\begin{aligned} X(P) &= icQ, \\ X(R) &= 0, \text{ et} \\ X(Q) &= 0. \end{aligned}$$

reste valable, ce qui montre bien, dans ce cas particulier, que $\dim \mathfrak{g}_c \leq 1$.

Exemple 4.3.16.

Nous considérons l'hypersurface décrite par l'équation

$$\text{Im } w = z_1 z_2 z_3^2 \overline{z_1} \overline{z_2} \overline{z_3}^3 + z_1^2 z_2 z_3^3 \overline{z_1} \overline{z_2} \overline{z_3}^2 + z_1 z_2 z_3^3 \overline{z_1} \overline{z_2} \overline{z_3}^3.$$

Nous allons montrer que $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_c = 3$. Calculons tout d'abord le jacobien

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} P_{z_1} & P_{z_2} & P_{z_3} \\ R_{z_1} & R_{z_2} & R_{z_3} \\ Q_{z_1} & Q_{z_2} & Q_{z_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_2 z_3^2 & z_1 z_3^2 & 2z_1 z_2 z_3 \\ z_2 z_3^3 & z_1 z_3^3 & 3z_1 z_2 z_3^2 \\ 2z_1 z_2 z_3^3 & z_1^2 z_3^3 & 3z_1^2 z_2 z_3^2 \end{vmatrix} \\ &= z_2 z_3^2 \begin{vmatrix} z_1 z_3^3 & 3z_1 z_2 z_3^2 \\ z_1^2 z_3^3 & 3z_1^2 z_2 z_3^2 \end{vmatrix} - z_1 z_3^2 \begin{vmatrix} z_2 z_3^3 & 3z_1 z_2 z_3^2 \\ 2z_1 z_2 z_3^3 & 3z_1^2 z_2 z_3^2 \end{vmatrix} + 2z_1 z_2 z_3 \begin{vmatrix} z_2 z_3^3 & z_1 z_3^3 \\ 2z_1 z_2 z_3^3 & z_1^2 z_3^3 \end{vmatrix} \\ &= z_2 z_3^2 (3 - 3) z_1^3 z_2 z_3^5 - z_1 z_3^2 (3 - 6) z_1^2 z_2^2 z_3^5 + 2z_1 z_2 z_3 (1 - 2) z_1^2 z_2 z_3^6 \\ &= z_1^3 z_2^2 z_3^7. \end{aligned}$$

Le but est d'étudier les rotations généralisées

$$X = \sum_{j=1}^3 f_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j},$$

143. Cf. lemme 4.1.8, p.90.

qui peuvent satisfaire les deux possibilités ¹⁴⁴

$$\begin{aligned} X(P) &= \alpha R, \\ X(R) &= \beta Q, \text{ et} \\ X(Q) &= 0. \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} X(P) &= \alpha Q, \\ X(R) &= 0, \text{ et} \\ X(Q) &= 0. \end{aligned}$$

Commençons par la première possibilité. Le système d'équations à résoudre est

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} P_{z_1} & P_{z_2} & P_{z_3} \\ R_{z_1} & R_{z_2} & R_{z_3} \\ Q_{z_1} & Q_{z_2} & Q_{z_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha R \\ \beta Q \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow &\begin{pmatrix} z_2 z_3^2 & z_1 z_3^2 & 2z_1 z_2 z_3 \\ z_2 z_3^3 & z_1 z_3^3 & 3z_1 z_2 z_3^2 \\ 2z_1 z_2 z_3^3 & z_1^2 z_3^3 & 3z_1^2 z_2 z_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z_1 z_2 z_3^3 \\ \beta z_1^2 z_2 z_3^3 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

144. Cf. démonstration du lemme 4.3.14, p.143.

Nous calculons par Cramer, que

$$\begin{aligned}
 f_1(z) &= \frac{\begin{vmatrix} \alpha z_1 z_2 z_3^3 & z_1 z_3^2 & 2z_1 z_2 z_3 \\ \beta z_1^2 z_2 z_3^3 & z_1 z_3^3 & 3z_1 z_2 z_3^2 \\ 0 & z_1^2 z_3^3 & 3z_1^2 z_2 z_3^2 \end{vmatrix}}{z_1^3 z_2^2 z_3^7} \\
 &= \frac{\alpha z_1 z_2 z_3^3 \begin{vmatrix} z_1 z_3^3 & 3z_1 z_2 z_3^2 \\ z_1^2 z_3^3 & 3z_1^2 z_2 z_3^2 \end{vmatrix} - \beta z_1^2 z_2 z_3^3 \begin{vmatrix} z_1 z_3^2 & 2z_1 z_2 z_3 \\ z_1^2 z_3^3 & 3z_1^2 z_2 z_3^2 \end{vmatrix}}{z_1^3 z_2^2 z_3^7} \\
 &= \frac{\alpha(3-3)z_1^4 z_2^2 z_3^7 - \beta(3-2)z_1^5 z_2^2 z_3^7}{z_1^3 z_2^2 z_3^7} = \frac{-\beta z_1^5 z_2^2 z_3^7}{z_1^3 z_2^2 z_3^7} \\
 &= -\beta z_1^2, \\
 \\
 f_2(z) &= \frac{\begin{vmatrix} z_2 z_3^2 & \alpha z_1 z_2 z_3^3 & 2z_1 z_2 z_3 \\ z_2 z_3^3 & \beta z_1^2 z_2 z_3^3 & 3z_1 z_2 z_3^2 \\ 2z_1 z_2 z_3^3 & 0 & 3z_1^2 z_2 z_3^2 \end{vmatrix}}{z_1^3 z_2^2 z_3^7} \\
 &= \frac{-\alpha z_1 z_2 z_3^3 \begin{vmatrix} z_2 z_3^3 & 3z_1 z_2 z_3^2 \\ 2z_1 z_2 z_3^3 & 3z_1^2 z_2 z_3^2 \end{vmatrix} + \beta z_1^2 z_2 z_3^3 \begin{vmatrix} z_2 z_3^2 & 2z_1 z_2 z_3 \\ 2z_1 z_2 z_3^3 & 3z_1^2 z_2 z_3^2 \end{vmatrix}}{z_1^3 z_2^2 z_3^7} \\
 &= \frac{-\alpha(3-6)z_1^3 z_2^3 z_3^8 + \beta(3-4)z_1^4 z_2^3 z_3^7}{z_1^3 z_2^2 z_3^7} = \frac{3\alpha z_1^3 z_2^3 z_3^8 - \beta z_1^4 z_2^3 z_3^7}{z_1^3 z_2^2 z_3^7} \\
 &= 3\alpha z_2 z_3 - \beta z_1 z_2, \quad \text{et}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3(z) &= \frac{\begin{vmatrix} z_2 z_3^2 & z_1 z_3^2 & \alpha z_1 z_2 z_3^3 \\ z_2 z_3^3 & z_1 z_3^3 & \beta z_1^2 z_2 z_3^3 \\ 2z_1 z_2 z_3^3 & z_1^2 z_3^3 & 0 \end{vmatrix}}{z_1^3 z_2^2 z_3^7} \\
&= \frac{\alpha z_1 z_2 z_3^3 \begin{vmatrix} z_2 z_3^3 & z_1 z_3^3 \\ 2z_1 z_2 z_3^3 & z_1^2 z_3^3 \end{vmatrix} - \beta z_1^2 z_2 z_3^3 \begin{vmatrix} z_2 z_3^2 & z_1 z_3^2 \\ 2z_1 z_2 z_3^3 & z_1^2 z_3^3 \end{vmatrix}}{z_1^3 z_2^2 z_3^7} \\
&= \frac{\alpha(1-2)z_1^3 z_2^2 z_3^9 - \beta(1-2)z_1^4 z_2^2 z_3^8}{z_1^3 z_2^2 z_3^7} = \frac{-\alpha z_1^3 z_2^2 z_3^9 + \beta z_1^4 z_2^2 z_3^8}{z_1^3 z_2^2 z_3^7} \\
&= -\alpha z_3^2 + \beta z_1 z_3.
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc une première rotation généralisée

$$X_1 = -\beta z_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1} + (3\alpha z_2 z_3 - \beta z_1 z_2) \frac{\partial}{\partial z_2} - (\alpha z_3^2 - \beta z_1 z_3) \frac{\partial}{\partial z_3},$$

qui, comme nous l'avons étudié dans la démonstration du lemme 4.3.14, p.143, en notant $\alpha = a + ib$ et $\beta = -\bar{\alpha} = -a + ib$, devient

$$X_1 = (a - ib)z_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1} + (3(a + ib)z_2 z_3 + (a - ib)z_1 z_2) \frac{\partial}{\partial z_2} - ((a + ib)z_3^2 + (a - ib)z_1 z_3) \frac{\partial}{\partial z_3},$$

ou encore

$$X_{1\text{Re}} = az_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1} + (3az_2 z_3 + az_1 z_2) \frac{\partial}{\partial z_2} - (az_3^2 + az_1 z_3) \frac{\partial}{\partial z_3},$$

et

$$X_{1\text{Im}} = -ibz_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1} + (3ibz_2 z_3 - ibz_1 z_2) \frac{\partial}{\partial z_2} - (ibz_3^2 - ibz_1 z_3) \frac{\partial}{\partial z_3},$$

La seconde possibilité est similaire dans les calculs, mais plus simple. Il s'agit du système d'équations

$$\begin{pmatrix} P_{z_1} & P_{z_2} & P_{z_3} \\ R_{z_1} & R_{z_2} & R_{z_3} \\ Q_{z_1} & Q_{z_2} & Q_{z_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha Q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_2 z_3^2 & z_1 z_3^2 & 2z_1 z_2 z_3 \\ z_2 z_3^3 & z_1 z_3^3 & 3z_1 z_2 z_3^2 \\ 2z_1 z_2 z_3^3 & z_1^2 z_3^3 & 3z_1^2 z_2 z_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z_1^2 z_2 z_3^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous calculons par Cramer, que

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{\begin{vmatrix} \alpha z_1^2 z_2 z_3^3 & z_1 z_3^2 & 2z_1 z_2 z_3 \\ 0 & z_1 z_3^3 & 3z_1 z_2 z_3^2 \\ 0 & z_1^2 z_3^3 & 3z_1^2 z_2 z_3^2 \end{vmatrix}}{z_1^3 z_2^2 z_3^7} \\ &= \frac{\alpha z_1^2 z_2 z_3^3 \begin{vmatrix} z_1 z_3^3 & 3z_1 z_2 z_3^2 \\ z_1^2 z_3^3 & 3z_1^2 z_2 z_3^2 \end{vmatrix}}{z_1^3 z_2^2 z_3^7} \\ &= \frac{\alpha(3-3)z_1^5 z_2^2 z_3^8}{z_1^3 z_2^2 z_3^7} \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \frac{\begin{vmatrix} z_2 z_3^2 & \alpha z_1^2 z_2 z_3^3 & 2z_1 z_2 z_3 \\ z_2 z_3^3 & 0 & 3z_1 z_2 z_3^2 \\ 2z_1 z_2 z_3^3 & 0 & 3z_1^2 z_2 z_3^2 \end{vmatrix}}{z_1^3 z_2^2 z_3^7} \\ &= \frac{-\alpha z_1^2 z_2 z_3^3 \begin{vmatrix} z_2 z_3^3 & 3z_1 z_2 z_3^2 \\ 2z_1 z_2 z_3^3 & 3z_1^2 z_2 z_3^2 \end{vmatrix}}{z_1^3 z_2^2 z_3^7} \\ &= \frac{-\alpha(3-6)z_1^4 z_2^3 z_3^8}{z_1^3 z_2^2 z_3^7} = \frac{3\alpha z_1^4 z_2^3 z_3^8}{z_1^3 z_2^2 z_3^7} \\ &= 3\alpha z_1 z_2 z_3, \quad \text{et} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3(z) &= \frac{\begin{vmatrix} z_2 z_3^2 & z_1 z_3^2 & \alpha z_1^2 z_2 z_3^3 \\ z_2 z_3^3 & z_1 z_3^3 & 0 \\ 2z_1 z_2 z_3^3 & z_1^2 z_3^3 & 0 \end{vmatrix}}{z_1^3 z_2^2 z_3^7} \\
&= \frac{\alpha z_1^2 z_2 z_3^3 \begin{vmatrix} z_2 z_3^3 & z_1 z_3^3 \\ 2z_1 z_2 z_3^3 & z_1^2 z_3^3 \end{vmatrix}}{z_1^3 z_2^2 z_3^7} \\
&= \frac{\alpha(1-2)z_1^4 z_2^2 z_3^9}{z_1^3 z_2^2 z_3^7} = \frac{-\alpha z_1^4 z_2^2 z_3^9}{z_1^3 z_2^2 z_3^7} \\
&= -\alpha z_1 z_3^2.
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc une seconde rotation généralisée

$$X_2 = 3\alpha z_1 z_2 z_3 \frac{\partial}{\partial z_2} - \alpha z_1 z_3^2 \frac{\partial}{\partial z_3},$$

qui, comme nous l'avons étudié dans la démonstration du lemme précédent, en notant $\alpha = ic$, devient

$$X_2 = 3ic z_1 z_2 z_3 \frac{\partial}{\partial z_2} - ic z_1 z_3^2 \frac{\partial}{\partial z_3},$$

Nous constatons que $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_c = 3$, grâce à a , b et c tous réels.

Remarques 4.3.17.

- a) L'exemple précédent répond à une question de généralisation posée dans [54], p.18, section 8. Il s'agissait d'un problème ouvert avec une conjecture qui omettait une dimension réelle : $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_c = 2$.
- b) Nous n'oublions pas le résultat général qui donne une condition nécessaire, mais pas suffisante pour l'existence d'une rotation généralisée concernant une hypersurface pas forcément monomiale : le théorème 3.2.4, p.64 ¹⁴⁵.
- c) Il est possible qu'une seule des deux conditions de divisibilité soit satisfaite : l'exemple suivant nous le montre.

145. Cf. également [54], pp.14-15, définition 7.1 et théorème 7.2.

Exemple 4.3.18.

Soient $P = z_1^2$, $Q = z_1^2 z_2 z_3$ et $R = z_1 z_2 z_3$, pour l'hypersurface décrite par

$$\text{Im } w = P\bar{Q} + Q\bar{P} + R\bar{R}.$$

Alors

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_c = 1.$$

4.3.6 Propriétés de \mathfrak{g}_f et \mathfrak{g}_n **Remarque 4.3.19.**

Nous commençons par citer un résultat de [52]. Sur cette base, adaptée à notre problème PQR , nous verrons que la correspondance entre \mathfrak{g}_f et \mathfrak{g}_n est forte. Le théorème suivant est adapté dans le sens que l'équation (1.5) de [52],

$$\text{Im } w = |z_1|^2 + S(z_2, z_3, \bar{z}_2, \bar{z}_3),$$

n'est pas intéressante dans notre travail. En effet, il s'agit d'une hypersurface Levi non dégénérée.

Théorème 4.3.20. ([52], p.3, théorème 1.2)

Soit M une hypersurface polynomiale homogène holomorphiquement non dégénérée et Levi dégénérée avec $\dim \mathfrak{g}_n > 0$. Alors M est biholomorphiquement équivalente à

$$\text{Im } w = z_1 \bar{Q} + Q \bar{z}_1 + R \bar{R},$$

où $Q = Q(z_2, z_3)$ et $R = R(z_2, z_3)$ sont des polynômes holomorphes. De plus, cette dernière hypersurface admet un champ dans $\mathfrak{g}_n > 0$ si et seulement s'il existe un champ Y tel que

$$Y(R) = QR$$

$$Y(Q) = Q^2.$$

Proposition 4.3.21.

Soit M une hypersurface monomiale de type PQR . Alors

$$\dim \mathfrak{g}_t > 0 \Leftrightarrow \dim \mathfrak{g}_n > 0.$$

De plus, dans ce cas,

$$\begin{aligned} P &= z_1 \\ Q &= z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3}, \\ R &= z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3}. \end{aligned}$$

Démonstration. Prouver que

$$\dim \mathfrak{g}_t > 0 \Leftrightarrow \dim \mathfrak{g}_n > 0$$

est trivial. Pour l'autre direction, nous supposons $\dim \mathfrak{g}_t > 0$. En supposant un

$$X = a \frac{\partial}{\partial z_1} + b \frac{\partial}{\partial z_2} + c \frac{\partial}{\partial z_3} + g(z) \frac{\partial}{\partial w},$$

l'équation $0 = 2 \operatorname{Re}(X(\mathcal{P} - \operatorname{Im} w))$ implique, par des raisonnements similaires à ceux rencontrés au long de ce travail ¹⁴⁶, que l'hypersurface est biholomorphiquement équivalente à

$$\operatorname{Im} w = z_1 \bar{Q} + Q \bar{z}_1 + R \bar{R},$$

où $P = z_1$, $Q = z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3}$, et $R = z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3}$. Il suffit donc de montrer, par le théorème précédent, qu'il existe un champ $Y = az_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + bz_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$ qui satisfait

$$\begin{aligned} Y(R) &= QR \\ Y(Q) &= Q^2. \end{aligned}$$

Il s'agit d'un système de Cramer, qu'il est toujours possible de résoudre. Nous rappelons que notre hypersurface est holomorphiquement non dégénérée, ce qui a pour conséquence que le jacobien de Q et R est non nul. De plus, nous pouvons calculer que la division entre les polynômes dans la résolution de Cramer est toujours possible. \square

¹⁴⁶. Cf. la démonstration du lemme 4.3.14, p.143 par exemple.

Remarque 4.3.22.

Au long de la démonstration, nous remarquons entre autres, à cause du fait que le cas Levi non dégénéré n'est pas traité, que

$$\deg P = \deg Q = \deg R \Rightarrow \dim \mathfrak{g}_t = \dim \mathfrak{g}_n = 0.$$

De plus, $\dim \mathfrak{g}_t = \dim \mathfrak{g}_n = 1$ lorsque l'hypersurface est décrite par

$$\operatorname{Im} w = z_1 \bar{Q} + Q \bar{z}_1 + R \bar{R},$$

où $P = z_1$, $Q = z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3}$, et $R = z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3}$.

4.3.7 Propriétés de \mathfrak{g}_1

Le lemme suivant est valable dans ce nouveau cas.

Lemme 4.3.23.

Soit M une hypersurface monomiale de type PQR . Alors

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_1 = 1.$$

Démonstration. Nous allons montrer que M est balancée ¹⁴⁷. Comme M est monomiale, nous supposons que

$$P = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}, \quad Q = z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} z_3^{\alpha_3}, \quad \text{et} \quad R = z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3}.$$

Pour que l'hypersurface soit holomorphiquement non dégénérée, il faut que les exposants de P , Q et R soient linéairement indépendants. Par là même, le système d'équations

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3 = 1$$

$$\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \lambda_3 \beta_3 = 1$$

$$\lambda_1 \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2 + \lambda_3 \gamma_3 = 1$$

possède une unique solution $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ qui implique que le champ

$$X = \sum_{j=1}^3 \lambda_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$$

est un champ complexe reproducteur, car

$$\begin{aligned} X(\mathcal{P}) = & \lambda_1 \alpha_1 P \bar{Q} + \lambda_1 \beta_1 Q \bar{P} + \lambda_1 \gamma_1 R \bar{R} \\ & + \lambda_2 \alpha_2 P \bar{Q} + \lambda_2 \beta_2 Q \bar{P} + \lambda_2 \gamma_2 R \bar{R} \\ & + \lambda_3 \alpha_3 P \bar{Q} + \lambda_3 \beta_3 Q \bar{P} + \lambda_3 \gamma_3 R \bar{R} = \mathcal{P}. \end{aligned}$$

Ainsi, comme toute hypersurface balancée contient un élément dans \mathfrak{g}_1 , l'affirmation est prouvée. □

147. Cf. remarque 4.2.4, p.98.

4.3.8 Résultat

Nous pouvons formuler le résultat final comme suit.

Théorème 4.3.24.

Soit M une hypersurface monomiale de type PQR . Alors

$$6 \leq \dim \mathfrak{g} \leq 11.$$

Plus précisément,

$$\begin{array}{lll} \dim \mathfrak{g}_{-1} = 1, & \dim \mathfrak{g}_t \in \{0; 1\}, & \dim \mathfrak{g}_n \in \{0; 1\}, \\ \dim \mathfrak{g}_0^{Nil.} \in \{0; 1; 2; 3\}, & \dim \mathfrak{g}_0^{Re} = 1, & \dim \mathfrak{g}_0^{Im} = 2, \\ \dim \mathfrak{g}_c \in \{0; 1; 2; 3\}, & & \dim \mathfrak{g}_1 = 1. \end{array}$$

Démonstration. Dans le cas monomial d'une hypersurface, la dimension de \mathfrak{g} est au minimum de 6. En effet, nous comptabilisons ici W , E , la dimension de \mathfrak{g}_0^{Re} , les deux dimensions de \mathfrak{g}_0^{Im} et celle de \mathfrak{g}_1 .

Il reste \mathfrak{g}_t , intimement lié à \mathfrak{g}_n , $\mathfrak{g}_0^{Nil.}$ et \mathfrak{g}_c . Distinguons le fait que les trois monômes ont le même degré ou non. Si ce degré est le même, alors $\dim \mathfrak{g}_c = 0$ (par le lemme 4.3.14, p.143), de même, $\dim \mathfrak{g}_t = \dim \mathfrak{g}_n = 0$ (par la remarque 4.3.22, p.156 ainsi que la proposition 4.3.21, p.155) et il est possible d'ajouter les rotations nilpotentes pour lesquelles leur dimension vaut 0, 1, 2 ou 3. Dans ce cas, $\dim \mathfrak{g} \in \{6; 7; 8; 9\}$.

Si les degrés de monômes sont différents, alors $\dim \mathfrak{g}_0^{Nil.} = 0$ (par le corollaire 4.3.8, p.139), tandis que $\dim \mathfrak{g}_c$ vacille entre 0 et 3 (par le lemme 4.3.14, p.143) et nous obtenons à nouveau $\dim \mathfrak{g} \in \{6; 7; 8; 9\}$. Si, de plus, l'hypersurface répond aux hypothèses de la proposition 4.3.21, p.155 (également par la remarque 4.3.22, p.156), nous pouvons ajouter la dimension de \mathfrak{g}_t et celle de \mathfrak{g}_n . \square

Chapitre 5

Conclusion

Nous concluons ce travail en deux temps : une conclusion sur la puissance de l'outil de l'opérateur de Chern-Moser suivie d'une ouverture sur de nouvelles perspectives.

Premièrement, nous rappelons donc la puissance de l'outil qu'est l'opérateur de Chern-Moser. Nous avons classifié les automorphismes infinitésimaux réels analytiques CR d'une classe d'hypersurfaces modèles, polynomiales et homogènes, M , dans \mathbb{C}^4 , autrement dit le groupe des symétries de M . La profondeur de la théorie employée veut que le groupe de stabilité, c'est-à-dire l'ensemble des automorphismes (ou biholomorphismes fixant un point) de M_g , d'une hypersurface générale, soit déterminé uniquement par un nombre fini de dérivées partielles¹⁴⁸. Ainsi, si nous considérons le but suivant : classifier le groupe de stabilité de M_g en classes d'équivalence à un biholomorphisme près, ce travail fournit alors une approche dans le sens que le groupe des symétries est un invariant biholomorphe¹⁴⁹. Effectivement, deux automorphismes de M_g biholomorphi-

148. Nous faisons évidemment référence au début de ce travail, avec les théorèmes 2.1.11 et 2.1.25, p.31 et p.39. Nous pouvons citer l'exemple concret de \mathbb{C}^2 qui concerne les automorphismes de l'hypersurface donnée par $\text{Im } w = z\bar{z}$. Ces automorphismes sont de la forme

$$h(z, w) = \left(\frac{c(z + aw)}{1 - 2i\bar{a}z - (r + i|a|^2)w}, \frac{|c|^2 w}{1 - 2i\bar{a}z - (r + i|a|^2)w} \right),$$

et ne dépendent donc que des deux premières dérivées partielles. Nous pouvons effectivement calculer que $\frac{\partial h_1}{\partial z}(0) = c$, $\frac{\partial h_1}{\partial w}(0) = ca$, et $\frac{\partial^2 h_1}{\partial w^2}(0) = 2ca(r + i|a|^2)$, et en effet, cela détermine uniquement $c \in \mathbb{C}^*$, $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}$. Cf. [82], p.298.

149. Les exemples historiques les plus célèbres d'invariants en analyse complexe à plusieurs variables, sur des ouverts par contre, sont les deux théorèmes d'unicité d'Henri Cartan. Cf. [20] ou [68], pp.23-24, théorèmes 2.1.1 et 2.1.3. Une conséquence de ces résultats est la non-validité du théorème de l'application conforme de Riemann en dimensions supérieures. Cf. [68], p.27, théorème 2.2.4.

quement équivalents ne peuvent admettre des dimensions différentes pour le groupe des symétries correspondant, \mathfrak{g} , ce qui est valable pour la dimension de tout sous-groupe, \mathfrak{g}_j , avec $j = -1, t, 0, 0^{\text{Nil.}}, 0^{\text{Re}}, 0^{\text{Im}}, c, n$, et 1.

La seconde idée apportée pour cette conclusion a pour but d'ouvrir de nouvelles perspectives : le problème PQR , dans \mathbb{C}^4 , généralise le problème PQ dans \mathbb{C}^3 . Il est possible d'envisager d'autres généralisations. Par exemple, les hypersurfaces de \mathbb{C}^4 décrites par

$$\text{Im } w = P\bar{P} + Q\bar{Q} + R\bar{R},$$

ont été récemment étudiées et généralisées¹⁵⁰ à \mathbb{C}^{n+1} . D'autres combinaisons de polynômes sont possibles. Dans \mathbb{C}^5 , il faut imaginer au minimum quatre polynômes, à combiner à souhait¹⁵¹. De même, les n polynômes de \mathbb{C}^{n+1} offrent une multitude de combinaisons possibles.

Une ouverture possible est donc d'élargir le contexte des hypersurfaces monomiales à \mathbb{C}^{n+1} . Nous ne donnons que l'exemple de la décomposition des rotations sur des hypersurfaces monomiales¹⁵² : à l'aide d'une mise en place d'outils performants de calculs informatiques, il serait intéressant d'étudier les possibilités de généralisation du théorème 4.3.1 dans des dimensions supérieures.

Une dernière perspective est de considérer les hypersurfaces de type PQR dans \mathbb{C}^4 , homogènes et holomorphiquement non dégénérées, ou similaires, mais non monomiales. En effet, l'approche employée dans ce travail ne permet pas cette étude et la mise en place de nouveaux outils semble nécessaire.

Cette thèse de doctorat, en plus d'apporter sa contribution concrète à la matière, ouvre donc la voie à de nouvelles pistes, dans des dimensions supérieures ou dans le cas non monomial, et joue ainsi son rôle, à son échelle, dans la belle aventure de la recherche en mathématiques pures.

150. Cf. [42]. Cette famille d'hypersurfaces conserve une certaine symétrie présente dans le problème PQ , mais absente dans le problème PQR avec un polynôme R qui semble mis à part.

151. Possiblement en conservant une certaine symétrie, cf. note précédente.

152. Cf. théorème 4.3.1, p.111.

Bibliographie

- [1] Alexander H., *Proper holomorphic mappings in \mathbb{C}^n* , Indiana Univ. Math. J. **26** (1977), pp.137-146.
- [2] Baouendi M. Salah, Ebenfelt Peter, Rothschild Linda Preiss, *Real submanifolds in complex space and their mappings*, Princeton, Princeton University Press, cop. 1999.
- [3] Baouendi M. Salah, Mir Maswood A., Rothschild Linda Preiss, *Reflection ideals and mappings between generic submanifolds in complex space*, J. Geom. Anal. **12** (2002), pp.543-580.
- [4] Beals Michael, Fefferman Charles, Grossman Robert, *Strictly pseudoconvex domains in \mathbb{C}^n* , Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **8** (1983), pp.125-322.
- [5] Bedford E., Pinchuk S. I., *Convex domains with noncompact groups of automorphisms*, Amer. Sb. **185** (1994), pp.3-26.
- [6] Beloshapka Valeriï K., *A uniqueness theorem for automorphisms of a nondegenerate surface in a complex space*, Math. Notes **47** (1990), no. 3-4, pp.239-242 (traduit du russe : Mat. Zametki **47** (1990), no. 3, pp.17-22, 141).
- [7] Beloshapka Valeriï K., *Finite-dimensionality of the group of automorphisms of a real analytic surface*, Math. USSR-Izv. **32** (1989), no. 2, pp.443-448 (traduit du russe : Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **52** (1988), no. 2, pp.437-442, 448).
- [8] Beloshapka Valeriï K., *Real submanifolds of a complex space : their polynomial models, automorphisms, and classification problems*, Uspekhi Mat. Nauk. **57** (2002), pp.3-44 (traduit du russe : Russian Math. Surveys. **57** (2002), pp.1-41).
- [9] Beloshapka Valeriï K., Ezhov V. V., Schmalz G., *Holomorphic classification of four-dimensional surfaces in \mathbb{C}^3* , Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **72** (2008), pp.3-18.

- [10] Beloshapka Valeriĭ K., Kossovskiy I. G., *Classification of homogeneous CR-manifolds in dimension 4*, J. Mat. Anal. Appl. **374** (2011), pp.655-672.
- [11] Bertrand Florian, Blanc-Centi Léa, *Stationary holomorphic discs and finite jet determination problems*, Math. Ann. **358** (2014), pp.477-509.
- [12] Bertrand Florian, Della Sala Giuseppe, *Stationary discs for smooth hypersurfaces of finite type and finite jet determination*, J. Geom. Anal. **25** (2015), pp.2516-2545.
- [13] Bertrand Florian, Della Sala Giuseppe, Lamel Bernhard, *Jet determination of smooth CR automorphisms and generalized stationary discs*, Math. Z. **294** (2020), pp.1611-1634.
- [14] Bertrand Florian, Meylan Francine *The 1-jet determination of stationary discs attached to generic CR submanifolds*, (2011) arXiv :2112.12176.
- [15] Blanc-Centi Léa, Meylan Francine, *Chern-Moser operators and weighted jet determination problems in higher codimension*, Internat. J. Math. **33** (2022), no. 6, pp.1-15.
- [16] Blanc-Centi Léa, Meylan Francine, *On nondegeneracy conditions in higher codimension : a survey*, Complex Anal. Synerg. **6** (2020), no. 2, Paper No. 11, pp.1-10.
- [17] Bloom Thomas, Graham Ian, *On "type" conditions for generic real submanifolds of \mathbb{C}^n* , Invent. Math. **40** (1977), no. 3, pp.217-243.
- [18] Boggess Albert, *CR manifolds and the tangential Cauchy-Riemann complex*, Boston, CRC Press, 1991.
- [19] Cartan Élie J., *Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de deux variables complexes, I*, Ann. Mat. Pura Appl. **11** (1932), pp.17-90.
- [20] Cartan Henri, *Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique*, Journal de mathématiques pures et appliquées **96** (1931), pp.1-114.
- [21] Catlin David W., *Boundary invariants of pseudoconvex domains*, Ann. of Mat. **120** (1984), pp.529-586.
- [22] Catlin David W., *Subelliptic estimates for ∂ -Naumann problem on pseudoconvex domains*, Ann. of Mat. **126** (1987), pp.131-191.
- [23] Chabat Aleksei B. (trad. Embarek Djilali), *Introduction à l'analyse complexe. Tome 2. Fonctions de plusieurs variables*, Moscou, Éditions MIR, 1985 (¹1976, trad. 1990).

- [24] Chern Shiing-Shen, Moser Jürgen K., *Partial differential equations in several complex variables*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics **19**. American Mathematical Society, Providence, RI, International Press, Boston, MA (2001).
- [25] Chern Shiing-Shen, Moser Jürgen K., *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Acta Math. **133** (1982), pp.615-637.
- [26] D'Angelo J., *Orders of contact, real hypersurfaces and applications*, Ann. of Math. **115** (1982), pp.615-637.
- [27] Ebenfelt Peter, Lamel Bernhard, Zaitsev Dmitri, *Degenerate real hypersurfaces in \mathbb{C}^2 with few automorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), pp.3241-3267.
- [28] Ebenfelt Peter, Lamel Bernhard, Zaitsev Dmitri, *Finite jet determination of local analytic CR automorphisms and their parametrization by 2-jets in the finite type case*, Geom. Funct. Anal. **13** (2003), pp.546-573.
- [29] Ebenfelt Peter, *New invariant tensors in CR structures and a normal form for real hypersurfaces at a generic Levi degeneracy*, J. Differential Geom. **50** (1998), pp.207-247.
- [30] Fefferman Charles L., *Parabolic invariant theory in complex analysis*, Adv. Math. **31** (1979), pp.131-262.
- [31] Fels G., Kaup W. *Classification of Levi degenerate homogeneous CR manifolds in dimension 5*, Acta Math. **201** (2008), pp.1-82.
- [32] Folland Gerald B., *Real analysis : modern techniques and their applications*, New-York, J. Wiley, cop. 1984.
- [33] Golubitsky Martin A., Guillemin Victor W., *Stable mappings and their singularities*, Berlin, Springer, 1973.
- [34] Grifone Joseph, *Algèbre linéaire*, Toulouse, Cépaduès, 2016 (¹1995).
- [35] Hörmander Lars, *An introduction to complex analysis in several variables*, New-York, Van Nostrand, 1973 (¹1966).
- [36] Huang X., Yin W., *A Bishop surface with a vanishing Bishop invariant*, Invent. Mat. **176** (2009), pp.461-520.
- [37] Isaev A. V., Krantz S. G., *Domains with non-compact automorphism group : a survey*, Adv. Math. **146** (1999), pp.1-38.
- [38] Jacobowitz H., *An introduction to CR structure*, Math. Surveys Monogr., vol. 32, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

- [39] Juhlin R., Lamel Bernhard, *Automorphism groups of minimal real-analytic CR manifolds*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **15** (2013), pp.509-537.
- [40] Julien Cyril, *Caractérisation des applications holomorphes propres de la boule unité de \mathbb{C}^n* , Master thesis in Mathematics, sous la direction de Francine Meylan, Université de Fribourg, Département de Mathématiques, 2012.
- [41] Kim S. Y., Zaitsev Dmitri, *Equivalence and embedding problems for CR-structures of any codimension*, Topology **44** (2005), pp.557-584.
- [42] Kim S. Y., Kolář Martin, *Infinitesimal symmetries of weakly pseudoconvex manifolds*, Math. Z. **300** (2022), pp.2451-2466.
- [43] Kohn Joseph J., *Boundary behavior of δ on weakly pseudo-convex manifolds of dimension two*, (Collection of articles dedicated to S. S. Chern and D. C. Spencer on their sixtieth birthdays), J. Differential Geometry **6** (1972), pp.523-542.
- [44] Kohn Joseph J., *Subellipticity of the $\bar{\partial}$ -Neumann problem on pseudoconvex domains : sufficient conditions* Acta Math. **142** (1979), pp.79-122.
- [45] Kolář Martin, Lamel Bernhard, *Ruled hypersurfaces in \mathbb{C}^2* , J. Geom. Anal. **25**, (2015), pp.1240-1281.
- [46] Kolář Martin, Meylan Francine, *Chern-Moser operators and weighted jet determination problems*, Geometric analysis of several complex variables and related topics, pp.75-88, Contemp. Math. **550**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.
- [47] Kolář Martin, Meylan Francine, *Effective bounds for the weighted jet determination problem*, preprint.
- [48] Kolář Martin, Meylan Francine, *Higher order symmetries of real hypersurfaces in \mathbb{C}^3* , Proc. Amer. Math. Soc. **144** (2016), no. 11, pp.4807-4818.
- [49] Kolář Martin, Meylan Francine, *Infinitesimal CR automorphisms for a class of polynomial models*, Arch. Math. (Brno) **53** (2017), no. 5, pp.255-265.
- [50] Kolář Martin, Meylan Francine, *Infinitesimal CR automorphisms of hypersurfaces of finite type in \mathbb{C}^2* , Arch. Math. (Brno) **47** (2011), no. 5, pp.367-375.
- [51] Kolář Martin, Meylan Francine, *Nonlinear CR automorphisms of Levi degenerate hypersurfaces and a new gap phenomenon*, (2017) arXiv1703 :07123 [CV].
- [52] Kolář Martin, Meylan Francine, *Nonlinearizable CR automorphisms for polynomial models in \mathbb{C}^N* , (2020) arXiv :2004.13516.

- [53] Kolář Martin, Meylan Francine, *On exotic symmetries of finite type models*, preprint.
- [54] Kolář Martin, Meylan Francine, *Remarks on the symmetries of a model hypersurface*, Analysis Math., **48** (2) (2022), pp.545-565.
- [55] Kolář Martin, Meylan Francine, Zaitsev Dmitri, *Chern-Moser operators and polynomial models in CR geometry*, Adv. Math. **263** (2014), pp.321-356.
- [56] Kolář Martin, *The Catlin multitype and biholomorphic equivalence of models*, Int. Math. Res. Not. **18** (2010), pp.3530-3548.
- [57] Kolář Martin, *Local equivalence of symmetric hyperfurfaces in \mathbb{C}^n* , Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), pp.2833-2843.
- [58] Königsberger Konrad, *Analysis 2*, Berlin, Springer, cop. 2004 (¹1991).
- [59] Kruglikov Boris, *Blow-ups and infinitesimal automorphisms of CR-manifolds*, Math. Z. **296** (2020), pp.1701-1724.
- [60] Kruzhilin N. G., Loboda A. V., *Linearization of local automorphisms of pseudoconvex surfaces*, Dokl. Akad. Nank. SSSR **271** (1983), pp.280-282.
- [61] Lamel Bernhard, Mir Nordine, *Parametrization of local CR automorphisms by finite jets and application*, J. Amer. Math. Soc. **2** (2007), pp.519-572.
- [62] Lamel Bernhard, Mir Nordine, *The finite jet determination problem for CR maps of positive codimension into Nash manifolds* (2022) <https://doi.org/10.1112/plms.12439>
- [63] Mansury Roger, Mneimné Rached, *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes*, Paris, Vuibert, 2012.
- [64] Meylan Francine, *A counterexample to the 2-jet determination Chern-Moser theorem in higher codimension*, arXiv2003.11783v1 [CV].
- [65] Mir Nordine, Zeitsev D., *Unique jet determination and extension of germs of CR maps into spheres*, Trans. Amer. Math. Soc. **374** (2021), pp.2149-2166.
- [66] Poincaré Henri, *Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme*, Rend. Circ. Mat. Palermo **23** (1907), pp.185-220.
- [67] Poincaré Henri, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (vol. 2), Paris, Gauthier-Villars, 1893.

- [68] Rudin Walter, *Function theory in the unit ball of \mathbb{C}^n* , New-York, Springer, cop. 1980.
- [69] Shevchenko S. N., *Description of the algebra of infinitesimal automorphisms of quadrics of codimension two and their classification*, Math. Notes **55** (1994), no. 5-6, pp.534-542 (traduit du russe : Mat. Zametki **55** (1994), no. 5, pp.142-153, 160).
- [70] Siu Y.-T., *Invariance of plurigenera*, Invent. Math. **134** (1998), pp.661-673.
- [71] Stanton N. K., *Infinitesimal CR automorphisms of real hypersurfaces*, Amer. J. Math. **118** (1996), no. 1, pp.209-233.
- [72] Tanaka N. I., *On the pseudo-conformal geometry of hypersurfaces of the space of n complex variables*. J. Math. Soc. Japan, **14** (1962), pp.397-429.
- [73] Tanaka N. I., *Graded Lie algebras and geometric structures*, Prec. US-Japan Seminar in Differentid Geometry (1965), pp.147-150.
- [74] Treves A., *A treasure trove of geomerty and analysis : the hyperquadric*, Notices Amer. Math. Soc. **47** (2000), pp.1246-1256.
- [75] Vitushkin Anatolii G., *Real analytic hypersurfaces in complex manifolds*, Russian Math. Surveys. **40** (1985), pp.1-35.
- [76] Webster S. M., *On the Moser normal form at a non-umbilic point*, Math. Ann. **233** (1978), pp.97-102.
- [77] Whitney Hassler, *Complex analytic varieties*, Addison-Wesley Series in Mathematics, 1972.
- [78] Wong P., *A construction of normal forms for weakly pseudoconvex CR manifolds in \mathbb{C}^2* , Invent. Math. **69** (1982), pp.311-329.
- [79] Yang P., *Automorphism of tube domains*, Amer. J. Math. **104** (1982), pp.1005-1024.
- [80] Young Shin, Kolář Martin, *Infinitesimal symmetries of weakly pseudoconvex manifolds*, Math. Z. (2021), <https://doi.org/10.1007/s00209-021-02873-w>.
- [81] Zaitsev Dmitri, *Germes of local automorphisms of real analytic CR structures and analytic dependence on the k -jets*, Math. Res. Lett. **4** (6) (1997), pp.823-842.
- [82] Zaitsev Dmitri, *Unique determination of local CR-maps by jets : A survey*, Rend. Mat. Acc. Lincei, s.9, v. **13** (2002), pp.135-145.

Curriculum vitæ

Informations personnelles

JULIEN Cyril Josy Rémy
Organiste et mathématicien 078 832 39 00
Route de Bertigny 49 cyril.jul@gmail.com
1700 Fribourg Né le 18 juin 1988 à Porrentruy
Suisse Marié, quatre enfants

Organiste titulaire des orgues de l'église Saint-Marcel de Delémont
Enseignant de mathématiques au Collège Saint-Michel de Fribourg
Enseignant d'improvisation au clavier au Conservatoire de Fribourg

Formation académique

- 2007-2010,** Université de Fribourg,
Bachelor en mathématiques et musicologie
- 2010-2012,** Université de Fribourg,
Master en mathématiques avec comme mémoire,
sous la direction de Francine Meylan : *Caractérisation des applications holomorphes propres de la boule unité de \mathbb{C}^n*
- 2013-2015,** Université de Fribourg,
Diplôme d'enseignement pour les écoles de maturité (secondaire II)

Formation musicale

- 2012-2016,** Haute École de musique de Lausanne, site Fribourg,
Bachelor et master d'interprétation d'orgue, classe de M. Croci
- 2016-2018,** Conservatoire à Rayonnement Régional de Rueil-Malmaison,
CEM d'improvisation, classe de P. Goussot
- 2018-2021,** Hochschule für Musik Freiburg im Brisgau,
Master d'improvisation à l'orgue, classe de D. Franke

Erratum

Une erreur de dénombrement s'est glissée dans cette version finale de thèse. Celle-ci a été corrigée dans la publication suivante.

Julien Cyril, Meylan Francine, *Characterization of Real-Analytic Infinitesimal CR Automorphisms for a Class of Hypersurfaces in \mathbb{C}^4* , Latin American Mathematics Series, UFSCar subseries (2024), pp.203-223.

Cet article prend part à l'ouvrage suivant.

Berhanu Shiferaw, Mir Nordine, Hoepfner Gustavo, *Geometric Analysis of PDEs and Several Complex Variables. In Honor of Jorge Hounie's 75th Birthday, Serra Negra, Brazil, July 31 - August 4, 2023*, Cham, UFSCar-Springer, 2024.

Le théorème présenté en page 158 de la thèse oublie en effet deux dimensions possibles (au maximum, nous trouvons 13 dimensions au lieu de 11). La correction de ce théorème, que nous trouvons en tant que théorèmes 7.1 et 7.2, pp.221-222, dans l'article précité, a pour correction l'énoncé suivant dans le travail de doctorat, tout le reste demeurant correct.

Théorème 4.3.24 (p.158)

Soit M une hypersurface de type PQR , monomiale, holomorphiquement non dégénérée et dans \mathbb{C}^4 . Alors

$$6 \leq \dim \mathfrak{g} \leq 13.$$

