



# Dépendance dans un portefeuille de crédits :

## Modélisation par les fonctions copules

Thèse présentée à la Faculté des Sciences économiques et sociales de l'Université de Fribourg (Suisse) par

**Ngendo Diane KARUSISI**

du Rwanda

pour l'obtention du grade de docteur ès Sciences économiques et sociales.

Acceptée par la Faculté des Sciences économiques et sociales le 27 mai 2009 sur proposition de

Monsieur le Professeur Hans Wolfgang Brachinger (Premier rapporteur)

Monsieur le Professeur Dusan Isakov (Deuxième rapporteur)

★ ★ ★

Fribourg 2009

La Faculté des Sciences économiques et sociales de l'Université de Fribourg (Suisse) n'entend ni approuver, ni désapprouver les opinions émises dans une thèse : elles doivent être considérées comme propres à l'auteur (Décision du Conseil de Faculté le 23 janvier 1990).

*À mon Oncle André*





# Table des matières

Table des figures	ix
Liste des tableaux	xiii
Introduction	1
<b>I Problématique générale du risque de crédit</b>	<b>5</b>
<b>1 La notion de risque de crédit</b>	<b>7</b>
1.1 Définition du risque de crédit . . . . .	8
1.2 Une mesure du risque de crédit : le rating . . . . .	9
1.2.1 La migration des ratings . . . . .	10
1.2.2 Les matrices de transition . . . . .	12
1.3 Les dérivés de crédit . . . . .	13
<b>2 La réglementation prudentielle</b>	<b>17</b>
2.1 Le Comité de Bâle . . . . .	17
2.2 L'évolution de la réglementation prudentielle . . . . .	19
2.2.1 L'Accord de Bâle de 1988 . . . . .	19
2.2.2 Un nouvel accord : BÂLE II . . . . .	21
<b>3 L'architecture d'un modèle de risque de crédit</b>	<b>25</b>
3.1 Risque de crédit au niveau individuel . . . . .	26
3.1.1 La probabilité de défaut . . . . .	26
3.1.2 L'exposition en cas de défaut . . . . .	26
3.1.3 Les pertes en cas de défaut . . . . .	27
3.1.4 Pertes anticipées . . . . .	27

3.1.5	Les pertes non-anticipées . . . . .	28
3.2	Risque de crédit au niveau du portefeuille . . . . .	28
3.3	La distribution des pertes futures . . . . .	30
3.3.1	La méthodologie analytique . . . . .	31
3.3.2	La méthodologie de Monte-Carlo . . . . .	31
3.3.3	Back-Testing et Stress-Testing des modèles de risque de crédit . . . . .	32
3.3.4	La théorie des valeurs extrêmes . . . . .	33
3.4	Le capital économique . . . . .	33
<b>II</b>	<b>Les principales approches quantitatives du risque de défaut</b>	<b>37</b>
<b>4</b>	<b>L'approche structurelle du risque de défaut</b>	<b>39</b>
4.1	Les hypothèses du modèle de MERTON . . . . .	40
4.2	Valeur des capitaux propres et probabilité de défaut . . . . .	42
4.3	Valeur de la dette et spread de crédit . . . . .	43
4.4	Extensions du modèle de Merton . . . . .	45
4.5	CreditMetrics <sup>TM</sup> : Une application du modèle de MERTON . . . . .	47
<b>5</b>	<b>L'approche des modèles à forme réduite</b>	<b>53</b>
5.1	Le modèle d'intensité . . . . .	54
5.1.1	Le processus de Poisson homogène . . . . .	54
5.1.2	Le processus de Poisson non homogène . . . . .	57
5.2	Structure à terme des probabilités de défaut . . . . .	58
5.2.1	Fonction de survie . . . . .	59
5.2.2	Fonction de défaillance . . . . .	60
5.3	Des spreads de crédit à l'intensité de défaut . . . . .	61
5.4	Les spreads des Credit Default Swaps . . . . .	63
5.4.1	Évaluation des Credit Default Swaps . . . . .	65
5.4.2	Des spreads des CDS à l'intensité de défaut : une relation simple . . . . .	67
5.5	Extensions du modèle d'intensité . . . . .	67
<b>III</b>	<b>La dépendance des défauts</b>	<b>69</b>
<b>6</b>	<b>Les sources de dépendance</b>	<b>71</b>

<b>7</b>	<b>La corrélation des défauts</b>	<b>75</b>
7.1	La corrélation des défauts dans les modèles structurels . . . . .	76
7.1.1	Distribution de chaque statistique de perte . . . . .	78
7.1.2	Distribution jointe des statistiques de perte . . . . .	79
7.1.3	La corrélation des défauts selon CreditMetrics <sup>TM</sup> . . . . .	81
7.2	La corrélation des défauts dans les modèles réduits . . . . .	84
7.3	Déficiences de la corrélation . . . . .	86
<b>8</b>	<b>Les fonctions copules</b>	<b>89</b>
8.1	Définition des copules et propriétés de base . . . . .	90
8.2	Le théorème de SKLAR . . . . .	92
8.3	Les copules de survie . . . . .	97
8.4	Extension des copules au cas multidimensionnel . . . . .	100
<b>9</b>	<b>Copules et mesures de dépendance</b>	<b>103</b>
9.1	Dépendance parfaite . . . . .	104
9.2	Mesures de concordance . . . . .	105
9.2.1	Le tau de Kendall . . . . .	107
9.2.2	Le rho de Spearman . . . . .	109
9.2.3	Le coefficient de corrélation est-il une mesure de concordance? . . . . .	110
9.3	Mesures de dépendance . . . . .	112
9.4	La dépendance de queue . . . . .	113
<b>10</b>	<b>Les copules paramétriques</b>	<b>117</b>
10.1	La famille des copules elliptiques . . . . .	117
10.1.1	La famille des copules normales . . . . .	118
10.1.2	La famille des copules de Student . . . . .	123
10.2	Les familles de copules archimédiennes . . . . .	128
<b>11</b>	<b>Estimation et simulation des copules</b>	<b>137</b>
11.1	La copule empirique . . . . .	137
11.2	Estimation des paramètres de la copule . . . . .	139
11.2.1	La méthode du maximum de vraisemblance . . . . .	139
11.2.2	Méthode d'estimation semi paramétrique . . . . .	141
11.2.3	La méthode des moments . . . . .	142

11.3 Simulation des fonctions copules . . . . .	145
11.3.1 La méthode des distributions . . . . .	145
11.3.2 La méthode des distributions conditionnelles . . . . .	147
<b>IV Modélisation de la dépendance des défauts : Une approche par les fonctions copules</b>	<b>151</b>
<b>12 Copules et dépendance des défauts dans les modèles structurels</b>	<b>153</b>
12.1 Copules et probabilité jointe de défaut . . . . .	154
12.2 La copule implicite de CreditMetrics <sup>TM</sup> . . . . .	157
12.3 Copule et probabilité jointe de défaut : Exemple d'application . . . .	158
12.4 Copule et capital économique . . . . .	169
<b>13 Copules et dépendance des défauts dans les modèles réduits</b>	<b>177</b>
13.1 Copules et probabilité jointe de survie . . . . .	177
13.2 Copules et probabilité jointe de survie : Exemple d'application . . . .	180
13.3 Copule et capital économique dans les modèles réduits . . . . .	191
<b>Conclusion</b>	<b>193</b>
<b>Annexes</b>	<b>199</b>
<b>A Matrice de transition de Standard &amp; Poor's</b>	<b>199</b>
<b>B Diagrammes de dispersion des log-rendements annualisés</b>	<b>201</b>
<b>C Diagrammes de dispersion des spreads des CDS</b>	<b>205</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>209</b>

# Table des figures

3.1	Le concept du capital économique . . . . .	34
4.1	Relation entre le spread théorique en <i>basis points</i> et le temps $T$ restant avant la maturité de la dette pour $\varphi > 1$ . . . . .	44
4.2	Relation entre le spread théorique en <i>basis points</i> et le temps $T$ restant avant la maturité de la dette (en années) pour $\varphi < 1$ . . . . .	45
4.3	Différentes étapes de l'analyse du risque de crédit au niveau individuel avec CreditMetrics <sup>TM</sup> (GUPTON & AL [83] p.23) . . . . .	49
4.4	Migration des rating et valeurs des actifs d'une firme de rating BB . .	49
4.5	Distribution du rendements des actifs découpée en bandes . . . . .	50
5.1	Processus de Poisson . . . . .	55
5.2	Durées d'attente entre deux occurrences successives . . . . .	58
5.3	Evaluation d'une obligation à cash flow unique sujette au risque de défaut . . . . .	62
5.4	Schéma du Credit Default Swap . . . . .	64
7.1	Distribution conditionnelle de chaque statistique de perte . . . . .	79
8.1	Graphes à trois dimensions et lignes de niveau des copules $C^-$ , $C^\perp$ et $C^+$ . . . . .	93
9.1	$\rho_{\min}$ et $\rho_{\max}$ en fonction de l'écart-type . . . . .	111
9.2	Illustration de la dépendance de queue à gauche et à droite . . . . .	115
10.1	Fonction de densité et lignes de niveau de la distribution normale bivariée avec $\rho_{12} = 0.8$ . . . . .	119
10.2	Représentation graphique et lignes de niveau de la copule normale bivariée de paramètre $\rho = 0.8$ . . . . .	121
10.3	Fonction de densité et lignes de niveau de la distribution $t$ bivariée pour $\rho_{12} = 0.8$ et $\nu = 4$ . . . . .	124

10.4	Représentation graphique et lignes de niveau de la copule de Student bivariable de paramètre $\rho = 0.8$ et $\nu = 4$ . . . . .	125
10.5	10'000 données simulées d'une distribution normale bivariable standardisée avec $\rho = 0.9$ et d'une distribution de Student bivariable avec $\nu=1$ degrés de liberté et $\rho = 0.9$ . . . . .	128
10.6	Représentation graphique et lignes de niveau d'une copule de Gumbel bivariable de paramètre $\theta = 1.5$ . . . . .	133
10.7	Représentation graphique et lignes de niveau d'une copule de Clayton bivariable de paramètre $\theta = 10$ . . . . .	135
10.8	10'000 paires d'observations simulées de trois distributions bivariables ayant des marges normales $N(0, 1)$ et un tau de Kendall égal à 0.6. Les structures de dépendance sont la copule de Gumbel, la copule de Clayton et la copule normale. . . . .	136
11.1	Simulation de la copule normale $\rho = 0.5$ avec des marges différentes .	146
11.2	Simulation de la copule de Student $\rho = 0.5, \nu = 1$ avec des marges différentes . . . . .	147
11.3	Simulation de la copule de Gumbel $\theta = 2$ avec des marges $N(0, 1)$ et $t_5$ à gauche et $\chi_8^2$ et $\chi_1^2$ à gauche . . . . .	150
11.4	Simulation de la copule de Clayton $\theta = 6$ avec des marges $N(0, 1)$ et $t_5$ à gauche et $\chi_8^2$ et $\chi_1^2$ à gauche . . . . .	150
12.1	Cours des actions indexés au cours du 2 juin 2003 . . . . .	159
12.2	Distribution des log-rendements annualisés . . . . .	162
12.3	Test graphique de la plausibilité de la distribution normale multivariée	165
12.4	Effet de la copule sur la fonction de répartition des pertes globales . .	171
12.5	Distribution de la perte globale selon le choix de la copule . . . . .	174
13.1	Distribution des spreads des CDS . . . . .	180
13.2	Evolution des spreads des CDS (5 ans) . . . . .	181
13.3	Test graphique de la plausibilité de la distribution normale multivariée	186
B.1	Matrice des diagrammes de dispersion des log-rendements annualisés pour le portefeuille CH . . . . .	202
B.2	Matrice des diagrammes de dispersion des log-rendements annualisés pour le portefeuille DE . . . . .	203
B.3	Matrice des diagrammes de dispersion des log-rendements annualisés pour le portefeuille US . . . . .	204

C.1	Matrice des diagrammes de dispersion des spreads des CDS pour le portefeuille CH . . . . .	206
C.2	Matrice des diagrammes de dispersion des spreads des CDS pour le portefeuille DE . . . . .	207
C.3	Matrice des diagrammes de dispersion des spreads des CDS pour le portefeuille US . . . . .	208





# Liste des tableaux

1.1	Catégories de rating de S&P et Moody's, voir RAIMBOURG [124]	11
1.2	Matrice de transition estimée de Moody's	12
2.1	Les catastrophes financières récentes	18
2.2	Pondérations pour les actifs du bilan	20
2.3	Répartition de la charge en fonds propres	23
4.1	Probabilités de transition pour une firme de rating BB	51
4.2	Seuils de migration du rendement des actifs pour une firme de rating BB	51
10.1	Valeurs de $\lambda_L$ ou $\lambda_U$ impliquées par la copule de student pour différentes valeurs de $\nu$ et $\rho$ .	126
12.1	Copules et probabilités de défaut	155
12.2	Description sommaire des portefeuilles	158
12.3	Statistiques descriptives des log-rendements annualisés des actions	161
12.4	Coefficient de corrélation des log rendements annualisés	163
12.5	Résultats des estimateurs des paramètres de la copule normale	166
12.6	Résultats des estimateurs des paramètres de la copule de Student	167
12.8	AIC selon le choix de la copule	167
12.7	Résultats des estimations des paramètres des copules de Clayton et Gumbel	168
12.9	Probabilité jointe de défaut en selon le choix de la copule	169
12.10	Description du portefeuille	172
12.11	Moyenne et écart-type de la perte globale selon le choix de la copule	173
12.12	Capital économique selon le niveau de signification et la copule	175

13.2 Estimation des probabilités individuelles de survie des différents émetteurs au 31.12.2007 . . . . .	182
13.1 Statistiques descriptives des spreads des CDS à 5 ans . . . . .	183
13.3 Coefficient de corrélation et tau de Kendall des spreads des CDS . . .	185
13.4 Résultats des estimateurs des paramètres de la copule normale . . .	187
13.5 Résultats des estimateurs des paramètres de la copule de Student . .	188
13.6 Résultats des estimations des paramètres des copules de Clayton et Gumbel . . . . .	189
13.7 AIC selon le choix de la copule . . . . .	189
13.8 Probabilité jointe de survie 1 an en selon le choix de la copule . . .	190
13.9 Probabilité jointe de survie à 5 ans en selon le choix de la copule . . .	190
A.1 Probabilités moyennes historiques de transition en % (1981-2003) Source : Standard & Poor's [25] . . . . .	200

# Introduction

Le risque de crédit est incontestablement le risque le plus ancien et le plus important des institutions financières. Il correspond au risque de pertes consécutives aux faillites des grandes entreprises, à l'incapacité des débiteurs privés ou publics à couvrir ou solder leurs positions dans un délai ou à un coût raisonnable.

L'histoire économique récente ne manque pas d'exemples de situations de crise qui ont démontré l'importance croissante d'une gestion active efficace des risques. Le cas de la crise russe de 1998 constitue probablement le cas le plus spectaculaire, qui a vu l'effondrement du rouble et de la dette de l'État russe provoquer la faillite du système bancaire national et l'accumulation des pertes chez les grandes contreparties du marché. La dernière crise en date, celle des crédits hypothécaires américains à risque dits «subprime» déclenchée durant l'été 2007, a elle aussi ébranlé le système financier international. Dans son «Rapport sur la stabilité financière dans le monde» publié en avril 2008, le Fonds Monétaire International estime que les pertes potentielles des banques et autres institutions financières dues à la crise du crédit hypothécaire à risque, pourraient approcher les 1'000 milliards de dollars.

L'analyse de ces crises récentes permet de dégager d'une part, que ces situations sont imputables à une intégration croissante des marchés, elle-même liée à l'extension du champ des marchés financiers et à l'apparition de nouveaux acteurs que sont les grandes institutions financières et les fonds spéculatifs. Cette intégration croissante et l'émergence d'acteurs dominants tous deux liés à la mondialisation des marchés, sont susceptibles d'introduire une forte volatilité sur les marchés financiers et une très grande sensibilité des flux financiers aux phénomènes de confiance et/ou défiance.

D'autre part, l'analyse de ces crises exprime que celles-ci sont souvent la conséquence de déséquilibres fondamentaux de marché. Le choc mondial suscité dans les banques par la faillite virtuelle en 1998 des fonds spéculatifs LTCM (Long Term Capital Management) a révélé la sous évaluation générale du prix du risque de crédit tandis que l'ampleur des engagements de certains établissements bancaires vis-à-vis de ces fonds a mis en lumière les faiblesses du système de mesure et de suivi du risque de crédit. Le cas de la crise russe, marquée par une dévaluation brutale du rouble et le défaut de la dette souveraine russe, les crises plus récentes survenues en conséquence de la formation de bulles spéculatives détachées des réalités économiques ont aussi rendu attentif sur la sous estimation du risque de crédit dans les institutions financières.

La montée du risque de crédit due aux faillites et aux crash financiers a fragilisé le système bancaire. Cette fragilité a été accentuée par la faiblesse relative du montant des fonds propres des banques, notamment des grandes banques internationales les plus engagées dans les opérations présentant les risques les plus élevés. De plus, la déréglementation financière et la concurrence accrue entre institutions financières a conduit à une forte érosion des marges, contribuant encore à la faiblesse des fonds propres.

L'observation de la vulnérabilité des institutions financières face à ces crises a conduit à une prise de conscience générale du risque systémique et de l'importance d'une gestion active et efficace du risque de crédit. La modélisation du risque de crédit prend aujourd'hui le relais de la modélisation du risque de marché et fait l'objet, depuis la fin des années 90, d'avancées importantes tant au sein de la communauté académique qu'au sein des établissements bancaires. C'est dans cette tendance générale que s'inscrit cette thèse.

Dans la première partie, cette thèse offrira une brève présentation de la problématique générale du risque de crédit. L'augmentation considérable du risque de crédit consécutive aux crash financiers et aux faillites, la fragilité du système bancaire accentuée par la faiblesse relative du montant des fonds propres des grandes banques internationales ont abouti à la réglementation bancaire dès la fin des années 1980 sous l'impulsion des travaux du comité de Bâle. On présentera dans cette partie l'environnement réglementaire au départ rigide et son évolution au gré des progrès effectués dans la recherche appliquée en analyse et gestion des risques. On introduira ensuite les principaux outils de la modélisation et de la gestion du risque de crédit.

Le risque de crédit comporte une composante principale, le risque de défaut. La deuxième partie de cette thèse consistera à présenter les deux principales approches quantitatives qui se dégagent de la littérature pour modéliser le risque de défaut. L'objectif de ces modèles est de proposer des estimations de la probabilité de défaut des crédits individuels. La traditionnelle approche par les ratings pour mesurer le risque de défaut a été récemment complétée par des modèles fondés soit sur la théorie financière soit sur la théorie de l'assurance. Le calibrage de ces modèles repose sur l'utilisation des données des marchés financiers et ces modèles s'appliquent principalement aux risques des grandes entreprises, les seules pour lesquelles on dispose en réalité de ces données.

La troisième partie de ce travail traitera du passage du risque de crédit considéré isolément pour un actif au risque de crédit d'un portefeuille. Ainsi, le risque d'un actif donné change dès lors que l'on prend en compte le portefeuille auquel il appartient. Cette évolution repose sur l'effet de diversification dont la prise en compte constitue une des avancées majeures de la théorie financière moderne. Si des progrès ont été réalisés récemment dans la modélisation du risque de crédit au niveau individuel, beaucoup reste à faire en ce qui concerne l'agrégation des risques en vue de dégager une mesure globale de risque de crédit pour un portefeuille donné. On présentera dans cette partie les fonctions copules, qui sont aujourd'hui l'outil privilégié par les statisticiens pour l'étude de la dépendance entre variables aléatoires.

Dans la quatrième partie, cette thèse présentera une application concrète des copules dans la modélisation de la dépendance des défauts et étudiera le rôle du choix des copules dans la détermination des mesures de risque agrégées du portefeuille. Enfin, une conclusion revient sur les principaux résultats de cette étude et ouvre des voies de recherche futures.



## Première partie

# Problématique générale du risque de crédit





# Chapitre 1

## La notion de risque de crédit

La notion de risque financier en général est liée à la survenance d'un événement possible, incertain, et qui a des conséquences néfastes sur le bilan ou le compte de résultat d'une institution financière. Ces conséquences correspondent à des pertes avérées qui affectent le résultat net de l'institution financière. On peut alors distinguer l'événement ou la cause qui est à l'origine du risque de l'enjeu qui est la conséquence finale.

Dans la discussion du risque financier, plusieurs types de risque ont été identifiés dans le but de pouvoir mesurer et gérer chaque type de risque de manière adéquate. De part la cause du risque, on distingue trois types globaux de risque financiers : le risque de marché, le risque opérationnel et le risque de crédit.

CROUHY, GALAI & MARK [38] p. 34 définissent le **risque de marché** comme étant le risque de pertes sur les positions du bilan d'une institution financière à la suite de variations des prix du marché. Ce risque recouvre :

- Le risque sur titres (*equity risk*) qui se réfère à la sensibilité de la valeur d'un portefeuille de titres aux mouvements du système économique ou aux mouvements spécifiques aux titres ;
- Le risque de taux d'intérêt (*Interest Rate Risk*) relatif aux pertes de valeur des instruments liés aux taux d'intérêt comme les obligations ;
- Le risque de change (*Currency Risk*) inhérents aux fluctuations des taux de change et des taux d'intérêt internationaux ;
- Et enfin le risque sur produits de base (*Commodity Risk*) encourus pour l'ensemble de l'activité de l'entreprise.

Pendant longtemps, la mesure naturelle du risque de marché d'un portefeuille d'actifs a été la volatilité des rendements de portefeuille. Par exemple, dans le modèle de sélection de portefeuille de MARKOWITZ [112], l'agent maximise son espérance de gain pour un niveau de risque donné, qui est mesuré par l'écart-type de la distribution des rendements. Cette vision du risque, qui part de l'hypothèse de rendements gaussiens, a beaucoup évolué depuis le début des années quatre-vingt-dix. Aujourd'hui, la mesure du risque la plus répandue est la **Value at Risk (VaR)**, qui est un

quantile de la distributions de la perte potentielle pour un horizon donné. Deux éléments sont déterminants pour le calcul d'une VaR : la distribution des rendements et l'ordre du quantile. Évidemment, dans un monde gaussien, on peut montrer la mesure volatilité ou écart-type et la mesure quantile VaR sont analogues, puisque l'on peut exprimer l'une en fonction de l'autre.

Dans le document de travail de septembre 2001 [10] p.2, le Comité de Bâle<sup>1</sup> définit les **risques opérationnels** comme étant les risques de pertes directes ou indirectes liées à une inadéquation ou une défaillance des procédures et systèmes internes, des erreurs humaines, ou à des événements extérieurs. Les risques opérationnels incluent par conséquent le risque technologique et le risque d'erreurs des systèmes informatiques. Le marché des dérivés est le plus sujet au risque opérationnel parce que les dérivés sont, de par leur nature, des transactions à fort effet de levier. En d'autres termes, cela signifie qu'un trader peut prendre des engagements importants au nom de l'institution financière et causer des expositions importantes pour le futur en utilisant seulement une quantité limitée d'argent liquide<sup>2</sup>.

Pour mesurer les risques opérationnels, les institutions financières se doivent de détecter systématiquement tous les événements internes et externes relevant du risque opérationnel. Le Comité de Bâle [10] propose certaines méthodologies pour mesurer les risques opérationnels.

Enfin, le risque de crédit, qui est le plus ancien et le principal risque d'une institution financière est défini à la section suivante.

## 1.1 Définition du risque de crédit

DUFFIE & SINGLETON [51] p.3 définissent le **risque de crédit** comme étant le risque de pertes associées aux changements de qualité de signature d'un débiteur sur un engagement de remboursement de dettes qu'il a contractées. Ils distinguent trois composantes du risque de crédit :

- Le *risque de défaut* qui correspond à l'incapacité du débiteur à faire face à ses obligations. L'agence MOODY'S INVESTOR SERVICE [116], qui est l'une des agences les plus importantes au niveau de la recherche et l'analyse des risques, retient la définition suivant du risque de défaut : «tout manquement ou tout retard sur le paiement du principal ou des intérêts ». Dans une telle situation, les créanciers sont susceptibles d'accuser une perte s'ils ne recouvrent qu'une partie du montant stipulé par le contrat de dette.
- La deuxième composante du risque de crédit provient de l'incertitude pesant sur le *taux de recouvrement* une fois le défaut survenu. Le taux de recouvrement représente le pourcentage de la créance qui sera récupéré suite aux procédures

---

<sup>1</sup>Une définition du Comité de Bâle est donnée au chapitre suivant, p. 18

<sup>2</sup>Les pertes annoncées le 24 janvier 2008 par la Société Générale, deuxième banque française, sont un exemple éloquent du risque opérationnel

judiciaires consécutives au défaut du débiteur. Il est lui-même une variable aléatoire dans la mesure où il dépend de la qualité de la contrepartie, de la valeur de liquidation du débiteur et évidemment de la séniorité de la créance.

- La *dégradation de la qualité du crédit* constitue la troisième source de risque portant sur une dette. Si la perception de la qualité de l'emprunteur se détériore, la prime de risque accordée par les marchés financiers s'accroît en conséquence. Le risque de dégradation se traduit alors par une possible dévalorisation de la dette au cours de sa durée de vie. Les pertes liées à la dégradation de la qualité du crédit ne se réalisent qu'en cas de vente anticipée de la dette sans qu'un défaut ne se soit pour autant produit.

Les risques de défaut et de dégradation de la qualité sont fortement liés dans la mesure où la dégradation de la qualité de l'emprunteur peut être un élément précurseur du défaut. C'est en particulier le cas lorsqu'un débiteur en difficulté voit son rating se détériorer : la levée des fonds frais sur les marchés devient coûteuse et difficile, ce qui peut conduire le débiteur au défaut. Quoique liés, ces deux types de risque sont distincts et les différents modèles de risque de crédit modélisent distinctement.

Dans le but de mesurer le risque de crédit, il est habituel d'opposer des outils qualitatifs à des méthodes quantitatives. Les années 1990 ont connu un développement important des méthodes et modèles quantitatifs pour mesurer le risque de crédit. Les principales approches quantitatives du risque de crédit seront présentées à la partie 2 de ce travail.

L'outil qualitatif couramment utilisé pour mesurer le risque de crédit est la notation ou le rating attribué à un débiteur quelconque. La section suivante présente brièvement la méthodologie de mesure de risque de crédit à l'aide des ratings.

## 1.2 Une mesure du risque de crédit : le rating

Le **rating** est une note attribuée à un débiteur qui décrit la qualité de la solvabilité ou la capacité de remboursement de ce débiteur. Le débiteur est en général une entreprise ou une administration publique. Les critères généralement retenus pour noter un débiteur sont d'une part les facteurs liés à la situation financière et économique particulière du débiteur et d'autre part sa sensibilité aux conditions de marché.

Lorsque le débiteur est une entreprise, il s'agit d'étudier d'une part les facteurs propres à l'entreprise : la position compétitive, la diversification sectorielle et géographique, la capacité à innover, la structure financière de l'entreprise et sa capacité à dégager des cash flows sur une base récurrente. D'autre part, les critères liés l'environnement de cette entreprise, c'est-à-dire : croissance de la demande du secteur, intensité de la concurrence, arrivée des produits de substitution, réglementation, cyclicité de la demande etc.

L'essentiel de ces critères considérés pour la détermination du rating est d'ordre qualitatif. Le rating est alors une variable qualitative catégorielle, dont les différentes modalités sont présentées sur une échelle ordinale. A chaque modalité qu'on appellera catégorie de rating est associée une capacité de remboursement du débiteur ce qui fait du rating une mesure du risque de crédit.

Les agences de rating ont la mission essentielle d'observer les entreprises et d'attribuer des ratings dans le but d'assister les investisseurs, en particulier ceux qui sont actifs sur les marchés obligataires. L'objectif des agences de rating est de fournir une opinion indépendante concernant la capacité de remboursement des différents débiteurs. La toute récente crise des prêts hypothécaires à risques, dits «subprime» a remis en cause la neutralité des agences de notation et la pertinence de leur jugement. Plusieurs voix se sont élevées pour reprocher aux agences de notation financière d'avoir été incapables d'évaluer correctement de nombreux débiteurs à la lumière de la crise financière qui a secoué les marchés au courant de l'été 2007.

Les agences principales de rating sont MOODY'S INVESTORS SERVICES<sup>3</sup> et STANDARDS & POOR'S<sup>4</sup>. Ces principales agences de notation ont L'éventail des ratings attribués aux débiteurs va de **AAA** ou **Aaa** pour la meilleure qualité de crédit à **D** pour le défaut.

La table 1.1 présente les catégories de rating de MOODY'S INVESTORS SERVICES et STANDARDS & POOR'S ainsi que les capacités de de remboursement y associées.

### 1.2.1 La migration des ratings

Dans la suite de ce travail, on parlera de *crédit* pour désigner tout titre sujet au risque de crédit. Le rating d'un crédit quelconque représente une mesure qualitative du risque de crédit, puisqu'il informe sur la capacité de remboursement du débiteur qui émet ce crédit. Sur les marchés des titres sujets au risque de crédit, les investisseurs s'intéressent non seulement au rating des crédits composant leurs portefeuilles, mais aussi à l'évolution du rating de ces crédits.

A la date  $t$ , les agences de rating associent à chaque crédit  $i$  d'un portefeuille un certain rating  $R_{i,t}$  selon la qualité de sa solvabilité. Au bout d'un certain horizon, le rating du crédit peut changer suite à une dégradation ou une amélioration de sa solvabilité. Il s'agit d'une **migration de rating**. De manière générale, l'échelle ordinale utilisée par les agences de ratings peut être remplacée par une échelle numérique. On dénote l'ensemble des catégories de ratings possibles par  $E = \{0, \dots, d\}$  où  $d \in \mathbb{N}$  signifie l'état de défaut. On a

$$R_{i,t} \in E = \{0, \dots, d\} . \quad (1.1)$$

---

<sup>3</sup><http://www.moodys.com>

<sup>4</sup><http://www2.standardandpoors.com>

	S&P	Moody's	Capacité de remboursement
<i>Catégories d'investissement</i>	AAA	Aaa	Très forte capacité à rembourser
	AA+	Aa1	
	AA	Aa2	Forte capacité à rembourser
	AA-	Aa3	
	A+	A1	Forte capacité à rembourser
	A	A2	mais sensibilité à la conjoncture
	A-	A3	
	BBB+	Baa1	Capacité de remboursement suffisante
	BBB	Baa2	mais sensibilité accrue à la conjoncture
	BBB-	Baa3	
<i>Catégories spéculatives</i>	BB+	Ba1	Doit pouvoir assurer ses engagements
	BB	Ba2	mais fait face à des incertitudes conjoncturelles
	BB-	Ba3	
	B+	B1	
	B	B2	
	B-	B3	
	CCC+		Ne pourra honorer ses engagements
	CCC	Caa	que si la conjoncture est favorable
	CCC-		
	CC	Ca	Créance de second rang lorsque
	C	C	les créances de premier rang sont CCC
	D	D	Défaut de paiement constaté ou prévisible

TAB. 1.1 – Catégories de rating de S&amp;P et Moody's, voir RAIMBOURG [124]

La notation  $R_{i,t} \rightarrow R_{i,t+1}$  indique la migration de rating du crédit  $i$  de l'instant  $t$  à l'horizon  $t + 1$ . Soit  $PD_i$  la probabilité que le crédit  $i$  fasse défaut à l'horizon  $t + 1$ , alors on a :

$$PD_i = P(R_{i,t} \rightarrow d) . \quad (1.2)$$

En général, l'échelle de temps est choisie en termes d'années et l'horizon privilégié est d'une année. Les probabilités de migration sont par conséquent des probabilités à un an. Cette approche par les ratings est fondée sur une anticipation à court terme de l'évolution de la qualité d'un crédit. Dans les faits, les institutions financières et les agences de rating tiennent essentiellement compte des derniers exercices comptables de l'émetteur du crédit et de ses perspectives à court terme.

Il est pertinent de se demander dans quelle mesure les ratings reflètent correctement le risque de crédit associé à un crédit particulier. En assignant une catégorie de rating à chaque crédit, les agences de rating essaient d'assurer que des rating similaires impliquent une qualité de crédit similaire au sens large. Cependant, il n'est pas évident d'assurer que les probabilités de défaut pour des horizons égaux sont égales pour tous les crédits qui se situent dans la même catégorie de rating.

## 1.2.2 Les matrices de transition

Les agences de rating publient régulièrement des estimations des **probabilités de migration** qui représentent les probabilités annuelles de migration des crédits d'un rating à un autre. Ces probabilités de migration sont organisées dans une **matrice de transition** :

$$\Pi \equiv [\pi_{ij}] ; \quad (1.3)$$

où  $\pi_{ij}$  est la probabilité conditionnelle de passer du rating  $i$  au rating  $j$  :

$$\pi_{ij} = P(R_{t+1} = j | R_t = i), \quad i, j \in E . \quad (1.4)$$

Les probabilités de transition sont inconnues. Pour les estimer, les agences principales de rating recourent à des fréquences relatives de migrations des ratings sur la base de données historiques. Le principe est de définir un large échantillonnage multi-sectoriel de crédits sur une période historique passée suffisamment longue. Sur cette base, des fréquences relatives de transitions sont obtenues, et forment les composantes de la matrice de transition estimée  $\hat{\Pi}$ . Plus la période d'observation est grande, plus les fréquences moyennes historiques de transition devraient converger vers la «vraie» matrice de transition contenant les probabilités de migration.

Par exemple, la table 1.2 donne les fréquences relatives  $\hat{\pi}_{ij}$  qui sont des estimations des probabilités de migration pour certaines catégories de rating. Ces fréquences sont calculées sur la base d'observations historiques entre 1920-2005 par MOODY'S INVESTOR SERVICES [117], p.8.

Rating	Rating au bout d'une année								
initial	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa-C	Default	WR <sup>5</sup>
Aaa	88.365	6.994	0.76	0.165	0.021	0.001	0	0	3.694
Aa	1.242	85.498	6.521	0.709	0.179	0.037	0.006	0.06	5.748
A	0.076	2.851	85.279	5.359	0.717	0.117	0.028	0.073	5.5
Baa	0.045	0.306	4.666	80.898	5.29	0.795	0.17	0.287	7.542
Ba	0.007	0.084	0.522	5.975	73.632	6.982	0.641	1.316	10.84
B	0.004	0.06	0.181	0.709	6.439	71.2	5.498	4.225	11.683
Caa-C	0	0.027	0.054	0.2	0.944	6.806	66.583	13.885	11.502

TAB. 1.2 – Matrice de transition estimée de Moody's

Pour mesurer le risque de crédit, l'approche par les rating et leurs migrations présente le mérite d'une grande simplicité de formalisation. En effet, pour estimer le risque de défaut d'un crédit quelconque, la seule information pertinente est son rating ; il suffit alors de consulter une matrice transition pour avoir une estimation de la probabilité annuelle de défaut.

On observe que cette approche correspond à une chaîne de Markov homogène dont les états sont les différentes catégories de rating. Néanmoins, le traitement du rating d'un crédit comme une chaîne de Markov homogène pose un certain nombre de

problèmes. En effet, les probabilités de transition publiées par les agences de rating sont des fréquences relatives historiques de transition et ne reflètent pas l'information nouvellement arrivée sur le marché. Il est légitime de questionner le «caractère markovien» des ratings, en d'autres termes, se demander si les fréquences de transitions établies sur la base de données historiques sont utilisables pour anticiper les migrations futures de rating.

Dans cette perspective, NICKELL, PERRAUDIN, VAROTTO [120] ont procédé à un examen de la stabilité des fréquences de transition dans le temps selon les types de crédits et selon la position dans le cycle économique sur la base de 6534 crédits<sup>6</sup> considérés entre 1970 et 1997. Les résultats montrent une volatilité des fréquences de migration qui augmente lorsque la qualité du crédit décline. Par ailleurs, pour les crédits de catégorie d'investissement, la volatilité des fréquences de transitions baisse de manière significative en période de croissance et augmente en période de conjoncture défavorable.

Même en ignorant l'effet des cycles économiques, les fréquences de transition ne sont vraisemblablement pas fixes sur la durée de vie d'un crédit. CARTY & FONS[28] ont documenté un *effet d'âge* qui explique la dépendance des transitions par rapport à l'âge du crédit. Ceci remet en cause le caractère markovien de la matrice de transition.

En outre, AMMER & PACKER [1] ont mené une analyse des fréquences de rating par secteurs économiques et par localisation géographique. Les conclusions plaident en faveur de matrices de transition par grands secteurs économiques et par grandes zones géographiques. En effet, la volatilité des transitions de ratings est plus forte pour la banque que pour l'industrie par exemple. Ces recherches ont invalidé le principe d'homogénéité sectorielle et géographique d'une matrice de transition.

Parallèlement au développement d'outils de mesures du risque de crédit, de nouveaux types d'instruments financiers permettant de transférer et de segmenter le risque de crédit ont été développés par les institutions financières. Il s'agit des dérivés de crédit qui sont expliqués à la section suivante.

## 1.3 Les dérivés de crédit

Les dérivés de crédits correspondent à une classe relativement récente d'instruments financiers. L'ISDA (*International Swaps and Derivatives Association*) en fait mention pour la première fois au cours d'une conférence en 1992.

Un dérivé de crédit est donc un produit dérivé dont le sous-jacent est un actif de type crédit, c'est-à-dire une créance ou un titre de dette. Le but du dérivé de crédit est de transférer les risques associés à la solvabilité du débiteur, sans transférer l'actif lui-même.

---

<sup>6</sup>Essentiellement des crédits nord-américains, mais aussi des crédits en Europe et au Japon.

Un dérivé de crédit est par conséquent un contrat financier bilatéral qui permet à l'acheteur de transférer le risque de crédit lié à un actif de type crédit (dont il est ou non le détenteur) à une ou plusieurs contreparties appelés «vendeurs de protection».

Les dérivés de crédit sont alors des instruments financiers dont le *payoff* dépend des événements de crédit, tel le défaut ou une dégradation de la qualité de crédit. Ces instruments ont été conçus pour isoler le risque de crédit du risque de marché encouru sur un crédit et permettre aux investisseurs de se couvrir ou de prendre des positions en risque de crédit uniquement. L'innovation majeure apportée par les dérivés de crédit réside dans la possibilité, pour un intervenant sur ce marché, de vendre le risque de crédit portant sur une créance tout en conservant la propriété juridique de cette dernière, c'est-à-dire tout en continuant à l'inscrire à son bilan. À l'inverse, un intervenant peut acheter ce même risque sans avoir à supporter systématiquement le coût de financement et le risque de taux liés à l'acquisition ou la détention de la créance. Cette capacité à transférer de manière «synthétique» une créance, fondée sur la dissociation du risque de crédit et de la créance elle-même procure, aux deux intervenants du contrat une plus grande souplesse dans la gestion du risque de crédit.

Les institutions financières et les investisseurs intègrent les dérivés de crédit dans leurs portefeuilles pour des raisons complémentaires. Pour les institutions financières comme les banques, les dérivés de crédit permettent essentiellement de transférer le risque de crédit alors que pour les investisseurs, ils sont une manière d'améliorer leurs rendements en augmentant leur exposition au risque. De plus, les dérivés de crédits, en tant qu'instruments de négociation, servent aux uns et aux autres à dégager à court terme une plus-value sur une évolution escomptée d'un risque de crédit.

L'atout principal des dérivés de crédit est, comme on l'a noté, d'isoler la composante crédit du risque des titres comportant un risque de crédit. En plus de cet atout non négligeable, les dérivés de crédit contribuent à la complétude des marchés, puisqu'ils permettent aux investisseurs d'avoir accès à des instruments de dette de plus en plus nombreux et de maturités diverses.

Le marché des dérivés de crédit connaît, depuis le début des années 1990, une croissance exponentielle. Selon les estimations de la British Banker Association (BBA), l'encours des dérivés de crédit, déjà proche des 2 000 milliards de dollars à la fin 2002, avoisinait les 5 000 milliards de dollars à la fin 2004 et devrait dépasser les 33 trillions de dollars à la fin 2008.

Plusieurs types de produits dérivés de crédit ont été développés :

- Le *Credit Default Swap* (CDS) est le plus simple et le plus dominant dans le marché des produits dérivés de crédit. C'est un produit très populaire car il est liquide et reflète de manière transparente la perception de la vraisemblance du défaut par le marché. Les CDS, contrats conçus pour protéger les détenteurs d'obligations, payent la valeur nominale de l'obligation en échange de l'obligation sous-jacente, en cas de défaut du débiteur. Le défaut est déclenché par un événement de crédit formel spécifié dans le contrat et la protection est



valable jusqu'à la maturité du swap. Dans le contrat standard, l'acheteur de la protection paie périodiquement une prime (en général tous les 3 mois, et ce jusqu'à la maturité du swap ou jusqu'au défaut) au vendeur contre la promesse du vendeur de verser un montant fixe en cas de défaut du débiteur. Les CDS font l'objet d'une documentation standardisée par la *International Swaps and Derivatives Association (ISDA)*, voir ISDA [94].

L'attractivité de ce produit par les gestionnaires de portefeuille de crédits est évidente : les CDS sont utilisés pour diminuer l'exposition au risque de crédit jugée trop élevée d'un débiteur déterminé, tout en gardant le crédit dans le portefeuille. Les CDS sur les plus grands emprunteurs sont cotés quotidiennement par les banques d'investissement et constituent un marché assez liquide.

- Les *Collateralized Debt Obligations* (CDO) sont des produits obligataires adossés à des dettes, résultant d'une titrisation. La titrisation est une technique de gestion de bilan consistant à créer des produits obligataires à partir d'un ensemble de créances. Le portefeuille de créances cédé à une entité juridique particulière appelée *Special Purpose Vehicle* (SPV). Ce dernier émet des obligations de séniorités différentes supportées par l'ensemble des créances. Le risque de crédit est donc transféré au SPV et l'acheteur du CDO peut retirer ces créances titrisées de son bilan.
- Enfin, les *Basket Default Swaps* (BDS) sont des produits qui intègrent la protection contre les effets de la corrélation entre différents crédits en plus de la protection contre le défaut individuel d'un crédit. L'idée est de marchéiser le risque de crédit contenu dans plusieurs crédits dans un instrument unique. Les corrélation des défauts sont, dans ce cas, indispensables pour l'évaluation de ces produits. Un type populaire de BDS est le *n-to-default option* qui paie à l'acheteur un montant déterminé par le contrat si au moins  $n$  crédits sont en défaut avant la maturité de l'option.

L'importance grandissante du risque de crédit et la vulnérabilité des institutions financières face au risque de crédit, la croissance du marché des dérivés de crédit ont conduit à deux développements importants au cours des dernières décennies :

- La mise en place des règles prudentielles par les gouvernements pour éviter un effondrement du système financier dû à des pertes de crédit ;
- Le développement des modèles pour évaluer et estimer le risque de crédit.

Le chapitre suivant traite des règles prudentielles et de leur évolution au cours des dernières années.



# Chapitre 2

## La réglementation prudentielle

La réglementation bancaire a pour mission de promouvoir la stabilité et la sécurité du système financier en édictant des normes prudentielles s'appliquant aux banques et par des actions de supervision préventives destinées à éviter les crises. On parle aussi de réglementation prudentielle. Celle-ci comprend des exigences relatives à une dotation minimale en capital pour couvrir les risques encourus par une institution financière. La réglementation affecte de manière importante l'attitude des institutions financières face à la prise de risque.

La naissance de la réglementation prudentielle des banques remonte aux années 1930, après le crash de 1929 et la crise financière qui s'ensuivit. La réglementation s'organisait alors à un niveau national, à travers un certain nombre de lois qui régissaient le secteur bancaire. Les réglementations nationales poursuivent traditionnellement trois types d'objectifs : la protection des épargnants contre le risque de faillite ; la sécurité des systèmes de paiement et la prévention du risque systémique qui est le risque qu'une défaillance bancaire se propage aux autres institutions financières. Les crises financières et l'intégration croissante des économies nationales ont plaidé pour la mise en place d'une réglementation au niveau international.

### 2.1 Le Comité de Bâle

La nécessité pour les législateurs des différents États de dépasser le cadre d'une vision purement nationale résulte, depuis une trentaine d'années, d'une évolution du secteur financier caractérisé par une forte intégration. Par exemple, le chapitre 2 de JORION [101] présente un historique assez complet des catastrophes financières récentes qui ont eu un impact important sur les marchés financiers globaux. RONCALLI [128] p. 16 répertorie les principaux désastres financiers des années quatre-vingt-dix qui, avec la crise russe de 1998, ont marqué les marchés financiers. Il faut aussi mentionner la faillite d'Enron en 2001, plus grande faillite de l'histoire américaine, et la crise récente des prêts hypothécaires à risque aux États unis, dont il est encore difficile de déterminer les pertes au niveau global.

Année	Institution financière	Perte (en Milliards de USD)
1994	<b>Orange County</b>	1.81
1994	<b>Metallgesellschaft</b>	1.34
1994	<b>Procter &amp; Gamble</b>	0.16
1995	<b>Barings</b>	1.33
1997	<b>Natwest</b>	0.13
1998	<b>LTCM</b>	2

TAB. 2.1 – Les catastrophes financières récentes

Les faillites des institutions financières qui ont marqué les années quatre-vingt dix (Metallgesellschaft, Orange County, Barings, ou encore LTCM) sont ainsi liées, pour la plupart d'entres-elles, à des prises de risque excessives sur les marchés dérivés. Il est encore à ce jour difficile de tirer des enseignements de la dernière crise des crédits hypothécaires américains à risque ou subprime. Ce terme désigne des prêts immobiliers consentis à des ménages à la solvabilité fragile et à des taux d'intérêt très élevés. Quoiqu'il en soit, on peut aujourd'hui que cette crise est le résultat de la dispersion du risque de crédit, qui a affaibli le monitoring ou contrôle des risques. En effet, les établissements qui ont consenti des prêts «subprime» ont en effet transformé les crédits en divers sortes de titres financiers par titrisation, de façon à pouvoir les vendre sur les marchés.

Pour prévenir les crises financières et leur impact sur la solvabilité des établissements financiers, il s'est avéré indispensable de mettre en place des mécanismes de surveillance internationaux par des autorités de tutelle.

La mise en place d'une réglementation internationale en matière des risques vise à répondre à un besoin de coordination au niveau international pour éviter les défaillances individuelles des établissements financiers dans un premier temps, et, dans un deuxième temps, de limiter le risque systémique d'un système financier international de plus en plus globalisé. Elle permet en outre une harmonisation des conditions de la concurrence entre les différents établissements financiers.

Suite à de graves turbulences sur les marchés des changes et les secteurs bancaires, le **Comité de Bâle sur la supervision bancaire** a été institué en 1974 par les gouverneurs des banques centrales du G-10<sup>1</sup>. Le Comité de Bâle qui se réunit dans les locaux de la Banque des règlements internationaux (BIS) à Bâle énonce des recommandations s'appliquant aux banques du G-10 qui sont actives au plan international sans aucune autorité supranationale. La supervision des institutions financières est essentielle à la solidité des l'environnement économique car les institutions financières jouent un rôle central dans la réalisation des paiements et dans la mobilisation et la distribution de l'épargne. La principale tâche du superviseur est de s'assurer que les institutions financières possèdent un niveau de capital et de réserves suffisants pour supporter les risques pris dans le cadre de leurs activités.

<sup>1</sup>Belgique, Canada, France, Allemagne, Italie, Japon, Luxembourg, Hollande, Suède, Suisse, Royaume Uni et Etats Unis

Les principes de base pour une supervision effective des institutions bancaires sont énoncées dans un document du Comité de Bâle *BASLE COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION* [7]. Les préceptes suivants sont fondamentaux :

- L'objectif principal de la supervision est la réduction du risque de perte des épargnants et autres créiteurs et le maintien de la confiance dans la système financier.
- La supervision doit promouvoir la discipline de marché en encourageant une bonne gouvernance d'entreprise et la promotion de la transparence des marchés et des mécanismes de surveillance.
- La supervision doit s'assurer que les institutions financières ont les ressources appropriées pour soutenir les risques pris à savoir le capital adéquat, une gestion saine et des systèmes d'évaluation internes effectifs.
- Afin d'effectuer ses taches efficacement, le superviseur doit avoir l'indépendance opérationnelle, les moyens et le pouvoir de recueillir l'information interne et externe, et l'autorité pour imposer ses décisions.
- La supervision doit comprendre la nature des activités des institutions financières et s'assurer que les risques pris sont gérés de manière adéquate.
- Enfin, une collaboration étroite avec les autorités de supervision nationales est nécessaire, en particulier pour les institutions financières opérant sur les marchés internationaux.

La réglementation prudentielle a considérablement évolué ces vingt dernières années, sous l'impulsion des travaux du Comité de Bâle. Même si celui-ci n'a aucun pouvoir décisionnel, ses recommandations sont reprises par les autorités de tutelle des différents pays.

## 2.2 L'évolution de la réglementation prudentielle

La réglementation prudentielle est contrainte d'évoluer pour relever le défi de la stabilisation du système financier mondial. Pratiquement, deux périodes peuvent être distinguées : l'une jusqu'en 1993 caractérisée par une approche plutôt rigide et standardisée, et l'autre à partir de 1993 où la part laissée à l'autodiscipline du marché aux modèles internes ne cesse de progresser.

### 2.2.1 L'Accord de Bâle de 1988

Le premier accord de Bâle de juillet 1988 ou Bâle I est arrivé en réaction à la montée des risques et à la dégradation des fonds propres des principales banques internationales. Reposant sur une approche simple et normative, l'accord de 1988 était conçu comme un cadre destiné à évoluer avec le temps. L'accord de 1988 encadrait le risque de crédit par le respect d'un ratio international unique de solvabilité. Ce ratio, le

**ratio Cooke** est un ratio simple permettant une approche quantitative directe et rapide avec pour objectifs :

- une meilleure adéquation des fonds propres par rapport aux risques ;
- le renforcement de la solidité et la stabilité du système bancaire ;
- et l'atténuation des inégalités concurrentielles entre les banques.

Le ratio Cooke correspond au rapport entre le montant des fonds propres et celui des actifs pondérés du risque que l'on notera par la suite *APR*. Ces *APR* qui constituent la base de calcul du ratio Cooke sont en fait la valeur des actifs risqués affectés d'un coefficient de pondération qui dépend de la nature de l'actif. Les *APR* comprennent aussi bien des actifs du bilan et des actifs hors-bilan. Les actifs hors bilan sont l'ensemble des lignes de crédit, lettres de crédit, dérivés et garanties consenties par l'institution financière. Ces actifs hors bilan doivent être convertis en équivalent crédit, selon des facteurs de conversion fixés par le comité de Bâle et dépendant de la nature de l'instrument.

Pour le calcul des *APR*, l'accord de Bâle fixe des pondérations pour les différentes catégories d'actifs du bilan (voir BASLE COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION [6]). L'accord de Bâle catégorise les actifs sujets au risque de crédit par la nature du débiteur. Plus celui-ci est «solvable », plus la pondération est élevée. Le tableau 2.2 donne les pondérations par catégorie d'actif.

Pondérations (%)	Catégories d'actifs
0	Liquides et créances sur les États de l'OCDE
20	Créances sur les banques et les collectivités locales des États de l'OCDE
50	Créances garanties par une hypothèque
100	Autres éléments d'actif du bilan

TAB. 2.2 – Pondérations pour les actifs du bilan

Le **ratio Cooke** *RC* s'écrit :

$$RC := \frac{FP}{APR}; \quad (2.1)$$

où *FP* représente le montant des fonds propres et *APR* le montant des actifs pondérés du risque avec les pondérations du tableau 2.2.

L'accord de Bâle de 1988 stipule en substance que, pour garantir la solvabilité des institutions financières, le ratio Cooke doit être supérieur ou égal à 8%. En d'autres termes, cet accord prévoit que les institutions financières doivent détenir un niveau des fonds propres supérieur ou égal à 8% des actifs pondérés du risque, c'est-à-dire :

$$FP \geq 8\% \cdot APR. \quad (2.2)$$

L'Accord de 1988 a porté ses fruits dans la mesure où il a permis d'améliorer la stabilité du système financier dans son ensemble grâce à deux effets :

1. le niveau des fonds propres des banques a nettement augmenté au cours des années 1990,
2. Cet accord a été largement appliqué de sorte que les distorsions de concurrence entre banques ont été réduites.

Cette condition de base énoncée dans l'équation 2.2 qui caractérisait l'accord de 1988 était que l'on pouvait garantir la solvabilité d'une institution financière sans différencier ses débiteurs selon leur solidité financière et leur position dans l'économie, et sans considérer la diversification des portefeuilles de crédits. Cette condition est à l'origine de nombreuses critiques qui ont été émises sur cet accord :

- Un manque de fondement économique au choix du niveau 8% et des coefficients de pondération appliqués aux actifs ;
- Une définition des catégories de risque jugées arbitraires et sans rapport avec le niveau de risque réel ;
- Une absence de prise en compte de l'effet positif lié à la prise de garanties et de l'effet lié à la diversification des portefeuilles ;
- des mesures trop statiques qui ne sont pas directement reliées à la mesure d'insolvabilité de la banque.

Cependant, la perception grandissante des faiblesses associées à cet accord et l'effort de développement des techniques de gestion des risques du portefeuille de crédits par les institutions financières rendaient nécessaires la révision de l'accord de 1988.

L'accord de 1988 a été amendé pour s'adapter à l'innovation financière et aux risques qui n'étaient pas couverts dans la configuration initiale. L'amendement de 1996 définit le principe d'une immobilisation de capital pour faire face aux risques de pertes liés aux opérations sur les marchés financiers. La grande nouveauté de cet amendement réside dans la faculté accordée aux banques de recourir à leurs propres modèles internes, comme alternative à l'utilisation de l'approche standard pour calculer le niveau de capital nécessaire.

## 2.2.2 Un nouvel accord : BÂLE II

Les motivations pour un nouvel accord sont multiples. La première est la modification de l'assiette des risques pour intégrer désormais le risque opérationnel et le risque de marché. En effet, l'accord de 1988 visait à protéger les institutions financières du risque de crédit uniquement.

La seconde motivation est de faire en sorte que l'exigence en fonds propres soit plus sensible au risque réel de l'institution financière. L'idée est d'autoriser les banques à utiliser, sous certaines conditions, des modèles internes pour mesurer le risque de crédit et le risque opérationnel, comme cela se fait déjà pour le risque de marché. Un nouveau projet d'accord du Comité de Bâle (BASLE COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION[9]) est donc conçu pour permettre de sortir du schéma : «un ratio unique pour tous».

Le Comité de Bâle choisit de se limiter au suivi d'une approche simplifiée, dans la continuité de l'accord de 1988. Deux grandes options sont proposées :

- le choix d'une approche standard, dérivée de Bâle I, mais dont les principaux points faibles sont corrigés ;
- la sélection d'une approche permettant aux institutions financières de déterminer, par des modèles internes, leur propres mesures de risque. Cette approche est appelée l'approche IRBA pour *Internal Ratings Based Approach*.

Le nouveau dispositif de Bâle II se décompose en trois piliers :

1. **Premier pilier** : Comme pour l'accord de 1988, un niveau minimal de capital requis.
2. **Deuxième pilier** : Un processus de supervision mis en place par les instances nationales de réglementation dont l'objectif est de s'assurer que chaque banque mette en oeuvre un niveau de contrôle interne suffisant pour permettre de maintenir un capital réglementaire à un niveau acceptable, quelle que soit l'évolution de la qualité des engagements.
3. Un **troisième pilier** qui vise à promouvoir la discipline de marché c'est-à-dire une communication publique sur la structure du capital, l'allocation des fonds propres, l'exposition aux risques.

### Premier pilier : La définition d'un capital minimum

Le capital minimum requis est toujours de 8%, mais ce pourcentage est déterminé en incluant risques de crédit, de marché et opérationnel. On obtient par analogie au ratio Cooke de l'équation (2.1) un nouveau ratio, appelé le **ratio Mc Donough** ( $RMc$ ) :

$$RMc = \frac{FP}{\text{Mesure Risque Crédit} + \text{Mesure Risque marché} + \text{Mesure Risque Op.}} . \quad (2.3)$$

Le nouvel accord exige que les institutions financières aient un  $RMc \geq 8\%$ , ce qui implique que le niveau des fonds propres doit être supérieur ou égal à 8% des mesures de risque totales. Même si la charge minimale en capital reste égale à 8%, le nouvel accord introduit des changements significatifs dans la manière de calculer les mesures de risque.

En effet les mesures de risque se déterminaient auparavant par le calcul actifs pondérés du risque selon les pondérations de la table 2.2. Bâle II propose de déterminer les mesures de risque à l'aide de modèles internes, qui tiennent compte des risques réels supportés. L'idée fondamentale est que les mesures de risque soient liées aux pertes potentielles sur les actifs de l'institution financière. On verra au chapitre suivant que les mesures de risque sont des statistiques de la distribution des pertes qui est en fait l'output principal des modèles internes de risque.

Dans la version de janvier 2001, le Comité de Bâle proposait la répartition de la charge en fonds propres selon le tableau 2.3.



Mesure de risque	Exigence minimale en $FP$	Répartition
Mesure Risque Crédit	6%	75%
Mesure Risque Marché	0.4%	5%
Mesure Risque Opérationnel	1.6%	20%
Total	8%	100%

TAB. 2.3 – Répartition de la charge en fonds propres

On observe que le risque de crédit garde une grande importance puisqu'il est le plus «gourmand» en fonds propres.

### Le processus de supervision

La fonction de supervision remplie par les instances nationales de réglementation est appelée à jouer un rôle accru. Le Comité de Bâle cherche à établir un ensemble minimum de règles destinées à favoriser un dialogue actif entre les superviseurs locaux et les banques. Le rôle des superviseurs locaux sera de s'assurer de l'adéquation entre le capital des banques et l'étendue de leurs risques. Le Comité de Bâle suggère que les superviseurs portent une attention particulière aux banques où l'expérience passée a démontré des faiblesses dans la gestion des risques. Plus précisément, le processus de supervision repose sur quatre principes :

- Le premier principe prévoit que les banques devront disposer des moyens d'évaluer leur niveau de capital comparé au montant de leurs risques et mettre en place une stratégie pour maintenir ce niveau de capital.
- Le deuxième principe stipule en substance que les superviseurs devront contrôler les modèles utilisés par les banques et s'assurer de leur validité au vu des analyses de sensibilité et de scénarios catastrophes que celles-ci auront menées. De plus, les superviseurs auront en charge l'évaluation de la qualité du contrôle des risques effectué par la direction des banques.
- Le troisième principe laisse l'appréciation du niveau de capital optimal aux superviseurs locaux, le capital réglementaire proposé par le Comité de Bâle n'étant qu'un minimum, un niveau plus élevé pourra être fixé pour des cas isolés ou pour la place financière dans son ensemble.
- Le quatrième principe encourage les superviseurs à prendre des mesures préventives pour éviter qu'une banque voie son capital aller en dessous du minimum requis. Les superviseurs pourront par exemple mettre fin au paiement des dividendes, demander la mise en place immédiate d'un plan de reconstitution du capital réglementaire ou une augmentation de capital.

### La discipline de marché

Plus l'approche utilisée est liée à des modèles internes, plus l'exigence de transparence pour les banques sera forte. Les banques doivent alors disposer d'une politique

de communication à disposition des marchés en termes de structure et de performances. En particulier, elles devront publier certaines informations concernant les fonds propres, les expositions au risque, les procédures d'évaluation des risques etc. Ainsi, plutôt que d'agir par la contrainte, la réglementation bancaire veut désormais être davantage incitatrice en encourageant les meilleures pratiques en matière de mesure et contrôle de risque de crédit. Bâle II permettra à terme de faire passer la réglementation bancaire de la contrainte standardisée à l'autodiscipline compétitive, rendue obligatoire par les marchés financiers.

Même si la publication du nouvel accord date de juin 2004 (BASLE COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION [8]), l'implémentation de l'accord prévu initialement pour 2004 a été retardée. Ce retard est lié à plusieurs raisons, notamment à certains désaccords entre le Comité de Bâle et les associations des banques et le manque de consensus sur des questions méthodologiques. Le 4 juillet 2006, le Comité de Bâle a publié version définitive du nouvel accord dont l'entrée en vigueur était fixée pour début 2007.

Un acquis incontestable de Bâle II aura été l'accélération considérable de la recherche théorique et appliquée, dans le domaine du risque de crédit par les institutions financières. Celles-ci doivent élaborer des modèles pour évaluer au mieux le risque de crédit de leurs portefeuilles. Le chapitre suivant dressera l'architecture des modèles de risque de crédit, tandis que les parties 2 et 3 étudieront respectivement les approches quantitatives du risque de défaut, et les modèles de dépendance des défauts des crédits d'un portefeuille.

# Chapitre 3

## L'architecture d'un modèle de risque de crédit

La modélisation du risque de crédit fait l'objet, depuis la fin de années 1990, d'avancées importantes au sein des établissements bancaires. La principale raison est d'ordre réglementaire et tient au rôle décisif du Comité de Bâle qui autorise les banques (sous réserve d'une validation par les autorités réglementaires nationales) à substituer au calcul des fonds propres réglementaires une mesure issue d'un modèle interne de risque de crédit.

De la même manière que le risque de marché est lié à l'incertitude des pertes sur les actifs de marché, le risque de crédit est associé à l'incertitude des pertes sur les crédits à un horizon choisi. L'objet final des modèles de risque de crédit est par conséquent la modélisation de la distribution des pertes à un horizon donné. Les pertes sur les crédits peuvent provenir de deux causes distinctes : le défaut des crédits ou la dégradation de la qualité des crédits. C'est pour cette raison que l'on distingue les **modèles de défaut** des **modèles *marked-to-market***. Les modèles de défaut considèrent uniquement les pertes dues aux défauts des crédits du portefeuille. Deux états sont jugés pertinents : le défaut et l'absence de défaut. Par contre, les modèles *marked-to-market* ou multi-états prennent en compte les pertes induites par les changements de qualité des crédits.

Pour des raisons de simplicité, l'accent sera mis uniquement sur les modèles de défaut dans ce chapitre et dans la suite de ce travail. La construction d'un modèle de défaut s'opère en deux étapes. La première étape est consacrée à la collecte de l'information sur les éléments constitutifs du risque de crédit au niveau individuel de chaque crédit. Elle consiste à ranger les crédits par classes de risque, en utilisant à cette fin des systèmes internes ou externes de notation ou des approches quantitatives, servant à calculer la probabilités que les emprunteurs migrent vers la classe de défaut. A cette étape, sont donc déterminés au niveau individuel de chaque crédit la probabilité de défaut mais aussi les montants des expositions en cas de défaut et les pertes en cas de défaut. L'objectif de cette première étape est l'élaboration des distributions des pertes pour chaque crédit du portefeuille.

La seconde étape est consacrée à l'assemblage des éléments constitutifs du risque pour tous les crédits, en vue d'obtenir une mesure du risque de crédit du portefeuille dans son ensemble. Cette étape consiste en la modélisation d'une distribution des pertes du portefeuille à un horizon donné. On introduira en fin de chapitre la notion du capital économique.

## 3.1 Risque de crédit au niveau individuel

### 3.1.1 La probabilité de défaut

Il s'agit à cette étape d'estimer la probabilité qu'un crédit migre vers la classe de défaut. Soit un portefeuille composé de  $m$  crédits. Pour chaque crédit  $i = 1, \dots, m$  du portefeuille, la probabilité de défaut est notée  $DP_i$  pour *default probability*.

La probabilité de défaut est sans doute l'un des déterminants du risque de crédit les plus importants. Plusieurs approches sont utilisées pour calibrer les probabilités de défaut :

- Une approche par les **ratings** (voir section 1.2) dans laquelle les probabilités de défaut sont associées au rating attribué au crédit par les agences externes de notation ou par les services internes de la banque.
- Des approches utilisant à la fois les données disponibles sur le marché et la théorie financière. L'étude des principales approches est l'objet des chapitres 4 et 5.

### 3.1.2 L'exposition en cas de défaut

Un autre déterminant du risque de crédit est le montant dû par le débiteur. Le Comité de Bâle dans ses documents consultatifs récents (BASLE COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION[5]) définit l'exposition en cas de défaut pour les prêts en cours comme étant la valeur nominative des montants de ces prêts. Il convient alors de réajuster l'exposition au cours du temps selon le mode de remboursement et d'amortissement.

Dans le cas des instruments qui comportent une option, comme les lignes de crédit, il faut calculer un équivalent crédit. En général, les lignes de crédits consenties par une institution financière à une entreprise ont tendance à être rapidement consommées lorsque l'entreprise connaît des difficultés financières. L'institution financière doit donc être en mesure de déterminer quel serait son niveau de perte dans le cas où les lignes de crédit consenties seraient utilisées par les emprunteurs. Pour les lignes de crédits consenties, le comité de Bâle propose une approche de base qui définit l'exposition en cas de défaut à 75% du montant des engagements et crédits résiduels de la ligne de crédit.

Pour chaque crédit  $i$ , l'exposition en cas de défaut sera notée  $EAD_i$  (*exposure at default*) et pour des raisons de simplicité, les modèles de risque de crédit font l'hypothèse que ces expositions sont déterministes, donc non aléatoires.

### 3.1.3 Les pertes en cas de défaut

La perte en cas de défaut correspond à la fraction de l'exposition qui sera perdue en cas de défaut, voir BLUHM & AL[15] p. 27. La perte en cas de défaut est donc tout simplement le complément du taux de recouvrement. Ce dernier est spécifique à chaque institution financière dans la mesure où il dépend de la capacité de l'institution financière à prendre des sûretés et garanties ainsi que de l'efficacité de son service de recouvrement. L'estimation de ces pertes n'est pas aisée, puisque les taux de recouvrement dépendent de plusieurs facteurs : la qualité du crédit, de la seniorité de l'institution financière pour le crédit en cause. Ces facteurs sous-jacents déterminent le taux de recouvrement d'une perte qui est modélisé par la variable aléatoire  $\tilde{\tau}$ . Pour chaque crédit  $i$ , on va considérer la perte en cas de défaut, notée  $LGD_i$  pour *loss given default* comme déterministe en se référant à l'espérance mathématique du taux de recouvrement. Pour chaque unité investie dans le crédit  $i$ , la perte en cas de défaut est donnée par :

$$LGD_i = 1 - E(\tilde{\tau}_i), \quad \tilde{\tau}_i \in [0, 1] . \quad (3.1)$$

### 3.1.4 Pertes anticipées

La perte anticipée est le coût moyen qui découlerait du défaut d'un crédit. Pour chaque crédit  $i$ , le niveau de la pertes anticipée est défini comme étant l'espérance mathématique de la perte que l'on modélise par la variable  $\tilde{L}_i$  :

$$\tilde{L}_i = EAD_i \cdot LGD_i \cdot L_i ; \quad (3.2)$$

où  $L_i$  est une variable aléatoire de Bernoulli qui modélise le défaut d'un crédit  $i$  :

$$L_i = \begin{cases} 1 & \text{si défaut} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \begin{aligned} P(L_i = 1) &= DP_i \\ P(L_i = 0) &= 1 - DP_i \end{aligned}$$

La perte anticipée au niveau individuel d'un crédit  $i$  notée  $EL_i$  pour *expected loss* est alors :

$$\begin{aligned} EL_i &= E(\tilde{L}_i) = EAD_i \cdot LGD_i \cdot E(L_i) \\ &= EAD_i \cdot LGD_i \cdot DP_i . \end{aligned} \quad (3.3)$$

### 3.1.5 Les pertes non-anticipées

En plus de la perte anticipée, les institutions financières doivent avoir une mesure de la variabilité de la perte autour du niveau moyen. Une mesure naturelle de la variabilité de la perte est l'écart-type des pertes. Pour chaque crédit  $i$ , on définit le niveau des pertes non-anticipées par  $UL_i$  (*unexpected loss*) par :

$$UL_i = \sqrt{\text{Var}(\tilde{L}_i)} = \sqrt{\text{Var}(EAD_i \cdot LGD_i \cdot L_i)} . \quad (3.4)$$

Sous l'hypothèse que les expositions et pertes en cas de défaut sont déterministes, on obtient l'expression suivante pour les pertes non-anticipées :

$$UL_i = EAD_i \cdot LGD_i \cdot \sqrt{\text{Var}(L_i)} . \quad (3.5)$$

$L_i$  est une variable de bernoulli est sa variance s'écrit :

$$\text{Var}(L_i) = E(L_i^2) - (E(L_i))^2 = DP_i(1 - DP_i)$$

La perte non anticipée pour chaque crédit  $i$  est alors :

$$UL_i = EAD_i \cdot LGD_i \cdot \sqrt{DP_i(1 - DP_i)} . \quad (3.6)$$

## 3.2 Risque de crédit au niveau du portefeuille

La deuxième étape de la construction d'un modèle de risque de crédit est l'agrégation des pertes individuelles en vue d'obtenir une mesure de risque unique du portefeuille dans son ensemble. Lorsqu'on considère un portefeuille de  $m$  crédits, les pertes du portefeuilles sont égales à la somme des pertes sur les crédits individuels :

$$\tilde{L} = \sum_{i=1}^m \tilde{L}_i = \sum_{i=1}^m EAD_i \cdot LGD_i \cdot L_i . \quad (3.7)$$

Les pertes globales anticipées sont simplement l'espérance mathématique de la variable  $\tilde{L}$  , soit :

$$EL = E(\tilde{L}) = \sum_{i=1}^m EAD_i \cdot LGD_i \cdot DP_i \quad (3.8)$$

Pour les pertes non-anticipées, l'additivité est valable uniquement lorsque les pertes individuelles sont indépendantes les unes des autres. Lorsque les pertes ne le sont pas, ce qui est le cas en réalité, les corrélations entre les différentes pertes jouent un

rôle fondamental dans le calcul du montant des pertes non-anticipées. En effet, les pertes anticipées du portefeuille s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 UL &= \sqrt{\text{Var}(\tilde{L})} \\
 &= \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \text{Cov}(\tilde{L}_i, \tilde{L}_j)} \\
 &= \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m EAD_i \cdot EAD_j \cdot LGD_i \cdot LGD_j \cdot \text{Cov}(L_i, L_j)} . \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

A titre d'exemple on considère un portefeuille de  $m = 2$  crédits, avec  $LGD_i = 100\%$  et  $EAD_i = 1$  pour tout  $i = 1, 2$ . Soit  $\rho = \text{Corr}(L_1, L_2)$  la corrélation des défauts et  $DP_i = p_i$ . On a alors  $E(\tilde{L}_i) = p_i$  et  $\text{Var}(\tilde{L}_i) = p_i(1 - p_i)$ . Pour ce portefeuille on obtient les pertes anticipées

$$EL = E(\tilde{L}) = p_1 + p_2 \quad (3.10)$$

et un montant des pertes non anticipées égal à :

$$UL = \sqrt{\text{Var}(\tilde{L})} = \sqrt{p_1(1 - p_1) + p_2(1 - p_2) + 2\rho\sqrt{p_1(1 - p_1)}\sqrt{p_2(1 - p_2)}} . \quad (3.11)$$

Au niveau de la corrélation des défauts, on distingue trois cas possibles en termes de diversification du portefeuille :

- $\rho = 0$  : Dans ce cas, le troisième terme de l'équation (3.11) disparaît. C'est le cas de diversification parfaite où les deux crédits du portefeuille sont indépendants. Les pertes non anticipées du portefeuille sont égales à la somme des pertes non anticipées des crédits individuels :

$$UL_{\rho=0} = \sqrt{p_1(1 - p_1) + p_2(1 - p_2)} . \quad (3.12)$$

- $\rho > 0$  : Dans ce cas, les deux crédits sont reliés dans le sens où le défaut d'un crédit augmente les chances de défaut du deuxième crédit. En effet, on peut montrer que la probabilité que le premier crédit fasse défaut étant donné que le deuxième a fait défaut est supérieure à la probabilité à priori que le premier crédit fasse défaut. En effet, puisque  $L_1$  et  $L_2$  sont des variables de Bernoulli on peut écrire :

$$P(L_1 = 1|L_2 = 1) = \frac{P(L_1 = 1, L_2 = 1)}{P(L_2 = 1)} = \frac{E(L_1 L_2)}{p_2}$$

Sachant que la covariance entre deux variables aléatoires s'écrit  $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$  on déduit :

$$P(L_1 = 1|L_2 = 1) = \frac{p_1 p_2 + \text{Cov}(L_1, L_2)}{p_2} = p_1 + \frac{\text{Cov}(L_1, L_2)}{p_2} .$$

On peut alors conclure qu'en cas de corrélation positive entre les crédits d'un portefeuille, le défaut d'un crédit a une influence importante sur les autres crédits du portefeuille, en ce sens qu'il implique une augmentation de la probabilité de défaut des autres crédits. Le cas extrême de la corrélation parfaite ( $\rho = 1$ ), signifie que le portefeuille comporte le risque que seulement un crédit fasse défaut avec comme résultat le défaut de tous les crédits du portefeuille (risque de concentration).

Lorsque  $\rho > 0$ , les pertes non anticipées du portefeuilles sont supérieures à la somme des pertes non anticipées des crédits individuels :

$$UL_{\rho>0} > \sum_i UL_i . \quad (3.13)$$

- $\rho < 0$  : Ce cas est le cas opposé du cas  $\rho > 0$ . Le défaut d'un crédit diminue la probabilité de défaut de l'autre crédit. Ces deux crédits sont compensatoires surtout dans un contexte *marked-to-market* où la baisse de la valeur d'un crédit due à une dégradation du rating est compensée par la hausse de la valeur de l'autre crédit. Lorsque  $\rho < 0$ , les pertes non anticipées du portefeuilles sont inférieures à la somme des pertes non anticipées des crédits individuels :

$$UL_{\rho<0} < \sum_i UL_i . \quad (3.14)$$

On voit que la corrélation entre les défauts est d'une importance primordiale. La discussion sur les corrélations des défauts sera l'objet du chapitre 7.

### 3.3 La distribution des pertes futures

En plus du montant des pertes anticipées et non anticipées d'un portefeuille de crédit, un modèle de risque de crédit ambitionne de modéliser la distribution des pertes du portefeuille à un horizon défini. L'objectif est de recourir aux mêmes outils de mesure du risque de marché pour le risque de crédit à savoir la value at risk. En effet, l'outil standard de mesure du risque de marché d'un portefeuille d'actifs est la *Value-at-Risk* (voir JORION [101] et CROUHY & AL. [38] p. 177 et ss.). Pour un portefeuille dont les pertes à un horizon défini sont modélisées par une variable aléatoire  $\tilde{L}$ , la Value-at-Risk  $\text{VaR}_{1-\alpha}$  pour un niveau de confiance  $1 - \alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$  se définit à l'aide de l'équation :

$$P(\tilde{L} > \text{VaR}_{1-\alpha}) = \alpha . \quad (3.15)$$

La  $\text{VaR}_{1-\alpha}$  correspond au  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ -quantile de la distribution des pertes et s'interprète comme étant la perte subie par le portefeuille à l'horizon choisi qui est dépassée avec une probabilité  $\alpha$ .

Le calcul des VaR implique que l'on s'intéresse plus à la queue de la distribution des pertes, c'est-à-dire aux événements à la fois les plus défavorables mais aussi



les plus improbables. Deux méthodologies sont employées pour la modélisation de la distribution des pertes : une méthode de type analytique et une méthode calculatoire fondée sur des simulations de type Monte-Carlo. Ces choix méthodologiques décrits ci-après conditionnent fortement la forme de la queue de la distribution des pertes.

### 3.3.1 La méthodologie analytique

Ce type de méthode, de nature analytique, correspond à la recherche d'une famille de distribution de probabilité, susceptible d'approximer la «vraie» distribution des pertes. On choisit donc une famille de distributions dont les premier et second moments et la queue de la distribution en particulier avoisinent ceux de la «vraie» distribution des pertes.

Une première approche *top-down* consiste à retenir à priori une loi susceptible de rendre compte à la fois de l'asymétrie et de la queue épaisse de la distribution des pertes d'un portefeuille de crédits. Parmi les lois de probabilité offrant ces propriétés, on peut citer la loi bêta.

L'obtention de la distribution des pertes du portefeuille peut résulter d'un second type d'approche, l'approche *bottom-up*, dans laquelle la perte globale du portefeuille est étudiée comme étant la résultante des pertes potentielles individuelles. A partir des mesures de risque individuelles des crédits du portefeuille, l'équation 3.8 donne le premier moment ( $EL$ ) de la distribution des pertes du portefeuille. Pour le deuxième moment ( $UL$ ), il faut faire des hypothèses sur la structure de dépendance des pertes individuelles. La difficulté de cette méthodologie analytique réside dans la détermination de la structure de dépendance entre les pertes individuelles.

### 3.3.2 La méthodologie de Monte-Carlo

Ce type de méthode consiste à construire une distribution empirique des pertes sur la base d'une simulation de type Monte-Carlo (voir BLUHM & AL [15] p. 34). Cette technique suppose qu'on considère un modèle stochastique pour le vecteur aléatoire  $Z = (EAD_1, \dots, EAD_m, LGD_1, \dots, LGD_m, L_1, \dots, L_m)$  et une fonction  $g : \mathbb{R}^{3m} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\tilde{L} = g(Z)$ .

On procède alors à une simulation de  $n$  réalisations  $z_1, \dots, z_n$  du vecteur aléatoire  $Z$  desquels on déduit  $n$  réalisations de la perte du portefeuille  $\tilde{L}$  :

$$L^{(1)} = g(z_1), \dots, L^{(n)} = g(z_n) .$$

La distribution empirique de la perte du portefeuille  $\hat{F}(L)$  résultant de cette simulation de Monte Carlo est l'approximation de Monte Carlo de la «vraie» distribution de  $\tilde{L}$  :

$$\hat{F}(L) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{[0, L]}(L^{(j)}) . \quad (3.16)$$

où

$$\mathbf{1}_{[0,L]}(L^{(j)}) = \begin{cases} 1 & \text{si } L^{(j)} \leq L \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette distribution empirique approximative des pertes du portefeuille va permettre de calculer une estimation  $\widehat{E}(\tilde{L})$  de la perte anticipée du portefeuille ainsi que des estimations des différents quantiles  $\hat{q}_{1-\alpha}$  tels que :

$$\widehat{E}(\tilde{L}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n L^{(j)} \quad \text{et} \quad P(\tilde{L} \leq \hat{q}_{1-\alpha}) = 1 - \alpha. \quad (3.17)$$

### 3.3.3 Back-Testing et Stress-Testing des modèles de risque de crédit

Les modèles de risque de crédit ont pour objectif ultime l'estimation de la distribution des pertes d'un portefeuille de crédits. Ces modèles, construits sur la base d'hypothèses et sur la base de données historiques, fournissent des mesures de risques du portefeuille. Étant donné le caractère stratégique de ces mesures de risque, il est nécessaire de s'assurer de leur qualité et de leur relative stabilité. En effet, la performance des modèles est susceptible d'évoluer fortement, en raison soit de l'évolution des comportements par rapport à l'historique, soit à l'apparition des situations de crise. La première raison rend nécessaire de procéder à des opérations de back-testing et la seconde à des opérations de stress-testing.

#### Le back-testing

Le principe du back-testing est que, de façon continue, le comportement réel des pertes sur les crédits est comparé au comportement prévu par le modèle. En matière de risque de crédit, le back-testing est délicat du fait de l'horizon temporel des modèles, qui est d'un an en général. Les institutions financières peuvent difficilement procéder à des vérifications sur des données couvrant plusieurs cycles économiques, ce qui réduit le nombre d'observations annuelles à comparer avec les résultats du modèle.

#### Le stress-testing

Parallèlement au back-testing reposant sur des observations provenant des situations «normales», il est nécessaire de tester le comportement du modèle sur des situations extrêmes. Le stress-testing permet de vérifier la robustesse des mesures de risques résultant du modèle dans les situations de risque extrême, comme par exemple une crise financière induisant une forte augmentation des probabilités de défaut et des effets de contagion. Les mêmes difficultés liées à la difficulté de réunir des séries temporelles longues en matière de crédit se posent pour les stress-tests.

### 3.3.4 La théorie des valeurs extrêmes

La théorie des valeurs extrêmes a pour objet l'analyse des événements rares, mais dont les conséquences sont importantes comme les grandes pertes. Son apport principal en matière de risque de crédit consiste à dire que la distribution des grandes pertes suit asymptotiquement, sur une longue période, une distribution indépendante de la distributions des pertes habituelles. L'usage de ces lois de distribution permet de résoudre le problème lié au nombre insuffisant de données correspondant aux situations de pertes extrêmes. L'objectif est de donner une description analytique utilisable de la queue de distribution des pertes d'un portefeuille. En effet, les simulations de Monte Carlo, même si elles donnent des résultats intéressants pour l'estimation des deux premiers moments de la distribution des pertes, s'avèrent peu performantes pour représenter la queue de distribution. Or, pour la détermination du capital économique, on s'intéresse essentiellement à la queue de distribution où les pertes potentielles rares mais grandes se produisent. D'où l'utilité de la théorie des valeurs extrêmes qui offre une méthodologie analytique pour caractériser les queues de distribution. Cependant, comme le fait remarquer EMBRECHTS [55], il y a toujours une part d'incertitude lorsqu'il s'agit d'extrapoler sur des zones où le niveau d'information est réduit. Ce risque constitue un risque de modèle difficile à évaluer.

## 3.4 Le capital économique

Comme le stipule la réglementation bancaire, chaque opération risquée mobilise des fonds propres de la banque. Lorsque les fonds propres destinés à couvrir toutes les opérations risquées sont calculés de façon réglementaire, voir chapitre 2, on parle de **fonds propres réglementaires**. Cependant, ce calcul ne tient pas compte des effets de diversification, de la nature du portefeuille de la banque, du rating des contreparties etc.

Pour parer à cette faiblesse, le nouvel accord de Bâle privilégie justement le recours aux modèles internes des banques permettant de mesurer le risque de manière plus performante. Ces modèles internes des banques, dont la construction est expliquée ci-haut, permettent de calculer les fonds propres de manière à tenir compte des particularités des portefeuilles de crédits de ces banques. On parle alors de **fonds propres économiques** qui constituent le capital nécessaire aux institutions financières pour couvrir aussi bien les pertes anticipées que les pertes non anticipées. Comme on l'a vu les pertes non anticipées sont simplement l'écart-type de la distribution des pertes, voir équation (3.9). Mais que se passe-t-il lorsque les pertes réelles excèdent d'un écart-type le niveau des pertes anticipées ? La méthodologie privilégiée par Bâle II via les modèles internes est empruntée à la méthodologie de mesure du risque de marché. La mesure choisie pour quantifier le risque de crédit d'un portefeuille de crédits est le **capital économique**. Cette mesure est calculée à partir de la distribution des pertes sur le portefeuille de crédits estimée à l'aide

d'un modèle interne à l'institution financière. Pour un niveau de confiance  $1 - \alpha$  et un horizon donnés, le capital économique  $EC_{1-\alpha}$  se définit comme le  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ -quantile de la distribution des pertes moins le niveau des pertes anticipé. Soit  $\tilde{L}$  la variable aléatoire qui modélise les pertes du portefeuille dues à des défauts ou des dégradations de qualité de crédit, alors (voir BLUHM & AL. [15] p. 32)

$$EC_{1-\alpha} = q_{1-\alpha} - E(\tilde{L}) . \quad (3.18)$$

La statistique  $q_{1-\alpha}$  est aussi appelée *Credit Value-at-Risk* avec un niveau de confiance  $1 - \alpha$ . La figure 3.1 illustre le concept du capital économique où  $f_{\tilde{L}}$  représente la fonction de densité de la variable  $\tilde{L}$ .

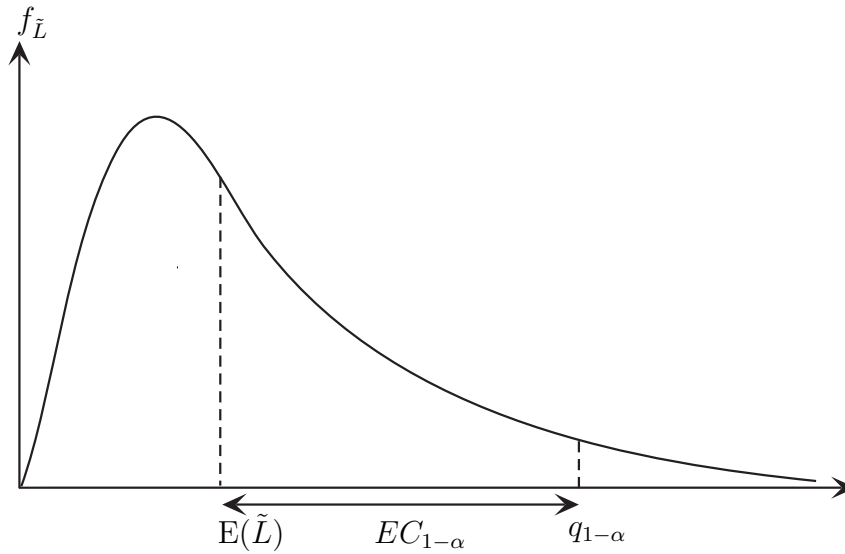


FIG. 3.1 – Le concept du capital économique

En termes de probabilité, la notion du capital économique s'écrit :

$$P(\tilde{L} - E(\tilde{L}) \leq EC_{1-\alpha}) = 1 - \alpha .$$

Ceci signifie que la perte excédant le niveau des pertes anticipées est dans  $(1 - \alpha)\%$  inférieur au niveau du capital économique pour un seuil de confiance de  $(1 - \alpha)$ . En conséquence si une institution financière détient un niveau de fonds propres égal au niveau des pertes anticipées plus le capital économique, alors, cette institution pourra couvrir ses pertes et donc éviter la faillite dans  $(1 - \alpha)\%$  des cas.

Pour le calcul du capital économique, le choix de la fonction utilisée pour modéliser les pertes du portefeuille est décisif. Par exemple, on observe aisément que si le modèle choisi pour la distribution des pertes est une distribution normale, le capital

économique est un multiple de l'écart-type de la distribution des pertes, qui est une mesure usuelle pour quantifier l'incertitude des pertes. En effet :

$$\begin{aligned} P(\tilde{L} - E(\tilde{L}) \leq EC_{1-\alpha}) &= 1 - \alpha \\ \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{EC_{1-\alpha}}{\sigma_{\tilde{L}}}\right) &= 1 - \alpha \\ \Leftrightarrow EC_{1-\alpha} &= \sigma_{\tilde{L}} \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha) . \end{aligned} \quad (3.19)$$

On obtient  $EC_{1-\alpha} = m \cdot \sigma_{\tilde{L}}$  où il est évident que le facteur  $m$  dépend du niveau de confiance requis. Cependant, l'emploi de la distribution normale pour la modélisation de la distribution des pertes d'un portefeuille de crédit n'est pas réaliste. En effet, les effets de contagion entre crédits font que les probabilités d'événements extrêmes sont plus élevées que pour une distribution normale et la distribution de pertes se caractérise en général par sa queue épaisse.

Quoi qu'il en soit, la connaissance des deux premiers moments de la distribution des pertes est suffisante pour définir une borne inférieure du capital économique, quelles que soient les caractéristiques non normales de la distribution des pertes grâce à l'inégalité de Tchebychev :

$$P(|\tilde{x} - E(\tilde{x})| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(\tilde{x})}{\varepsilon^2} ;$$

pour toute variable aléatoire  $\tilde{x}$  d'espérance mathématique et de variance finies et pour tout  $\varepsilon > 0$ . Soit  $\tilde{L}$  la variable aléatoire représente les pertes futures du portefeuille de crédits dont la fonction de distribution est  $F$  et soit  $\varepsilon = t \cdot \sigma_{\tilde{L}}$  où  $t$  est un nombre positif, fonction du niveau de signification. On obtient :

$$P(|\tilde{L} - E(\tilde{L})| \geq t \cdot \sigma_{\tilde{L}}) \leq \frac{1}{t^2} ;$$

soit aussi les deux inégalités (assez faibles) suivantes :

$$P(\tilde{L} - E(\tilde{L}) \geq t \cdot \sigma_{\tilde{L}}) \leq \frac{1}{t^2} \quad \text{et} \quad P(E(\tilde{L}) - \tilde{L} \geq t \cdot \sigma_{\tilde{L}}) \leq \frac{1}{t^2} . \quad (3.20)$$

On réécrit les équations précédentes :

$$P(\tilde{L} \geq E(\tilde{L}) + t \cdot \sigma_{\tilde{L}}) \leq \frac{1}{t^2} \quad \text{et} \quad P(\tilde{L} \leq E(\tilde{L}) - t \cdot \sigma_{\tilde{L}}) \leq \frac{1}{t^2} ,$$

ce qui implique

$$F(E(\tilde{L}) + t \cdot \sigma_{\tilde{L}}) \geq 1 - \frac{1}{t^2} \quad \text{et} \quad F(E(\tilde{L}) - t \cdot \sigma_{\tilde{L}}) \leq \frac{1}{t^2} . \quad (3.21)$$

Puisque toute fonction de distribution est monotone croissante, les inégalités (3.21) impliquent respectivement que  $E(\tilde{L}) + t \cdot \sigma_{\tilde{L}} \geq F^{-1}(1 - \frac{1}{t^2})$  et  $E(\tilde{L}) - t \cdot \sigma_{\tilde{L}} \leq F^{-1}(\frac{1}{t^2})$ . Or  $F^{-1}(1 - \frac{1}{t^2})$  et  $F^{-1}(\frac{1}{t^2})$  sont justement les  $(1 - \frac{1}{t^2}) \cdot 100\%$  et  $(\frac{1}{t^2}) \cdot 100\%$ -quantiles

de la distribution des pertes que l'on note  $q_{1-\frac{1}{t^2}}$  et  $q_{\frac{1}{t^2}}$  pour rester cohérent avec la notation utilisée à l'équation (3.18).

On obtient par conséquent les inégalités suivantes :

$$E(\tilde{L}) + t \cdot \sigma_{\tilde{L}} \geq q_{1-\frac{1}{t^2}} \quad \text{et} \quad E(\tilde{L}) - t \cdot \sigma_{\tilde{L}} \leq q_{\frac{1}{t^2}} . \quad (3.22)$$

En insérant dans l'équation (3.22) les valeurs de  $q_{1-\frac{1}{t^2}}$  et  $q_{\frac{1}{t^2}}$  découlant de l'équation (3.18) on obtient une borne supérieure et une borne inférieure pour le capital économique :

$$EC_{1-\frac{1}{t^2}} \leq t \cdot \sigma_{\tilde{L}} \quad \text{et} \quad EC_{\frac{1}{t^2}} \geq -t \cdot \sigma_{\tilde{L}} . \quad (3.23)$$

Par exemple, pour un niveau de confiance de 95%, on a

$$1.026 \cdot \sigma_{\tilde{L}} \leq EC_{0.95} \leq 4.4721 \cdot \sigma_{\tilde{L}} ;$$

alors que si l'on suppose que la distribution des pertes est normale, on a  $EC_{0.95} = 1.645\sigma_{\tilde{L}}$  selon l'équation (3.19).

A défaut de permettre un calcul précis du capital économique, le couple moyenne-variance permet néanmoins de définir un intervalle pour le capital économique. Naturellement, plus on cherche à se rapprocher de la queue de la distribution (niveau de confiance élevé), plus l'intervalle est large.

## Deuxième partie

### Les principales approches quantitatives du risque de défaut





# Chapitre 4

## L'approche structurelle du risque de défaut

Un paramètre essentiel intervenant dans le calcul des mesures de risque est la probabilité de défaut. Lorsque l'on connaît le rating d'un crédit, la probabilité de défaut se lit sur une matrice de transition. Cependant, dans plusieurs cas, on ne connaît pas le rating de tous les crédits ou titres de dettes composant un portefeuille. Dans cette situation, les institutions financières doivent recourir à des approches quantitatives statistiques pour estimer les probabilités de défaut des diverses positions de leurs portefeuilles de crédits.

Dans la littérature du risque de crédit, deux approches principales sont utilisées pour estimer la probabilité de défaut. Il s'agit de modèles fondés soit sur la théorie financière, soit sur la théorie de l'assurance qui sont calibrés à l'aide des données des marchés financiers. La première et plus ancienne approche du risque de défaut est l'**approche structurelle** qui établit un lien entre le risque de défaut d'une entreprise et les variables structurelles de cette entreprise comme la valeur des actifs et la valeur de la dette. L'article fondateur de cette approche est celui de MERTON [114]. Celui-ci se base sur les méthodes d'évaluation des options de BLACK & SCHOLES [13]. Une approche plus récente du risque de défaut a vu le jour dans les années nonante avec notamment l'article de JARROW & TURNBULL [97]. Il s'agit de l'**approche réduite** du risque de défaut qui ne conditionne pas explicitement le défaut aux variables structurelles de la firme. Cette approche fait l'objet du chapitre suivant.

L'approche structurelle du risque de crédit est une approche relativement intuitive dans la mesure où le risque de crédit encouru par l'émetteur d'une dette à une firme est directement relié à la réalité économique de la firme : le défaut intervient dès que la valeur de marché de l'ensemble des actifs de la firme passe sous un certain seuil déterminé par le niveau global de la dette contractée. Il s'agit d'une *vision optionnelle* de la dette : l'émetteur reçoit le droit de faire défaut sur sa dette, droit qu'il exerce dès que la valeur des actifs ne permet plus de la couvrir. Les modèles utilisant cette conception du défaut sont appelés **modèles structurels** du risque

de défaut. Ils décrivent le processus de défaut comme le résultat explicite de la détérioration de la valeur de marché de la firme.

Les modèles structurels ont gagné une large reconnaissance auprès des professionnels de la banque et sont devenus un standard dans le domaine du risque de défaut. Trois raisons majeures expliquent cette popularité. La première est l'aptitude des modèles structurels à fournir une évaluation continue de la solvabilité des titres cotés en bourse puisqu'elle est impliquée par les cotations des actifs. Ces modèles présentent aussi l'avantage de donner des signes précurseurs du défaut qui sont essentiellement la baisse de valeur des actifs. Enfin, ce type d'approche offre une explication des dégradations de la qualité des crédits.

Ce chapitre présentera essentiellement le premier type de modèles structurels : le **modèle de MERTON** [114] ou **modèle de la firme**. Le modèle de MERTON est un modèle qui détermine le risque de crédit d'une firme conjointement par le processus stochastique décrivant l'évolution de la valeur des actifs de la firme et la structure de son capital. On présentera ensuite certaines des extensions principales du modèle de MERTON. Enfin, on exposera le modèle CreditMetrics<sup>TM</sup> qui est un produit commercial qui utilise une approche structurelle pour quantifier le risque de défaut des portefeuilles de crédits.

## 4.1 Les hypothèses du modèle de MERTON

Dans leur papier sur l'évaluation des options, BLACK et SCHOLES [13] suggéraient déjà que leur méthodologie pouvait être utilisée pour évaluer tous les titres émis par des entreprises, que ce soit des titres de propriété (actions) ou des titres de dettes (obligations). MERTON a été le premier à recourir à cette intuition et à l'appliquer pour l'évaluation de la dette émise par les entreprises. En employant certaines hypothèses sur la dynamique de la valeur de la firme et sur la structure du capital, MERTON est parvenu à obtenir des formulations pour l'évaluation des capitaux propres et de la dette émise par la firme.

Les huit hypothèses de base du modèle de MERTON [114] p.450 sont résumées ci-après :

1. La valeur des actifs de la firme au temps  $t$  est une variable aléatoire  $A_t$  qui évolue selon un mouvement brownien géométrique. Ceci implique que la valeur des actifs est la solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dA_t = \mu_A A_t dt + \sigma_A A_t dB_t , \quad (4.1)$$

où  $\mu_A > 0$  est le *drift* et  $\sigma_A$  est la volatilité des actifs de la firme et  $(B_s)_{s \geq 0}$  est un mouvement brownien standard. On peut réécrire l'équation (4.1) comme suit :

$$\frac{A_{t+dt} - A_t}{A_t} = \mu_A dt + \sigma_A dB_t . \quad (4.2)$$

Le terme gauche de cette équation peut être identifié comme le rendement relatif des actifs sur un intervalle de temps infinitésimal  $[t, t + dt]$ . Cette équation indique que ce rendement des actifs est composé d'un *trend linéaire*  $\mu_A$  et d'une *fluctuation aléatoire*  $\sigma_A dBt$ .

2. La firme possède une structure capitalistique simple, à savoir deux types de titres : une dette obligataire et des capitaux propres. La valeur de marché des actifs de la firme au temps  $t$  est :

$$A_t = E_t + D_t , \quad (4.3)$$

où  $E_t$  désigne la valeur des capitaux propres et  $D_t$  la valeur marchande de la dette. MERTON émet des hypothèses supplémentaires sur le profil de la dette et des capitaux propres :

- La dette est simplement décrite : l'émetteur de la dette paie à la firme un capital  $D_0$  à  $t = 0$  et reçoit, à  $t = T$  qui est la maturité de la dette, un montant total de  $F$ , incluant le principal  $D_0$  et les intérêts à un taux reflétant le niveau de risque de la firme ;
  - les capitaux propres ne reçoivent pas de dividende.
3. En cas de défaut, le détenteur de la dette devient propriétaire de la firme. Si à la maturité de la dette c'est-à-dire au temps  $T$  la valeur des actifs de la firme  $A_T$  excède le paiement  $F$ , les créanciers reçoivent le paiement dû  $F$  et la valeur résiduelle est versée aux actionnaires. Si, par contre, la valeur des actifs est inférieure au montant dû  $F$ , les créanciers reçoivent un paiement égal à la valeur des actifs et les actionnaires ne reçoivent rien.
  4. Enfin, MERTON fait l'hypothèse que le taux d'intérêt sans risque demeure constant au cours du temps, égal à  $r$ . De plus, on suppose qu'il y a absence d'opportunité d'arbitrage et que les marchés sont complets.

Du point de vue de l'émetteur de la dette, le risque de défaut implique implicitement qu'il y a une probabilité strictement positive que la valeur des actifs à la maturité de la dette  $t = T$  soit insuffisante pour rembourser la dette :

$$P(A_T < F) > 0 . \quad (4.4)$$

A la date  $t = 0$ , une probabilité de défaut positive signifie que si  $D_0$  est placé aux taux sans risque, on obtient un montant  $D_0 e^{rT}$  à l'échéance de la dette qui est inférieur au montant dû  $F$ . Ceci s'écrit :

$$D_0 < F e^{-r \cdot T} , \quad (4.5)$$

où  $r$  dénote le taux d'intérêt sans risque. L'inégalité (4.5) doit être satisfaite puisque l'émetteur de la dette demande une compensation pour le risque de défaut de l'emprunteur. Une telle *prime de risque* ou *spread* est donc exigée à l'émetteur de la dette, ce qui se traduit par un taux d'intérêt plus élevé que le taux sans risque sur la valeur nominale de la dette  $F$  c'est-à-dire que

$$D_0 = F e^{-R(T) \cdot T} , \quad (4.6)$$

où  $R(T)$  est le taux d'intérêt pour une dette de maturité  $T$  prenant en compte le risque de défaut encouru par le détenteur de la dette.

## 4.2 Valeur des capitaux propres et probabilité de défaut

Le modèle de valorisation de la firme de MERTON repose sur le principe que les actionnaires et les créanciers sont en fait des détenteurs d'options. A la date  $T$ , si la valeur des actifs est inférieure à la somme  $F$  due aux créanciers, on considère que la firme fait défaut. Dans ce cas, la firme passe aux mains des créanciers qui ne récupèrent qu'une portion  $A_T/F$  de leur capital initial. Par contre, lorsque  $A_T > F$ , la dette est intégralement payée et les actionnaires reçoivent la différence. A la date  $T$ , le paiement aux actionnaires se résume par l'équation suivante :

$$E_T = \max[A_T - F, 0] . \quad (4.7)$$

Les capitaux propres sont en fait une option d'achat sur la firme ayant comme prix d'exercice la valeur de la dette et pour échéance la date  $T$ .

D'après le modèle d'évaluation des options de BLACK & SCHOLES et en vertu de la complétude des marchés, la valeur des actifs à chaque date  $t$  peut s'écrire sous la forme de l'espérance de leur valeur finale actualisée. A la date  $t = 0$ , la valeur des capitaux propres est donnée par :

$$E_0 = A_0 \Phi(d_1) - F e^{-rT} \Phi(d_2) , \quad (4.8)$$

où

$$d_1 = \frac{\ln(A_0/F e^{-rT})}{\sigma_A \sqrt{T}} + 0.5 \sigma_A \sqrt{T}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_A \sqrt{T}$$

et  $\Phi$  est la fonction de répartition d'une variable normale centrée réduite.

MERTON définit  $F^* = F e^{-rT}$  comme étant la valeur de la dette actualisée au taux sans risque, et  $\varphi = F^*/A_0$  une mesure du taux d'endettement de la firme ou du niveau de levier de la firme. En insérant ces deux nouveaux paramètres on obtient la valeur des capitaux propres :

$$E_0 = A_0 [\Phi(d_1) - \varphi \Phi(d_2)] , \quad (4.9)$$

avec

$$d_1 = \frac{-\ln(\varphi)}{\sigma_A \sqrt{T}} + 0.5 \sigma_A \sqrt{T} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma_A \sqrt{T} .$$

La probabilité que la firme soit en défaut à  $t = T$  c'est-à-dire  $P(A_T < F)$  est en fait la probabilité que les actionnaires n'exercent pas leur option d'achat des actifs de la firme au prix d'exercice  $F$ . Cette probabilité s'écrit :

$$\begin{aligned} P(A_T < F) &= \Phi(d_2) \\ &= \Phi \left( \frac{-\ln(\varphi)}{0.5 \sigma_A \sqrt{T}} - \sigma_A \sqrt{T} \right) . \end{aligned} \quad (4.10)$$

On observe que d'après le modèle de MERTON, la probabilité de défaut ne dépend que du niveau du levier  $\varphi$ , de l'incertitude pesant sur les actifs  $\sigma_A$  et de la maturité de la dette  $T$ . On comprend alors que l'on parle de modèle structurel, car ce modèle relie le risque de crédit à la structure financière de la firme.

### 4.3 Valeur de la dette et spread de crédit

Le modèle de MERTON permet d'obtenir un spread théorique de crédit qui est la prime théorique exigée par l'investisseur pour le risque de crédit. Le spread traduit l'aversion au risque des investisseurs. MERTON va prouver que le spread augmente avec le niveau de levier financier de la firme, et qu'il est une fonction croissante de la volatilité des actifs.

En effet, toute dette émise par une firme verse un taux de rendement supérieur au taux sans risque, afin de compenser l'investisseur pour le risque (essentiellement le risque de crédit) qu'il supporte. Le modèle de MERTON permet de mesurer ce spread théorique de crédit qui sera une mesure du risque de défaut de la firme. Puisque la firme ne possède que deux sources de financement (selon l'hypothèse 2), la valeur de la dette, à  $t = 0$  est égale à la valeur des actifs moins la valeur des capitaux propres :

$$D_0 = A_0 - E_0 .$$

À l'aide de l'équation (4.9), on obtient l'expression suivante de la valeur de la dette :

$$D_0 = A_0[\Phi(-d_1) + \varphi\Phi(d_2)] . \quad (4.11)$$

Puisque que l'on suppose l'absence d'opportunité d'arbitrage, le taux de rendement de la dette  $R(T)$  est donné implicitement par l'équation :

$$D_0 = F e^{-R(T) \cdot T}$$

Ayant défini  $F^* = F e^{-rT}$  comme étant la valeur de la dette actualisée au taux sans risque, on obtient :

$$D_0 = F^* e^{(r-R(T)) \cdot T} . \quad (4.12)$$

En combinant les équations (4.11) et (4.12) on obtient :

$$F^* e^{(r-R(T))T} = A_0[\Phi(-d_1) + \varphi\Phi(d_2)] . \quad (4.13)$$

En résolvant cette dernière équation, MERTON explicite alors le spread des taux résultant du risque de défaut comme étant :

$$R(T) - r = -\frac{1}{T} \ln \left( \Phi(d_2) + \frac{1}{\varphi} \Phi(-d_1) \right) \quad (4.14)$$

où  $\varphi = \frac{F^*}{A_0}$  est le niveau de levier de la firme.

Pour une maturité  $T$  donnée, la prime de risque dépend uniquement de la volatilité  $\sigma_A$  de la valeur des actifs et du levier  $\varphi$ . MERTON montre que  $R(T) - r$  est une fonction croissante de ces deux paramètres, ce qui est conforme à l'intuition :

- La volatilité de la valeur de marché d'une firme reflète l'incertitude des investisseurs sur les rendements à venir de cette firme. Par conséquent, plus la volatilité est élevée, plus le risque (de défaut) encouru par l'émetteur de la dette est important et plus la prime doit être conséquente.
- Plus le levier financier de la firme, c'est-à-dire le rapport de son endettement net sur le montant de ses capitaux propres est important, plus la dette est risquée. En effet, l'effet de levier permet aux propriétaires d'une entreprise (les actionnaires) d'accroître le niveau d'activité sans augmenter pour autant le montant de leurs engagements. Le risque supplémentaire lié au surplus d'activité est alors supporté par les créanciers, ce qui se traduit par une meilleure rémunération de leurs placements.

Les graphiques 4.1 et 4.2 illustrent la façon dont le levier influence la structure à terme de spreads de taux pour une volatilité de la valeur des actifs égale à  $\sigma = 10\%$  et un taux sans risque égal à  $r = 3\%$ , voir RONCALLI [127] p.143. Le spread est exprimé en *basis points*<sup>1</sup> ou points de base, et la maturité est exprimée en années.

1. Dans le premier cas,  $\varphi = 1.2 > 1$  : le spread théorique est une fonction décroissante de  $T$  qui est le temps restant avant maturité. La valeur anticipée (au taux sans risque) des actifs de la firme à la maturité  $T$  est inférieure au montant de ses engagements  $A_0 e^{rT} < D$ . Il est d'autant plus probable que la valeur anticipée des actifs se réalise avant que la date d'échéance se rapproche. Par conséquent, pour un niveau de levier  $\varphi > 1$ , plus le temps avant maturité est court, plus le risque encouru par le détenteur de la dette est élevé et par conséquent la prime qui en résulte est importante.

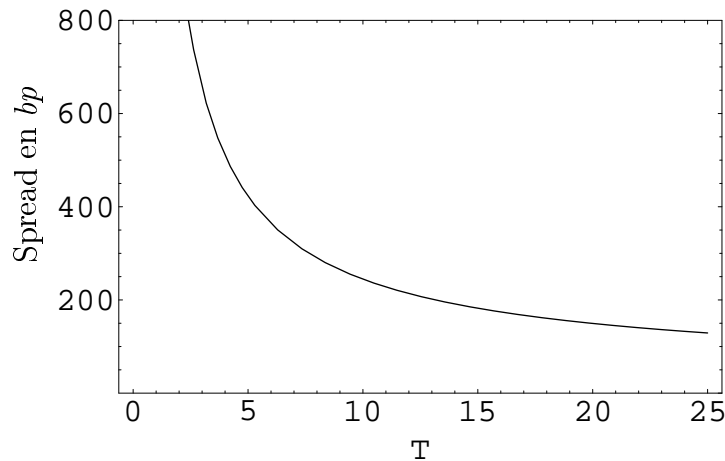


FIG. 4.1 – Relation entre le spread théorique en *basis points* et le temps  $T$  restant avant la maturité de la dette pour  $\varphi > 1$

2. Dans le second cas,  $\varphi = 0.6 < 1$  : la valeur anticipée des actifs de la firme au taux sans risque est supérieure à ses engagements  $A_0 e^{rT} > D$ . Par conséquent,

<sup>1</sup>Un *basis point* ou point de base noté *bp* correspond à un centième de pourcent :  $1 bp = 0.01\%$

dans le cas limite où la maturité de la dette est atteinte ( $T = 0$ ), la firme peut entièrement rembourser ses créanciers, ce qui se traduit par un spread nul. Par contre, en s'éloignant de l'échéance, l'incertitude pesant sur l'évolution de la valeur des actifs ( $\sigma = 10\%$ ) fait croître la probabilité de défaut et donc le spread (première partie de la courbe). Dans un second temps, on retrouve un effet similaire à celui observé sur la première courbe ( $\varphi > 1$ ) : l'éloignement de la maturité rend plus certain, pour un niveau de levier  $\varphi$  fixé, le recouvrement de la dette si bien que le spread théorique diminue (seconde partie de la courbe).

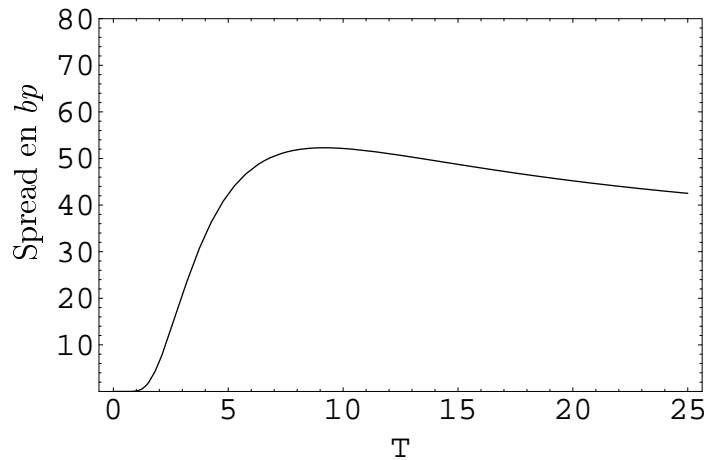


FIG. 4.2 – Relation entre le spread théorique en *basis points* et le temps  $T$  restant avant la maturité de la dette (en années) pour  $\varphi < 1$

On note que ces deux courbes font apparaître le défaut comme un événement prévisible : le spread théorique tend soit vers 0 soit vers l'infini lorsque l'on se rapproche de la maturité. Dans le premier cas, juste avant la maturité, le marché sait qu'il n'y aura pas de défaut et n'a donc aucune raison d'accorder une prime de risque. Dans le second cas, on observe le phénomène inverse.

La principale limitation du modèle de MERTON réside dans le fait que le défaut de l'émetteur ne peut intervenir qu'à la maturité de la dette. Or le défaut ou la faillite des entreprises est en général déclenché avant l'échéance de la dette, sans attendre de constater que celle-ci ne pourra pas être remboursée. D'où des extensions du modèle de MERTON cherchant à modéliser le défaut de manière plus réaliste présentés à la section suivante.

## 4.4 Extensions du modèle de Merton

Le modèle de GESKE [73] est l'extension la plus directe de MERTON. Ce modèle suppose que le défaut peut se produire à chaque date de paiement du principal ou des intérêts.

Un autre type d'extension consiste à appréhender le défaut non plus de manière discrète mais en temps continu : la firme peut faire défaut à n'importe quelle date entre la date d'émission et la maturité, qu'il s'agisse ou non d'une date de paiement. Il s'agit du modèle de BLACK & COX [12] qui reprennent le cadre d'analyse de MERTON en supposant que la firme peut être mise en faillite dès que la valeur de marché des actifs  $A_t$  passe sous un seuil critique  $K_t$  tel que

$$K_t = Ke^{-r(T-t)}, \quad 0 < K \leq F ; \quad (4.15)$$

où le seuil de défaut  $K$  est fixé de manière exogène : il doit être défini de façon explicite dans le contrat de dette. On parle alors de *modèles structurels à frontière exogène*. BLACK & COX définissent ainsi un niveau levier maximal  $\rho_{max} = F/K$  supérieur à 1 que les actionnaires ne peuvent franchir pour financer l'activité de l'entreprise.

Comme le montrent les graphiques 4.1 et 4.2, le modèle de MERTON spécifie le défaut comme un événement prévisible si bien que le spread théorique tend vers zéro à mesure qu'on s'approche de la maturité. Dans la pratique, les spreads restent importants, même pour des dates de maturité proches. ZHOU [152] a proposé une solution à ce problème tout en conservant un cadre d'analyse proche de celui de MERTON. Il intègre un processus de sauts au processus de valorisation des actifs de telle manière que les trajectoires suivies par la valeur de marché de la firme ne sont plus nécessairement continues. Dans ce contexte, ZHOU montre que les spreads théoriques demeurent significatifs, même à l'approche de la maturité car les investisseurs demandent une prime permettant de s'assurer contre le risque supplémentaire engendré par les sauts.

L'extension la plus utilisée du modèle de MERTON est la méthodologie mise en place par MOODY'S KMV<sup>2</sup> qui est le leader mondial des fournisseurs d'outils quantitatifs pour l'analyse des risques. À partir de la valeur comptable de la dette d'une entreprise et de l'estimation de sa valeur de marché, KMV calcule **la distance au défaut** de la firme et en déduit, pour un horizon donné, sa probabilité de défaut, notée *EDF* pour *expected default frequency* expliquée ci-après.

### Une mesure du risque de défaut : la distance au défaut

Selon le modèle de MERTON, une mesure pertinente de la valeur nette d'une firme à chaque instant  $t$  est sa valeur de marché  $A_t$  moins la valeur comptable de sa dette, le défaut intervenant dès que la valeur nette s'annule. Mais en réalité, le défaut peut se produire pour des valeurs nettes négatives. Ceci tient à la structure de la dette, qui se décompose en dette à long terme (qui apporte plus de flexibilité) et en dette à court terme (plus restrictive). Le seuil de la valeur des actifs déclenchant le défaut ou **point de défaut** noté  $K$  se situe en général entre le montant total de la dette et le montant de la dette à court terme.

---

<sup>2</sup> <http://www.moodyskmv.com/>



Pour évaluer le risque de défaut, la valeur nette ne peut être considérée indépendamment du risque lié à l'activité de l'entreprise. En effet, il n'est intéressant de connaître l'écart entre la valeur de marché des actifs et le point de défaut  $K$  que si l'on sait dans quelle mesure cet écart risque d'être comblé. La distance au point défaut  $K$  normalise donc la valeur nette de l'entreprise en la comparant à son écart-type. Ainsi, pour chaque période  $t$ , la distance au point de défaut  $DD_t$  qui correspond au nombre d'écarts-type séparant la valeur de marché des actifs du point de défaut est donnée par : (voir CROSBIE & BOHN [37] p. 9) :

$$DD_t := \frac{A_t - K}{\sigma A_t} ; \quad (4.16)$$

où  $\sigma$  est l'écart-type de la variable aléatoire  $A_t$  qui représente la valeur des actifs au temps  $t$ .

Ainsi donc, une valeur de  $DD_t$  égale à 4 signifie qu'il faut que la valeur des actifs se déplace de 4 écarts-type pour que le défaut se déclenche. On peut remarquer que cette mesure fait la synthèse des facteurs de risque mis en évidence par le modèle de Merton : elle intègre à la fois le levier et la volatilité des actifs. MOODY'S KMV relie la distance au point de défaut  $DD_t$  à la probabilité de défaut  $EDF$  en se fondant sur des données empiriques. La base de données dont dispose MOODY'S KMV contient plus que 250'000 entreprises et 4'700 incidents de défaut par an. A l'aide de cette base de données, une table des fréquences des défauts est générée pour divers niveaux de distance au point de défaut. Par exemple, pour mesurer la probabilité de défaut à un an d'une firme ayant une distance au point de défaut égale à 7, MOODY'S KMV calcule la fréquence relative d'entreprises ayant une distance au point de défaut égale à 7 qui ont fait défaut sous un an. MOODY'S KMV est alors à même de construire sa matrice de transition. Elle classe les entreprises par groupe de notation. Par exemple, à toutes les entreprises ayant une  $EDF$  inférieure à 0.02% on attribue la notation AAA, puis à celles ayant une  $EDF$  comprise entre 0.03% et 0.06% la notation AA et ainsi de suite.

## 4.5 CreditMetrics<sup>TM</sup> : Une application du modèle de MERTON

RiskMetrics Group<sup>3</sup>, ancienne division de gestion des risque de J.P Morgan a introduit en 1997, en partenariat avec d'autres institutions financières<sup>4</sup>, CreditMetrics<sup>TM</sup> qui est un outil sophistiqué pour la mesure de risque de crédit au niveau des crédits individuels et au niveau du portefeuille. L'ambition de J.P Morgan était de créer

---

<sup>3</sup>voir <http://www.riskmetrics.com/>

<sup>4</sup>Bank of America, BZW, Deutsche Morgan Grenfell, Swiss Bank Corporation, UBS et KMV Corporation

une méthodologie standard de mesure du risque de crédit, de promouvoir la transparence dans la gestion du risque de crédit et enfin d'encourager la convergence du capital réglementaire vers le capital économique.

Depuis son lancement, CreditMetrics<sup>TM</sup> a été largement accepté par les institutions financières et les autorités de supervision comme étant un standard de la mesure du risque de crédit. La méthodologie de CreditMetrics<sup>TM</sup> a évolué avec le changement de l'environnement du crédit et les apports des praticiens, chercheurs et autorités réglementaires.

Une particularité essentielle de CreditMetrics<sup>TM</sup> est d'être un modèle *marked to market*. En effet, CreditMetrics<sup>TM</sup> généralise le modèle de MERTON pour inclure toutes les transitions de rating associées au changement de qualité d'un crédit. Cette généralisation implique qu'il existe, en plus du seuil de défaut, une série de seuils de la valeur des actifs qui déterminent le rating pour l'horizon considéré.

CreditMetrics<sup>TM</sup> consiste en trois principaux composants :

- Une méthodologie pour l'estimation de la *credit value-at-risk* ou CVaR causée par les changements de la qualité de crédit ;
- Un recueil de données financières historiques ;
- Une application informatique *CreditManager*<sup>TM</sup> qui implémente la méthodologie.

Dans cette section, on expose la méthodologie de CreditMetrics<sup>TM</sup> appliqué à un crédit individuel. C'est dans la troisième partie de ce travail qui est consacrée à l'étude de la dépendance entre les crédits que l'on verra comment CreditMetrics<sup>TM</sup> traite la dépendance entre les crédits pour évaluer le risque de crédit au niveau du portefeuille.

Pour le calcul du risque de crédit d'un crédit individuel, par exemple une obligation, trois étapes sont nécessaires comme illustré dans le graphique 4.3.

- Étape 1 : le rating de l'émetteur de l'obligation détermine les probabilités de défaut et de migration vers une autre qualité de crédit à l'horizon choisi.
- Étape 2 : La séniorité de l'obligation détermine le taux de recouvrement. De plus, pour chaque rating, une courbe de spreads permet de déterminer la valeur actuelle du crédit en actualisant tous les cash flows futurs liés à cette obligation.
- Étape 3 : Les probabilités de migration (étape 1) et les valeurs possibles du crédit étant donné le rating (l'étape 2) donnent une distribution estimée de la valeur du crédit à l'horizon choisi. De cette distribution découle toutes les mesures de risque y compris la *credit value-at-risk* ou encore le capital économique.

Pour illustrer la méthodologie, on se base sur l'exemple du document technique de CreditMetrics<sup>TM</sup> GUPTON, FINGER & BHATIA [83]. On considère une firme de rating BB dont les actifs s'élèvent \$ 100 millions. Cette firme émet des obligations et il s'agit d'en étudier le risque de crédit. Dans la logique des modèles structurels, l'hypothèse est qu'il y a des seuils de la valeur des actifs tels qu'il est possible

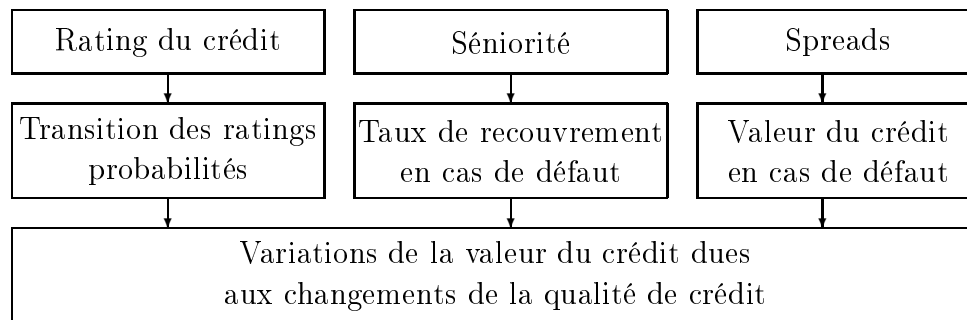


FIG. 4.3 – Différentes étapes de l’analyse du risque de crédit au niveau individuel avec CreditMetrics<sup>TM</sup> (GUPTON & AL [83] p.23)

d’établir une application entre chaque seuil de la valeur des actifs à l’horizon d’un an et le rating du crédit à ce même horizon d’un an, comme illustré à la figure 4.4.

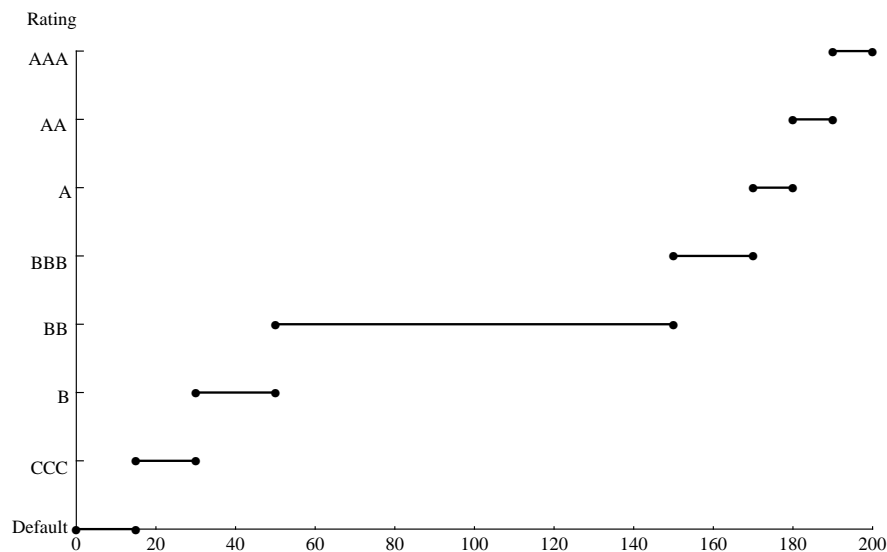


FIG. 4.4 – Migration des rating et valeurs des actifs d’une firme de rating BB  
Source : CreditMetrics Technical Document, GUPTON, FINGER & BHATIA [83] p. 86

Supposant que les seuils des valeurs des actifs sont connus, il reste à modéliser les changements de la valeur des actifs pour décrire l’évolution du rating de la firme. Pour ce faire, CreditMetrics<sup>TM</sup> fait l’hypothèse que le rendement annuel des actifs  $R$  suit une distribution normale d’espérance  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$ . On obtient alors une distribution du rendement des actifs «découpée» en bandes (voir figure 4.5) de telle manière qu’il existe des seuils de rendement des actifs  $Z_{Def}$ ,  $Z_{CCC}$ ,  $Z_{BBB}$  tels que si  $R < Z_{Def}$  alors la firme est en défaut ; si  $Z_{Def} < R < Z_{CCC}$  alors la firme obtient le rating CCC et ainsi de suite.

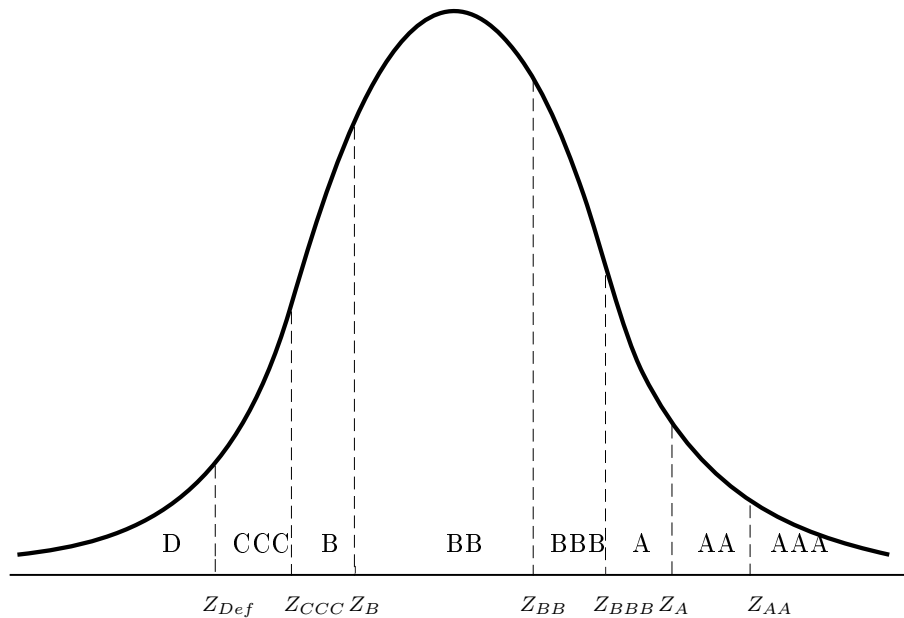


FIG. 4.5 – Distribution du rendements des actifs découpée en bandes

Source : CreditMetrics Technical Document, GUPTON, FINGER & BHATIA [83] p. 88

Puisque le rendement des actifs  $R$  suit une distribution normale, la probabilité annuelle de défaut est donnée par :

$$q = P(R < Z_{Def}) = \Phi \left( \frac{Z_{Def} - \mu}{\sigma} \right) ; \quad (4.17)$$

où  $\mu$  et  $\sigma$  sont l'espérance mathématique respectivement l'écart-type de la distribution du rendement annuel des actifs.

CreditMetrics<sup>TM</sup> estime les seuils en égalisant les probabilités de migration du modèle aux fréquences de transition historiques. Pour un rating BB, les fréquences de transition à un an de Standard & Poor's pour la période 1981-2003 sont données dans la deuxième colonne de table 4.1. La troisième colonne de cette même table présente les probabilités de migration impliquées par le modèle.

Par conséquent, pour une firme de rating BB les seuils de rendement annuel des actifs sont obtenus en égalisant les colonnes 2 et 3 de la table 4.1. Ces seuils sont donnés dans la table 4.2.

La finalité du modèle CreditMetrics<sup>TM</sup> est de construire la distribution de la valeur du crédit à l'horizon choisi étant pour en déduire le calcul de la CVaR. Il est par conséquent nécessaire de connaître toutes les valeurs possibles du crédit à l'horizon choisi en fonction des migrations de rating possibles, y compris en cas de défaut.

CreditMetrics<sup>TM</sup> fournit les taux de recouvrement par classe de séniorité, qui permettent de calculer la valeur du crédit en cas de défaut.

Comme tous les titres, la valeur d'un crédit quelconque est égale à la valeur actualisée de tous les flux futurs, à un taux tenant compte du risque encouru. Pour calculer cette

Rating	Fréquences de transition en %	Probabilité de transition selon le modèle
AAA	0.03	$1 - \Phi\left(\frac{Z_{AAA}-\mu}{\sigma}\right)$
AA	0.07	$\Phi\left(\frac{Z_{AA}-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{Z_{AAA}-\mu}{\sigma}\right)$
A	0.37	$\Phi\left(\frac{Z_A-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{Z_{AA}-\mu}{\sigma}\right)$
BBB	5.09	$\Phi\left(\frac{Z_{BBB}-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{Z_A-\mu}{\sigma}\right)$
BB	76.32	$\Phi\left(\frac{Z_{BB}-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{Z_{BBB}-\mu}{\sigma}\right)$
B	7.53	$\Phi\left(\frac{Z_B-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{Z_{BB}-\mu}{\sigma}\right)$
CCC	1.02	$\Phi\left(\frac{Z_{CCC}-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{Z_B-\mu}{\sigma}\right)$
D	1.36	$\Phi\left(\frac{Z_{Def}-\mu}{\sigma}\right)$

TAB. 4.1 – Probabilités de transition pour une firme de rating BB

Seuil	Valeur
$Z_{AAA}$	$1.395 \cdot \sigma + \mu$
$Z_{AA}$	$1.39 \cdot \sigma + \mu$
$Z_A$	$1.385 \cdot \sigma + \mu$
$Z_{BBB}$	$1.36 \cdot \sigma + \mu$
$Z_{BB}$	$1.09 \cdot \sigma + \mu$
$Z_B$	$-1.29 \cdot \sigma + \mu$
$Z_{CCC}$	$-1.98 \cdot \sigma + \mu$
$Z_{Def}$	$-2.21 \cdot \sigma + \mu$

TAB. 4.2 – Seuils de migration du rendement des actifs pour une firme de rating BB

valeur actuelle CreditMetrics<sup>TM</sup> met à disposition les taux d'actualisation fournis par la courbe des taux zéro coupon correspondant à chaque rating. Ces taux dépendent du taux sans risque pour chaque maturité et de la prime de risque ou spread annuel qui dépend du rating du crédit.

Au total, on obtient les différentes valeurs possibles du crédit en fonction des migrations possibles de rating (y compris le défaut) ainsi que les probabilités de migration. Ceci donne la distribution de la valeur du crédit à l'horizon choisi, de laquelle on déduit la *credit value-at-risk*.

Pour récapituler, l'approche structurelle du risque de défaut permet d'évaluer de façon intuitive le risque de défaut des firmes pour deux raisons :

- La structure capitalistique de l'entreprise est prise en compte : plus une firme est endettée plus élevé est le risque qu'elle fasse faillite.
- La valeur des actifs est un facteur de risque principal puisqu'elle déclenche le défaut lorsqu'elle atteint un certain seuil dépendant du niveau des dettes.

Néanmoins, cette approche est très difficile à implémenter car elle nécessite de nombreux paramètres qui sont soit inobservables, soit difficilement accessibles. D'une part la valeur des actifs, facteur de risque principal, est une donnée non observable

puisque tous les actifs d'une firme ne sont pas évalués sur le marché. D'autre part les modèles structurels utilisent des informations discontinues de type comptable sur la vie de la firme, comme par exemple le niveau du levier de la firme. De plus, la structure du capital est souvent très complexe, si bien que de nombreuses approximations doivent être faites pour implémenter ces modèles.

Une autre limite importante des modèles structurels réside dans le fait que ceux-ci impliquent que le défaut est prévisible et peut être anticipé par l'observation de la valeur de la firme. Cependant, même si dans la pratique l'évolution de la valeur de la firme et de la structure du capital peuvent aider à anticiper le défaut, il s'agit souvent d'analyses *a posteriori* qui permettent rarement la prévision du défaut.

Enfin, l'idée que le risque de défaut peut être réduit au risque de marché correspondant à la volatilité des actifs de la firme est discutable. En effet, il est difficile d'intégrer aux modèles structurels d'autres facteurs de risque, tels que le risque de taux d'intérêt, le risque pays etc. Cette hypothèse semble de plus paradoxale car l'introduction des produits dérivés de crédit est précisément liée au fait que le risque de crédit est vu par les opérateurs de marché comme un risque distinct du risque de marché. La volonté de détacher le risque de crédit du risque de marché a conduit au développement d'une seconde approche de modèles, dits à forme réduite, qui fait l'objet du chapitre suivant.

# Chapitre 5

## L'approche des modèles à forme réduite

Comme on l'a souligné à la fin du chapitre 4, les modèles structurels qui sont basés sur la valeur de la firme présentent plusieurs limites fondamentales. Pour palier à ces limites conceptuelles et à ces problèmes de mise en oeuvre, la famille des modèles à forme réduite a été développée. Cette famille de modèles est moins ambitieuse que les modèles structurels en ce sens qu'elle ne s'intéresse pas aux causes économiques du défaut, raison pour laquelle on parle de modèles à forme réduite. Malgré le nom qu'ils portent, les modèles à forme réduite sont en réalité des modèles présentant un caractère de généralité plus grand que les modèles structurels. Dans cette famille de modèles, le défaut est envisagé comme le saut d'un processus stochastique exogène. Le défaut est par conséquent un événement imprévisible qui a une probabilité non nulle sur toute période du temps.

Les modèles à forme réduite ont été développés notamment par JARROW & TURNBULL [97], ARTZNER & DELBAEN [2] et MADAN & UNAL [109]. Ces auteurs ne partent pas d'une ou plusieurs variables qui sont supposées gouverner le défaut. Ils considèrent que toutes les causes du défaut sont exogènes et modélisent ces causes par un processus stochastique exogène. Ces modèles sont calibrés aux données du marché sur les taux d'intérêt sur les crédits risqués pour déterminer les probabilités de défaut. Il est en effet d'usage de décomposer le taux d'intérêt retenu pour le financement d'un crédit entre taux sans risque et une prime de risque aussi appelée *spread*. Ce *spread* incorpore plusieurs informations sur la qualité de l'emprunteur, la liquidité de la transaction sous-jacente, ou plus globalement, du marché. En faisant l'hypothèse que l'impact de la liquidité sur le spread est négligeable, le spread devient un indicateur continu de l'évolution de la qualité du crédit des crédits cotés en bourse comme par exemple les obligations. Évidemment, cet indicateur ne permet pas de distinguer le risque de défaut du taux de recouvrement. De plus, pour que cet indicateur ne soit pas biaisé, il faudrait idéalement que les marchés soient complets, c'est-à-dire qu'il existe des transactions pour les crédits à toutes les échéances, sans aucune possibilité d'arbitrage entre elles.

La logique de ces modèles est différente de celle des modèles structurels : on n'a plus recours à une hypothétique valeur de la firme, mais on essaie de modéliser directement la probabilité de défaut à différents horizons de temps. Alors que les modèles structurels essaient de prédire une valeur théorique du spread de crédit à partir de la volatilité des actifs, les modèles à forme réduite partent du spread de crédit comme *input* et cherchent à effectuer une évaluation relative.

Dans ce chapitre, on présente tout d'abord le plus simple des modèles à forme réduite, le modèle d'intensité qui fait l'hypothèse que le défaut est le saut d'un processus stochastique de Poisson. Ensuite, on introduira la structure à terme des probabilités de défaut dans le cadre des modèles d'intensité à la section 5.2. La section 5.3 expliquera le concept de la probabilité risque neutre et le passage des spreads observés sur le marché aux probabilités de défaut. On consacrera une section à l'explication des spreads des Credit Default Swaps et de leur utilisation pour estimer les probabilités de défaut. Enfin, la dernière section du chapitre présente quelques extensions du modèle d'intensité.

## 5.1 Le modèle d'intensité

Le modèle d'intensité a été développé par JARROW et TURNBULL [97] en 1995 pour décrire la structure à terme des spreads de crédit. Le modèle d'intensité part de l'idée que le défaut d'un crédit est un **événement non prévisible**, gouverné par un **processus stochastique**.

Un problème classique en statistiques est de compter le nombre d'occurrences d'un événement donné dans un intervalle de temps. A titre d'exemple, on peut citer les appels téléphoniques à un standard, les accidents à un carrefour, ou les arrivées des clients à un guichet. Le processus de Poisson est souvent utilisé en statistique pour modéliser les événements rares.

Dans le cadre du risque de crédit, l'événement auquel on s'intéresse est le défaut d'un crédit. Il s'agit d'une part, de modéliser le nombre d'occurrences de cet événement au cours du temps, et d'autre part, de déterminer la probabilité d'une occurrence à un horizon donné.

### 5.1.1 Le processus de Poisson homogène

On considère un processus stochastique en temps continu  $\mathbf{X} = \{X(t), t \in T\}$  avec  $T = [0, \infty)$  où la variable aléatoire  $X(t)$  représente le nombre d'occurrences d'un événement ayant une faible probabilité dans l'intervalle  $[0, t]$ . La variable aléatoire  $X(t)$  est donc une fonction en escalier non décroissante dont la valeur initiale est  $X(0) = 0$  : en effet  $X(t)$  prend ses valeurs dans l'ensemble  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ , sa valeur augmentant d'une unité à chaque nouvelle occurrence. Le processus de Poisson, illustré à la figure 5.1, est un processus stochastique dont les événements ont



une probabilité d'occurrence très faible pour chaque intervalle de temps et est par conséquent bien adapté pour modéliser le défaut d'un crédit.

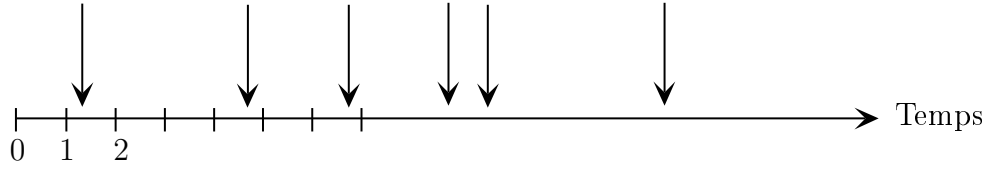


FIG. 5.1 – Processus de Poisson

Le processus  $\{X(t), t \in T\}$  est **un processus de Poisson homogène** d'intensité  $\lambda$  (voir KARLIN&TALYOR [102]) si les conditions suivantes sont remplies :

1. La probabilité qu'il y ait au moins une occurrence dans un intervalle  $\Delta \rightarrow 0$  est proportionnelle à  $\Delta$  :

$$P[X(t + \Delta) - X(t) \geq 1] = \lambda\Delta + o(\Delta) ; \quad (5.1)$$

avec  $\Delta > 0$  et où  $o(\Delta)$  est une fonction de  $\Delta$  telle que  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{o(\Delta)}{\Delta} = 0$ .

2. La probabilité d'avoir deux occurrences ou plus dans une période de durée  $\Delta \rightarrow 0$  est :

$$P[X(t + \Delta) - X(t) \geq 2] = o(\Delta) . \quad (5.2)$$

La deuxième hypothèse revient à exclure la possibilité de deux ou plusieurs occurrences simultanées. Ces deux hypothèses impliquent que la probabilité que le processus reste constant dans un intervalle de longueur  $\Delta$  est :

$$P[X(t + \Delta) - X(t) = 0] = 1 - \lambda\Delta ; \quad (5.3)$$

et que la probabilité que le processus reste constant dans un intervalle de longueur  $2\Delta$  est :

$$\begin{aligned} P[X(t + 2\Delta) - X(t) = 0] &= P[X(t + \Delta) - X(t) = 0] \cdot P[X(t + 2\Delta) - X(t + \Delta) = 0] \\ &= (1 - \lambda\Delta)^2 . \end{aligned}$$

Pour calculer la probabilité qu'il n'y ait aucune occurrence sur un intervalle quelconque  $[s, t]$ , on subdivise celui-ci en  $i$  sous-intervalles de longueur  $\Delta = \frac{(t-s)}{i}$ . Dans chaque sous-intervalle, le processus a une occurrence avec la probabilité  $\lambda\Delta$  selon l'équation (5.1). En fait, on se trouve dans une situation où, dans chaque sous-intervalle on réalise une expérience de Bernoulli avec une probabilité de succès égale à  $\lambda\Delta$ . Pour  $i$  expériences de Bernoulli, le nombre de succès suit par conséquent une distribution binomiale de paramètres  $i$  et  $\lambda\Delta$ .

La probabilité de n'avoir *aucune* occurrence dans l'intervalle  $[s, t]$  s'écrit :

$$P[X(t) = X(s)] = (1 - \lambda\Delta)^i = \left(1 - \frac{\lambda(t-s)}{i}\right)^i . \quad (5.4)$$

Puisque  $\lim_{i \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{i})^i = e^x$ , on obtient :

$$P[X(t) = X(s)] \rightarrow e^{-\lambda(t-s)} . \quad (5.5)$$

La probabilité d'avoir *une* occurrence dans l'intervalle  $[s, t]$  est donnée par :

$$\begin{aligned} P[X(t) - X(s) = 1] &= i \cdot \lambda \Delta (1 - \lambda \Delta)^{i-1} \\ &= i \cdot \lambda \frac{(t-s)}{i} \frac{\left(1 - \frac{\lambda(t-s)}{i}\right)^i}{\left(1 - \frac{\lambda(t-s)}{i}\right)} \\ &= \frac{\lambda(t-s)}{1 - \frac{\lambda(t-s)}{i}} \left(1 - \frac{\lambda(t-s)}{i}\right)^i . \end{aligned}$$

L'expression  $\left(1 - \frac{\lambda(t-s)}{i}\right)$  converge vers 1 pour  $i \rightarrow \infty$  si bien qu'on obtient à la limite :

$$P[X(t) - X(s) = 1] \rightarrow \lambda(t-s)e^{-\lambda(t-s)} . \quad (5.6)$$

La probabilité limite d'avoir *deux* occurrences dans l'intervalle  $[s, t]$  est :

$$\begin{aligned} P[X(t) - X(s) = 2] &= \binom{i}{2} (1 - \lambda \Delta)^{i-2} (\lambda \Delta)^2 \\ &= \frac{1}{2} (t-s)^2 \lambda^2 e^{-\lambda(t-s)} . \end{aligned}$$

De manière similaire, on dérive la limite de la probabilité de  $n$  occurrences dans l'intervalle  $[s, t]$  :

$$P[X(t) - X(s) = n] = \frac{1}{n!} \lambda^n (t-s)^n e^{-\lambda(t-s)} . \quad (5.7)$$

Un processus de poisson homogène d'intensité  $\lambda$  est donc un processus non décroissant, dont la valeur initiale est  $X(0) = 0$  et qui prend des valeurs entières positives avec les probabilités de l'équation (5.7).

Le modèle d'intensité du risque de défaut envisage le défaut d'un crédit comme étant une occurrence ou un saut d'un processus de Poisson dans un intervalle précis. La probabilité de défaut à un horizon donné est donc la probabilité qu'il y ait au moins une occurrence à cet horizon. Celle-ci est égal à 1 moins la probabilité qu'il n'y ait aucune occurrence à cet horizon qui est donnée par l'équation (5.5). Par conséquent si on considère un crédit  $i$  dont le défaut est modélisé comme étant le saut d'un processus de Poisson homogène  $\mathbf{X} = \{X(t), t \in T\}$  d'intensité  $\lambda_i$ , alors, la probabilité de défaut sur un intervalle quelconque  $[0, t]$  est égale à (voir équation (5.5)) :

$$\begin{aligned} q_i &= 1 - P[X(t) = X(0)] \\ &= 1 - e^{-\lambda_i t} . \end{aligned} \quad (5.8)$$

L'intensité  $\lambda_i$  du processus de poisson est l'espérance mathématique du nombre de sauts se produisant par unité de temps. En d'autres termes,  $\lambda_i$  est la fréquence moyenne des défauts ; on parle aussi d'**intensité de défaut**. La variance du nombre de défauts par unité de temps est aussi égale à  $\lambda_i$  :

$$E(X(t) - X(t-1)) = \lambda_i \quad \text{et} \quad \text{Var}(X(t) - X(t-1)) = \lambda_i . \quad (5.9)$$

Une propriété intéressante du processus de Poisson est qu'il est sans mémoire : les nombres de sauts dans deux intervalles disjoints sont indépendants. Dans le cadre du risque de crédit, ceci veut dire que l'occurrence ou non de défaut avant la date  $t$  n'influe en rien sur l'occurrence de défaut après  $t$ .

### 5.1.2 Le processus de Poisson non homogène

Lorsque l'intensité d'un processus de Poisson est une fonction  $\lambda(t)$  du temps, on parle de **processus de Poisson non homogène**. Dans le cadre du risque de défaut, il s'agit d'une généralisation naturelle qui part de l'idée que la fréquence moyenne des défauts par unité de temps ou l'intensité de défaut varie avec le temps. Les propriétés d'un processus de Poisson non homogène sont similaires à celles du processus de Poisson homogène.

La probabilité qu'il y ait une occurrence dans l'intervalle  $[t, t + \Delta]$ ,  $\Delta \rightarrow 0$  (saut local du processus) est donnée par :

$$P[X(t + \Delta) - X(t) = 1] = \lambda(t)\Delta . \quad (5.10)$$

On calcule ainsi la probabilité qu'il n'y ait *aucune* occurrence dans un intervalle quelconque  $[s, t]$  en subdivisant cet intervalle en  $n$  sous-intervalles de longueur  $\Delta$  :

$$P[X(t) - X(s) = 0] = \prod_{i=1}^n (1 - \lambda(s + i\Delta)\Delta) .$$

On obtient par conséquent

$$\ln P[X(t) - X(s) = 0] = \sum_{i=1}^n \ln(1 - \lambda(s + i\Delta)\Delta) ,$$

et lorsqu'on utilise l'approximation  $\ln(1 - x) \rightarrow -x$  pour  $x \rightarrow 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \ln P[X(t) - X(s) = 0] &\rightarrow \sum_{i=1}^n -\lambda(s + i\Delta)\Delta \\ &\rightarrow - \int_s^t \lambda(s) ds \end{aligned}$$

Finalement on obtient

$$P[X(t) - X(s) = 0] \rightarrow e^{-\int_s^t \lambda(s) ds} ; \quad (5.11)$$

ce qui permet de dériver la probabilité d'avoir  $n$  occurrences dans l'intervalle  $[s, t]$  :

$$P[X(t) - X(s) = n] = \frac{1}{n!} \left( \int_s^t \lambda(s) ds \right)^n e^{-\int_s^t \lambda(s) ds} . \quad (5.12)$$

Pour en revenir au risque de défaut, lorsque le défaut d'un crédit  $i$  est modélisé par le saut d'un processus de Poisson non homogène de paramètre  $\lambda_i(t)$ , la probabilité de défaut est sur un intervalle  $[0, t]$  donnée par :

$$\begin{aligned} q_i &= 1 - P[X(t) = X(0)] \\ &= 1 - e^{-\int_0^t \lambda_i(s) ds} . \end{aligned}$$

## 5.2 Structure à terme des probabilités de défaut

Le processus de Poisson fait ressortir une nouvelle variable, la **durée d'attente** entre deux sauts successifs du processus. Cette variable est aléatoire étant donné que la date du saut du processus est elle-même aléatoire. On note  $T_0$  le temps d'attente du premier saut à partir de  $t = 0$ , et  $T_1$  la durée séparant le 1<sup>er</sup> du 2<sup>ème</sup> saut et ainsi de suite.

Soit la variable aléatoire  $T_k$ ,  $k > 0$  qui représente la **durée d'attente** entre le  $k^{\text{ème}}$  et le  $(k + 1)^{\text{ème}}$  saut d'un processus de Poisson homogène d'intensité  $\lambda$ , voir figure 5.2, alors, pour tout  $k > 0$ , les durées d'attente  $T_k$  sont indépendantes et identiquement distribuées ; elles suivent une distribution exponentielle de paramètre  $\lambda$  (voir KARLIN AND TAYLOR [102] p. 124).

$$P[T_k \leq t] = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t > 0 . \quad (5.13)$$

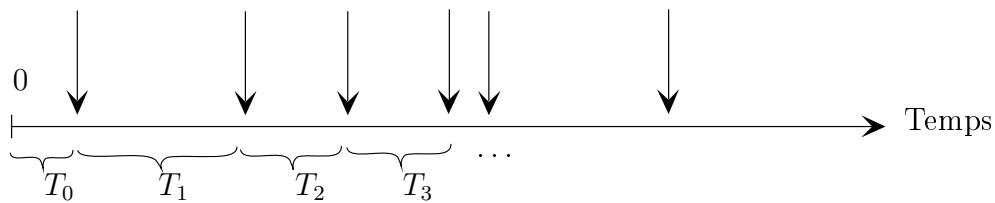


FIG. 5.2 – Durées d'attente entre deux occurrences successives

Dans le cadre du modèle d'intensité du risque de crédit décrit à la section précédente, les sauts du processus de Poisson désigneraient les défauts d'un crédit individuel. Cependant, il est évident qu'un crédit individuel ne peut connaître plusieurs défauts depuis la date de son émission. Le défaut est donc le *premier* saut du processus de Poisson. Ce qui est intéressant en particulier pour un crédit quelconque, est la date du premier saut du processus stochastique ou encore le temps d'attente jusqu'à ce premier saut.

Si l'on considère le défaut d'un crédit comme étant la «mort» de ce crédit, alors, la durée de temps écoulée l'émission du crédit et le défaut est la *durée de vie totale* du crédit. Lorsqu'un crédit ne fait pas défaut, sa durée de vie est tout simplement sa maturité.

On se situe maintenant à une date quelconque sur l'axe du temps. Alors, la durée d'attente jusqu'au défaut du crédit correspond à la **durée de survie** du crédit. Il s'agit ici d'une variable aléatoire puisque la date du défaut n'est pas connue. On désignera par  $\tau$  la durée de survie d'un crédit. La distribution de cette variable aléatoire donnera, pour chaque horizon, la probabilité de défaut et de survie du crédit à cet horizon. En d'autres termes la distribution de la durée de survie donne la structure à terme des probabilités de défaut.

### 5.2.1 Fonction de survie

On considère un crédit dont la durée de survie est désignée par  $\tau$ . Soit  $F(t)$  la fonction de répartition de  $\tau$  :

$$F(t) = P[\tau \leq t], \quad t \geq 0, \quad (5.14)$$

et on définit  $S(t)$  de la manière suivante :

$$S(t) := P[\tau > t] = 1 - F(t), \quad t \geq 0. \quad (5.15)$$

La fonction  $S(t)$  est appelée la **fonction de survie**. Pour tout  $t$  sur l'axe du temps, elle donne la probabilité que le crédit atteigne l'âge  $t$ , c'est-à-dire que le défaut survienne après la date  $t$ .

La fonction de densité de  $\tau$  est, par définition :

$$f(t) = F'(t) = -S'(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{P[t \leq \tau < t + \Delta]}{\Delta}; \quad (5.16)$$

lorsque la limite existe. Par exemple, pour un crédit  $i$  dont le défaut est modélisé comme étant le saut d'un processus de Poisson homogène de paramètre  $\lambda_i$  la fonction de survie est donnée par :

$$\begin{aligned} S(t) &= 1 - F(t) = \int_t^\infty f(s) ds \\ &= \int_t^\infty \lambda_i e^{-\lambda_i s} ds \\ &= e^{-\lambda_i t}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

L'espérance mathématique de la durée de survie est

$$E(\tau_i) = \frac{1}{\lambda_i}. \quad (5.18)$$

### 5.2.2 Fonction de défaillance

Une façon alternative de caractériser la distribution de la durée de survie est la **fonction de défaillance**, appelée aussi *hazard rate function* dans la littérature, qui est définie de la façon suivante :

$$h(t) := \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{P[t \leq \tau < t + \Delta | \tau \geq t]}{\Delta} . \quad (5.19)$$

Pour un crédit quelconque dont la durée de survie est modélisée par la variable aléatoire  $\tau$ , la fonction de défaillance donne la *probabilité instantanée de défaut sachant que le crédit a atteint l'âge  $t$* . Une expression équivalente de la fonction de défaillance est donnée par :

$$h(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{(F(t + \Delta) - F(t))/\Delta}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} . \quad (5.20)$$

Cette expression permet de faire le lien entre la fonction de défaillance et la fonction de survie :

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = -\frac{S'(t)}{S(t)} . \quad (5.21)$$

En intégrant les deux côtés de cette équation par rapport à  $t$ , on résout cette équation différentielle pour exprimer la fonction de survie en termes de la fonction de défaillance :

$$\int_0^t h(s) ds = \int_0^t \left( -\frac{S'(s)}{S(s)} \right) ds = -[\ln S(s)]_0^t = -\ln S(t) \quad (5.22)$$

Et lorsqu'on applique l'exponentielle des deux côtés on obtient :

$$S(t) = e^{-\int_0^t h(s) ds} . \quad (5.23)$$

On a par ailleurs

$$F(t) = 1 - S(t) = 1 - e^{-\int_0^t h(s) ds}$$

et la fonction de densité de la variable aléatoire  $\tau$  donnée par

$$f(t) = S(t) \cdot h(t) . \quad (5.24)$$

Lorsque le défaut est modélisé par le saut d'un processus de Poisson homogène de paramètre  $\lambda$ , la durée de survie d'un crédit quelconque suit une distribution exponentielle de paramètre  $\lambda$ . La fonction de défaillance est alors obtenue à l'aide des équations (5.17) et (5.24) :

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda . \quad (5.25)$$

La fonction de défaillance est dans ce cas constante et égale à *l'intensité de défaut*. On a à présent une interprétation de l'intensité : celle-ci est égale à la probabilité de défaut instantané d'un crédit, étant donné sa survie jusqu'à une date quelconque  $t$ .

## 5.3 Des spreads de crédit à l'intensité de défaut

Comme on l'a vu dans les sections précédentes, l'intensité de défaut, c'est-à-dire  $\lambda$  (pour un processus de Poisson homogène) ou  $\lambda(t)$  (pour un processus de Poisson non homogène) est le paramètre-clé du modèle d'intensité. Dans cette section, on présente les résultats des travaux de JARROW & TURNBULL [97] qui dérivent une estimation de ce paramètre à partir des données du marché.

JARROW & TURNBULL [97] utilisent l'hypothèse de neutralité au risque pour calibrer les intensités de défaut des crédits individuels à l'aide des données du marché sur les spreads de crédit. Dans les marchés financiers, cette hypothèse signifie que la valeur assignée par un investisseur neutre par rapport au risque à un instrument financier est égale à la valeur espérée de cet instrument. En conséquence, le terme de *probabilités risque-neutre* est employé lorsqu'on se réfère à des probabilités (ou à une distribution de probabilité) qui, lorsque qu'elles sont utilisées comme pondération dans un calcul de valeur espérée, reproduisent la valeur de marché des instruments financiers.

De plus, JARROW & TURNBULL [97] se servent des **théorèmes fondamentaux de l'évaluation des actifs**, voir les travaux de HARRISON & KREPS [84] et HARRISON & PLISKA [85]. Le premier théorème relate l'existence d'une mesure de probabilité risque-neutre. Selon ce premier théorème, il n'y a pas d'arbitrage si et seulement s'il existe une mesure de probabilité risque-neutre qui est équivalente à la mesure de probabilité historique. Le second théorème de l'évaluation des actifs stipule que les marchés sont complets si et seulement si la mesure de probabilité risque-neutre est unique.

Les théorèmes fondamentaux d'évaluation des actifs permettent de calculer la valeur d'un titre quelconque : celle-ci est égale à l'espérance sous la probabilité risque-neutre de la somme actualisée au taux sans risque des flux futurs auxquels ce titre donne droit. Cette approche d'évaluation des actifs est aussi appelée dans la littérature *approche martingale* voir (ROSS [129], et HARRISON AND KREPS[84]).

JARROW & TURNBULL [97] modélisent tour à tour sous l'hypothèse de neutralité au risque l'évaluation d'une obligation zéro coupon sans risque de défaut et une obligation zéro coupon avec risque de défaut. Ils arrivent à la conclusion que l'effet du risque de défaut se traduit par la modification du taux d'actualisation : pour tenir compte du risque de défaut, il faut ajouter au taux d'actualisation sans risque un *spread*, qui dépend du taux de recouvrement et de l'intensité de défaut. En d'autres termes, pour une obligation risquée, le taux d'actualisation  $R_t$  d'un flux futur perçu au temps  $t$  s'écrit :

$$R(t) = r(t) + \lambda(t) \cdot LGD , \quad (5.26)$$

où  $r(t)$  est le taux d'actualisation sans risque des flux perçus au temps  $t$ ,  $\lambda(t)$  l'intensité de défaut et  $LGD$  le taux de perte en cas de défaut.

C'est un résultat très important puisqu'il établit la relation entre les spreads de crédit court terme, grandeur observable sur les marchés et l'intensité de défaut qui permet de déduire les probabilités de défaut.

Il est possible de dériver l'équation (5.26) de manière plus simple. Pour ce faire, on considère l'exemple d'un crédit risqué à 1 an, comme une obligation de maturité égale à un an. Cette obligation, représentée à la figure 5.3 offre un unique cash flow  $X$  à l'échéance c'est-à-dire au bout d'une année. En cas de défaut, le taux de recouvrement est  $(1-LGD)$  où  $LGD$  est le taux de perte en cas de défaut. On note  $q$  la probabilité risque-neutre de défaut de cette obligation.

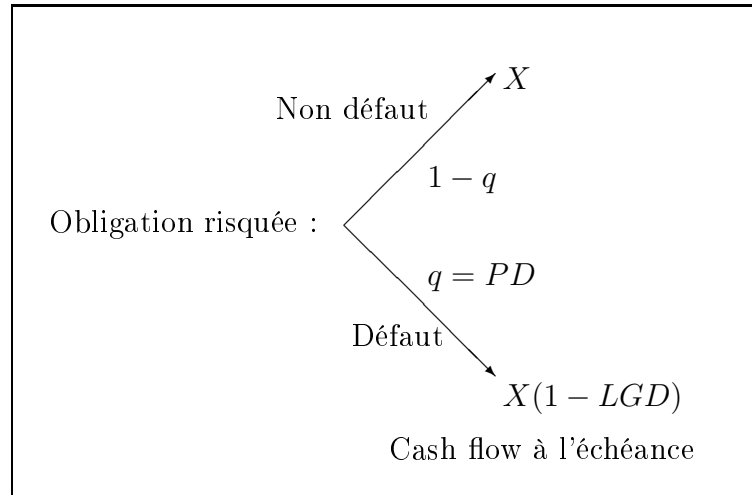


FIG. 5.3 – Evaluation d'une obligation à cash flow unique sujette au risque de défaut

Soit  $r$  le taux sans risque. La valeur  $V_1$  de cette obligation, selon l'hypothèse de neutralité au risque est donnée par :

$$V_1 = \frac{1}{1+r} \left( (1-q) \cdot X + q \cdot X(1-LGD) \right) . \quad (5.27)$$

L'approche classique pour l'évaluation de l'obligation de la figure 5.3 est l'actualisation du cash flow  $X$  à un taux  $R$  qui est le taux de rendement attendu d'une quelconque autre obligation à un an qui possède les mêmes caractéristiques que l'obligation initiale. Ce taux de rendement  $R$  est un taux qui prend en compte le risque de défaut et est composé du taux sans risque et de la prime de risque due au risque de défaut ou le spread de crédit ( $CS$ ) :

$$R = r + CS . \quad (5.28)$$

On calcule ainsi la valeur  $V_2$  de l'obligation :

$$V_2 = \frac{1}{1+R} X . \quad (5.29)$$



En égalisant les valeurs  $V_1$  et  $V_2$ , on obtient :

$$R = \frac{r + q \cdot LGD}{1 - q + q \cdot (1 - LGD)} . \quad (5.30)$$

L'équation 5.30 donne une relation, pour des valeurs annualisées, entre la probabilité de défaut et les taux d'intérêt et la perte en cas de défaut. Pour des périodes de temps  $\Delta t \rightarrow 0$  on poursuit le même raisonnement pour obtenir, voir CROUHY & AL[38] p. 413 :

$$R(t) = \frac{r(t) + q(t) \cdot LGD}{1 - q(t) + q(t) \cdot (1 - LGD)} ; \quad (5.31)$$

où  $R(t)$  et  $r(t)$  sont respectivement les taux d'actualisation instantanés risqués et sans risque ;  $q(t)$  la probabilité instantanée de défaut. Or, dans le cadre des modèles d'intensité l'intensité de défaut (cas général du processus de Poisson non homogène),  $\lambda(t)$  s'interprète comme la probabilité instantanée de défaut, ce qui signifie que  $q(t) = \lambda(t)$ .

On fait l'hypothèse que la perte en cas de défaut  $LGD$  n'est pas dépendante du temps. En effet, elle représente la part de la dette qui est perdue en cas de défaut et on peut raisonnablement penser que cette part ne varie pas selon que le défaut a lieu un intervalle de temps d'un an ou dans un intervalle quelconque  $\Delta t$ . On suppose ensuite que le dénominateur de l'équation (5.31) tend vers 1 pour des valeurs  $q(t)$  proches de 0, si bien qu'on obtient une approximation linéaire et simple entre le taux d'intérêt risqué et le taux sans risque :

$$R(t) = r(t) + \lambda(t) \cdot LGD \quad (5.32)$$

En fait,  $\lambda(t)LGD$  peut s'interpréter comme étant le taux de perte anticipé selon l'hypothèse de neutralité au risque. C'est aussi le surplus de taux d'intérêt qui est nécessaire pour compenser l'investisseur pour le risque de défaut appelé aussi spread de crédit.

Cette relation est par ailleurs très intuitive : avant l'échéance de la dette, l'investisseur exige un taux court terme supérieur au taux sans risque. Ce taux est d'autant plus élevé que l'est l'intensité de défaut qui est une mesure du risque de défaut instantané. Il est en outre inversement proportionnel au taux de recouvrement : en effet, plus le taux de recouvrement est élevé, moins le risque est important et moins la prime de risque exigée est importante.

## 5.4 Les spreads des Credit Default Swaps

Aujourd'hui, face au manque de liquidité des marchés obligataires, les spreads des Credit Default Swaps (CDS) sont de plus en plus employés comme alternative aux spreads des obligations dans la recherche empirique sur le risque de crédit. On rappelle qu'un CDS est un contrat par lequel l'acheteur s'engage à l'égard du vendeur

à verser une prime régulière contre l'engagement pris par le vendeur, en cas de défaut sur un actif sous-jacent, de le dédommager de la perte subie sur cet actif, voir figure 5.4.

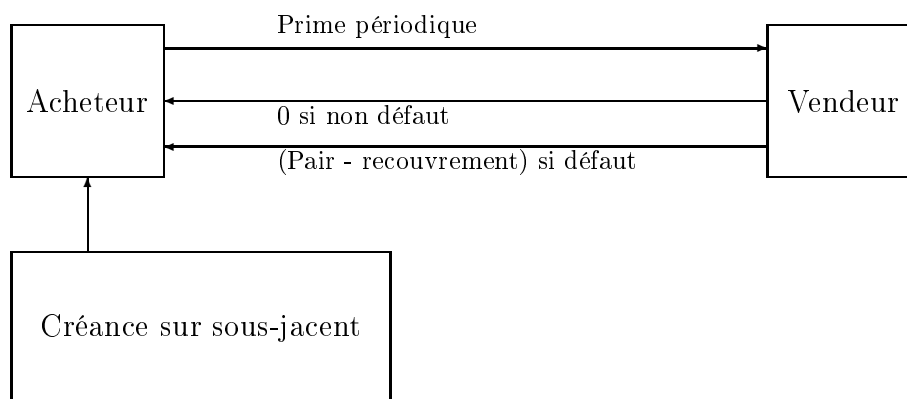


FIG. 5.4 – Schéma du Credit Default Swap

La prime périodique est exprimée sur une base annuelle et représente une portion du principal de la créance que l'acheteur de la protection (du CDS) paie au vendeur. Cette prime est appelée **spread du CDS**, est cotée en points de base<sup>1</sup> par année de la valeur notionnelle ou le principal du contract. Les paiements sont effectués en général en 4 tranches c'est-à-dire trimestriellement. Une augmentation de la prime ou du spread indique une détérioration de la perception de la qualité du crédit tandis qu'une baisse indique l'amélioration de la perception de la qualité du crédit.

Pour résumer, on peut dire qu'un CDS est tout simplement un contrat d'assurance contre le risque de défaut et le spread du CDS est la prime annuelle d'assurance exprimée en point de base du principal de la créance.

Par exemple, on suppose que le spread d'un CDS pour un contrat de 5 ans sur une obligation Novartis dont le principal est 10 millions de CHF est coté 20 points de base. Ceci signifie que l'acheteur du CDS versera chaque année (en 4 tranches) pendant 5 ans la somme de 20'000 CHF pour se couvrir du risque de défaut de Novartis.

Comme on pourrait le prévoir, le spread du CDS d'une créance est négativement lié à son rating ou à sa qualité de crédit en général : plus la qualité de crédit est mauvaise, plus le spread est élevé. En effet, le vendeur du CDS exige une prime d'autant plus élevée que le sous-jacent est risqué. Cependant, STEINER & HEINKE [144] ont observé une asymétrie dans la relation rating-spread : l'augmentation du spread dû à une dégradation du rating est plus forte que la diminution du spread due à une amélioration du rating comme c'est le cas aussi sur le marché des obligations.

L'objectif principal du marché des CDS est permettre aux institutions financières de se couvrir face au risque de défaut des entreprises ou des états, plus particulièrement

<sup>1</sup>Un point de base correspond à un centième de pourcent, soit 0.01%.

au niveau des obligations qu'ils émettent. Il s'agit aujourd'hui d'un marché en pleine expansion dont le besoin s'est fait nettement ressentir après les faillites spectaculaires d'ENRON et de l'État d'Argentine.

Il existe une relation d'équivalence théorique entre le spread du CDS et le spread de l'obligation sous-jacente qui est l'excès de rendement de l'obligation par rapport aux obligations sûres, ou obligations gouvernementales. Le spread du CDS à  $N$  années est égal au spread de l'obligation sous-jacente de maturité  $N$ . Ceci est le cas parce qu'un portefeuille constitué de l'obligation et du CDS peut être considéré comme une obligation sans risque de crédit de même maturité et valeur nominale. De ce fait, le rendement d'une obligation risquée diminué du spread du CDS doit être égal au rendement d'une obligation sans risque de même maturité et valeur nominale.

Plusieurs travaux menés indépendamment ont validé cette égalité en particulier sur le long terme, voir par exemple BLANCO & AL. [14], ZHU [153]. Cependant à court terme, ZHU observe des différences significatives qu'il explique par le manque de liquidité et la segmentation sur le marché des obligations.

Les spreads des CDS sont une alternative intéressante aux spreads des obligations dans la recherche empirique pour une raison principale : l'utilisation des spreads des CDS évite aux chercheurs de faire des hypothèses sur le taux sans risque. En effet, lorsque les spreads sont calculés à l'aide des rendements des obligations, il est impératif de faire une hypothèse sur le taux sans risque pour que ces rendements puissent être convertis en spreads. Il faut par ailleurs faire des ajustements pour tenir compte des maturités différentes entre les obligations considérées et les obligations sûres (ex : obligations de la Confédération Suisse).

### 5.4.1 Évaluation des Credit Default Swaps

HULL & WHITE [91] ont développé un modèle relativement simple pour la valorisation d'un contrat CDS qui protège l'acheteur du défaut d'une obligation sous-jacente quelconque entre  $t = 0$  et la maturité  $T$  du contrat dans le cadre des modèles d'intensité du risque de défaut. Le spread du CDS  $s$  est le prix annuel de la protection, pour une valeur notionnelle que l'on fixe à 1 unité. Ils font l'hypothèse que le défaut, le taux sans risque ainsi que le taux de recouvrement sont indépendants. On s'inspire ici des travaux de HULL & WHITE [91] pour dériver la valeur du spread d'un CDS. Soit :

$T$  : La maturité du CDS

$R$  : Le taux de recouvrement en cas de défaut

$\tau$  : la date aléatoire du défaut

$t_i$  : les dates des paiements par l'acheteur de la protection, avec  $i = 1, 2, \dots, n$ . Les paiements se font jusqu'à la maturité  $T$  ou jusqu'au défaut, si celui-ci a lieu avant la maturité. On a  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = T$

$\Delta_i$  : le temps en années entre deux dates de paiements, soit  $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$ . Pour un CDS dont les paiements sont trimestriels par exemple, on a  $\Delta_i = 0.25$

$S(t)$  : la probabilité de survie à la date  $t$

$F(t)$  : Le facteur d'actualisation de tout cash flow perçu au temps  $t$ .

$s$  : le spread du CDS, défini en points de base par année de la valeur notionnelle.

Pour simplifier, on suppose que le défaut ou la survie sont constatés uniquement aux dates de paiement de la prime. On note  $V_F$  l'espérance mathématique de la valeur actualisée des paiements fixes payées par l'acheteur de la protection. Celle-ci est égale à la valeur actualisée des primes payées au temps  $t_i$  (étant donné le non-défaut) :

$$V_F = E \left( \sum_{i=1}^n s \cdot \Delta_i \cdot F(t_i) \cdot \mathbf{1}_{\tau > t_i} \right) ; \quad (5.33)$$

où

$$\mathbf{1}_{\tau > t_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau > t_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sachant que  $E(\mathbf{1}_{\tau > t_i}) = S(t_i)$ , on réécrit l'équation (5.33) comme suit :

$$V_F = \sum_{i=1}^n s \cdot \Delta_i \cdot F(t_i) \cdot S(t_i) .$$

On note  $V_D$  la valeur actualisée du paiement dû par le vendeur de la protection en cas de défaut du sous-jacent. À chaque date  $t_i$ , si l'on constate le défaut du crédit, l'acheteur de la protection reçoit le montant  $(1 - R)$  (pour une valeur notionnelle d'une unité). La valeur actuelle espérée de ce montant pour tout  $t_i$  avant la maturité du contrat de ce paiement est donnée par :

$$V_D = E \left( \sum_{i=1}^n (1 - R) F(t_i) \mathbf{1}_{\tau \leq t_i} \right) ; \quad (5.34)$$

où

$$\mathbf{1}_{\tau \leq t_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau \leq t_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ici encore, on remplace  $E(\mathbf{1}_{\tau \leq t_i})$  par  $1 - S(t_i)$  et on écrit l'équation (5.4.1) comme suit :

$$V_D = \sum_{i=1}^n (1 - R) \cdot F(t_i) \cdot (1 - S(t_i)) .$$

Dans l'hypothèse de neutralité face au risque, le spread du CDS doit être tel que la valeur actualisée des paiements  $V_F$  est égale à la valeur actualisée du montant reçu en cas de défaut  $V_D$  et le spread  $s$  du CDS est alors donné par :

$$s = \frac{\sum_{i=1}^n (1 - R) \cdot F(t_i) \cdot (1 - S(t_i))}{\sum_{i=1}^n \Delta_i \cdot F(t_i) \cdot S(t_i)} \quad (5.35)$$

L'équation (5.35) montre que le spread du CDS reflète les anticipations du marché sur le risque de crédit du sous-jacent jusqu'à la maturité du CDS.

### 5.4.2 Des spreads des CDS à l'intensité de défaut : une relation simple

On suppose à présent que les paiements effectués par l'acheteur de la protection sont faits en temps continu. Ceci signifie qu'à chaque instant  $t$  avant la maturité du CDS, l'acheteur observe ou non le défaut instantané du sous-jacent et effectue son paiement en cas de non défaut. On obtient alors l'approximation suivante de la valeur actualisée des primes payées et celle du paiement dû par le vendeur de la protection en cas de défaut :

$$\hat{V}_F = s \int_0^T F(t) \cdot (1 - \lambda_t) dt ,$$

et

$$\hat{V}_D = (1 - R) \int_0^T F(t) \cdot \lambda_t dt .$$

On suppose de plus que l'intensité de défaut est constante c'est-à-dire que le défaut est modélisé comme étant le premier saut d'un processus de Poisson homogène. En égalisant  $\hat{V}_F$  et  $\hat{V}_D$ , on obtient la relation suivante entre le spread du CDS et l'intensité de défaut :

$$s = (1 - R)\lambda . \quad (5.36)$$

Cette formule est similaire à l'équation (5.26) en ce sens qu'elle offre une relation linéaire entre le spread et l'intensité de défaut. L'intensité de défaut ainsi impliquée par les spreads des CDS permet alors d'estimer la probabilité de survie et de défaut à chaque horizon  $t$  à l'aide de l'équation :

$$\widehat{S}(t) = e^{-\lambda \cdot t} .$$

## 5.5 Extensions du modèle d'intensité

Sur les marchés obligataires, on observe qu'un crédit dont le rating est de la catégorie d'investissement a une durée de survie espérée supérieure à celle d'un crédit dont le rating appartient à une catégorie spéculative. De plus, cette espérance évolue avec l'évolution de la notation du crédit.

Pour reproduire cet état de fait, JARROW ET AL. [95] ont développé un modèle qui tient explicitement compte du rating des crédits en tant qu'indicateur de la vraisemblance des défauts. Ce modèle est une extension et un raffinement du modèle de JARROW & TURNBULL [97] qui modélise la distribution de la durée de survie des crédits via une chaîne de Markov homogène et à temps continu dont les états sont les ratings des crédits. D'autres extensions du modèle d'intensité ont été proposées. GAGLIARDINI & GOURIEROUX [68] modélisent le risque de crédit par un ensemble de processus markoviens avec des matrices de transitions stochastiques. Cette spécification a l'avantage d'étendre le modèle d'intensité standard en considérant plus

que deux états c'est-à-dire en prenant aussi en compte les changement de ratings. Ils développent une méthodologie pour estimer le nombre de facteurs qui influencent les transitions et expliquent comment utiliser leur modèle pour prédire le risque de crédit d'un emprunteur. On cite enfin un travail récent de CARIBONI & SCHOUTENS [27] qui étudient des modèles de risque de crédit où le défaut est modélisé à l'aide de processus stochastiques à sauts autres que le processus de Poisson.

## Troisième partie

### La dépendance des défauts





# Chapitre 6

## Les sources de dépendance

La deuxième partie de ce travail examinait les approches quantitatives du risque de défaut. Il s'agissait de présenter les principaux modèles utilisés pour estimer les probabilités de défaut des crédits individuels. Néanmoins, au niveau du portefeuille, les probabilités de défaut des crédits individuels suffisent à déterminer la distribution des pertes du portefeuille seulement en cas d'indépendance entre les crédits. En effet, la variation de la valeur d'un portefeuille de crédits résulte des réalisations des événements de crédit affectant chaque crédit ainsi que des dépendances entre tous ces événements.

Les dernières années ont connu un intérêt grandissant pour le développement des modèles adéquats pour la dépendance des défauts. Cet intérêt fait partie du développement général vers une gestion active du risque de crédit des banques et d'autres institutions financières. On reconnaît globalement qu'à moins que l'exposition soit exceptionnellement grande, les défauts individuels n'affectent pas de manière significative le risque de crédit d'un portefeuille. Cependant, lorsqu'il y a des dépendances fortes et systématiques, même un portefeuille contenant un grand nombre de petits crédits peut être fortement risqué.

Dans le but de protéger les portefeuilles de prêts et d'obligations du risque de crédit, plusieurs nouveaux produits dérivés de crédit dont les revenus dépendent des défauts d'ensemble des crédits ou d'obligations ont été développés. Les principaux exemples sont les dérivés portant sur un panier de crédits : *Collateralized Debt Obligations*(CDO), *Collateralized Loan Obligations*(CLO), et *Collateralized Bond Obligations*(CBO). Ces dérivés, activement transigés sur les marchés financiers sur une base journalière, nécessitent pour leur évaluation, des modèles cohérents pour les dépendances de défaut.

Les événements de crédit c'est-à-dire les améliorations ou dégradations de la qualité de crédit, essentiellement le défaut (mesuré par la probabilité de défaut  $PD$ ) déterminent la valeur d'un portefeuille de crédits. D'autres éléments qui déterminent la distribution de valeur d'un portefeuille de crédits sont la perte en cas de défaut ( $LGD$ ) celle-ci dépendant du taux de recouvrement et de l'exposition au moment du défaut ( $EAD$ ), voir section 3.1. Tous ces éléments de risque qui déterminent le

risque de crédit d'un portefeuille et qui sont utiles à la détermination de la distribution des pertes du portefeuille ne sont à priori pas indépendants entre eux pour deux types de raisons (voir DE SERVIGNY & RENAULT [42] p. 168) :

- Les *raisons spécifiques au secteur*. Les crédits peuvent être affectés par des chocs sectoriels. En effet, étant donné que les firmes émettrices de crédits opèrent sur certains secteurs, elles sont sujettes à des chocs qui touchent ces secteurs. Ces chocs sectoriels, comme par exemple une augmentation du prix des matières premières, vont affecter les probabilités de migration du crédit en général de tout un ensemble de crédits.
- Les *conditions macroéconomiques générales*. L'expansion ou la récession, les modifications des taux d'intérêt, des taux de change affectent toutes les firmes à des degrés différents.

Tenir compte de la dépendance entre les crédits revient à considérer, en plus du risque spécifique de chaque crédit, le risque systématique défini comme le risque supplémentaire du portefeuille qui résulte de l'exposition des crédits à des facteurs de risque communs. C'est pour cette raison que la modélisation et l'estimation de la dépendance des crédits nécessite l'identification de ces facteurs de risque qui sont de nature systématique. Selon les modèles et les données disponibles, ces facteurs pourront être identifiés (facteurs macroéconomiques ou sectoriels) ou alors ils seront supposés latents ou non observables.

Au niveau d'un crédit individuel, il y a souvent un lien entre la probabilité de défaut et l'exposition en cas de défaut. Ceci est notamment le cas lorsque l'emprunteur a la possibilité d'accroître l'exposition lorsque sa situation financière se détériore. La valeur des garanties par exemple, qui sont un élément déterminant le taux de recouvrement et par conséquent l'exposition en cas de défaut n'est pas indépendante du défaut lui-même. En fait, la valeur de bon nombre de garanties dépend, de manière plus ou moins directe, de la valeur des actifs de l'emprunteur et ces garanties perdent par conséquence une grande partie de leur valeur en cas de défaut.

Au niveau du portefeuille, il devrait exister d'une part une dépendance entre tous les événements de crédit des crédits individuels et d'autre part entre les pertes en cas de défauts. En conséquence, ce sont trois catégories de dépendances qu'il faudrait étudier :

1. La dépendance entre les événements de crédit c'est-à-dire entre les migrations des crédits individuels ;
2. La dépendance entre les pertes en cas de défaut qui inclue la dépendance des expositions et la dépendance des taux de recouvrement des crédits et enfin ;
3. La dépendance entre les événements de crédits et les pertes en cas de défaut.

En pratique, l'absence ou le caractère incomplet des données disponibles pour l'estimation de toutes ces dépendances contraint à considérer certains éléments du risque comme non aléatoires et par conséquent indépendants des réalisations des autres facteurs de risque. Les hypothèses les plus courantes sont alors :

- Les pertes en cas de défaut sont indépendantes entre emprunteurs.
- Les pertes en cas de défaut sont indépendantes des événements de crédits.

En plus de ces deux hypothèses, on se bornera dans ce travail à considérer un modèle de défaut, sans prendre en compte les migrations de crédit. La seule dépendance à étudier et à estimer sera donc la dépendance des défauts des différents crédits du portefeuille.

La dépendance statistique entre deux variables est un concept qui veut capturer le fait que la probabilité jointe de deux événements n'est en général, pas le produit des probabilités des événements pris individuellement. Le chapitre 7 abordera un des aspects de la dépendance entre variables aléatoires, la corrélation linéaire. Ensuite, dans les chapitres 8 à 11 on introduira les fonctions copules qui sont des outils permettant de modéliser la dépendance entre variables aléatoires de manière exhaustive.



# Chapitre 7

## La corrélation des défauts

Le coefficient de corrélation constitue une mesure particulière du concept plus général de dépendance stochastique puisqu'il ne capture que la dépendance linéaire entre variables aléatoires. Cependant la notion de corrélation jouit d'un statut privilégié dans la finance moderne en raison de son rôle central en gestion de portefeuille (voir MARKOWITZ [112]). Son usage comme «mesure de dépendance» entre différents instruments financiers est fondé sur l'hypothèse des rendements suivant une distribution normale multivariée. À partir de cette hypothèse, la sélection d'un portefeuille optimal devient possible, car à cette condition, non-corrélation et indépendance sont équivalents.

Dans les modèles de risque de crédit, la corrélation des défauts est calculée de manière différente selon l'approche choisie pour modéliser le défaut. Dans l'approche structurelle du risque de défaut (voir chapitre 4), le défaut d'un crédit à la date  $t$  survient dès que la valeur de marché des actifs de la firme passe sous un certain seuil déterminé par le niveau global de la dette contractée. Pour un horizon quelconque, le défaut d'un crédit est modélisé par une variable de Bernoulli prenant ses valeurs dans  $\{0, 1\}$  où 0 indique le non-défaut et 1 indique le défaut. La corrélation des défauts sera la corrélation de variables de Bernoulli, comme on le verra à la section 7.1.

Dans le cas des modèles réduits, le défaut est considéré comme le saut d'un processus de Poisson (voir chapitre 5). Ces modèles mettent l'accent sur une variable aléatoire continue, la durée de survie d'un crédit, dont la distribution caractérise le risque de défaut d'un crédit. Pour modéliser la dépendance entre deux crédits, on recourt à la corrélation des durées de survie de ces deux crédits que l'on introduira à la section 7.2.

## 7.1 La corrélation des défauts dans les modèles structurels

Cette section s'inspire du chapitre 2 de BLUHM & AL [15] qui considèrent un portefeuille de  $m$  crédits dont chaque crédit  $i = 1, \dots, m$  admet, à la période  $t = 0$ , un certain rating  $R_i \in E = \{0, \dots, d\}$ , selon la qualité de la solvabilité de l'émetteur de ce crédit.  $E$  représente l'ensemble des états de rating possibles et  $d$  signifie l'état de défaut. Une dégradation ou une amélioration de la solvabilité peut conduire à un changement de rating si bien que le rating  $R_{i,t}$  du crédit  $i$  à une date future  $t$  est modélisé par une variable aléatoire discrète qui prend ses valeurs dans l'ensemble  $\{0, \dots, d\}$ .

Puisque l'intérêt porte sur la **corrélation des défauts**, et pour réduire la complexité du problème, l'éventail des ratings est réduit à deux états qui sont le *défaut* et la *survie* de chaque crédit. La survie signifie le non défaut, c'est-à-dire que le rating à l'horizon choisi est différent de  $d$ . On obtient par conséquent une nouvelle variable aléatoire  $L_{i,t} \in \{0, 1\}$  qui décrit, à un horizon donné  $t$  le défaut ou la survie du crédit  $i$ . Dans plusieurs modèles de risque de crédit, l'horizon choisi est d'un an et on note tout simplement cette statistique  $L_i$ . La variable aléatoire  $L_i$  est une variable de Bernoulli et est appelée *statistique de perte*. Elle est égale à «0» en cas de survie du crédit  $i$ , et à «1» en cas de défaut :

$$L_i(R_i) = \mathbf{1}_{\{d\}}(R_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } R_i = d ; \\ 0 & \text{si } R_i \neq d . \end{cases} \quad (7.1)$$

Soit  $p_i$  la probabilité de défaut pour chaque crédit  $i = 1, \dots, m$  du portefeuille. Alors la statistique de perte suit une distribution de Bernoulli  $L_i \sim B(1; p_i)$  dont les deux premiers moments sont :

$$\mathbb{E}(L_i) = p_i \quad \text{et} \quad \text{Var}(L_i) = p_i(1 - p_i) . \quad (7.2)$$

Un portefeuille de crédits est décrit dans ce contexte comme une collection de  $m$  crédits provenant de  $m$  débiteurs différents. Pour chaque débiteur, deux scénarios sont envisagés au bout de l'horizon d'un an : en cas de défaut, la statistique de perte  $L_i$  est égale à 1 et en cas de survie, la statistique de perte est égale à 0. Au niveau du portefeuille, le vecteur  $\mathbf{L} = (L_1, \dots, L_m)'$  est appelé *statistique de perte du portefeuille*.

La *perte absolue* du portefeuille  $L$  respectivement le *pourcentage de perte* du portefeuille noté  $l$  sont définis comme :

$$L = \sum_{i=1}^m L_i \quad \text{respectivement} \quad l = \frac{L}{m} . \quad (7.3)$$

Lorsqu'on suppose une *probabilité de défaut identique*  $p_i = p$  pour tous les crédits du portefeuille et une parfaite indépendance entre les débiteurs, on obtient :

$$L_i \sim B(1; p) \quad \text{pour } i = 1, \dots, m \quad \text{et} \quad (L_i)_{i=1, \dots, m} \text{ indépendants.}$$

Pour ce cas particulier, la perte absolue  $L$  est une somme de variables de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées et suit par conséquent une distribution binomiale de paramètres  $m$  et  $p$ .

Lorsque les crédits sont indépendants mais que chaque crédit  $i$  a une probabilité de défaut  $p_i$ , on obtient les deux premiers moments de perte absolue :

$$E(L) = \sum_{i=1}^m p_i \quad \text{et} \quad \text{Var}(L) = \sum_{i=1}^m p_i(1 - p_i). \quad (7.4)$$

L'hypothèse d'indépendance entre les débiteurs, donc entre les défauts des crédits n'est évidemment pas réaliste. Les débiteurs ne sont pas indépendants, et la covariance entre deux statistiques de perte  $L_i$  et  $L_j$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(L_i, L_j) &= E((L_i - p_i)(L_j - p_j)) \\ &= E(L_i \cdot L_j) - p_i p_j \\ &= p_{ij} - p_i p_j; \end{aligned} \quad (7.5)$$

où  $p_{ij}$  est la probabilité jointe de défaut. La corrélation entre les statistiques de perte  $L_i$  et  $L_j$  ou **la corrélation des défauts** des crédits  $i$  et  $j$  est donc égale à :

$$\rho_{ij} = \frac{E(L_i L_j) - E(L_i)E(L_j)}{\sqrt{\text{Var}(L_i)\text{Var}(L_j)}} = \frac{p_{ij} - p_i \cdot p_j}{\sqrt{p_i(1 - p_i)p_j(1 - p_j)}}. \quad (7.6)$$

Toute la problématique se situe au niveau du calcul de la probabilité jointe de défaut qui est la conséquence de la dépendance entre les défauts. On peut dire intuitivement que plus les crédits sont dépendants, c'est-à-dire leurs débiteurs dépendants, plus la probabilité jointe de défaut est élevée. C'est par exemple le cas pour des débiteurs opérant dans un même secteur de marché. A l'inverse, plus les débiteurs sont éloignés économiquement et/ou géographiquement, plus la probabilité qu'ils fassent défaut simultanément est faible.

Pour modéliser la dépendance entre les défauts, la méthodologie utilisée est empruntée à JOE [98] p. 209 et ss qui considère les probabilités de défaut elles-mêmes comme des variables aléatoires. Il s'agira alors de modéliser la dépendance entre les probabilités de défaut. En effet, les probabilités de défaut des crédits sont déterminées par des facteurs de risque à savoir des raisons spécifiques aux émetteurs, des raisons spécifiques au secteur ou encore des conditions macroéconomiques générales. Ces facteurs de risque peuvent être représentés par des variables aléatoires comme par exemple le taux d'intérêt, le prix du pétrole etc. Les probabilités de défaut qui sont une conséquence de ces facteurs de risque doivent être par conséquent elles

aussi des variables aléatoires. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle les probabilités de défaut ne sont pas stables dans le temps.

Dans cette optique, pour un portefeuille de  $m$  crédits, on représente les probabilités de défaut des crédits individuels par les variables aléatoires  $P_1, \dots, P_m$  qui forment un vecteur aléatoire  $\mathbf{P}$  pour le portefeuille. On parle alors de **modèle général mixte de Bernoulli**, voir BLUHM & AL [15] p.58 et ss. On suppose que  $\mathbf{P}$  dont le vecteur  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)'$  est une réalisation suit une distribution  $\mathbf{F}$  ayant son support dans  $[0, 1]^m$  :

$$\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_m) \sim \mathbf{F} ,$$

$$\mathbf{F} : \begin{cases} [0, 1]^m & \rightarrow [0, 1] \\ (p_1, \dots, p_m)' & \mapsto F(p_1, \dots, p_m) = P(P_1 \leq p_1, \dots, P_m \leq p_m) \end{cases} \quad (7.7)$$

La dépendance entre les défauts sera entièrement décrite par la fonction  $\mathbf{F}$ . Chaque réalisation  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)'$  du vecteur  $\mathbf{P}$  incorpore la dépendance entre les défauts en ce sens que les probabilités de défaut s'influencent les unes les autres. Par exemple, si deux crédits  $i$  et  $j$  du portefeuille sont dépendants, ceci se traduira par une probabilité jointe de défaut qui sera supérieure au produit des probabilités individuelles de défaut. Nous verrons par ailleurs à la sous-section 7.1.2 que la covariance entre deux statistiques de perte est égale à la covariance entre les deux variables aléatoires qui représentent les probabilités de défaut y associées. La sous-section 7.1.3 donnera une spécification de la fonction  $\mathbf{F}$ , celle utilisée par le modèle CreditMetrics<sup>TM</sup>.

### 7.1.1 Distribution de chaque statistique de perte

Pour une réalisation  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)'$  du vecteur  $\mathbf{P}$ , on a la distribution conditionnelle suivante de chaque statistique de perte :

$$L_i | P_i = p_i \sim B(1; p_i) .$$

On réécrit cette expression de la manière suivante :

$$P(L_i = l_i | P_i = p_i) = p_i^{l_i} (1 - p_i)^{1-l_i} \quad \text{avec} \quad l_i \in \{0, 1\} . \quad (7.8)$$

Lorsque la distribution de  $P_i$  est discrète, la figure 7.1 représente les réalisations possibles de  $P_i$  ainsi que la distribution de la statistique de perte associée à chaque réalisation. Le théorème des probabilités totales donne dans ce cas :

$$\begin{aligned} P(L_i = l_i) &= \sum_{k=1}^n P(L_i = l_i | P_i = p_{i,k}) \cdot P(P_i = p_{i,k}) \\ &= \sum_{k=1}^n p_{i,k}^{l_i} (1 - p_{i,k})^{1-l_i} \cdot P(P_i = p_{i,k}) . \end{aligned} \quad (7.9)$$



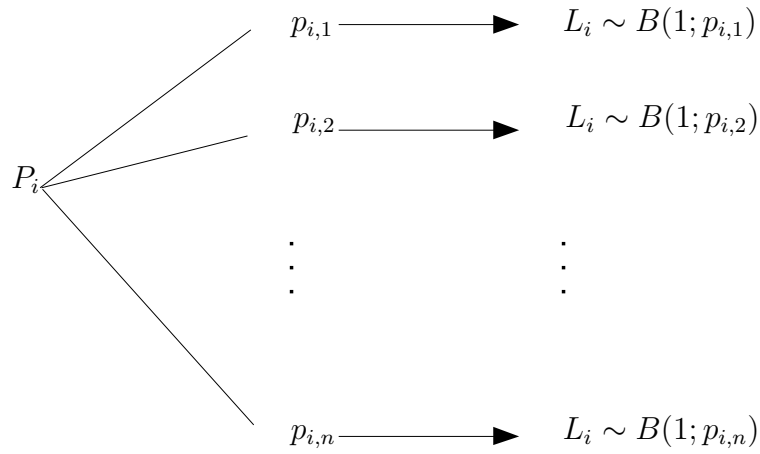


FIG. 7.1 – Distribution conditionnelle de chaque statistique de perte

Lorsque la distribution de chaque  $P_i$  est continue, la version continue du théorème des probabilités totales donne la distribution non conditionnelle des statistiques de perte  $L_i$  :

$$P(L_i = l_i) = \int_{[0,1]} p_i^{l_i} (1 - p_i)^{1-l_i} dF_i ; \quad (7.10)$$

où  $F_i$  désigne la distribution de  $P_i$ .

Dans ce cas, les deux premiers moments de chaque  $L_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  sont :

$$\begin{aligned} E(L_i) &= 0 \cdot P(L_i = 0) + 1 \cdot P(L_i = 1) \\ &= 0 \cdot \int_{[0,1]} p_i^0 (1 - p_i)^{1-0} dF_i + 1 \cdot \int_{[0,1]} p_i^1 (1 - p_i)^{1-1} dF_i \\ &= E(P_i) \end{aligned} \quad (7.11)$$

et

$$\begin{aligned} \text{Var}(L_i) &= \text{Var}(E(L_i | \mathbf{P})) + E(\text{Var}(L_i | \mathbf{P})) \\ &= \text{Var}(P_i) + E(P_i(1 - P_i)) \\ &= E(P_i)(1 - E(P_i)) . \end{aligned} \quad (7.12)$$

### 7.1.2 Distribution jointe des statistiques de perte

On suppose maintenant que conditionnellement à une réalisation de  $\mathbf{p}$  du vecteur aléatoire  $\mathbf{P}$ , les variables  $L_1, \dots, L_m$  sont indépendantes. La distribution jointe conditionnelle des statistiques de perte est donc donnée par :

$$P(L_1 = l_1, \dots, L_m = l_m | \mathbf{P} = (p_1, \dots, p_m)') = \prod_{i=1}^m p_i^{l_i} (1 - p_i)^{1-l_i} . \quad (7.13)$$

La distribution jointe non conditionnelle des  $L_i$  ou la distribution du vecteur  $\mathbf{L}$  est par conséquent :

$$P(L_1 = l_1, \dots, L_m = l_m) = \int_{[0,1]^m} \prod_{i=1}^m p_i^{l_i} (1 - p_i)^{1-l_i} d\mathbf{F}, \quad (7.14)$$

où  $l_i \in \{0, 1\}$  et  $\mathbf{F}$  est la fonction de répartition du vecteur  $\mathbf{P}$ .

De manière plus générale, la distribution jointe des statistiques de pertes et entièrement définie par la distribution multivariée  $\mathbf{F}$  de  $\mathbf{P}$  comme le montre l'équation (7.14).

La distribution jointe des deux statistiques est en fait une marge à deux dimensions de la distribution jointe du vecteur  $\mathbf{L}$  :

$$P(L_i = l_i, L_j = l_j) = \int_{[0,1]^2} p_i^{l_i} (1 - p_i)^{1-l_i} p_j^{l_j} (1 - p_j)^{1-l_j} dF_{i,j};$$

où  $l_i, l_j \in \{0, 1\}$  et  $F_{i,j}$  est la distribution du vecteur  $(P_i, P_j)'$ .

La covariance entre deux statistiques de perte est donnée par :

$$\text{Cov}(L_i, L_j) = E(L_i L_j) - E(L_i)E(L_j). \quad (7.15)$$

La variable aléatoire  $L_i L_j$  prend aussi ses valeurs dans l'ensemble  $\{0, 1\}$  et on obtient la valeur 1 lorsque  $L_i$  et  $L_j$  sont simultanément égaux à 1 et prend la valeur 0 sinon. Ceci implique que l'espérance mathématique de  $L_i L_j$  est égale à la probabilité que  $L_i$  et  $L_j$  soient égaux à 1 c'est-à-dire :

$$E(L_i L_j) = P(L_i = 1, L_j = 1) = \int_{[0,1]^2} p_i p_j dF_{i,j} = E(P_i P_j). \quad (7.16)$$

A partir des équations (7.15), (7.16) et (7.11), on obtient l'expression suivante de la covariance entre deux statistiques de pertes individuelles :

$$\text{Cov}(L_i, L_j) = \text{Cov}(P_i P_j). \quad (7.17)$$

On obtient finalement la **corrélation des défauts du modèle général mixte de Bernoulli** :

$$\text{Corr}(L_i, L_j) = \frac{\text{Cov}(P_i, P_j)}{\sqrt{E(P_i)(1 - P_i)} \sqrt{E(P_j)(1 - P_j)}}. \quad (7.18)$$

Les équations (7.17) et (7.18) montrent que la covariance entre les statistiques de perte du portefeuille est entièrement décrite par la structure de covariance des probabilités de défaut.

Les différents modèles de risque de crédit choisissent des différentes spécifications pour la fonction  $\mathbf{F}$ . Dans la sous-section suivante, on verra que CreditMetrics<sup>TM</sup> utilise la corrélation des rendements des actifs comme approximation de la corrélation des défauts, et que le modèle choisi pour la fonction  $\mathbf{F}$  de l'équation (7.14) est simplement une distribution normale dont le paramètre est la matrice de corrélation des rendements des actifs.

### 7.1.3 La corrélation des défauts selon CreditMetrics™

Comme on l'a vu à la section 4.5, CreditMetrics™ est un modèle structurel en ce sens qu'il relie le défaut d'un crédit  $i$  à l'horizon  $t$  à la valeur des actifs correspondant à cet horizon. La valeur des actifs, notée  $A_t^i$  est comparée à un seuil critique  $C_i$  de façon que le crédit fait défaut à la fin de la période  $[0, t]$  si et seulement si  $A_t^i \leq C_i$ . C'est cette même approche qui est utilisée par MOODY'S KMV, voir section 4.4.

Pour chaque crédit  $i = 1, \dots, m$ , la valeur des actifs  $A_t^i$  est considérée comme une variable latente qui détermine l'événement de défaut. La statistique de perte s'écrit par conséquent :

$$L_i(A_t^i) = \mathbf{1}_{\{A_t^i \leq C_i\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } A_t^i \leq C_i \\ 0 & \text{si } A_t^i > C_i \end{cases} \quad (7.19)$$

On obtient par conséquent :

$$L_i \sim B(1; P(A_t^i < C_i)) . \quad (7.20)$$

CreditMetrics™ fait l'hypothèse que la valeur des actifs dépend d'un ensemble de facteurs reflétant des influences sectorielles et régionales, qui de ce fait, déterminent le futur économique de la firme. Ceci est implémenté par la modélisation du log-rendement des actifs  $X_i = \ln \left( \frac{A_t^i}{A_0^i} \right)$  par une distribution normale. Soit alors  $Z_i$  le log-rendement standardisé tel que  $Z_i \sim N(0, 1)$ . Pour chaque crédit  $i = 1, \dots, m$ , CreditMetrics™ fait l'hypothèse supplémentaire que  $Z_i$  est une fonction linéaire d'un facteur composite  $\Psi_i$  qui est une moyenne pondérée des indices sectoriels et régionaux.

$$Z_i = \beta_i \Psi_i + \varepsilon_i; \quad i = 1, \dots, m; \quad (7.21)$$

où  $\varepsilon_i$  est la variation du rendement due à des facteurs spécifiques à la firme (voir BLUHM & AL [15] p. 47). Le coefficient  $\beta_i$  reflète la sensibilité du log-rendement standardisé aux changements de valeur du facteur composite  $\Psi_i$ . On a alors :

$$Z_i \sim N(0, 1), \quad \Psi_i \sim N(0, 1), \quad \text{et} \quad \varepsilon_i \sim N(0, 1 - \beta_i^2). \quad (7.22)$$

La corrélation entre les rendements des actifs est alors exclusivement capturée par la corrélation entre les différents facteurs sectoriels et régionaux. Les facteurs spécifiques sont supposés indépendants parmi les firmes et indépendants des facteurs sectoriels et régionaux.

On est maintenant en mesure de réécrire l'expression de la statistique de perte de l'équation (7.20) de la manière suivante :

$$L_i = \mathbf{1}_{\{Z_i \leq c_i\}} \sim B(1; P(Z_i < c_i)) , \quad (7.23)$$

où  $c_i$  est le seuil de défaut correspondant au seuil  $C_i$  après la transformation de  $A_t^i$  par  $Z_i$ .

L'horizon d'évaluation de CreditMetrics<sup>TM</sup> est d'une année si bien que la probabilité annuelle de défaut pour le crédit  $i$  s'écrit  $p_i = P(Z_i < c_i)$ . Puisque  $Z_i$  suit une distribution normale standardisée, on obtient le seuil de défaut pour le rendement annuel standardisé :

$$c_i = \Phi^{-1}(p_i) , \quad (7.24)$$

où  $\Phi^{-1}$  est l'inverse de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

En utilisant la relation de l'équation (7.21), la condition de défaut  $Z_i < c_i$  équivaut à

$$\varepsilon_i < c_i - \beta_i \Psi_i . \quad (7.25)$$

Soit  $\tilde{\varepsilon}_i$  la variable aléatoire obtenue par standardisation de  $\varepsilon$  de manière à avoir une variance unitaire. On obtient, avec l'équation (7.24) la condition de défaut suivante :

$$\tilde{\varepsilon}_i < \frac{\Phi^{-1}(p_i) - \beta_i \Psi_i}{\sqrt{1 - \beta_i^2}}; \quad \tilde{\varepsilon}_i \sim N(0, 1) . \quad (7.26)$$

Pour une réalisation  $\psi_i$  du facteur composite  $\Psi_i$ , on obtient finalement la représentation suivante de la probabilité annuelle de défaut du crédit  $i$  conditionnellement au facteur composite  $\Psi_i = \psi_i$  :

$$p_i(\psi_i) = P\left(\tilde{\varepsilon}_i < \frac{\Phi^{-1}(p_i) - \beta_i \psi_i}{\sqrt{1 - \beta_i^2}}\right) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i(\psi_i)) - \beta_i \psi_i}{\sqrt{1 - \beta_i^2}}\right) . \quad (7.27)$$

En résolvant cette équation on obtient l'expression de la probabilité annuelle de défaut en fonction du facteur composite  $\psi_i$  :

$$p_i(\psi_i) = \Phi\left(\frac{\beta_i \psi_i}{1 - \sqrt{1 - \beta_i^2}}\right) = \Phi(c_i) , \quad (7.28)$$

d'après l'équation (7.24). On remarque que le seuil de rendement standardisé déclenchant le défaut  $c_i$  dépend de la réalisation du facteur composite  $\psi_i$ .

Étant donné  $\Psi_i = \psi_i$ , la distribution conditionnelle de la statistique de perte pour le crédit  $i$  s'écrit :

$$P(L_i = l_i) = p_i(\psi_i)^{l_i} (1 - p_i(\psi_i))^{1-l_i} , \quad (7.29)$$

où  $l_i \in \{0, 1\}$  et  $p_i(\psi_i)$  est donné par l'équation (7.28). Par exemple, on a

$$P(L_i = 1) = p_i(\psi_i) = \Phi\left(\frac{\beta_i \psi_i}{1 - \sqrt{1 - \beta_i^2}}\right) = \Phi(c_i) .$$

Dans le cas de CreditMetrics<sup>TM</sup>, la distribution non conditionnelle pour chaque statistique de perte est donnée par l'équation (7.10) où  $p_i$  est remplacée par  $p_i(\psi_i)$  et la fonction  $F_i$  a la spécification suivante :

$$F_i \equiv \Phi \left( \frac{\beta_i \psi_i}{1 - \sqrt{1 - \beta_i^2}} \right)$$

Au niveau du portefeuille, la distribution jointe non conditionnelle des statistiques de perte est donnée par l'équation (7.14) où la fonction  $\mathbf{F}$  est donnée par :

$$\mathbf{F} \equiv \Phi(c_1, \dots, c_m; \boldsymbol{\rho}) ; \quad (7.30)$$

avec  $\Phi$  dénote la fonction de répartition de la loi normale multivariée à  $m$  dimensions,  $c_i \equiv \frac{\beta_i \psi_i}{1 - \sqrt{1 - \beta_i^2}}$  et  $\boldsymbol{\rho} = [\rho_{ij}]$ ,  $1 \leq i, j \leq m$  est la matrice de corrélation des rendements standardisés  $\tilde{X}_i$ . La spécification de la fonction  $\mathbf{F}$  permet de calculer la probabilité jointe de défaut, input nécessaire au calcul des corrélations des défauts. Le document technique de CreditMetrics<sup>TM</sup>, GUPTON & AL [83] propose une illustration du calcul de la corrélation des défauts selon CreditMetrics<sup>TM</sup>. Celui-ci se fait en trois étapes :

- Pour deux crédits  $i$  et  $j$  d'un portefeuille, les probabilités individuelles annuelles  $p_i$  et  $p_j$  de défauts sont estimées par la matrice de transition (voir section 4.5). Les seuils de défaut du log-rendement standardisé  $c_i$  et  $c_j$  sont obtenus à l'aide de l'équation (7.24).
- Le défaut joint des deux crédits survient dès que les log-rendements standardisés passent simultanément sous les seuils respectifs :

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P(L_i = 1, L_j = 1) = P(\tilde{Z}_i < \Phi^{-1}(p_i), \tilde{Z}_j < \Phi^{-1}(p_j)) \\ &= \Phi_2(c_i, c_j, \rho) , \end{aligned}$$

où  $\Phi_2$  est la fonction de répartition bivariée de la loi normale standardisée et  $\rho$  est la corrélation des rendements

- Enfin, la corrélation des défauts est calculée par l'équation (7.6).

La corrélation des défauts selon le modèle de Bernoulli est une corrélation entre deux variables aléatoires discrètes dichotomiques qui décrivent le défaut ou la survie des crédits à un horizon annuel. C'est pour cette raison que LI [107] parle de **corrélation discrète des défauts**. Pour LI [107], le choix d'un horizon particulier comme un an est plus ou moins arbitraire et le rattachement de la corrélation des défauts à un intervalle de temps particulier comporte deux désavantages.

Premièrement, le défaut est une issue qui est dépendante du temps en ce sens qu'il peut être lié à l'âge d'un crédit, depuis son émission. LI [107] donne comme exemple la survie ou le décès d'un être humain. Pour un homme âgé de 50 ans aujourd'hui, la probabilité annuelle de survie est environ de 0.9957 selon les tables de mortalité pour la Suisse. Cependant, la probabilité annuelle de survie de cette même personne au bout de 50 ans est presque nulle, le décès de cette personne au bout de 50 ans étant un événement quasi sûr !

Puisque le défaut est lié à l'âge des crédits, alors la corrélation des défauts sera elle aussi dépendante de l'âge des crédits. Considérons cette fois deux personnes âgées de

50 ans qui forment un couple. Si on considère la probabilité annuelle jointe de survie du couple, on peut dire intuitivement que la corrélation entre les deux événements que chacun décède dans une année est faible. Par contre, la corrélation entre les deux événements discrets que chacun décède dans 100 ans est 1.

Deuxièmement, pour l'évaluation de certains dérivés de crédit qui portent sur plusieurs crédits sous-jacents, la corrélation à un an n'est pas suffisante. En effet, ces dérivés ont souvent échéance qui tombe en dehors de l'intervalle de temps d'une année. Ce qu'il faudrait, dans cette situation, est un concept de corrélation qui permettrait de calculer une corrélation des défauts à un horizon quelconque. La section suivante décrit un concept de corrélation plus général que la corrélation discrète des défauts.

## 7.2 La corrélation des défauts dans les modèles réduits

Dans le cadre de l'approche par les modèles à forme réduite du défaut, en particulier le modèle d'intensité (voir chapitre 5), on ne s'intéresse pas aux causes ou aux raisons économiques du défaut qui est envisagé comme un événement exogène et imprévisible. Ces modèles présentent le défaut comme le saut d'un processus stochastique de Poisson en temps continu  $\{X(t); t \geq 0\}$ .

Dans le cas particulier d'un processus de Poisson homogène, la probabilité de défaut du crédit  $i = 1, \dots, m$  à la date  $t$  est alors donnée par :

$$p_i^t = P(X_i(t) \geq 1) = 1 - e^{-\lambda_i t}, \quad (7.31)$$

où  $\lambda_i$  est l'intensité de défaut du crédit  $i$  ou le paramètre du processus de Poisson.

On s'intéresse ici non pas à la variable  $X(t)$ , à la durée **durée de survie**  $\tau_i$  du crédit  $i$  (voir section 5.2). Soit la fonction de répartition  $F_i$  de la durée de survie  $\tau_i$ . La probabilité que la durée de survie soit inférieure à  $t$  ou la probabilité de défaut du crédit  $i$  à l'horizon  $t$  est donnée par :

$$F_i(t) = P(\tau_i \leq t). \quad (7.32)$$

Au niveau du portefeuille, la caractérisation du défaut à l'aide d'une variable indicatrice permet de définir une statistique de perte à chaque instant, si bien la gestion du risque de crédit peut se faire de manière continue. Pour chaque crédit  $i$ , on définit au temps  $t$  la statistique de perte  $L_{i,t}$  comme suit :

$$L_{i,t} = \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau_i \leq t ; \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases} \quad (7.33)$$

Soient  $p_i^t = P(\tau_i \leq t) = P(L_{i,t} = 1)$ ,  $p_j^t = P(\tau_j \leq t) = P(L_{j,t} = 1)$  et  $p_{ij}^t = P(\tau_i \leq t, \tau_j \leq t) = P(L_{i,t} = 1, L_{j,t} = 1)$ . Alors, la corrélation entre deux statistiques de perte  $L_{i,t}$  et  $L_{j,t}$  est donnée par :

$$\rho_{ij}^t = \text{Corr}(L_{i,t}, L_{j,t}) = \frac{p_{ij}^t - p_i^t p_j^t}{\sqrt{p_i^t(1 - p_i^t)p_j^t(1 - p_j^t)}} , \quad (7.34)$$

Comme alternative à la corrélation des statistiques de perte de l'équation (7.34), LI [107] propose la **corrélation des durées de survie** comme mesure de dépendance entre les défauts des crédits d'un portefeuille. Cette conception de la corrélation a l'avantage d'être plus générale que la corrélation des statistiques de perte puisqu'elle n'est pas rattachée à un horizon de temps défini. En effet, lorsque deux crédits  $i$  et  $j$  sont indépendants, la date d'occurrence du défaut du crédit  $i$  n'a aucune influence sur la date d'occurrence du défaut du crédit  $j$ . Ceci implique que les deux durées de survie  $\tau_i$  et  $\tau_j$  sont indépendantes et que la probabilité jointe de défaut à un horizon  $t$  quelconque est :

$$P(\tau_i \leq t, \tau_j \leq t) = P(\tau_i \leq t) \cdot P(\tau_j \leq t) .$$

Pour deux crédits  $i$  et  $j$ , la corrélation des durées de survies est donnée par :

$$\rho_{ij} = \frac{\text{Cov}(\tau_i, \tau_j)}{\sqrt{\text{Var}(\tau_i)\text{Var}(\tau_j)}} = \frac{E(\tau_i \tau_j) - E(\tau_i)E(\tau_j)}{\sqrt{\text{Var}(\tau_i)\text{Var}(\tau_j)}} . \quad (7.35)$$

En outre, lorsqu'on a les fonctions de répartition  $F_i$  et  $F_j$  des durées de survie respectives  $\tau_i$  et  $\tau_j$  et la fonction de répartition jointe  $F_{ij}$  de deux durées de survies  $\tau_i$  et  $\tau_j$ , on peut calculer la corrélation des statistiques de perte à n'importe quel horizon.

Pour un horizon  $t = 1$  année, on définit les événements suivants :

$$\begin{aligned} E_i^1 &= \{\tau_i < 1\} , \\ E_j^1 &= \{\tau_j < 1\} , \end{aligned}$$

où l'événement  $E_i^1$  signifie que la durée de survie du crédit  $i$  est inférieure à un an. Ceci veut dire que le défaut va survenir dans le courant de l'année. La corrélation des statistiques de perte des crédits  $i$  et  $j$  à un horizon d'un an est selon l'équation (7.6) :

$$\rho_{ij}^1 = \frac{p_{ij}^1 - p_i^1 \cdot p_j^1}{\sqrt{p_i^1(1 - p_i^1)p_j^1(1 - p_j^1)}} ;$$

où

$$p_i^1 = P(E_i^1) \quad p_j^1 = P(E_j^1), \quad p_{ij}^1 = P(E_i^1 \cap E_j^1) .$$

Par contre, lorsqu'on a la corrélation des statistiques de perte sur une année, il est impossible d'en déduire la corrélation des durées de survie.

Pour modéliser la dépendance entre les défauts, on recourt comme dans le cas des modèles structurels, à la méthodologie de JOE [98] p. 209. Dans le contexte des modèles d'intensité, les probabilités de défaut dépendent des intensités de défaut, voir équation (7.31). Pour chaque crédit  $i$ , on considère que l'intensité de défaut est une variable aléatoire  $\Lambda_i$  dont les réalisations possibles sont  $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2} \dots$  et la fonction de répartition  $F_i$ .

Étant donné une réalisation particulière  $\lambda_i$  de la variable  $\Lambda_i$ , la distribution de la statistique de perte  $L_i^t$  est donnée par :

$$P(L_i^t = l_i | \Lambda_i = \lambda_i) = \underbrace{(1 - e^{-\lambda_i t})^{l_i}}_{p_i^t} \underbrace{(e^{-\lambda_i t})^{1-l_i}}_{1-p_i^t} \quad \text{avec} \quad l_i \in \{0, 1\} . \quad (7.36)$$

La distribution non conditionnelle de la statistique de perte est :

$$P(L_i^t = l_i) = \int_{[0, \infty]} (1 - e^{-\lambda_i t})^{l_i} (e^{-\lambda_i t})^{1-l_i} dF_i . \quad (7.37)$$

On fait ensuite l'hypothèse que la seule source de corrélation entre les durées de survie est la corrélation entre les intensités. On dit alors que le modèle d'intensité est un modèle de défaut doublement stochastique (voir JARROW, LANDO & YU [96]) puisqu'il fait l'hypothèse que les défauts sont indépendants conditionnellement aux réalisations des intensités de défaut. Sous cette hypothèse, la distribution jointe de la statistique de perte du portefeuille est calculée pour chaque instant  $t$  de la manière suivante :

$$P(L_1^t = l_1, \dots, L_m^t = l_m) = \int_{[0, \infty]^m} \prod_{i=1}^m p_i^{l_i} (1 - p_i)^{1-l_i} d\mathbf{F} , \quad (7.38)$$

où  $l_i \in \{0, 1\}$ ,  $p_i = P(\tau_i \leq t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$  et  $\mathbf{F}$  est la fonction de répartition du vecteur des intensités  $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_m)$ . Pour les applications de ce modèle, il est indispensable de modéliser la distribution jointe des intensités  $\mathbf{F}$  et d'en estimer les paramètres à l'aide de données observables sur le marché, comme par exemple les données sur les spreads.

### 7.3 Déficiences de la corrélation

Comme on l'a mentionné au début de ce chapitre, la corrélation est la «mesure de dépendance» la plus utilisée en finance. Il est donc commun en finance d'utiliser la corrélation comme terme générique pour parler de dépendance. Néanmoins, même si la corrélation des défauts, telle que définie par les équations 7.6, 7.34 et 7.35 donne une idée de la dépendance entre deux crédits, elle ne permet pas de déduire la distribution de la statistique de perte du portefeuille. En effet, la corrélation est insuffisante pour décrire toute la structure de dépendance, sauf lorsqu'on fait l'hypothèse de la distribution normale, comme le fait CreditMetrics<sup>TM</sup>.



Certaines propriétés de la corrélation font ressortir non seulement son insuffisance mais aussi son inadéquation dans certains cas en tant que mesure de dépendance. Ces propriétés seront revisitées plus en détails à la section 9.2.3.

- Les équations (7.6) et (7.35) montrent que la corrélation n'est définie que si les variances sont finies.
- Deux variables aléatoires parfaitement dépendantes peut avoir une corrélation proche ou égale à 0.
- La corrélation n'est pas une mesure invariante pour des transformation monotones de variables aléatoires.
- Plusieurs distributions bivariées peuvent avoir les même marges, la même corrélation et avoir une forme différente.

Ces propriétés font de la corrélation une mesure partielle et insuffisante de la dépendance. La corrélation n'est qu'une mesure de dépendance linéaire et n'exprime pas les autres formes de dépendance. Pour décrire toute la structure de dépendance entre deux variables aléatoires, les statisticiens recourent actuellement de plus en plus aux fonctions copules qui sont l'objet des chapitres suivants.



# Chapitre 8

## Les fonctions copules

Dans le *Petit Robert*, la définition du mot «copule» est la suivante : «mot issu du mot latin *copula* qui signifie lien, chaîne, union». Le concept de copule a été introduit en Statistique par SKLAR en 1959 pour résoudre un problème de probabilité énoncé par FRÉCHET. À cette époque, SKLAR et SCHWEIZER travaillent sur les espaces métriques aléatoires qui sont une généralisation de l'espace métrique usuel introduit par FRÉCHET en 1906. Un espace métrique consiste en un ensemble  $S$  et une métrique  $d$  qui mesure la distance entre des points  $p$  et  $q$  de  $S$ . Dans le contexte des espaces métriques aléatoires, les distances  $d(p, q)$  sont remplacées par une fonction de distribution  $F_{pq}$  dont la valeur pour chaque réel  $x$  est la probabilité que la distance entre  $p$  et  $q$  soit inférieure à  $x$ . Le problème posé par FRÉCHET était de trouver un analogue en termes de probabilités à l'inégalité du triangle  $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$ . La question était de faire un lien entre les fonctions  $F_{pr}$ ,  $F_{pq}$  et  $F_{qr}$  pour trois points  $p, q$  et  $r$  dans  $S$ . Dans sa réponse à ce problème, SKLAR inventait la notion statistique de copule. Même si la notion de copule occupe une place importante dans les travaux de SKLAR et SCHWEIZER, elle n'est pas l'objet central de leurs recherches.

Pendant de nombreuses années, les copules sont peu ou pas utilisées en statistiques. Elles apparaissent de manière implicite dans certains travaux sur la dépendance de KIMELDORF et SAMPSON [105], [104] en 1975 et aussi dans les recherches de DEHEUVELS [44] à la fin des années 1970 qui parle alors de «fonction de dépendance empirique». C'est seulement vers le début des années 1980 que les copules font l'objet d'une étude systématique par quelques statisticiens. Le premier article qui établit un lien explicite entre les copules et l'étude de la dépendance entre variables aléatoires est celui de SCHWEIZER et WOLFF [140] en 1981. SCHWEIZER et WOLFF présentent une propriété très importante qui est l'invariance des copules pour une transformation strictement monotone des variables aléatoires.

Aujourd'hui, les copules sont de plus en plus employées pour la construction des familles de distributions multivariées et l'étude de la dépendance entre variables aléatoires. C'est un domaine qui intéresse particulièrement les chercheurs et les praticiens en gestion de risque en finance et en assurance. Par exemple, en assurance

non-vie, le calcul des provisions dépend de manière cruciale de la dépendance entre les sinistres. Dans la finance moderne, les mesures de risque d'un portefeuille d'actifs ou de crédits reposent sur la spécification de la distribution des pertes du portefeuille. Celle-ci suppose au préalable la modélisation de la dépendance entre les pertes individuelles du portefeuille. Le choix du modèle pour cette dépendance est central. En effet, lorsque ces mesures de risque sont effectués à l'aide d'un critère de type Value at Risk (VaR), c'est un quantile qui est recherché, et si la dépendance se situe surtout au niveau des valeurs élevées (et que les lois sont à queues de distribution épaisses), le quantile sera plus élevé que si la dépendance est concentrée sur les valeurs intermédiaires.

En gestion de risque de crédit en particulier, le principal risque supporté par l'investisseur en obligations ou en crédits est le risque de défaut. Le risque global d'un portefeuille d'obligations ou de crédits est par conséquent une fonction de la dépendance entre les défauts des crédits individuels du portefeuille. Aussi, certains dérivés de crédit offrent des payoffs qui dépendent du défaut de plusieurs crédits risqués sous-jacents. L'étude de la dépendance entre les défauts est par conséquent cruciale.

En général, deux variables aléatoires peuvent par exemple être très corrélées pour leurs valeurs extrêmes et faiblement pour des valeurs intermédiaires, ou fortement corrélées pour des valeurs élevées et faiblement pour les valeurs basses, ou encore fortement corrélées pour les valeurs basses et faiblement pour les valeurs élevées. Toutes les variantes entre ces situations extrêmes sont possibles et doivent pouvoir être capturées par la mesure de dépendance. Il est donc primordial d'utiliser un outil qui permet de modéliser et de spécifier la structure de dépendance de façon complète, c'est-à-dire sur tout le domaine de définition de la distribution multivariée.

## 8.1 Définition des copules et propriétés de base

Cette section a pour objectif d'introduire la notation qui sera employée, de définir les fonctions copules et d'en énumérer les propriétés de bases. Les définitions et théorèmes ci-dessous font l'objet du chapitre 2 de NELSEN [119]. On désigne  $\mathbb{R}$  la droite finie des réels  $[-\infty, +\infty]$  et par  $\mathbb{R}^2$  le plan fini des réels  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Le carré unitaire  $\mathbf{I}^2$  est le produit  $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$  où  $\mathbf{I} = [0, 1]$ .

Une *fonction réelle bidimensionnelle*  $H$  est une fonction ayant pour domaine,  $D(H)$ , un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  et ayant pour image,  $I(H)$ , un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ . Une *fonction réelle bidimensionnelle*  $H$  est dite *double croissante*<sup>1</sup> lorsque pour tout  $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2 \in D(H)$  on a :

$$H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1) \geq 0 .$$

---

<sup>1</sup>Cette notion correspond à la notion *2-increasing function*.

**Définition 8.1.** Une copule à deux dimensions est une fonction réelle bidimensionnelle

$$\mathbf{C} : \begin{cases} \mathbf{I}^2 & \longrightarrow \mathbf{I} \\ (u, v) & \longmapsto C(u, v), \end{cases}$$

ayant les propriétés suivantes :

1. Pour tout  $u$  et  $v \in \mathbf{I}^2$ ,

$$\mathbf{C}(u, 0) = 0 = \mathbf{C}(0, v) \quad (8.1)$$

$$\mathbf{C}(u, 1) = u \text{ et } \mathbf{C}(1, v) = v \quad (8.2)$$

2. Pour tout  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbf{I}$  tels que  $u_1 \leq u_2$  et  $v_1 \leq v_2$ ,

$$\mathbf{C}(u_2, v_2) - \mathbf{C}(u_2, v_1) - \mathbf{C}(u_1, v_2) + \mathbf{C}(u_1, v_1) \geq 0 \quad (8.3)$$

D'après cette définition, les copules à deux dimensions sont une classe de fonctions réelles bidimensionnelles qui sont double-croissantes.

**Théorème 8.1.** Soit  $\mathbf{C}$  une copule. Pour tout  $(u, v) \in \mathbf{I}^2$ ,

$$\max(u + v - 1, 0) \leq \mathbf{C}(u, v) \leq \min(u, v). \quad (8.4)$$

Il est aisé de prouver que les bornes  $\max(u + v - 1, 0)$  et  $\min(u, v)$  sont elles-mêmes des copules. On les dénote  $\mathbf{C}^+(u, v) = \min(u, v)$  et  $\mathbf{C}^-(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ . Ainsi, pour chaque fonction copule  $\mathbf{C}$  et chaque couple  $(u, v) \in \mathbf{I}^2$

$$\mathbf{C}^-(u, v) \leq \mathbf{C}(u, v) \leq \mathbf{C}^+(u, v). \quad (8.5)$$

L'inégalité (8.5) est la version en matière de copules, de l'inégalité de Fréchet-Hoeffding, qui sera plus explicitée par la suite en termes de fonctions de distributions. La copule  $\mathbf{C}^-$  est appelée *la borne inférieure de Fréchet-Hoeffding* et la copule  $\mathbf{C}^+$  est *la borne supérieure de Fréchet-Hoeffding*. Une autre copule importante est la copule  $C^\perp(u, v) = u \cdot v$  qui est la copule produit.

Ces bornes de Fréchet-Hoeffding pour chaque copule  $\mathbf{C}$  et chaque couple  $(u, v) \in \mathbf{I}^2$  suggèrent un ordre partiel sur l'ensemble des copules, voir RONCALLI [128] p. 199.

**Définition 8.2.** Soient  $\mathbf{C}_1$  et  $\mathbf{C}_2$  sont des copules. On dit que  $\mathbf{C}_1$  est plus petite que  $\mathbf{C}_2$  et on note  $\mathbf{C}_1 \prec \mathbf{C}_2$  si et seulement si  $\mathbf{C}_1(u, v) \leq \mathbf{C}_2(u, v)$  pour tout  $(u, v) \in \mathbf{I}^2$ .

L'ordre « $\prec$ » est appelé **ordre stochastique de concordance**. En fait, cet ordre stochastique de concordance en matière de copules correspond à la dominance stochastique de premier ordre pour les fonctions de distribution. Cette relation d'ordre est partielle car on ne peut comparer toutes les copules entre elles.

Le théorème suivant établit la continuité des copules via la condition de Lipschitz sur  $\mathbf{I}^2$ , voir NELSEN [119] p. 11.

**Théorème 8.2.** Soit  $\mathbf{C}$  une copule. Alors pour chaque  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbf{I}$  on a :

$$|\mathbf{C}(u_2, v_2) - \mathbf{C}(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|. \quad (8.6)$$

Ce théorème implique que  $\mathbf{C}$  est continue sur son domaine, ce qui permet de calculer les dérivées partielles de la copule.

**Théorème 8.3.** Soit  $\mathbf{C}$  une copule. Pour tout  $v \in \mathbf{I}$ , la dérivée partielle  $\partial \mathbf{C} / \partial u$  existe pour presque tous les  $u$  tel que :

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{C}(u, v) \leq 1. \quad (8.7)$$

De façon similaire, pour tout  $u \in \mathbf{I}$ , la dérivée partielle  $\partial \mathbf{C} / \partial v$  existe pour presque tous les  $v$ , tel que :

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{C}(u, v) \leq 1. \quad (8.8)$$

Il s'ensuit de la définition 8.1 et du théorème 8.2 que le graphe de toute copule à deux dimensions, c'est-à-dire la surface  $z = \mathbf{C}(u, v)$ , est une surface continue à l'intérieur du cube unitaire  $\mathbf{I}^3$ . Par ailleurs, le théorème 8.1 implique que le graphe de chaque copule s'inscrit entre les graphes des bornes de Fréchet-Hoeffding, les surfaces  $z = \mathbf{C}^+(u, v)$  et  $z = \mathbf{C}^-(u, v)$ . Néanmoins, la meilleure façon de faire une représentation graphique des copules est de grapher les lignes de niveau. Pour une copule à deux dimensions  $\mathbf{C}(u, v)$ , on définit  $L\langle \mathbf{C} \rangle(\alpha)$  comme étant l'ensemble  $\{(u, v) : \mathbf{C}(u, v) = \alpha\}$ . Cette représentation permet de bien visualiser une copule et de voir de laquelle des deux bornes de Fréchet-Hoeffding elle se rapproche le plus. Dans la figure 8.1, les graphes à trois dimensions et les lignes de niveau des copules  $\mathbf{C}^+$ ,  $\mathbf{C}^-$  et  $\mathbf{C}^\perp$  sont représentées.

## 8.2 Le théorème de SKLAR

Le théorème de SKLAR est essentiel à la théorie des copules puisqu'il est le fondement de la plupart des applications de cette théorie à la Statistique. Le théorème de SKLAR décrit le rôle des copules dans la relation entre les distributions multivariées et leurs marges à une dimension. On commence cette section par une brève discussion sur les fonctions de distribution. On considère uniquement le cas bivarié dans un premier temps pour plus loin faire une généralisation à  $N$  dimensions.

**Définition 8.3.**

1. La fonction de distribution d'une variable aléatoire  $X$  est une fonction  $F$  ayant pour domaine  $\mathbb{R}$  telle que :

$$(a) \quad F(x) = P(X \leq x)$$

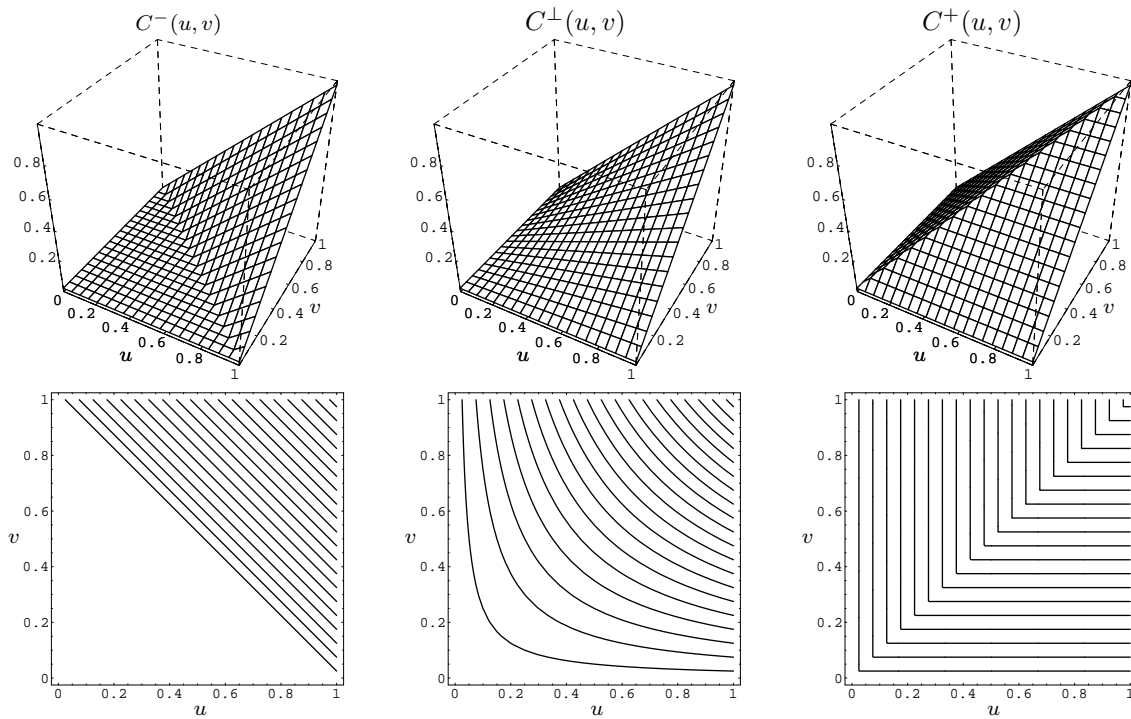


FIG. 8.1 – Graphes à trois dimensions et lignes de niveau des copules  $C^-$ ,  $C^+$  et  $C^0$ .

- (b)  $F$  est non décroissante,
- (c)  $F(-\infty) = 0$  et  $F(+\infty) = 1$ .
- 2. La fonction de distribution jointe d'un vecteur aléatoire  $(X, Y)$  est une fonction  $H$  ayant pour domaine  $\mathbb{R}^2$  telle que :
  - (a)  $H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$
  - (b)  $H$  est une fonction bidimensionnelle double croissante,
  - (c)  $H(x, -\infty) = H(-\infty, y) = 0$  et  $H(+\infty, +\infty) = 1$ .
- 3.  $H$  possède les marges  $F$  et  $G$  données par  $F(x) = H(x, +\infty)$  et  $G(y) = H(+\infty, y)$ .

Le théorème suivant est un développement important dans la mesure où il permet d'une part de faire le lien entre les distributions multivariées et leurs marges univariées et d'autre part de construire des distributions multivariées dont les marges sont connues.

**Théorème 8.4 (Théorème de Sklar).** Soit  $H$  une fonction de distribution jointe ayant les marges  $F$  et  $G$ . Alors il existe une copule  $\mathbf{C}$  telle que pour tout  $x, y$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$H(x, y) = \mathbf{C}(F(x), G(y)). \quad (8.9)$$

Si  $F$  et  $G$  sont continues, alors  $\mathbf{C}$  est unique, sinon,  $\mathbf{C}$  est déterminée de façon unique sur  $D(F) \times D(G)$ . Inversement, si  $\mathbf{C}$  est une copule est  $F$  et  $G$  sont des fonctions de distribution, alors la fonction  $H$  définie par (8.9) est une fonction de distribution jointe ayant les marges  $F$  et  $G$ .

Ce théorème est apparu pour la première fois dans les travaux de SKLAR [141] en 1959. Le terme *copule* a été choisi pour souligner la manière dont une copule «associe» ou «apparie» une fonction de distribution jointe à ses marges à une dimension. Ce théorème implique est que chaque copule  $\mathbf{C}$  est en fait une distribution jointe ayant des marges uniformes entre 0 et 1. En effet, si  $F$  et  $G$  sont des distributions uniformes entre 0 et 1 ; on  $F(x) = x$  et  $G(y) = y$  ce qui donne :

$$H(x, y) = \mathbf{C}(F(x), G(y)) = \mathbf{C}(x, y).$$

L'importance du théorème de SKLAR réside dans le fait qu'il permet d'associer à chaque distribution bidimensionnelle une copule. On obtient par conséquent une **représentation canonique** de la distribution jointe : d'un côté on a les marges  $F$  et  $G$  ; c'est-à-dire les directions unidimensionnelles des variables et, de l'autre côté, la copule (RONCALLI [128] p. 189).

Lorsque la distribution jointe est absolument continue, alors elle admet une densité dont on déduit ci-après la représentation canonique. Soient  $f(x)$  et  $g(y)$  les fonctions de densité de  $X$  et  $Y$  respectivement et  $h(x, y)$  la fonction de densité jointe. On obtient l'expression suivante pour la fonction de densité jointe :

$$h(x, y) = \mathbf{c}(F(x), G(y)) \cdot f(x) \cdot g(y) ; \quad (8.10)$$

où  $\mathbf{c}(x, y)$  est la «densité» de la copule  $\mathbf{C}$  définie par

$$\mathbf{c}(x, y) = \frac{\partial^2 \mathbf{C}(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (8.11)$$

**Définition 8.4.** Soit  $F$  une fonction de distribution. Alors, la *quasi-inverse* de  $F$  est toute fonction  $F^{(-1)}$  ayant pour domaine  $\mathbf{I}$  telle que

1. Si  $t \in I(F)$ , alors  $F^{(-1)}(t)$  est tout nombre  $x \in \mathfrak{R}$  tel que  $F(x) = t$  c'est-à-dire que pour tout  $t \in I(F)$ ,

$$F(F^{(-1)}(t)) = t ;$$

2. Si  $t \notin I(F)$ , alors

$$F^{(-1)}(t) = \inf\{x | F(x) \geq t\} = \sup\{x | F(x) \leq t\}.$$

Si  $F$  est strictement croissante, alors  $F$  possède une seule quasi-inverse, qui est son inverse ordinaire pour laquelle on utilise habituellement la notation  $F^{-1}$ .

Les quasi-inverses des fonctions de distribution permettent d'énoncer le corollaire suivant :

**Corollaire 8.1.** Soient  $H$  une fonction de distribution jointe ayant les marges  $F$  et  $G$  et soient  $F^{(-1)}$  et  $G^{(-1)}$  les quasi-inverses de  $F$  et  $G$  respectivement. Alors si  $H, F, G$  sont continues, on a pour tout  $u, v$  dans  $I(F) \times I(G)$ ,

$$\mathbf{C}(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)). \quad (8.12)$$



Ce résultat fournit une méthode pour construire des fonctions copules à partir des fonctions de distribution jointes.

Avant d'aborder un des théorème les plus importants qui porte sur les transformations monotones de variables aléatoires, on considère quelques exercices simples de probabilité qui mettent en évidence le rôle des copules. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires ayant pour distribution  $F(X)$  et  $G(Y)$  respectivement et une copule  $\mathbf{C}$ . On obtient les probabilités suivantes.

$$\begin{aligned}
 P(X \leq x, Y > y) &= P(X \leq x) - P(X \leq x, Y \leq y) \\
 &= F(x) - \mathbf{C}(F(x), G(y)) . \\
 P(X \leq x | Y \leq y) &= \frac{P(X \leq x, Y \leq y)}{P(Y \leq y)} \\
 &= \frac{\mathbf{C}(F(x), G(y))}{G(y)} . \\
 P(X \leq x | Y > y) &= \frac{P(X \leq x, Y > y)}{P(Y > y)} \\
 &= \frac{F(x) - \mathbf{C}(F(x), G(y))}{1 - G(y)} . \\
 P(X > x, Y > y) &= P(X > x) - P(X > x, Y \leq y) \\
 &= 1 - F(x) - G(y) + \mathbf{C}(F(x), G(y)) . \\
 P(X > x | Y > y) &= \frac{P(X > x, Y > y)}{P(Y > y)} \\
 &= \frac{1 - F(x) - G(y) + \mathbf{C}(F(x), G(y))}{1 - G(y)} .
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, le théorème de SKLAR permet de donner une interprétation, en termes de probabilité à la dérivée partielle de la copule. Soient  $U$  et  $V$  deux variables aléatoires de distribution uniforme entre 0 et 1 et dont la copule est  $\mathbf{C}(u, v)$ . La distribution conditionnelle a pour expression :

$$\begin{aligned}
 P(U \leq u | V = v) &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{P(U \leq u, v \leq V \leq v + \Delta s)}{P(v \leq V \leq v + \Delta s)} \\
 &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{C}(u, v + \Delta s) - \mathbf{C}(u, v)}{\Delta s} \\
 &= \partial_v \mathbf{C}(u, v) ;
 \end{aligned}$$

où  $\partial_v \mathbf{C}(u, v)$  dénote la dérivée partielle de la copule par rapport à  $v$ .

Une des propriété les plus importantes des copules est énoncée dans le théorème suivant, attribué à SCHWEIZER & WOLFF [140].

**Théorème 8.5.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires continues et  $\mathbf{C}_{XY}$  leur copule. Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux fonctions strictement monotones de  $X$  et  $Y$  respectivement.*

1. Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont strictement croissantes alors :

$$\mathbf{C}_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = \mathbf{C}_{XY}(u, v) . \quad (8.13)$$

2. Si  $\alpha$  est strictement croissante et  $\beta$  est strictement décroissante alors :

$$\mathbf{C}_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u - \mathbf{C}_{XY}(u, 1 - v) . \quad (8.14)$$

3. Si  $\alpha$  est strictement décroissante et  $\beta$  est strictement croissante alors :

$$\mathbf{C}_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = v - \mathbf{C}_{XY}(1 - u, v) . \quad (8.15)$$

4. Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont strictement décroissantes alors :

$$\mathbf{C}_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u + v - 1 + \mathbf{C}_{XY}(1 - u, 1 - v) . \quad (8.16)$$

Il est aisé de démontrer ce théorème en utilisant les propriétés des fonctions de distribution. D'après ce théorème, l'application de transformations croissantes ne modifie pas la copule, mais seulement les marges. Ainsi, par exemple la copule de la distribution lognormale bivariable est la même que celle de la distribution normale bivariable.

La théorie des copules et le théorème de SKLAR signifient que l'on peut spécifier, pour des marges connues une infinité de distribution jointes. Dans le cas bivariable, pour chaque paire de marges données, la classe des distributions bimensionnelles compatibles avec ces marges est appelée *classe de Fréchet*. Les classes de Fréchet font l'objet d'une étude approfondie dans le chapitre 3 de JOE [98].

**Définition 8.5.** La classe de Fréchet  $\mathcal{F}(F, G)$  est l'ensemble de toutes les distributions jointes dont les marges sont  $F$  et  $G$ . Autrement dit, la fonction de distribution  $H$  appartient à la classe de Fréchet  $(F, G)$  et on note  $H \in \mathcal{F}(F, G)$  si et seulement si les marges de  $H$  sont  $F$  et  $G$  :

$$H(x, +\infty) = F(x) \quad (8.17)$$

et

$$H(+\infty, y) = G(y) . \quad (8.18)$$

Caractériser la classe de Fréchet  $\mathcal{F}(F, G)$  revient à trouver l'ensemble  $\mathcal{C}$  des fonctions copules puisque :

$$\mathcal{F}(F, G) = \{H : H(x, y) = \mathbf{C}(F(x), G(y)); \mathbf{C} \in \mathcal{C}\} .$$

Pour chaque classe de Fréchet  $\mathcal{F}(F, G)$ , les bornes de Fréchet-Hoeffding sont  $H^-(x, y) = \max(F(x) + G(y) - 1, 0)$  et  $H^+(x, y) = \min(F(x), G(y))$  qui sont évidemment associées aux bornes  $\mathbf{C}^-$  et  $\mathbf{C}^+$  respectivement.

On considère par exemple la classe de Fréchet  $\mathcal{F}(F, G)$  avec  $F$  et  $G$  qui sont des distributions normales centrées réduites. On a

$$F(x) \equiv \Phi(x) \quad \text{et} \quad G(y) \equiv \Phi(y) ;$$

où  $\Phi$  est la fonction de distribution normale d'espérance nulle et de variance unitaire. Ainsi, la distribution normale à deux dimensions de corrélation  $\rho$

$$H(x, y, \rho) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2 + v^2 - 2\rho uv)\right) dudv$$

appartient à  $\mathcal{F}(F, G)$ . Celle-ci correspond à une copule spécifique, la copule normale de paramètre  $\rho$ ,  $\mathbf{C}_\rho^N$  :

$$\mathbf{C}_\rho^N(u, v) = \Phi^{(2)}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v); \rho) ;$$

avec  $\Phi^{(2)}$  la fonction de distribution normale centrée réduite à deux dimensions.

Néanmoins, beaucoup d'autres distributions non normales appartiennent à cette classe de Fréchet. C'est par exemple le cas de

$$H(x, y) = \frac{\Phi(x) \cdot \Phi(y)}{\Phi(x) + \Phi(y) - \Phi(x) \cdot \Phi(y)}$$

qui correspond à la copule logistique de Gumbel  $\mathbf{C}(u, v) = \frac{uv}{u + v - uv}$ .

## 8.3 Les copules de survie

Dans certaines applications, les variables aléatoires auxquelles on s'intéresse sont des durées de vie des individus ou des objets d'une certaine population. Soit  $X$  une variable aléatoire qui représente une durée de vie. Il va de soi que lorsque la variable aléatoire représente une durée de vie, ses réalisations prennent leurs valeurs dans l'ensemble  $[0, +\infty)$ .

Pour une paire  $(X, Y)$  de variables aléatoires ayant comme distribution jointe  $H$ , la *fonction de survie jointe* est donnée par

$$\bar{H}(x, y) = P(X > x, Y > y) . \tag{8.19}$$

Les «marges» de  $\bar{H}$  sont évidemment les fonctions  $\bar{H}(x, -\infty)$  et  $\bar{H}(-\infty, y)$  qui sont les fonctions de survie univariées  $\bar{F}$  et  $\bar{G}$  des variables  $X$  et  $Y$  respectivement.

La question qui se pose naturellement est la suivante : y-a-t-il une relation entre les fonctions de survie univariées et la fonction de survie jointe analogue à celle qui existe entre les distributions univariées et la distribution jointe ? NELSEN [119] note qu'il existe une copule  $\bar{\mathbf{C}}$  qui lie la fonction de survie jointe à ses marges de la même manière qu'une copule lie une distribution jointe à ses marges univariées. La copule

$\bar{\mathbf{C}}$  est appelée **copule de survie** et la relation entre une copule  $\mathbf{C}$  et la copule de survie associée  $\bar{\mathbf{C}}$  est aisée à dériver. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires continues dont les distributions sont  $F$  et  $G$  respectivement et la copule est  $\mathbf{C}$ . La fonction de survie jointe  $\bar{H}$  de  $X$  et  $Y$  s'écrit :

$$\begin{aligned}\bar{H}(x, y) &= 1 - F(x) - G(y) + H(x, y) \\ &= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + \mathbf{C}(F(x), G(y)) \\ &= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + \mathbf{C}(1 - \bar{F}(x), 1 - \bar{G}(y)) .\end{aligned}$$

**Définition 8.6.** Soit  $\mathbf{C}$  une copule entre  $X$  et  $Y$ . La fonction  $\bar{\mathbf{C}}$  de  $\mathbf{I}^2$  dans  $\mathbf{I}$  définie par

$$\bar{\mathbf{C}}(u, v) = u + v - 1 + \mathbf{C}(1 - u, 1 - v) \quad (8.20)$$

est appelée *copule de survie* de  $X$  et  $Y$ . La copule  $\bar{\mathbf{C}}$  relie la fonction de survie jointe  $\bar{H}$  des variables  $X$  et  $Y$  à ses marges unidimensionnelles :

$$\bar{H}(x, y) = \bar{\mathbf{C}}(\bar{F}(x), \bar{G}(y)) . \quad (8.21)$$

GEORGES & AL. [72] montrent que la fonction  $\bar{\mathbf{C}}$  est bien une copule et qu'elle possède toutes les propriétés d'une copule :

- Puisque toute copule de survie est une copule, on a

$$\mathbf{C}^- \prec \bar{\mathbf{C}} \prec \mathbf{C}^+ . \quad (8.22)$$

- Pour les copules de survie, les bornes de Fréchet-Hoeffding et la copule produit sont :

$$\bar{\mathbf{C}}^\perp = \mathbf{C}^\perp, \quad \bar{\mathbf{C}}^+ = \mathbf{C}^+, \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{C}}^- = \mathbf{C}^- .$$

- Dans le cas bivarié, si  $\mathbf{C}_1 \prec \mathbf{C}_2$  alors  $\bar{\mathbf{C}}_1 \prec \bar{\mathbf{C}}_2$ .

Une propriété des copules qui a une interprétation intéressante au niveau de la dépendance entre les variables aléatoires est la symétrie. On verra que, en statistique multivariée, cette propriété a une implication sur la relation entre copule et copule de survie.

En statistique unidimensionnelle, si  $X$  est une variable aléatoire et  $a$  un réel, on dit que  $X$  est *symétrique par rapport au point  $a$*  si les distributions des variables aléatoires  $X - a$  et  $a - X$  sont égales, c'est-à-dire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $P(X - a \leq x) = P(a - X \leq x)$ . Lorsque  $X$  est continue et que sa distribution est  $F$ , ceci équivaut à dire que

$$F(a + x) = \bar{F}(a - x) ; \quad (8.23)$$

où  $\bar{F}$  est la fonction de survie de  $X$ .

Au niveau bivarié, une forme courante de la symétrie est l'«interchangeabilité» entre deux variables aléatoires, voir NELSEN [119] p. 33. Deux variables  $X$  et  $Y$  sont interchangeables si les vecteurs  $(X, Y)$  et  $(Y, X)$  ont la même distribution. Par conséquent, si la distribution jointe de  $X$  et  $Y$  est  $H$ , l'interchangeabilité correspond à la condition  $H(x, y) = H(y, x)$  pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Théorème 8.6.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires continues dont la distribution jointe est  $H$ , les marges  $F$  et  $G$  respectivement et la copule  $\mathbf{C}$ . Alors,  $X$  et  $Y$  sont interchangeables si et seulement si  $F = G$  et que la copule  $\mathbf{C}$  est symétrique c'est-à-dire  $\mathbf{C}(u, v) = \mathbf{C}(v, u)$  pour tout  $(u, v) \in \mathbf{I}^2$ .

Il est évident que  $H(x, y) = \mathbf{C}(F(x), G(y)) = H(y, x) = \mathbf{C}(F(y), G(x))$  si et seulement si  $F \equiv G$ , c'est-à-dire  $F(x) = G(x)$  et si la copule est symétrique, c'est-à-dire  $\mathbf{C}(u, v) = \mathbf{C}(v, u)$  pour tout  $(u, v) \in \mathbf{I}^2$ .

Par conséquent, pour des variables aléatoires identiquement distribuées, l'interchangeabilité est équivalente à la symétrie de leur copule.

Dans le cas bivarié, il y a plusieurs manières de considérer un vecteur aléatoire  $(X, Y)$  du point de vue de sa symétrie par rapport à un point du plan  $(a, b)$  (voir NELSEN [119] p.31 et ss).

**Définition 8.7.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires et soit  $(a, b)$  un point dans  $\mathbb{R}^2$ .

1.  $(X, Y)$  est dit marginalement symétrique par rapport à  $(a, b)$  si  $X$  et  $Y$  sont symétriques par rapport à  $a$  et  $b$  respectivement.
2.  $(X, Y)$  est radialement symétrique par rapport à  $(a, b)$  si la distribution jointe de  $X - a$  et  $Y - b$  est la même que la distribution jointe de  $a - X$  et  $b - Y$ .
3.  $(X, Y)$  est conjointement symétrique par rapport à  $(a, b)$  si les paires suivantes de variables aléatoires ont une distribution jointe commune :  $(X - a, Y - b)$ ,  $(X - a, b - Y)$ ,  $(a - X, Y - b)$  et  $(a - X, b - Y)$ .

Lorsque  $X$  et  $Y$  sont continues, on peut exprimer la condition de symétrie radiale en termes de distribution jointe et de fonction de survie jointe des deux variables aléatoires.

**Théorème 8.7.** Soient  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires continues dont la distribution jointe  $H$  et de marges  $F$  et  $G$  respectivement. Soit  $(a, b)$  un point dans  $\mathbb{R}^2$ . Alors,  $(X, Y)$  est radialement symétrique par rapport à  $(a, b)$  si et seulement si

$$H(a + x, b + y) = \bar{H}(a - x, b - y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (8.24)$$

La symétrie conjointe implique évidemment la symétrie radiale et on observe aussi que la symétrie radiale implique la symétrie marginale. Par ailleurs, la symétrie conjointe est une très forte condition, et on s'intéressera uniquement à la symétrie radiale pour les distributions bivariées, puisque c'est l'une des propriétés des distributions très employées comme la distribution normale et la distribution de student, comme on le verra au chapitre 10.

Puisque la condition de symétrie radiale de l'équation (8.24) implique la distribution jointe et la fonction de survie jointe, il est naturel de se demander si les copules et les copules de survie jouent un rôle en matière de symétrie radiale. Le théorème suivant, voir NELSEN [119] p. 33 donne la réponse à cette question.

**Théorème 8.8.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires continues dont la distribution jointe  $H$  et de marges  $F$  et  $G$  respectivement et la copule  $\mathbf{C}$ . Si  $X$  et  $Y$  sont symétriques par rapport à  $a$  et  $b$  respectivement, alors  $(X, Y)$  est radialement symétrique par rapport à  $(a, b)$  si et seulement si  $\mathbf{C} = \bar{\mathbf{C}}$  c'est-à-dire

$$\mathbf{C}(u, v) = u + v - 1 + \mathbf{C}(1 - u, 1 - v) \quad \text{pour tout } (u, v) \in \mathbf{I}^2. \quad (8.25)$$

La preuve de ce théorème se trouve dans NELSEN [119] p. 33. Lorsqu'une copule  $\mathbf{C}$  satisfait l'équation (8.25), on dit qu'elle possède la propriété de symétrie radiale.

## 8.4 Extension des copules au cas multidimensionnel

Dans cette section, les résultats des précédentes sections sont étendus au cas multivarié. Cette extension permet la spécification des distributions jointes à  $N$  ( $N > 2$ ) dimensions des variables aléatoires  $X_1, \dots, X_N$  ayant les marges respectives  $F_1, \dots, F_N$ .

**Définition 8.8.** Une copule à  $N$  dimensions est une fonction réelle à  $N$  dimensions  $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} : \begin{cases} \mathbf{I}^N & \longrightarrow \mathbf{I} \\ (u_1, u_2, \dots, u_N) & \longmapsto C(u_1, u_2, \dots, u_N) \end{cases}$$

ayant les propriétés suivantes :

1. Pour tout vecteur  $\mathbf{u} = u_1, u_2, \dots, u_N \in \mathbf{I}^N$ ,

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}) = 0, \text{ si au moins un élément de } \mathbf{u} \text{ est égal à } 0. \quad (8.26)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}) = u_k, \text{ si tous les éléments } \mathbf{u} \text{ sauf } u_k \text{ sont égaux à } 1. \quad (8.27)$$

2. Pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbf{I}^N$ , et  $\epsilon_n \geq 0$ , l'inégalité suivante est valable :

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}(u_1 + \epsilon_1, u_2 + \epsilon_2, \dots, u_N + \epsilon_N) \\ & - \sum_{n=1}^N \mathbf{C}(u_1 + \epsilon_1, \dots, u_{n-1} + \epsilon_{n-1}, u_n, u_{n+1} + \epsilon_{n+1}, \dots, u_N + \epsilon_N) \\ & + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1, n < m}^N \mathbf{C}(u_1 + \epsilon_1, \dots, u_{n-1} + \epsilon_{n-1}, u_n, u_{n+1} + \epsilon_{n+1}, \dots, \\ & \quad u_{m-1} + \epsilon_{m-1}, u_m, u_{m+1} + \epsilon_{m+1}, \dots, u_N + \epsilon_N) - \dots \\ & + (-1)^N \mathbf{C}(u_1, u_2, \dots, u_N) \geq 0 \end{aligned} \quad (8.28)$$

Comme pour les copules bivariées, l'équation (8.28) se rapporte à la propriété de non-décroissance de la copule. On peut en outre noter que pour chaque copule à  $N > 3$  dimensions, les marges à  $k$  dimensions ( $2 \leq k < N$ ) sont des copules à  $k$

dimensions (voir NELSEN [119] p. 40). Une marge à  $k$  dimensions d'une copule  $\mathbf{C}$  à  $N$  dimensions est la copule

$$\mathbf{C}_{1,\dots,k}(u_1, \dots, u_k) = \mathbf{C}(u_1, \dots, u_k, 1, \dots, 1). \quad (8.29)$$

Le théorème de SKLAR à  $N$  dimensions donne la décomposition canonique d'une distribution multivariée.

**Théorème 8.9 (Théorème de Sklar à  $N$  dimensions).** *Soit  $F$  une fonction de distribution jointe ayant les marges  $F_1, F_2, \dots, F_N$  pour les variables aléatoires respectives  $X_1, X_2, \dots, X_N$ . Alors il existe une copule  $\mathbf{C}$  telle que pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ ,*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_N) = \mathbf{C}(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_N(x_N)). \quad (8.30)$$

*Si  $F_1, F_2, \dots, F_N$  sont toutes continues, alors  $\mathbf{C}$  est unique, sinon,  $\mathbf{C}$  est déterminée de façon unique sur  $D(F_1) \times D(F_2) \times \dots \times D(F_N)$ . Inversement, si  $\mathbf{C}$  est une copule à  $N$  dimensions et  $F_1, F_2, \dots, F_N$  sont des fonctions de distribution, alors la fonction  $F$  définie par l'équation (8.30) est une fonction de distribution jointe ayant les marges  $F_1, F_2, \dots, F_N$ .*

La copule d'un vecteur aléatoire  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)$  est notée  $\mathbf{C}_{X_1, X_2, \dots, X_N}$  et détermine la structure de dépendance du vecteur  $\mathbf{X}$ . Le corollaire suivant permet de déduire la copule du vecteur  $\mathbf{X}$  lorsque l'on connaît la distribution jointe du vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  ainsi que ses marges.

**Corollaire 8.2.** *Soit  $F$  une distribution jointe à  $N$  dimensions d'un vecteur  $\mathbf{X}$  ayant les marges continues  $F_1, F_2, \dots, F_N$  et soient  $F_1^{(-1)}, F_2^{(-1)}, \dots, F_N^{(-1)}$  les quasi-inverses de  $F_1, F_2, \dots, F_N$  respectivement. Alors, pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbf{I}^N$  on a :*

$$\mathbf{C}(u_1, u_2, \dots, u_N) = F(F_1^{(-1)}(u_1), F_2^{(-1)}(u_2), \dots, F_N^{(-1)}(u_N)). \quad (8.31)$$

Comme pour les copules à deux dimensions, la densité d'une copule à  $N$  dimensions s'écrit :

$$\mathbf{c}(u_1, u_2, \dots, u_N) = \frac{\partial^N \mathbf{C}(u_1, u_2, \dots, u_N)}{\partial u_1 \dots \partial u_N} \quad (8.32)$$

et permet de spécifier la densité jointe du vecteur aléatoire  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ .

Les bornes de Fréchet-Hoeffding pour une copule à  $N$  dimensions sont données par :

$$\mathbf{C}_N^- = \max(u_1 + u_2 + \dots + u_N - N + 1, 0) \quad (8.33a)$$

$$\mathbf{C}_N^+ = \min(u_1, u_2, \dots, u_N) \quad (8.33b)$$

On obtient par conséquent le théorème suivant pour les copules à  $N$  dimensions :

**Théorème 8.10.** *Soit  $\mathbf{C}$  une copule à  $N$  dimensions. Alors, on a pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbf{I}^N$*

$$\mathbf{C}_N^-(\mathbf{u}) \leq \mathbf{C}(\mathbf{u}) \leq \mathbf{C}_N^+(\mathbf{u}) . \quad (8.34)$$

La borne supérieure  $\mathbf{C}_N^+$  satisfait la définition d'une copule à  $N$  dimensions. Cependant, comme le notent SCHWEIZER & SKLAR [137], la borne inférieure  $\mathbf{C}_N^-$  ne satisfait pas la définition d'une copule lorsque  $N > 2$ . Toutefois, la partie gauche de l'inégalité (8.34) reste la meilleure possible en ce sens qu'il existe pour chaque vecteur  $\mathbf{u} \in \mathbf{I}^N$  ( $N > 2$ ) une copule à  $N$  dimensions  $\mathbf{C}(\mathbf{u})$  telle que  $\mathbf{C}(\mathbf{u}) = \mathbf{C}_N^-(\mathbf{u})$ . Cette copule sera généralement une copule différente pour chaque vecteur  $\mathbf{u} \in \mathbf{I}^N$ .

L'ordre de concordance partiel définit pour les copules bivariées est valable pour les copules à  $N > 2$  dimensions. En outre, les copules à  $N$  dimensions sont invariantes pour les transformations monotones croissantes.

Pour une copule à  $N$  dimensions, la copule de survie associée est :

$$\bar{\mathbf{C}}(u_1, \dots, u_N) = \sum_{i=1}^N u_i - 1 + \mathbf{C}(1 - u_1, \dots, 1 - u_N) . \quad (8.35)$$

Comme dans le cas bidimensionnel, une version du théorème de SKLAR (voir GEORGES & AL [72]) fait le lien entre la fonction de survie à  $N$  dimensions et ses marges à travers la copule de survie à  $N$  dimensions.

**Théorème 8.11.** *Si  $\bar{F}$  est une fonction de survie jointe à  $N$  dimensions dont les marges sont  $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_N$  alors il existe une copule  $\bar{C}$ , appelée copule de survie telle que*

$$\bar{F}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{C}}(\bar{F}_1(x_1), \dots, \bar{F}_N(x_N)) . \quad (8.36)$$

*La copule  $\bar{C}$  est unique si les marges sont continues.*

Le théorème de Sklar explicite le lien entre une fonction de distribution jointe et ses marges au travers de la copule. La copule caractérise de ce fait la dépendance entre les variables aléatoires et le chapitre suivant fera justement le lien entre copule et dépendance entre variables aléatoires.



# Chapitre 9

## Copules et mesures de dépendance

Dans ce chapitre on montre comment les copules sont utilisées pour étudier et modéliser la dépendance entre des variables aléatoires. On montre notamment que la copule du vecteur aléatoire  $(X, Y)$  peut être interprétée comme une reparamétrisation ou une normalisation de la distribution jointe  $H$  après avoir éliminé les effets des marges  $F$  et  $G$  des variables  $X$  respectivement  $Y$ . La copule permet de capturer tous les aspects de la relation entre les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  en ce sens que tous les concepts de dépendance seront des propriétés de la copule. D'ailleurs, de façon tout à fait indépendante, PAUL DEHEUVELS [44] a redécouvert l'outil copule à la fin des années 1970 et lui a donné le nom de **fonction de dépendance**. La copule décrit de manière exhaustive la structure de dépendance du vecteur aléatoire  $(X, Y)$ .

Pour les applications financières, l'intérêt porte en général sur la dépendance entre les indicateurs de marché, comme les prix ou les rendements. Dans le cas particulier du risque de crédit, la copule est un outil utile pour modéliser la dépendance entre les défauts des crédits individuels d'un portefeuille de crédits.

Les cas les plus triviaux et les plus extrêmes de dépendance sont d'une part le manque de dépendance ou l'indépendance entre variables aléatoires et d'autre part, le cas de dépendance parfaite. La section 9.1 de ce chapitre traitera de ces cas extrêmes.

Cependant, en économie et en finance, ces cas de dépendance extrêmes sont rarement rencontrés. Pour tous les cas intermédiaires, il y a plusieurs manières de discuter et de mesurer la dépendance. Souvent, on définit des statistiques qui sont des mesures d'association qui résument une forme de la dépendance entre deux variables aléatoires. Parmi ces mesures d'association, on va considérer de façon générale les mesures de concordance à la section 9.2 et les mesures de dépendance à la section 9.3. Ensuite on s'intéressera à la dépendance de queue qui est un autre concept de dépendance d'importance primordiale en gestion de risque.

## 9.1 Dépendance parfaite

Intuitivement, l'on dit que deux variables sont parfaitement dépendantes lorsque l'une est une fonction de l'autre. Dans cette section, une définition statistique précise de la notion de dépendance parfaite entre deux variables aléatoires est donnée. L'inégalité de Fréchet-Hoeffding de l'équation (8.5) pour toute copule bidimensionnelle s'écrivait

$$\mathbf{C}^-(u, v) \leq \mathbf{C}(u, v) \leq \mathbf{C}^+(u, v) .$$

Lorsque la copule  $\mathbf{C}^-$  est la copule de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , alors la distribution jointe  $H$  du vecteur  $(X, Y)$  est donnée par  $H(x, y) = \max(F(x) + G(y) - 1, 0)$  où  $F$  et  $G$  sont les distributions de  $X$ , respectivement de  $Y$ . De même, lorsque  $\mathbf{C}^+$  est la copule de  $X$  et  $Y$ , alors la distribution jointe  $H$  du vecteur  $(X, Y)$  est  $H(x, y) = \min(F(x), G(y))$ . Si la dépendance entre ces deux variables aléatoires est décrite par une des deux copules, alors le théorème suivant énonce les relations entre les deux variables aléatoires.

**Théorème 9.1.** *Soit deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  dont les distributions sont  $F$ , respectivement  $G$  et la copule  $\mathbf{C}^-$ .*

- a) *Lorsque  $F$  et  $G$  sont des fonctions continues, alors il existe une fonction monotone décroissante  $u$  telle que :*

$$Y = u(X) .$$

- b) *Lorsque  $F$  et  $G$  sont des fonctions non continues de sorte que la copule de  $X$  et  $Y$  n'est pas unique et que  $\mathbf{C}^-$  est une copule possible de  $X$  et  $Y$ , alors il existe une fonction monotone croissante  $v$  et une fonction monotone décroissante  $w$  et une variable aléatoire réelle  $Z$  tels que*

$$(X, Y)' \stackrel{d}{=} (v(Z), w(Z))' .$$

*Soit deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  dont les distributions sont  $F$ , respectivement  $G$  et la copule  $\mathbf{C}^+$ .*

- a) *Lorsque  $F$  et  $G$  sont des fonctions continues, alors il existe une fonction monotone croissante  $u$  telle que :*

$$Y = u(X) .$$

- b) *Lorsque  $F$  et  $G$  sont des fonctions non continues de sorte que la copule de  $X$  et  $Y$  n'est pas unique et que  $\mathbf{C}^+$  est une copule possible de  $X$  et  $Y$ , alors il existe deux fonctions monotones croissantes  $v$  et  $w$  et une variable aléatoire réelle  $Z$  tels que*

$$(X, Y)' \stackrel{d}{=} (v(Z), w(Z))' .$$

La preuve de ce théorème se trouve dans EMBRECHTS & AL [58] ainsi que dans WANG & DHAENE [147]. Le théorème 9.1 motive la définition suivante qui fait le lien entre dépendance parfaite et bornes de Fréchet-Hoeffding.

**Définition 9.1.** Deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont dites **parfaitement négativement dépendantes** ou **contre-monotones** lorsqu'elles sont liées par la copule  $\mathbf{C}^-$ . Deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont dites **parfaitement positivement dépendantes** ou **comonotones** lorsqu'elles sont liées par la copule  $\mathbf{C}^+$ .

Le concept de comonotonie a été introduit par SCHMEIDLER [134] et par YAARI [150]. EMBRECHTS & AL [58] ont ensuite introduit le concept de contre-monotonie.

On ne saurait conclure cette section sans faire le lien entre copule et indépendance parfaite. Le théorème suivant montre que la copule produit  $\mathbf{C}^\perp(u, v) = uv$  caractérise des variables aléatoires indépendantes lorsque les fonctions de distributions sont continues.

**Théorème 9.2.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires continues. Alors,  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si et seulement si  $\mathbf{C}_{XY} = \mathbf{C}^\perp$

En effet, lorsque deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ont la copule  $\mathbf{C}_{XY} = \mathbf{C}^\perp(u, v) = u \cdot v$ , on a la densité de la copule donnée par

$$\mathbf{c}_{XY} = \frac{\partial^2 \mathbf{C}^\perp(u, v)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 uv}{\partial u \partial v} = 1.$$

A l'aide de l'équation (8.10), on peut calculer la densité jointe des deux variables  $X$  et  $Y$ . On déduit par conséquent que toute distribution bidimensionnelle construite avec cette copule vérifie

$$f(x, y) = f(x) \cdot g(y),$$

ce qui prouve que la copule produit caractérise bel et bien l'indépendance entre deux variables aléatoires.

Néanmoins, les variables aléatoires rencontrées en économie présentent rarement une structure de dépendance aussi extrême. Pour résumer la dépendance entre ces variables, plusieurs statistiques ont été développées parmi lesquelles les mesures de concordance et les mesures de dépendance présentées ci-après.

## 9.2 Mesures de concordance

De manière informelle, une paire de variables aléatoires est dite concordante si de «larges» valeurs d'une variable tendent à être associées avec de «larges» valeurs de l'autre variable et vice-versa.

Soit un vecteur  $(X, Y)$  de variables aléatoires et des couples de réalisations de ce vecteur aléatoire  $(x_i, y_i)$  et  $(x_j, y_j)$ . Formellement, on dit que les paires  $(x_i, y_i)$  et

$(x_j, y_j)$  sont *concordantes* si  $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ . De manière analogue, deux paires de réalisations  $(x_i, y_i)$  et  $(x_j, y_j)$  sont *discordantes* si  $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$ .

La détection de la concordance est particulièrement importante dans la gestion des risques des larges portefeuilles de crédits ou d'actifs financiers. Dans ces portefeuilles, le risque majeur est la réalisation jointe de plusieurs défauts ou alors une baisse simultanée du prix des actifs. Une connaissance plus ou moins précise de la concordance entre les crédits ou les actifs financiers aidera à évaluer le risque de pertes jointes et, dans ce sens, à prendre des mesures appropriées pour s'assurer que le risque encouru reste dans une marge raisonnable. La concordance à l'intérieur du portefeuille affecte donc le risque et par conséquent doit être prise en compte dans l'allocation des actifs du le portefeuille.

La modélisation de la concordance entre variables aléatoires se fait souvent à l'aide de modèles paramétriques, par la modélisation d'une distribution jointe paramétrique. Dans ce cas, les mesures spécifiques de concordance sont des mesures paramétriques qui découlent directement de la structure de dépendance entre les variables aléatoires donc de la copule des variables aléatoires et ne tient pas compte des marges. Dans cette optique, une mesure de concordance entre deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  dont la copule est  $\mathbf{C}$  est notée  $\kappa_{X,Y}$  ou  $\kappa_{\mathbf{C}}$  et est caractérisée par les propriétés axiomatiques suivantes développées par SCARSINI [133].

**Définition 9.2.** *Une mesure d'association  $\kappa$  entre deux variables aléatoires continues  $X$  et  $Y$  dont la copule est  $\mathbf{C}$  est une mesure de concordance si elle satisfait les propriétés suivantes :*

1.  $\kappa$  est définie pour toute paire  $(X, Y)$  de variables aléatoires continues ;
2.  $-1 = \kappa_{X,-X} \leq \kappa_{X,Y} = \kappa_{\mathbf{C}} \leq \kappa_{X,X} = 1$  ;
3.  $\kappa_{X,Y} = \kappa_{Y,X}$  ;
4. Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $\kappa_{X,Y} = \kappa_{\mathbf{C}^\perp} = 0$  ;
5.  $\kappa_{-X,Y} = \kappa_{X,-Y} = -\kappa_{X,Y}$  ;
6. Si  $\mathbf{C}_1 \prec \mathbf{C}_2^1$ , alors  $\kappa_{\mathbf{C}_1} \leq \kappa_{\mathbf{C}_2}$  ;
7. Si  $\{(X_n, Y_n)\}$  est une séquence de variables aléatoires continues dont les copules copules sont  $\mathbf{C}_n$ , et si  $\{\mathbf{C}_n\}$  converge vers  $\mathbf{C}$  (pointwise convergence), alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_{\mathbf{C}_n} = \kappa_{\mathbf{C}}$ .

On comprend intuitivement que  $\kappa$  est appelé une mesure de concordance puisque l'ordre de concordance implique un ordre sur  $\kappa$  d'après la propriété 6. Cet ordre correspond à la notion naturelle de dominance stochastique entre deux fonctions de distribution ayant les mêmes marges. En effet, TCHEN [146] a prouvé qu'un vecteur  $(X_2, Y_2)$  ayant  $H_2$  comme fonction de distribution jointe est plus concordant qu'un vecteur  $(X_1, Y_1)$  ayant  $H_1$  comme distribution jointe si et seulement si la fonction de distribution  $H_2$  domine au sens stochastique la fonction de distribution  $H_1$ .

---

<sup>1</sup> $\prec$  est l'ordre stochastique de concordance, voir définition 8.2

La définition 9.2 implique l'invariance des mesures de concordance pour des transformations monotones croissantes et implique l'existence de bornes correspondant aux bornes de Fréchet-Hoeffding.

**Théorème 9.3.** *Soit  $\kappa$  une mesure de concordance pour les variables aléatoires continues  $X$  et  $Y$ .*

1. *Si  $X$  et  $Y$  sont comonotones, alors  $\kappa_{X,Y} = \kappa_{\mathbf{C}^+} = 1$  ;*
2. *Si  $X$  et  $Y$  sont contremonotones, alors  $\kappa_{X,Y} = \kappa_{\mathbf{C}^-} = -1$  ;*
3. *Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des fonctions strictement monotones sur de  $X$  et de  $Y$  respectivement, alors  $\kappa_{\alpha(X),\beta(Y)} = \kappa_{X,Y}$ .*

Il est intéressant de noter que les mesures de concordance  $\kappa$  présentent deux caractéristiques importantes :

- L'indépendance entre variables aléatoires est une condition suffisante mais pas nécessaire pour que  $\kappa$  soit égal à 0.
- Les mesures de concordance sont différentes de mesures de dépendance définies par RÉNYI [125]. Les mesures de concordance prennent leur valeur minimum lorsque les variables aléatoires sont contre-monotones alors que les mesures de dépendance prennent la valeur minimum lorsque les variables aléatoires sont indépendantes.

Parmi toutes les mesures de concordance, deux mesures très employées jouent un rôle important en statistiques non paramétriques. Il s'agit du coefficient de corrélation de rang de Kendall dit *tau de Kendall* et du coefficient de corrélation de rang de Spearman dit *rho de Spearman*. On voit ci-après que ces statistiques dépendent de la distribution jointe des variables aléatoires, uniquement à travers leur copule. Ensuite on verra que la corrélation linéaire n'est pas une mesure de concordance, puisqu'elle ne vérifie pas les propriétés de la définition 9.2.

### 9.2.1 Le tau de Kendall

Soit  $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$  un échantillon aléatoire de  $n$  observations du vecteur  $(X, Y)$  de variables aléatoires continues. La version empirique de la mesure d'association connue sous le nom de tau de Kendall est définie en termes de concordance. Chacune des paires d'observations est soit concordante soit discordante. Si  $c$  désigne le nombre de paires concordantes et  $d$  le nombre de paires discordantes, alors le tau de Kendall pour l'échantillon est défini par :

$$t = \frac{c - d}{c + d} = \frac{c - d}{\binom{n}{2}} \quad (9.1)$$

Pour la population, le tau de Kendall d'un vecteur  $(X, Y)$  de variables aléatoires continues est défini comme étant la probabilité de concordance moins la probabilité de discordance :

$$\tau = \tau_{X,Y} = P[(X - X')(Y - Y') > 0] - P[(X - X')(Y - Y') < 0] ; \quad (9.2)$$

où  $(X, Y)$  et  $(X', Y')$  sont indépendants et identiquement distribués.

**Théorème 9.4.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires continues dont les distributions respectives sont  $F$  et  $G$ , la copule est  $\mathbf{C}$  et la densité de la copule  $\mathbf{c}$ . Soient aussi  $U = F(x)$  et  $V = G(Y)$ . Le tau de Kendall de  $X$  et  $Y$  est donné par*

$$\tau = \tau_{X,Y} = \tau_{\mathbf{C}} = 4 \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{C}(u, v) \mathbf{c}(u, v) du dv - 1. \quad (9.3)$$

La preuve de ce théorème est faite notamment dans NELSEN [119] p.127 et ss. On note par ailleurs que l'intégrale qui apparaît dans l'équation (9.3) peut être interprétée comme l'espérance de la fonction  $\mathbf{C}(U, V)$  de variables aléatoires  $U, V$  de distribution uniforme entre 0 et 1 dont la distribution jointe est  $\mathbf{C}$  :

$$\tau_{\mathbf{C}} = 4E(\mathbf{C}(U, V)) - 1. \quad (9.4)$$

On illustre le théorème 9.4 par un exemple. Pour deux variables aléatoires continues indépendantes  $X$  et  $Y$ , la copule est la copule produit  $\mathbf{C}^\perp(u, v) = uv$ , et le tau de Kendall est calculé comme suit :

$$\begin{aligned} \tau_{\mathbf{C}^\perp} &= 4 \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{C}^\perp(u, v) \mathbf{c}^\perp(u, v) du dv - 1 \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^1 uv du dv - 1 = 4 \cdot 0.5 \cdot 0.5 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Le tau de Kendall est une statistique qui est invariante pour des transformations monotones des variables aléatoires. En effet, on peut montrer que la version empirique tau de Kendall calculé à partir d'un échantillon  $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$  d'observations du vecteur aléatoire  $(X, Y)$  est donnée par :

$$t = \frac{\sum_{i \neq j} \text{sign}(x_i - x_j)(y_i - y_j)}{\binom{n}{2}}. \quad (9.5)$$

où

$$\text{sign}(x_i - x_j)(y_i - y_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0 \\ -1 & \text{si } (x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0. \end{cases}$$

En observant l'équation (9.5), on s'aperçoit que le tau de Kendall ne dépend en fait que du rang de chaque observation, raison pour laquelle il demeure inchangé lors de transformations croissantes qu'elles soient linéaires ou pas. Par ailleurs on peut aisément montrer que le tau de Kendall satisfait entièrement à la définition 9.2 et est, par conséquent, une mesure de concordance (voir SCARSINI [133]).

### 9.2.2 Le rho de Spearman

Comme le tau de Kendall, le rho de Spearman est basé sur la concordance et la discordance. Soit à nouveau  $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$  un échantillon aléatoire de  $n$  observations du vecteur  $(X, Y)$  de variables aléatoires continues. On définit  $R_i$  le rang de  $x_i$  et  $Q_i$  le rang de  $y_i$  pour tous les  $i$  allant de 1 à  $n$ . On obtient les couples  $(R_i, Q_i)$  et on définit la version empirique du rho de spearman comme suit :

$$r = 1 - \frac{6 \sum_i^n (R_i - Q_i)^2}{n(n^2 - 1)} . \quad (9.6)$$

Pour la population, le rho de Spearman d'un vecteur aléatoire continu  $(X, Y)$  dont la distribution jointe est  $H$  est définie de manière similaire. On définit  $(X_1, Y_1)$ ,  $(X_2, Y_2)$  et  $(X_3, Y_3)$  trois vecteurs aléatoires indépendants qui ont tous une distribution jointe commune  $H$  (ayant les marges  $F$  et  $G$ ) et une copule  $\mathbf{C}$ .

Le rho de Spearman pour la population est défini comme étant proportionnel à la probabilité de concordance moins la probabilité de discordance pour deux vecteurs  $(X_1, Y_1)$  et  $(X_2, Y_3)$ . Cette paire de vecteurs possède les même marges, mais la distribution jointe du vecteur  $(X_1, Y_1)$  est  $H$  alors que celle du vecteur  $(X_2, Y_3)$  est  $F(x) \cdot G(y)$  puisque  $X_2$  et  $Y_3$  sont indépendants.

$$\varrho = \varrho_{X,Y} = 3(P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]) . \quad (9.7)$$

**Théorème 9.5.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires continues dont les distributions respectives sont  $F$  et  $G$ , la copule est  $\mathbf{C}$  et la densité de la copule  $\mathbf{c}$ . Soient aussi  $U = F(x)$  et  $V = G(Y)$ . Le rho de Spearman de  $X$  et  $Y$  est donné par

$$\varrho_{X,Y} = \varrho_{\mathbf{C}} = 12 \int_0^1 \int_0^1 uv \mathbf{c}(u, v) du dv - 3 . \quad (9.8)$$

La preuve de ce théorème est faite notamment dans NELSEN [119] p.127 et ss.

Le rho de Spearman est aussi appelé le coefficient de corrélation de rang relatif. En effet, si  $x$  et  $y$  sont des observations des variables aléatoires  $X$  et  $Y$  de distributions respectives  $F$  et  $G$  alors les rangs relatifs de  $x$  et  $y$  sont donnés par  $u = F(x)$  et  $v = G(y)$ . On note que les rangs sont des observations des variables  $U = F(X)$  et  $V = G(Y)$  dont la distribution jointe est la copule  $\mathbf{C}$ . Puisque  $U$  et  $V$  ont chacune une espérance égale à  $1/2$  et une variance égale à  $1/12$ , on peut réécrire le rho de Spearman comme étant :

$$\begin{aligned} \varrho_{X,Y} &= 12 E(UV) - 3 = \frac{E(UV) - 1/4}{1/12} \\ &= \frac{E(UV) - E(U)E(V)}{\sqrt{\text{Var}(U)\text{Var}(V)}} = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{\text{Var}(U)\text{Var}(V)}} \\ &= \text{Corr}(U, V) . \end{aligned}$$

Le rho de Spearman est donc égal au coefficient de corrélation des rangs relatifs de  $X$  et  $Y$ . SCARSINI [133] démontre que le rho de Spearman satisfait la définition 9.2 et est, par conséquent, une mesure de concordance.

### 9.2.3 Le coefficient de corrélation est-il une mesure de concordance ?

Le coefficient de corrélation est, comme on l'a noté au chapitre 7, la statistique la plus employée lorsqu'il s'agit d'étudier l'association entre deux variables aléatoires. On se pose ici la question de savoir si le coefficient de corrélation est une mesure de concordance selon la définition 9.2. Soit  $\rho_{XY}$  le coefficient de corrélation de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ . En utilisant les travaux de TCHEN [146], on peut montrer les résultats suivants :

1. Si la copule de  $X$  et  $Y$  est  $\mathbf{C}^\perp$ , alors  $\rho_{XY} = 0$  ;
2.  $\rho$  est une mesure croissante par rapport à l'ordre de concordance :

$$\mathbf{C}_1 \succ \mathbf{C}_2 \Rightarrow \rho_{\mathbf{C}_1} \geq \rho_{\mathbf{C}_2} ; \quad (9.9)$$

3.  $\rho_{XY}$  est bornée :

$$\rho_{XY}^- \leq \rho_{XY} \leq \rho_{XY}^+ , \quad (9.10)$$

et les bornes sont atteintes pour les copules  $\mathbf{C}^-$  et  $\mathbf{C}^+$ .

Néanmoins, même si la corrélation est une statistique bornée comme le dit l'équation (9.10), ces bornes ne sont pas nécessairement  $-1$  et  $1$  même pour des variables aléatoires contre-monotones et co-monotones comme l'exige les points 1 et 2 du théorème 9.3. C'est-à-dire que deux variables aléatoires liées par la copule  $\mathbf{C}^-$  n'ont pas forcément un coefficient de corrélation égal à  $-1$  et deux variables aléatoires liées par la copule  $\mathbf{C}^+$  n'ont pas forcément un coefficient de corrélation égal à  $1$ .

En fait, les valeurs  $-1$  et  $1$  sont atteintes seulement lorsque  $Y$  est une fonction linéaire de  $X$ . C'est la raison pour laquelle la corrélation est une mesure de dépendance **linéaire** (voir EMBRECHTS ET AL [58]). En cas de dépendance linéaire parfaite, c'est-à-dire  $Y = aX + b$  avec  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  et  $b \in \mathbb{R}$ , on a  $\rho_{X,Y} = \pm 1$ .

En cas de dépendance linéaire imparfaite, on a une inégalité stricte  $-1 < \rho_{X,Y} < 1$ .

Pour illustrer cette situation, on considère deux variables  $X$  et  $Y$  de distribution lognormale :  $X \sim LN(0, \sigma_1^2)$  et  $Y \sim LN(0, \sigma_2^2)$ . On note  $\rho_{\min}$  la corrélation minimale et  $\rho_{\max}$  la corrélation maximale. On peut montrer que (voir WANG ET AL [147]) :

$$\rho_{\max} = \frac{e^{\sigma_1 \sigma_2} - 1}{\sqrt{e^{\sigma_1^2} - 1} \sqrt{e^{\sigma_2^2} - 1}} \quad (9.11)$$

et

$$\rho_{\min} = \frac{e^{-\sigma_1 \sigma_2} - 1}{\sqrt{e^{\sigma_1^2} - 1} \sqrt{e^{\sigma_2^2} - 1}} \quad (9.12)$$



On note d'une part que les valeurs extrémales des corrélations ne sont pas égales à -1 et 1 et d'autre part, la corrélation dépend des distributions marginales.

Lorsque  $\sigma_1 = 0.1$  ou  $\sigma_1 = 1$ , on obtient la figure 9.1 qui montre que les valeurs  $\rho_{\min}$  et  $\rho_{\max}$  dépendent de la valeur de  $\sigma_2$ .

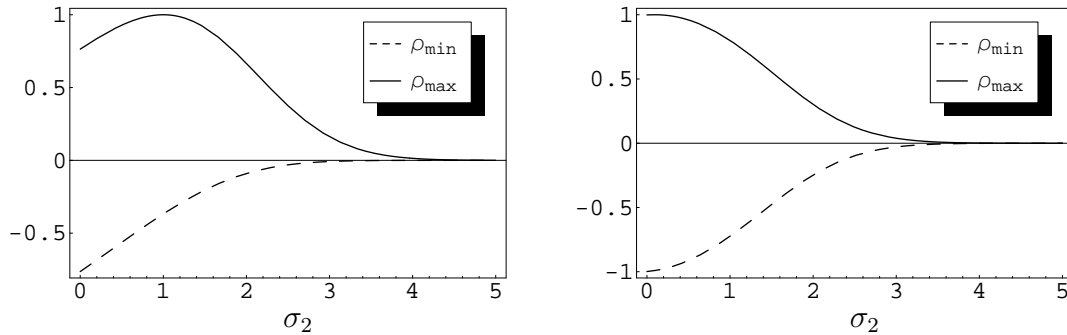


FIG. 9.1 –  $\rho_{\min}$  et  $\rho_{\max}$  en fonction de l'écart-type

D'après le théorème 9.3, toutes les mesures de concordance doivent rester invariantes pour des transformations monotones des variables aléatoires. Mais on peut montrer que la solution de l'équation

$$\rho_{X,Y} = \rho_{\alpha(X)\beta(Y)} \quad (9.13)$$

est  $\alpha(X) = a_1X + b_1$  et  $\beta(X) = a_2X + b_2$  avec  $a_1 > 0$  et  $a_2 > 0$ . Le coefficient de corrélation n'est pas une mesure invariante pour toutes les transformations monotones et n'est donc pas une mesure de concordance. En particulier nous avons par exemple

$$\rho_{X,Y} \neq \rho_{\log(X)\log(Y)}.$$

De plus, il est impossible d'exprimer le coefficient de corrélation entre deux variables aléatoires comme une fonction de la copule entre ces variables puisque la corrélation dépend des distributions marginales. En effet, le calcul du coefficient de corrélation de deux variables aléatoires nécessite l'espérance mathématique et l'écart-type des deux variables. On verra par la suite que pour les distributions elliptiques comme la distribution normale multivariée ou la distribution de Student multivariée, la corrélation est le paramètre qui décrit la dépendance entre les variables aléatoires. Pour ces distributions les coefficients de corrélation associées aux bornes de Fréchet-Hoeffding,  $\rho_{C-}$  et  $\rho_{C+}$  sont respectivement égales à -1 et 1.

Enfin, comme on l'a mentionné à la section 7.3, l'indépendance entre deux variables aléatoires implique que la corrélation est égale à 0, mais une corrélation nulle n'implique pas en général l'indépendance entre deux variables aléatoires. Un exemple simple de cette situation est obtenu en considérant  $X \sim N(0, 1)$  et  $Y = X^2$ . Dans ce cas, on obtient  $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) = E(X^3) = 0$  vu que le troisième moment d'une distribution normale est 0. La corrélation entre les deux variables est par conséquent nulle alors qu'il est évident que ces deux variables sont dépendantes.

Pour tous les raisons citées ci-haut, le coefficient de corrélation n'est non seulement pas une mesure de concordance mais est une mesure partielle et imparfaite pour capturer la dépendance entre deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ . La section suivante introduit brièvement un autre type de mesures d'association peu employé en finance, les mesures de dépendance.

### 9.3 Mesures de dépendance

Dans la section 9.2 on discuté les mesures d'association basées sur la notion de concordance. Dans cette section, on discute une autre classe de mesures d'association qui sont des mesures de dépendance telles que définies par RÉNYI [125], SCHWEIZER & WOLFF [140]. Il s'agit ici de mesures basées sur la «distance» entre la copule de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  et la copule produit qui est la copule caractérisant des variables aléatoires indépendantes.

Les mesures de dépendance sont des statistiques qui mesurent la dépendance sans tenir compte du fait que celle-ci soit positive ou négative. C'est la raison pour laquelle elles sont peu employées en économie et en finance en particulier où l'on s'intéresse non seulement au degré de dépendance mais aussi au «signe» de cette dépendance.

**Définition 9.3.** *Une mesure d'association  $\delta$  entre deux variables aléatoires continues  $X$  et  $Y$  dont la copule est  $\mathbf{C}$  est une mesure de dépendance si elle satisfait les propriétés suivantes :*

1.  $\delta$  est définie pour toute paire  $(X, Y)$  de variables aléatoires continues ;
2.  $0 = \delta(\mathbf{C}^\perp) \leq \delta(\mathbf{C}) \leq \delta(\mathbf{C}^+) = 1$  ;
3.  $\delta_{X,Y} = \delta_{Y,X}$  ;
4.  $\delta_{X,Y} = \delta(\mathbf{C}^\perp)$  si et seulement si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes ;
5.  $\delta_{X,Y} = \delta(\mathbf{C}^+) = \delta(\mathbf{C}^-) = 1$  si et seulement si  $Y$  est une fonction strictement monotone de  $X$  ;
6. Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des fonctions strictement monotones respectivement sur  $I(X)$  et  $I(Y)$ , alors

$$\delta_{\alpha(X),\beta(Y)} = \delta_{X,Y} ; \quad (9.14)$$

7. Si  $\{(X_n, Y_n)\}$  est une séquence de variables aléatoires continues dont la copule est  $\mathbf{C}_n$ , et si  $\{\mathbf{C}_n\}$  converge vers  $\mathbf{C}$  (pointwise convergence), alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_{\mathbf{C}_n} = \kappa_{\mathbf{C}}$ .

SCHWEIZER & WOLFF [140] développent différentes mesures qui vérifient la définition 9.3. Soient deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  dont la copule est  $\mathbf{C}$ , alors les mesures suivantes sont des mesures de dépendance.

$$\sigma_{X,Y} = \sigma_{\mathbf{C}} = 12 \int \int_{\mathbf{I}^2} |\mathbf{C}(u, u) - \mathbf{C}^\perp(u, v)| \, du \, dv \quad (9.15)$$

$$\Phi_{X,Y}^2 = \Phi_{\mathbf{C}}^2 = 90 \int \int_{\mathbf{I}^2} |\mathbf{C}(u, u) - \mathbf{C}^\perp(u, v)|^2 \, du \, dv \quad (9.16)$$

En dehors des mesures de concordance et de dépendance, il existe d'autres concepts de dépendance. En fait, la dépendance entre une paire de variables aléatoires peut s'interpréter comme étant un sous-ensemble de toutes les fonctions de distributions jointes compatibles avec les marges de ces deux variables aléatoires. La dépendance entre deux variables aléatoires est alors décrite par l'identification des copules, ou l'identification des propriétés des copules qui correspondent aux fonctions de distribution jointes du sous-ensemble.

Deux concepts de dépendance plus ou moins naturels sont la «dépendance positive» et la «dépendance négative» que l'on explicite ci-dessous en termes de propriétés des copules.

**Définition 9.4.** Soient deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ .  $X$  et  $Y$  ont une dépendance positive si pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$P(X \leq x, Y \leq y) \geq P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y) \quad (9.17)$$

$X$  et  $Y$  ont une dépendance négative si pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$P(X \leq x, Y \leq y) \leq P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y) \quad (9.18)$$

Ce concept de dépendance s'exprime par une propriété de la copule de  $X$  et  $Y$ . On dit que la copule de deux variables aléatoires est une structure de dépendance positive ou négative. Deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ont une dépendance positive lorsque

$$\mathbf{C}_{XY} \succ \mathbf{C}^\perp ;$$

et  $X$  et  $Y$  ont une dépendance négative lorsque

$$\mathbf{C}_{XY} \prec \mathbf{C}^\perp .$$

Il faut rappeler que comme l'ordre de concordance  $\succ$  (voir définition 8.2) n'est pas un ordre total, il existe des copules qui ne sont ni une structure positive ni une structure négative. On note que, comme l'indépendance, la dépendance (positive ou négative) est une propriété de la copule de deux variables aléatoires continues, et par conséquent, est invariable lorsque les variables aléatoires sont sujettes à des transformations strictement croissantes.

## 9.4 La dépendance de queue

En gestion de risque en général et en gestion du risque de crédit en particulier on s'intéresse justement à des événements de faible probabilité mais qui ont un impact important sur la valeur d'un portefeuille de titres. Le défaut d'un crédit correspond à ce type d'événement et une gestion des risques efficace doit non seulement prendre

en compte les défauts individuels des crédits mais doit aussi être en mesure de se prononcer sur la vraisemblance des défauts simultanés dans le portefeuille.

La théorie unidimensionnelle des valeurs extrêmes développée par EMBRECHTS ET AL [56] a pour objet l'étude du comportement asymptotique d'une distribution unidimensionnelle quelconque  $F$ . Elle a été développée pour l'estimation de probabilités d'occurrences d'événements rares en permettant d'extrapoler le comportement de la queue de distribution des données à partir des plus grandes données observées.

Soit  $x^+$  et  $x^-$  des points de  $F$  tels que  $x^+ = \sup\{x : F(x) < 1\}$  et  $x^- = \inf\{x : F(x) > 0\}$ . La notion de queue épaisse caractérise le comportement de  $F$  aux points  $x^+$  et  $x^-$ .

Dans le cas multidimensionnel, le problème est plus difficile puisqu'il faut caractériser le comportement d'une distribution multidimensionnelle  $F(x_1, \dots, x_N)$  aux points  $(x_1^+, \dots, x_N^+)$  et  $(x_1^-, \dots, x_N^-)$ . La dépendance de queue se rapporte à l'étude du degré de dépendance entre les événements extrêmes.

La décomposition canonique  $F(x_1, \dots, x_N) = \mathbf{C}(F_1(x_1), \dots, F_n(x_N))$  permet de simplifier largement le problème. On montre dans cette section que la dépendance de queue est une propriété de la copule des variables  $X_1, \dots, X_N$ . Mais avant de faire le lien entre dépendance de queue et copule, il est utile de définir, voir définitions 9.5 et 9.6, les mesures de dépendance de queue respectivement à gauche et à droite.

**Définition 9.5.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires dont les fonctions de distributions sont  $F$  et  $G$  respectivement et soient  $U = F(X)$  et  $V = G(X)$ . La mesure

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} P(Y < G^{-1}(u) | X < F^{-1}(u)) \quad (9.19)$$

est appelée mesure de dépendance de queue à gauche de  $X$  et  $Y$ .  $X$  et  $Y$  sont dites

- asymptotiquement indépendantes à gauche si  $\lambda_L = 0$  ;
- asymptotiquement dépendantes à gauche si  $\lambda_L \in (0, 1]$ .

L'équation (9.19) donne la probabilité conditionnelle que la variable aléatoire  $Y$  soit inférieure au  $u$ -quantile  $y(u)$  de la distribution  $G$  étant donné que la variable aléatoire  $X$  est elle aussi inférieure au  $u$ -quantile  $x(u)$  de la distribution  $F$ . On voit que ces deux quantiles correspondent au même seuil, c'est pourquoi  $\lambda_L$  est aussi appelée «*quantile-quantile dependence measure*» (voir COLES ET AL [32]). Si cette probabilité est nulle, l'apparition d'une valeur extrême de  $X$  n'a pas d'influence sur l'apparition d'une valeur extrême de  $Y$ . Si cette probabilité est égale à 1, ceci signifie que les extrêmes sont parfaitement dépendants. Pour toutes les valeurs entre 0 et 1 cela signifie que les deux variables aléatoires présentent une dépendance de queue à gauche en d'autres termes que de «très petites» réalisations de la variable  $X$  tendent à impliquer de «très petites» réalisations de la variable  $Y$  et vice-versa.

**Définition 9.6.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires dont les fonctions de distributions sont  $F$  et  $G$  respectivement et soient  $U = F(X)$  et  $V = G(Y)$ . La mesure

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} P(Y > G^{-1}(u) | X > F^{-1}(u)) \quad (9.20)$$

est appelée mesure de dépendance de queue à droite de  $X$  et  $Y$ .  $X$  et  $Y$  sont dites

- asymptotiquement indépendantes à droite si  $\lambda_U = 0$ ;
- asymptotiquement dépendantes à droite si  $\lambda_U \in (0, 1]$ .

Cette mesure s'interprète exactement comme  $\lambda_L$  en ce sens que lorsque deux variables aléatoires présentent une dépendance de queue à droite. Ceci signifie que de «très grandes» réalisations de la variable  $X$  tendent à impliquer de «très grandes» valeurs de la variable  $Y$  et vice-versa. Par exemple, les deux distributions simulées de la figure 9.2 possèdent le même coefficient de corrélation. Néanmoins, on observe dans le graphique de gauche une forte dépendance de queue à droite et dans le graphique de droite une forte dépendance de queue à gauche.

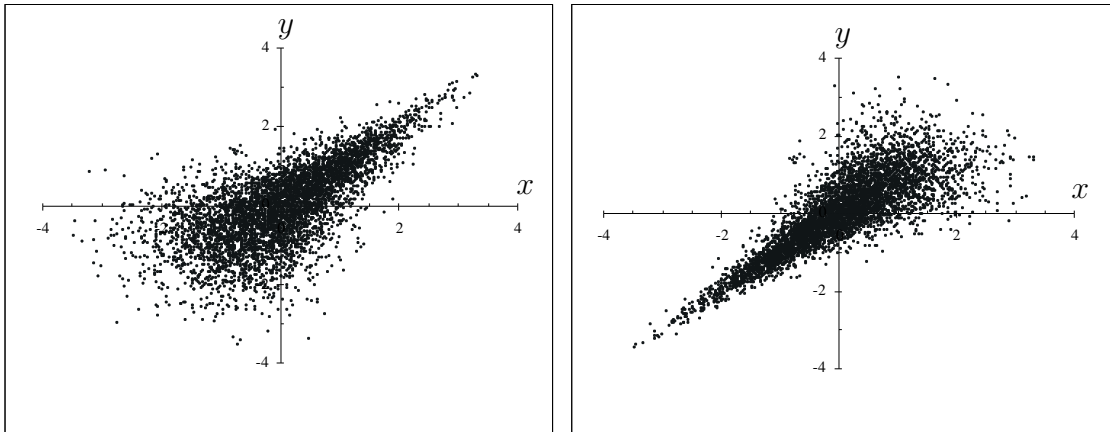


FIG. 9.2 – Illustration de la dépendance de queue à gauche et à droite

Si la copule de  $X$  et  $Y$  est  $\mathbf{C}$ , alors celle-ci décrit de manière exhaustive la dépendance entre  $X$  et  $Y$ . La copule  $\mathbf{C}$  contient par conséquent toute l'information sur la dépendance de queue de  $X$  et  $Y$  comme le suggère la définition suivante, voir JOE [98] p. 33.

**Définition 9.7.** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires dont la copule est  $\mathbf{C}$  telles que les deux grandeurs suivantes existent.

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{C}(u, u)}{u}. \quad (9.21)$$

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + \mathbf{C}(u, u)}{1 - u}. \quad (9.22)$$

On dit que la copule  $\mathbf{C}$  comporte une dépendance de queue à gauche, respectivement à droite si  $\lambda_L$  respectivement  $\lambda_U$  se trouvent dans l'intervalle  $(0, 1]$ .

Les mesures  $\lambda_L$  et  $\lambda_U$  ont des expressions simplifiées, surtout lorsque la copule présente une forme numérique compliquée et la forme des distributions conditionnelles est plus simple, voir EMBRECHTS ET AL [57] p.14 et ss :

$$\begin{aligned}\lambda_L &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{C}(u, u)}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} (\partial_u \mathbf{C}(u, v)|_{v=u} + \partial_v \mathbf{C}(u, v)|_{v=u}) \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} (P(V < u|U = u) + P(U < v|V = v)) .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + \mathbf{C}(u, u)}{1 - u} \\ &= - \lim_{u \rightarrow 1^-} (-2 + \partial_u \mathbf{C}(u, v)|_{v=u} + \partial_v \mathbf{C}(u, v)|_{v=u}) \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} (P(V > u|U = u) + P(U > u|U = u)) .\end{aligned}$$

Lorsque la copule  $\mathbf{C}$  est symétrique c'est-à-dire que  $\mathbf{C}(u, v) = \mathbf{C}(v, u)$ , on obtient

$$\lambda_L = 2 \lim_{u \rightarrow 0^+} P(V < u|U = u) , \quad (9.23)$$

et

$$\lambda_U = 2 \lim_{u \rightarrow 1^-} P(V > u|U = u) . \quad (9.24)$$

De plus, lorsque la copule  $\mathbf{C}$  possède la propriété de symétrie radiale (voir définition (8.25)), on peut montrer que la mesure de dépendance de queue à droite est égale à la mesure de dépendance de queue à gauche. En effet, une copule  $\mathbf{C}$  qui possède la propriété de symétrie radiale vérifie l'équation :

$$\mathbf{C}(u, v) = u + v - 1 + \mathbf{C}(1 - u, 1 - v) .$$

On a par conséquent

$$\begin{aligned}\lambda_L &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{C}(u, u)}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u + u - 1 + \mathbf{C}(u, u)}{u} \\ &= \lim_{u' \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u' + \mathbf{C}(u', u')}{u'} \quad \text{avec } u' = 1 - u \\ &= \lambda_U\end{aligned}$$

Le chapitre suivant traite en autres les copules elliptiques qui possèdent justement la propriété de symétrie radiales et pour lesquelles  $\lambda_U = \lambda_L$ . Enfin, puisque la dépendance de queue est une propriété de la copule, elle est invariante par rapport aux transformations monotones croissantes des variables aléatoires.

# Chapitre 10

## Les copules paramétriques

Il existe une multitude de copules permettant de caractériser une multitude de structures de dépendance. Cependant, ce chapitre traitera du sous-ensemble de copules dites paramétriques c'est-à-dire des fonctions qui dépendent de un ou de quelques paramètres. Ce sous-ensemble est constitué de nombreuses familles qui offrent une diversité suffisante pour modéliser les structures de dépendance les plus courantes. Le chapitre 5 de JOE [98] se veut une référence en ce qui concerne les familles de copules paramétriques ainsi que leurs propriétés. Ces copules sont d'un grand intérêt pour la gestion des risques car elles permettent de construire des modèles de distribution multidimensionnelles paramétriques ou semi-paramétriques. De plus, certaines familles sont numériquement simples de telle manière qu'il est plus ou moins facile d'en estimer les paramètres.

Pour les copules paramétriques, la notation choisie est  $\mathbf{C}_\theta$  où  $\theta$  est l'ensemble des paramètres de la copule et on verra que le degré de dépendance varie justement avec les paramètres de la copule. En plus des mesures de d'association usuelles associées à ces copules, les principales propriétés que l'on considérera sont la symétrie radiale ainsi que la dépendance de queue.

Dans ce chapitre, on présentera deux familles de copules qui sont les plus usuelles et les plus simples. Il s'agit de la famille des copules elliptiques, dont on présentera la copule normale et la copule de Student. Ensuite on présentera la famille des copules archimédiennes dont on discutera plus en détail les copules de Gumbel et de Clayton.

### 10.1 La famille des copules elliptiques

Les copules elliptiques sont les copules associées aux distributions multidimensionnelles elliptiques. La classe des distributions elliptiques est essentiellement la classe des distributions ayant la propriété de symétrie radiale. Ces distributions sont très largement utilisées en économie et en finance. Une propriété importante des distributions elliptiques est la propriété de linéarité qui implique qu'une somme de variables

aléatoires suivant une distribution elliptique suit elle aussi une distribution elliptique. Cette propriété est particulièrement intéressante en théorie de portefeuille. La plus populaire des distributions elliptiques est sans doute la loi normale qui est intéressante pour sa tractabilité. La définition suivante des distributions elliptiques est donnée dans FANG ET AL [60].

**Définition 10.1.** *Un vecteur aléatoire à  $N$  dimensions  $\mathbf{X}$  possède une distribution elliptique d'espérance mathématique  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^N$  et de matrice de covariance  $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  si*

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + A'Y \quad (10.1)$$

où  $A'A = \boldsymbol{\Sigma}$  et  $Y$  est un vecteur aléatoire de distribution sphérique, c'est-à-dire que la fonction caractéristique  $\psi(t)$  de  $Y$  a la forme

$$\psi(\mathbf{t}) = \Phi(\mathbf{t}'\mathbf{t}), \quad t \in \mathbb{R}^N$$

pour une fonction  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . On dénote cette classe  $E_N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \Phi)$ .

Lorsque  $\mathbf{X} \in E_N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \Phi)$ , alors la densité de  $\mathbf{X}$ , lorsqu'elle existe s'écrit :

$$f(\mathbf{X}) = |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} g((\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})) \quad (10.2)$$

pour une fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  appelée **générateur de densité**.

Il existe plusieurs générateurs mais les plus connus sont les générateurs de la densité normale, de la densité Student et aussi des densités logistiques et de Laplace. On décrit ci-après les propriétés des distributions normale et de Student à travers leurs copules respectives.

### 10.1.1 La famille des copules normales

On considère un vecteur aléatoire  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)'$  qui suit une distribution normale multivariée de paramètres  $\boldsymbol{\mu}$  et  $\boldsymbol{\Sigma}$ . On a

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + A\mathbf{Z} \quad (10.3)$$

où  $\boldsymbol{\Sigma} = A'A$  et  $\mathbf{Z}$  est un vecteur aléatoire de distribution normale standardisée. Le générateur de densité de la loi normale est

$$g_n(u) = \exp(-u/2) \quad (10.4)$$

et on obtient la fonction de densité de la loi normale multivariée :

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp \left( -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right). \quad (10.5)$$

Les premier et deuxième moments du vecteur  $\mathbf{X}$  sont respectivement :

$$E(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}$$



et

$$\text{Cov}(\mathbf{X}) = \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \dots & \sigma_{NN} \end{pmatrix}$$

où  $\sigma_{ij} = \text{E}(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)$ , pour  $i, j = 1, 2, \dots, N$ . La matrice de corrélation  $\boldsymbol{\rho}$  du vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  est donnée par :

$$\boldsymbol{\rho} = \text{Corr} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1N} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \rho_{N2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

où  $\rho_{ij} = \sigma_{ij} / \sigma_i \sigma_j$ .

Pour un vecteur aléatoire bivarié  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  qui suit une distribution normale bivariée, de paramètres  $\boldsymbol{\mu} = (0, 0)'$  et  $\rho_{12} = 0.8$ , la figure 10.1 représente la fonction de densité et des lignes de niveau. On voit bien que la distribution est symétrique et que les lignes de niveau ont une forme elliptique.

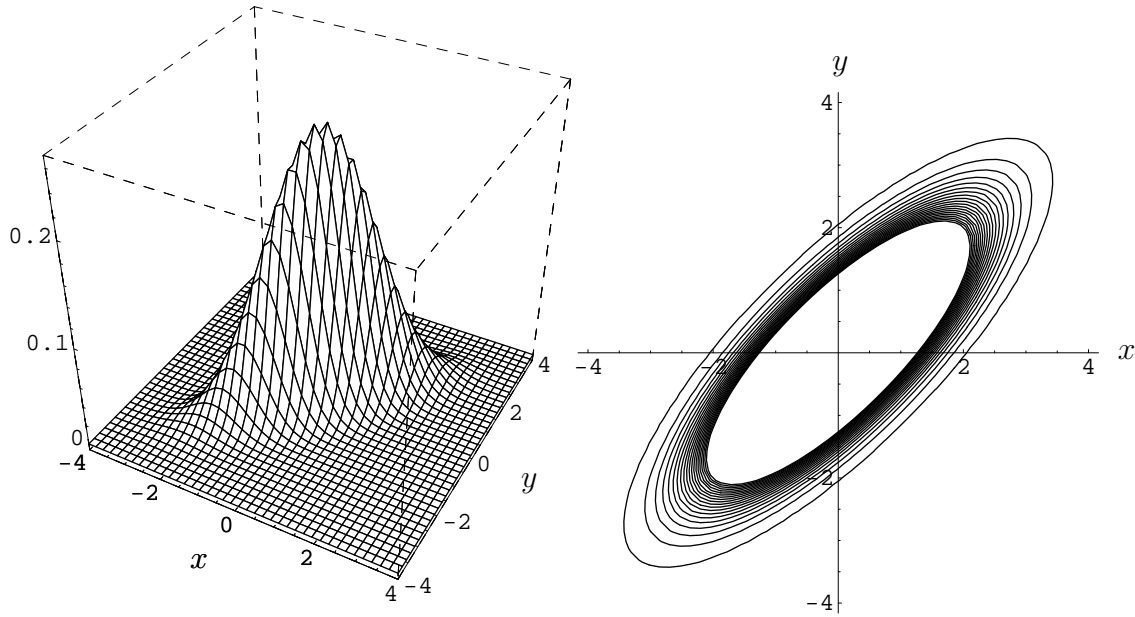


FIG. 10.1 – Fonction de densité et lignes de niveau de la distribution normale bivariée avec  $\rho_{12} = 0.8$ .

On s'intéresse maintenant à la copule d'un vecteur aléatoire  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)'$  qui suit une distribution normale multivariée. Pour des raisons de simplicité, on considère une distribution normale standardisée à  $N$  dimensions dont la matrice de corrélation est  $\boldsymbol{\rho}$ . Toute distribution normale multidimensionnelle de paramètres  $\boldsymbol{\mu}$  et  $\mathbf{\Sigma}$  peut être générée lorsque qu'on a un vecteur de distribution normale standardisée

à l'aide de l'équation (10.3). La fonction de densité de la loi normale standardisée à  $N$  dimensions est :

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}|\boldsymbol{\rho}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\boldsymbol{\rho}^{-1}\mathbf{x}\right). \quad (10.6)$$

Le corollaire 8.2 du théorème de Sklar à  $N$  dimensions donne l'expression suivante de toute copule :

$$\mathbf{C}(u_1, u_2, \dots, u_N) = F(F_1^{(-1)}(u_1), F_2^{(-1)}(u_2), \dots, F_N^{(-1)}(u_N)); \quad (10.7)$$

où dans ce cas  $F$  est la fonction de distribution  $\Phi_{\boldsymbol{\rho}}$  de la loi normale standardisée multivariée avec la matrice de corrélation  $\boldsymbol{\rho}$  et  $F_1, F_2, \dots, F_N$  sont les fonctions de distribution de la loi normale univariée. La copule normale s'écrit par conséquent :

$$\mathbf{C}_{\boldsymbol{\rho}}^N(u_1, u_2, \dots, u_n) = \Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_N)) \quad (10.8)$$

ou de manière plus explicite en utilisant l'expression de la densité normale multivariée :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\boldsymbol{\rho}}^N &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}|\boldsymbol{\rho}|^{1/2}} \cdot \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_N)} \\ &\quad \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\boldsymbol{\rho}^{-1}\mathbf{x}\right) dx_1 \dots dx_N. \end{aligned} \quad (10.9)$$

A partir du théorème de Sklar, on peut déduire la relation qui relie la densité multivariée, les densités univariées et la densité de la copule, voir équation 8.10 :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{c}(F_1(x_1), \dots, F_1(x_1)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i). \quad (10.10)$$

On a donc, dans le cas de la distribution normale multivariée l'équation suivante :

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{c}(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_1)) \prod_{i=1}^n \phi(x_i),$$

qui permet d'obtenir la densité de la copule normale suivante :

$$\mathbf{c}_{\boldsymbol{\rho}}^N(\mathbf{u}) = \frac{1}{|\boldsymbol{\rho}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varsigma}'(\boldsymbol{\rho}' - \mathbf{I})\boldsymbol{\varsigma}\right); \quad (10.11)$$

avec  $\boldsymbol{\varsigma} = \Phi^{-1}(\mathbf{u})$  avec  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)'$  et  $\mathbf{I}$  la matrice identité de dimension  $N \times N$ .

Comme on peut le voir dans l'expression de la copule normale, l'unique paramètre de cette copule est la matrice de corrélation  $\boldsymbol{\rho}$ . La copule normale est positivement ordonnée par rapport au paramètre  $\boldsymbol{\rho}$ . Ceci signifie que pour une copule normale bivariée on a :

$$\mathbf{C}_{\rho=-1}^N \prec \mathbf{C}_{\rho<0}^N \prec \mathbf{C}_{\rho=0}^N \prec \mathbf{C}_{\rho>0}^N \prec \mathbf{C}_{\rho=1}^N$$

Par ailleurs elle atteint les deux bornes de Fréchet-Hoeffding  $\mathbf{C}_{\rho=-1}^N = \mathbf{C}^-$  et  $\mathbf{C}_{\rho=1}^N = \mathbf{C}^+$ . La figure 10.2 présente le graphe à trois dimensions et les lignes de niveau d'une copule normale bivariée de paramètre  $\rho = 0.8$ .

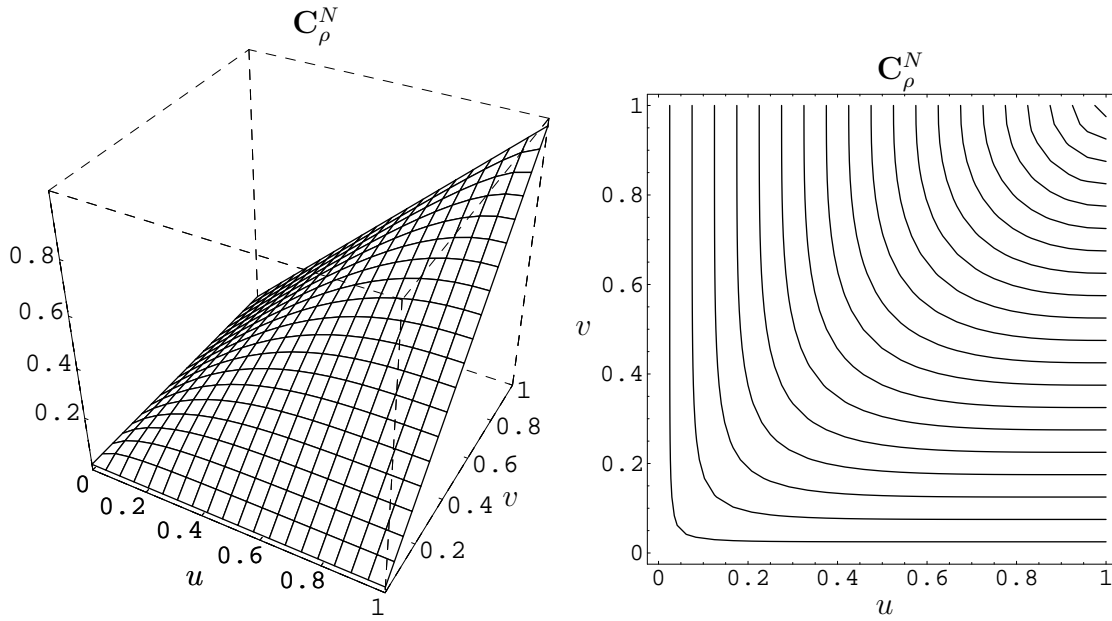


FIG. 10.2 – Représentation graphique et lignes de niveau de la copule normale bivariable de paramètre  $\rho = 0.8$ .

La copule normale possède la propriété de symétrie radiale, ce qui veut dire que la copule normale est égale à la copule normale de survie (voir théorème 8.8). La version bivariable de la copule normale, voir équation 10.8 est :

$$\mathbf{C}_{\rho}^N(u, v) = \Phi_{\rho}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)) .$$

Lorsque l'on remplace  $\Phi^{-1}(u)$  et  $\Phi^{-1}(v)$  respectivement par  $\tilde{u}$  et par  $\tilde{v}$ , on obtient en utilisant la propriété de symétrie de la loi normale :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\rho}^N(u, v) &= \Phi_{\rho}(\tilde{u}, \tilde{v}) \\ &= \Phi(\tilde{u}) + \Phi(\tilde{v}) - 1 + \Phi_{\rho}(1 - \tilde{u}, 1 - \tilde{v}) \end{aligned}$$

Étant donné que  $\Phi(\tilde{u}) = \Phi(\Phi^{-1}(u)) = u$ , on obtient ainsi

$$\mathbf{C}_{\rho}^N(u, v) = u + v - 1 + \mathbf{C}_{\rho}^N(1 - u, 1 - v) = \bar{\mathbf{C}}_{\rho}^N(u, v) . \quad (10.12)$$

Cette propriété de symétrie radiale a pour conséquence que la dépendance de queue à droite et à gauche sont égales.

Plusieurs modèles en finance supposent une distribution normale multivariée des rendements d'un portefeuille. Ceci suppose d'une part la modélisation des marges par des distributions normales et d'autre part la modélisation de la dépendance entre les rendements individuels par une copule normale. En risque de crédit, plusieurs modèles emploient comme unique mesure d'association entre les défauts individuels les corrélations des défauts. Ceci implique aussi implicitement l'emploi d'une copule

normale puisque c'est la seule copule qui est entièrement caractérisée par le coefficient de corrélation.

Puisque la matrice de corrélation caractérise totalement la copule normale, toutes les caractéristiques de dépendance telles que mesures de concordance et dépendance de queue seront fonction de cet unique paramètre.

### Mesure de concordance

Soient les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_N$  reliées une copule normale  $\mathbf{C}_\rho^N$ . Pour chaque paire  $(X_i, X_j)$  de variables aléatoires, les expressions du tau de Kendall et du rho de Spearman sont données respectivement par, voir LINDSKOG ET AL [123] :

$$\tau_{ij} = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, N ; \quad (10.13)$$

et

$$\rho_{ij} = \frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{\rho_{ij}}{2}\right), \quad i, j = 1, \dots, N . \quad (10.14)$$

### La dépendance de queue

Soient à nouveau deux variables aléatoires de distribution normale standardisée  $X, Y$  reliées par une copule normale de paramètre  $\rho$ . La dépendance de queue à gauche pour une copule normale est donnée par l'équation (9.23) puisque la famille des copules normale est symétrique  $\mathbf{C}_\rho^N(u, v) = \mathbf{C}_\rho^N(v, u)$  :

$$\lambda_L = 2 \lim_{u \rightarrow 0^+} P(V < u | U = u) ;$$

où  $U = \Phi(X)$  et  $V = \Phi(Y)$ . La fonction de distribution  $\Phi$  est monotone croissante et possède un point droit infini et on obtient alors l'expression suivante pour la valeur de  $\lambda_L$  :

$$\begin{aligned} \lambda_L &= 2 \lim_{u \rightarrow 0^+} P(V < u | U = u) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} P(\Phi^{-1}(V) < x | \Phi^{-1}(U) = x) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} P(Y < x | X = x) . \end{aligned} \quad (10.15)$$

Puisque le vecteur  $(X, Y)$  suit une distribution multivariée normale standardisée de paramètre  $\rho$ , la variable aléatoire  $Y|X = x$  suit aussi une distribution normale de paramètres, voir HOGG & CRAIG [88] p.149 :

$$E(Y|X = x) = \rho x \quad \text{et} \quad \text{Var}(Y|X = x) = 1 - \rho^2 .$$

L'équation (10.15) peut donc être réécrite de la manière suivante :

$$\lambda_L = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi\left(\frac{x\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}}\right) . \quad (10.16)$$

Par conséquent, pour deux variables  $X$  et  $Y$  reliées par la copule normale, on a  $\lambda_L = 0$  pour  $-1 < \rho < 1$  et  $\lambda_L = 1$  si  $\rho = 1$ . Pour  $\rho = -1$ , la dépendance de queue à gauche n'est pas définie.

De manière analogue, la mesure de dépendance de queue à droite pour une copule symétrique est donnée par l'équation (9.24). Dans le cas particulier de la copule normale on obtient :

$$\lambda_U = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \Phi \left( \frac{x\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}} \right) \right). \quad (10.17)$$

On observe que pour la copule normale,  $\lambda_L = \lambda_U = 0$  pour des valeurs de  $-1 < \rho < 1$ . La copule normale ne permet donc pas de modéliser une dépendance des valeurs extrêmes des variables aléatoires.

### 10.1.2 La famille des copules de Student

Comme la copule normale, la copule  $t$  de Student est la copule associée à la distribution multidimensionnelle de Student. Soit  $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_N)'$  un vecteur aléatoire de distribution normale centrée réduite ( $\mathbf{Z} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\rho})$ ) et  $S$  est une variable aléatoire indépendante du vecteur  $\mathbf{Z}$  et de distribution  $\chi^2$  avec  $\nu$  degrés de liberté. Alors, le vecteur aléatoire  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)'$  défini comme suit :

$$\mathbf{X} = \mathbf{Z} \sqrt{\frac{\nu}{S}} \quad (10.18)$$

suit une distribution de Student multivariée dont  $\boldsymbol{\rho}$  est la matrice de corrélation et  $\nu$  le nombre de degrés de liberté, et voir JOHNSON & KOTZ [100], p. 132 ss.

Le générateur de densité de la loi de student est

$$g_n(u) = \left( 1 + \frac{u}{m} \right)^{-(n+m)/2} \quad m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (10.19)$$

et on obtient la fonction de densité de la loi de student multivariée :

$$t(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+N}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})(\pi\nu)^{N/2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \left( 1 + \nu^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right)^{-\frac{\nu+N}{2}}; \quad (10.20)$$

où  $\Gamma$  est la fonction de distribution gamma donnée par

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy.$$

La figure 10.3 représente la fonction de densité et lignes de niveau de la distribution de student bivariée pour  $\rho = 0.8$  et  $\nu = 4$ . On observe, comme pour la loi normale, que la distribution est symétrique et que les lignes de niveau ont une forme elliptique.

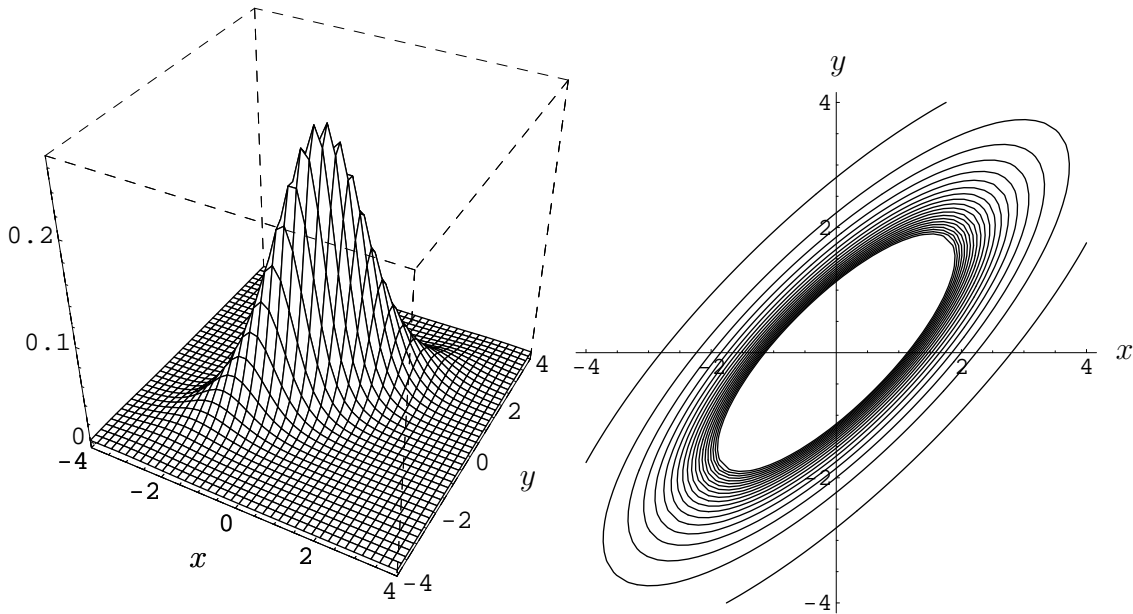


FIG. 10.3 – Fonction de densité et lignes de niveau de la distribution  $t$  bivarée pour  $\rho_{12} = 0.8$  et  $\nu = 4$ .

On s'intéresse maintenant à la copule des variables aléatoires  $X_1, \dots, X_N$  qui suivent une distribution multivariée de Student. Le corollaire 8.2 du théorème de Sklar à  $N$  dimensions donne l'expression suivante de la copule de Student :

$$\mathbf{C}_{\boldsymbol{\rho}, \nu}^T(u_1, u_2, \dots, u_N) = \mathbf{T}_{\boldsymbol{\rho}, \nu}(T_{\nu}^{(-1)}(u_1), T_{\nu}^{(-1)}(u_2), \dots, T_{\nu}^{(-1)}(u_N)) ; \quad (10.21)$$

où  $\mathbf{T}$  est la fonction de distribution d'une loi de student multivariée de paramètres  $\nu$  et  $\boldsymbol{\rho}$  et  $T$  est la fonction de distribution univariée d'une loi de student avec  $\nu$  degrés de liberté.

En utilisant l'expression de la densité de student on obtient l'expression suivante explicite de la copule de student :

$$\mathbf{C}_{\boldsymbol{\rho}, \nu}^T(u_1, u_2, \dots, u_N) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+N}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})(\pi\nu)^{N/2}} |\boldsymbol{\rho}|^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{T_{\nu}^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{T_{\nu}^{-1}(u_N)} \frac{1}{(1 + \nu^{-1} \mathbf{x}' \boldsymbol{\rho}^{-1} \mathbf{x})^{\frac{\nu+N}{2}}} dx_1 \dots dx_N . \quad (10.22)$$

On peut montrer que la densité de la copule de Student est (voir RONCALLI [128]) :

$$\mathbf{c}_{\boldsymbol{\rho}, \nu}^T(u_1, u_2, \dots, u_N) = |\boldsymbol{\rho}|^{-1/2} \frac{\Gamma(\frac{\nu+N}{2}) [\Gamma(\frac{\nu}{2})]^N \left(1 + \frac{1}{\nu} \boldsymbol{\varsigma}' \boldsymbol{\rho}^{-1} \boldsymbol{\varsigma}\right)^{-\frac{\nu+N}{2}}}{[\Gamma(\frac{\nu+1}{2})]^N \Gamma(\frac{\nu}{2}) \prod_{i=1}^N \left(1 + \frac{\varsigma_i^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}} , \quad (10.23)$$

où  $\varsigma_i = T_{\nu}^{-1}(u_i)$ .

La figure 10.4 donne une représentation graphique d'une copule bivarée de student, de paramètres  $\rho = 0.8$  et  $\nu = 4$ .

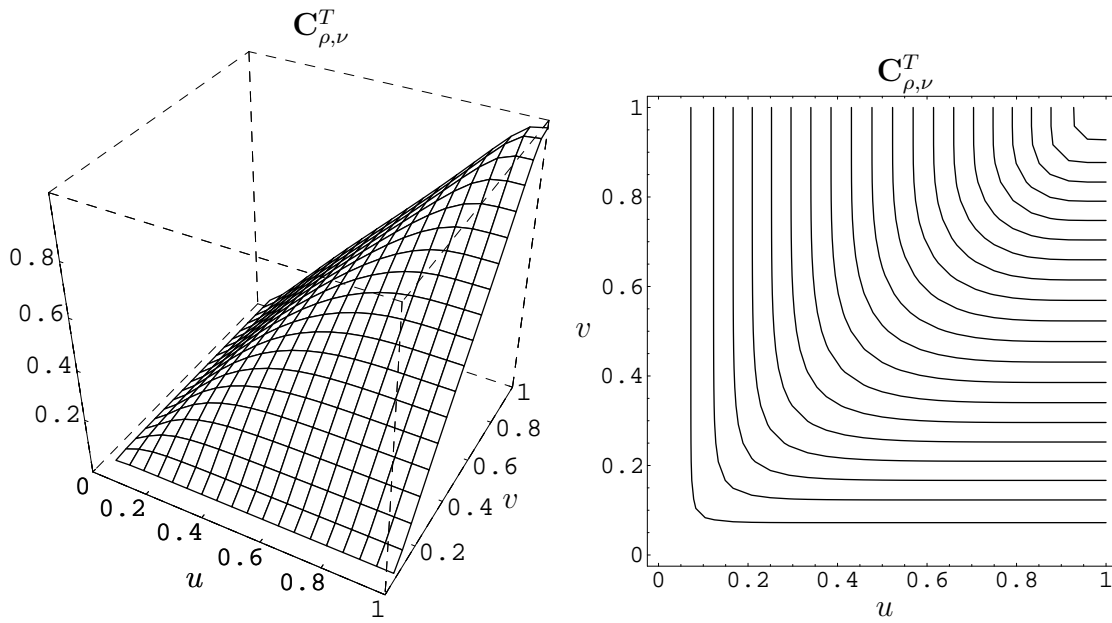


FIG. 10.4 – Représentation graphique et lignes de niveau de la copule de Student bivariable de paramètre  $\rho = 0.8$  et  $\nu = 4$ .

Comme la copule normale, la copule de Student est une copule positivement ordonnée par rapport à la matrice de corrélation pour un nombre de degré de liberté défini. La copule de Student atteint aussi les bornes basse et hautes de Fréchet-Hoeffding mais il est important de noter qu'elle n'est jamais égale à la copule produit, même lorsque  $\rho = 0$ .

### Mesures de dépendance

Soient les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_N$  reliées une copule de Student  $C_{\rho, \nu}^N$ . Pour chaque paire  $(X_i, X_j)$  de variables aléatoires, LINDSKOG [123] montre que l'expression du tau de Kendall est identique que pour la copule normale :

$$\tau_{ij} = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, N ; \quad (10.24)$$

Par contre, il n'existe pas d'expression analytique pour le rho de Spearman, mais RONCALLI [128] p. 227 remarque numériquement que  $\varrho_T > \varrho_\Phi$  pour une corrélation négative et  $\varrho_T < \varrho_\Phi$  pour une corrélation positive.

### La dépendance de queue

La copule de Student est une copule qui possède la propriété de symétrie radiale, voir DEMARTA & MCNEIL [45], ce qui implique l'égalité des mesures de dépendance de queue à droite et à gauche. Les mesures simplifiées de dépendance de queue à gauche et à droite sont données respectivement par les équations (9.23) et (9.24). Soit un

vecteur aléatoire  $(X, Y)'$  de qui suit une distribution multidimensionnelle de Student de paramètres  $\boldsymbol{\rho}$  et  $\nu$ . Conditionnellement à  $X = x$  on a (voir RONCALLI [128] p. 227) :

$$\left( \frac{\nu + 1}{\nu + x^2} \right)^{1/2} \frac{Y - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}} \sim t_{\nu+1} .$$

La variable  $Y|X = x$  suit donc une distribution de Student avec  $\nu + 1$  degrés de liberté et dont les deux premiers moments sont :

$$E(Y|X = x) = \rho x \quad \text{et} \quad \text{Var}(Y|X = x) = \left( \frac{\nu + x^2}{\nu + 1} \right) (1 - \rho^2) .$$

Puisque la copule de Student possède la propriété de symétrie radiale, les mesures de dépendance de queue à gauche et à droite sont égales et sont données par :

$$\begin{aligned} \lambda_L = \lambda_U &= 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 - T_{\nu+1} \left( \frac{\nu + 1}{\nu + x^2} \right)^{1/2} \frac{x - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 - T_{\nu+1} \left( \frac{\nu + 1}{\frac{\nu}{x^2} + 1} \right)^{1/2} \frac{\sqrt{1 - \rho}}{\sqrt{1 + \rho}} \right) \\ &= 2 \left( 1 - T_{\nu+1} \left( \frac{\sqrt{\nu + 1} \sqrt{1 - \rho}}{\sqrt{1 + \rho}} \right) \right) . \end{aligned} \quad (10.25)$$

Deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  dont la copule est une copule de student sont asymptotiquement dépendantes lorsque  $\rho > -1$ . Comme conséquence de la symétrie radiale de la copule de Student, cette dépendance est symétrique et est une fonction décroissante du nombre de degré de liberté pour une corrélation donnée. Les coefficients de dépendance de queue sont données dans la table 10.1. On observe, que même pour une corrélation nulle ou négative, la copule de student implique une dépendance de queue non nulle.

$\nu \backslash \rho$	-0.5	0	0.5	0.9	1
2	0.06	0.18	0.39	0.72	1.00
5	0.01	0.05	0.21	0.59	1.00
10	0.00	0.01	0.08	0.46	1.00
$\infty$	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00

TAB. 10.1 – Valeurs de  $\lambda_L$  ou  $\lambda_U$  impliquées par la copule de student pour différentes valeurs de  $\nu$  et  $\rho$ .

## Comparaison de la copule normale et la copule de Student

Les familles des copules normale et de student sont toutes deux des familles positivement ordonnées par rapport au paramètre  $\rho$ .



Ces deux familles atteignent les bornes inférieure et supérieure de Fréchet pour  $\rho = -1$  respectivement  $\rho = 1$ . On a

$$\mathbf{C}_{\rho=-1} = \mathbf{C}^- \quad \mathbf{C}_{\rho=1} = \mathbf{C}^+ \quad (10.26)$$

Pour la copule normale, le cas de variables aléatoires indépendantes est décrite par  $\mathbf{C}_{\rho=0}^N = \mathbf{C}^\perp$  mais ceci n'est pas le cas pour la copule de Student. En effet, on a  $\mathbf{C}_{\rho=0,\nu}^T \neq \mathbf{C}^\perp$  car si la copule de Student pour  $\rho = 0$  était la copule  $\mathbf{C}^\perp$ , cela impliquerait que la dépendance de queue  $\lambda$  soit égale à 0. Ceci n'est pas le cas, puisque selon l'équation (10.18), un vecteur aléatoire de distribution de Student est défini comme le rapport entre un vecteur aléatoire gaussien sur la racine d'une variable aléatoire de distribution  $\chi^2$  divisé par le nombre de degrés de liberté. Lorsque  $\rho$  est égal à 0, il y a une dépendance résiduelle induite par la variable aléatoire de distribution  $\chi^2$ , ce qui implique que la copule de Student avec comme paramètre  $\rho = 0$  est différente de la copule produit.

La différence majeure entre les distributions multivariées normale et de Student réside dans les queues de distributions. La distribution normale dispose de queues écrasées alors que la distribution de Student possède des queues plus ou moins épaisses, selon le nombre de degrés de liberté. Cette propriété des deux distributions est naturellement une propriété de la copule. En fait la copule normale est un cas particulier de la copule de student lorsque  $\nu \rightarrow \infty$ . En effet, lorsque  $\nu \rightarrow \infty$ , on obtient pour la mesure de dépendance de queue de la copule de Student :

$$\begin{aligned} \lambda_L = \lambda_U &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} 2 T_{\nu+1} \left( - \left( \frac{\sqrt{\nu+1} \sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}} \right) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

La figure 10.5 permet de visualiser le comportement des queues de distributions normale et Student pour un même coefficient de corrélation  $\rho = 0.9$ . La figure de gauche représente des observations simulées suivant une loi normale bivariée et celle de droite représente des observations simulées suivant une loi de Student bivariée avec  $\nu = 1$  degré de liberté. On observe que pour la loi de Student plusieurs observations sont situées dans les extrêmes gauche et droit de la distribution.

La modélisation de la dépendance en finance par des copules elliptiques suscite quelque réserves. La critique majeure des copules elliptiques repose dans le fait qu'elles supposent une dépendance symétrique. L'observation des données (prix et rendements) sur les marchés financiers remet en question l'aptitude de ce type de copule pour modéliser le co-mouvement des actifs et crédits financiers. Différentes études empiriques ont conclu à l'asymétrie des distributions jointes des rendements des actifs. On peut citer les travaux de PATTON [122], et de HONG & AL [89]. En particulier, FORTIN & KUZMICS [62] observent que la distribution jointe empirique des paires de rendements d'indices d'actions affiche une forte dépendance de queue à gauche et une faible dépendance de queue à droite de la distribution.

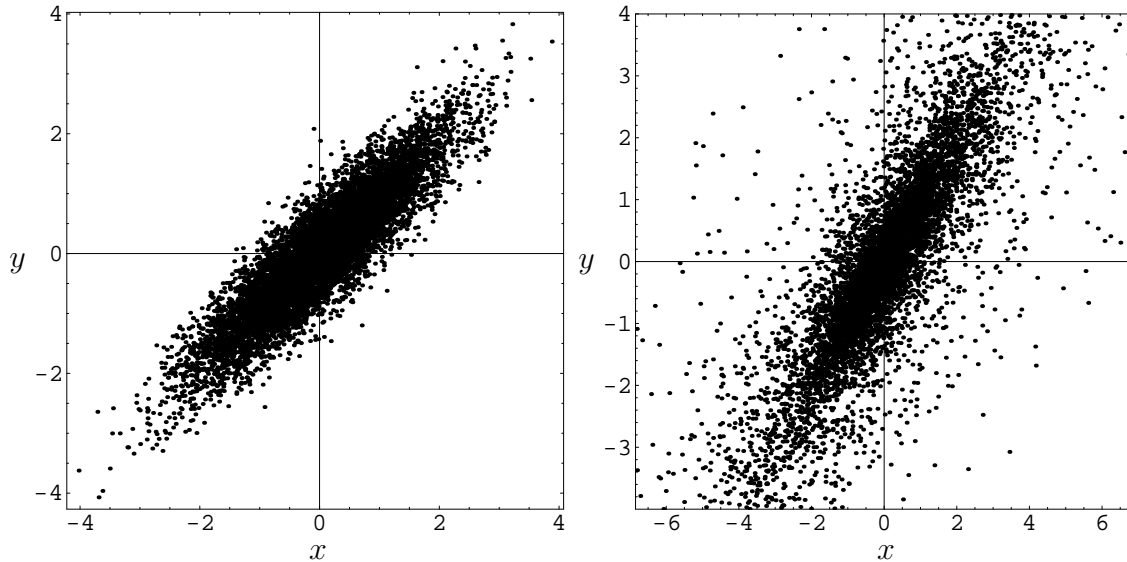


FIG. 10.5 – 10'000 données simulées d'une distribution normale bivariée standardisée avec  $\rho = 0.9$  et d'une distribution de Student bivariée avec  $\nu=1$  degrés de liberté et  $\rho = 0.9$ .

Les rendements des actifs ont donc tendance à avoir un degré de dépendance différent selon la partie de la distribution. D'autres travaux sur l'effet de contagion (associée à l'interaction entre les firmes et leurs partenaires) concluent que celle-ci est plus importante en période de crise (faibles rendements) qu'en période de d'expansion (voir CHAN-LAU & AL [29], HARTMANN & AL [86]). Les copules archimédiennes présentées à la section suivante permettent de modéliser une dépendance différente à gauche et droite des distributions.

## 10.2 Les familles de copules archimédiennes

La famille des copules archimédiennes permet, contrairement à la famille des copules elliptiques, de modéliser l'asymétrie de la dépendance dans les queues gauches et droites d'une distribution multivariée. De plus, certaines sous-familles de copules archimédiennes sont numériquement simples de telle manière qu'il est plus ou moins facile d'en estimer les paramètres.

Les copules archimédiennes ont été développées par SCHWEIZER & SKLAR [138] dans l'étude des espaces métriques de probabilité mais leur usage en statistique demeure associée au statisticien CHRISTIAN GENEST. GENEST & MACKAY [70] introduisent les copules archimédiennes de façon originale et intuitive en partant du cas de la copule produit,  $\mathbf{C}(u, v) = P(U \leq u, V \leq v) = uv$ . Ils envisagent un cas général dans lequel les variables ne sont pas indépendantes mais le deviennent une fois l'échelle de probabilité originale transformée. De manière spécifique, ils

considèrent une fonction croissante et continue  $\psi : I \rightarrow I$  telle que  $\psi(0) = 0$  et  $\psi(1) = 1$  et supposent que :

$$\psi(P(U \leq u, V \leq v)) = \psi(P(U \leq u)) \times \psi(P(V \leq v)) \quad (10.27)$$

pour tout  $u, v \in I$ . Lorsque  $\psi(t) = t$  alors les variables aléatoires  $U$  et  $V$  sont indépendantes. En posant  $\varphi(t) = -\ln \psi(t)$  pour tout  $t \in I$ , on réécrit l'équation (10.27) comme suit :

$$\varphi(\mathbf{C}(u, v)) = \varphi(u) + \varphi(v) ,$$

où  $\mathbf{C}(u, v) = P(U \leq u, V \leq v)$ . On obtient par conséquent une manière de construire des copules à l'aide d'une fonction  $\varphi(t)$  qui peut être considérée comme un *générateur* de copules.

**Définition 10.2.** Soit une fonction  $\varphi : I \rightarrow [0, \infty[$  continue et strictement décroissante telle que  $\varphi(1) = 0$ . La pseudo-inverse de  $\varphi$  est la fonction  $\varphi^{[-1]} : [0, \infty[ \rightarrow I$  définie comme suit :

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1} & \text{pour } 0 \leq t \leq \varphi(0) , \\ 0 & \text{pour } \varphi(0) \leq t \leq \infty . \end{cases} \quad (10.28)$$

On note que  $\varphi^{[-1]}$  est continue et non croissante sur son domaine  $[0, \infty[$  et strictement décroissante sur l'intervalle  $[0, \varphi(0)]$ . De plus  $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$  sur  $I$  et on obtient

$$\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t & \text{pour } 0 \leq t \leq \varphi(0) , \\ \varphi(0) & \text{pour } \varphi(0) \leq t \leq \infty . \end{cases}$$

On a par conséquent

$$(\varphi^{[-1]}(t)) = \min(t, \varphi(0)) .$$

La définition des pseudo-inverse permet de formuler le théorème suivant (voir NELSEN [119] p. 90ss).

**Théorème 10.1.** Soit une fonction  $\varphi : I \rightarrow [0, \infty[$  continue et strictement monotone décroissante telle que  $\varphi(1) = 0$  et  $\varphi^{[-1]}$  est sa pseudo-inverse définie selon la définition 10.2. Alors la fonction  $\mathbf{C} : I^2 \rightarrow I$  :

$$\mathbf{C}^A(u, v) = \varphi^{[-1]}[\varphi(u) + \varphi(v)] \quad (10.29)$$

est une fonction copule bivariable telle que définie à la définition 8.1, lorsque  $\varphi$  est une fonction convexe.

La preuve de ce théorème se trouve dans NELSEN [119] p.91. Le théorème 10.1 permet de donner la définition suivante d'une copule archimédienne bivariable.

**Définition 10.3.** Une copule construite à partir de l'équation (10.29) est dite **copule archimédienne bivariée**. La fonction  $\varphi$  est appelée *générateur de la copule*.

Lorsque  $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$ , on parle de *générateur strict* et la copule  $\mathbf{C}$  est dite *copule archimédienne bivariée stricte*. Si par exemple le générateur de la copule est  $\varphi(t) = -\ln t$ , on retrouve la copule produit  $\mathbf{C}^\perp(u, v) = -\exp(-[(\ln u) + (\ln v)]) = uv$  qui est donc aussi une copule archimédienne.

La densité d'une copule archimédienne bivariée est donnée par (CHERUBINI & AL [30] p. 122) :

$$\mathbf{c}^A = \frac{-\varphi''(\mathbf{C}^A(u, v))\varphi'(u)\varphi(v)}{(\varphi'(\mathbf{C}^A(u, c)))^3}. \quad (10.30)$$

Les copules archimédiennes jouent un rôle important car elles présentent des propriétés intéressantes et sont très maniables (voir NELSEN [119] p. 93).

**Théorème 10.2.** Si  $\mathbf{C}(u, v)$  est une copule archimédienne de générateur  $\varphi$ , alors :

1.  $\mathbf{C}$  est symétrique, c'est-à-dire  $\mathbf{C}(u, v) = \mathbf{C}(v, u)$  pour tout  $u, v$  dans  $\mathbf{I}$ ;
2.  $\mathbf{C}$  est associative, c'est-à-dire  $\mathbf{C}(u, \mathbf{C}(v, w)) = \mathbf{C}(\mathbf{C}(u, v), w)$  pour tout  $u, v, w$  dans  $\mathbf{I}$ ;
3. Si  $c > 0$  est une constante quelconque, alors  $c\varphi$  est aussi un générateur de la copule  $\mathbf{C}$ .

Il est à présent important d'introduire les copules archimédiennes multivariées. La construction d'une copule archimédienne multivariée se fait selon le même principe que la construction d'une copule bivariée :

$$\mathbf{C}(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \dots \varphi(u_n)). \quad (10.31)$$

Néanmoins, le générateur  $\varphi$  doit répondre à certaines exigences pour que la fonction définie par l'équation (10.31) soit bien une fonction copule, voir NELSEN [119] p. 121. Dans ce contexte, il faut au préalable définir la notion de fonction complètement monotone, (voir WIDDER [148] p.144 ss).

**Définition 10.4.** Une fonction  $\phi(t)$  est *complètement monotone* sur un intervalle  $J$  si elle est continue et si toutes ses dérivées d'ordre  $k = 0, 1, 2, \dots$  changent alternativement de signe de telle manière que

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \phi(t) \geq 0. \quad (10.32)$$

Par conséquent, si  $\phi(t)$  est complètement monotone sur  $[0, \infty)$  et que  $\phi(c) = 0$  pour un nombre  $c > 0$ , alors  $\phi$  doit être égale à 0 sur tout l'intervalle  $[0, \infty)$ . Lorsque la pseudo-inverse  $\varphi^{[-1]}$  du générateur d'une copule archimédienne est complètement monotone, celle-ci doit être positive sur  $[0, \infty)$ , ce qui implique que  $\varphi$  est stricte et donc  $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$ . Le théorème suivant donne les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un générateur strict  $\varphi$  puisse générer une copule archimédienne à  $N$  dimensions.

**Théorème 10.3.** Soit  $\varphi : I \rightarrow \infty$  une fonction continue strictement décroissante telle que  $\varphi(0) = \infty$  et  $\varphi(1) = 0$  et soit  $\varphi^{-1}$  son inverse. Si  $\mathbf{C}^N : I^N \rightarrow I$  est une fonction donnée par l'équation (10.31), alors  $\mathbf{C}^N$  est une copule à  $N$  dimensions ( $N \geq 2$ ) si et seulement si  $\varphi^{-1}$  est complètement monotone sur  $[0, \infty)$ .

## Mesures de dépendance

Au chapitre 9, on a vu que toutes les mesures de dépendances étaient une fonction plus ou moins compliquée de copule. Pour les copules archimédiennes, le calcul de certaines mesures de dépendance s'avère moins laborieux que les formulations décrites à la section 9.2.

**Théorème 10.4.** Soient deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  dont la structure de dépendance est une copule archimédienne  $\mathbf{C}^A$  de générateur  $\varphi(t)$ . Alors le tau de Kendall s'écrit :

$$\tau_{XY} = \tau_{\mathbf{C}^A} = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt . \quad (10.33)$$

Les mesures de dépendance de queue à gauche et à droite ont une forme particulière donnée par le théorème suivant dont la preuve se trouve dans JOE [98] p.103 ss.

**Théorème 10.5.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires continues dont la structure de dépendance est donnée par une copule archimédienne stricte :

$$\mathbf{C}^A(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) .$$

Si  $X$  et  $Y$  sont asymptotiquement dépendants à droite, alors  $\varphi^{-1'}(0) = -\infty$  et la mesure de dépendance à droite est donnée par

$$\lambda_U = 2 - 2 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi^{-1'}(2t)}{\varphi^{-1'}(t)} . \quad (10.34)$$

Si  $\varphi^{-1'}(0)$  est fini, alors  $X$  et  $Y$  sont asymptotiquement indépendants à droite.

Le théorème suivant concerne la mesure de dépendance de queue à gauche, voir JOE [98] p.105 ss.

**Théorème 10.6.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires continues dont la structure de dépendance est donnée par une copule archimédienne stricte :

$$\mathbf{C}^A(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) .$$

La mesure de dépendance à gauche est donnée par

$$\lambda_L = 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{-1'}(2t)}{\varphi^{-1'}(t)} . \quad (10.35)$$

Il existe une multitude de sous-familles de copules archimédiennes. Chaque sous-famille se distingue par le choix d'un générateur précis  $\varphi(t)$ . La plupart des copules archimédiennes sont construites à l'aide d'un générateur  $\varphi(t)$  fonction d'un ou plusieurs paramètres. NELSEN [119] p. 94 à 97 donne une liste exhaustive des sous-familles de copules archimédiennes à un ou plusieurs paramètres.

Parmi les nombreuses sous-familles de copules de copules archimédiennes, on discute ci-après plus en détail deux sous-familles pour deux raisons. La première est que qu'on choisit des sous-familles de copules à un paramètre, dont le générateur est strict si bien qu'il permet la construction de copules multivariées. La deuxième raison est que ces deux sous-familles de copules se distinguent des copules elliptiques par une leur asymétrie au niveau de la dépendance de queue. Ces sous familles de copules archimédiennes sont la sous-famille des copules de Gumbel et celle des copules de Clayton.

### La sous-famille des copules de Gumbel

La sous-famille des copules de Gumbel a été introduite par GUMBEL [80]. Elle est aussi longuement discutée dans HOUGAARD [90], raison pour laquelle on parle aussi dans la littérature de copule de Gumbel-Hougaard. Le générateur de la copule de Gumbel est

$$\varphi(t) = (-\ln t)^\theta \quad (10.36)$$

pour  $\theta \in [1, \infty)$ . Il s'agit d'un générateur strict et on a par conséquent

$$\varphi^{[-1]}(t) = \varphi^{-1}(t) = \exp(-t^{1/\theta}) ,$$

ce qui donne la copule bivariée de Gumbel :

$$\mathbf{C}_\theta^G(u, v) = \exp \left( -[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta} \right) . \quad (10.37)$$

La figure 10.6 représente la copule bivariée de Gumbel ainsi que les lignes de niveau pour  $\theta = 1.5$ . La version multivariée de cette copule est évidemment :

$$\mathbf{C}_\theta^G(u_1, \dots, u_N) = \exp \left( -[(-\ln u_1)^\theta + \dots + (-\ln u_N)^\theta]^{1/\theta} \right) . \quad (10.38)$$

La copule de Gumbel est une structure de dépendance positive, en ce sens que  $\mathbf{C}_\theta^G \succ \mathbf{C}^\perp$  pour tout  $\theta > 1$ . De plus, la sous-famille des copules de Gumbel est positivement ordonnée, c'est-à-dire que  $\mathbf{C}_{\theta_1}^G \succ \mathbf{C}_{\theta_2}^G$  pour  $\theta_1 > \theta_2$ . Elle atteint la borne supérieure de Fréchet-Hoeffding  $\mathbf{C}^+$  pour  $\theta \rightarrow \infty$  et est égale à la copule-produit  $\mathbf{C}^\perp$  lorsque  $\theta = 1$ .

Le tau de Kendall pour la sous-famille des copules de Gumbel s'écrit :

$$\begin{aligned} \tau &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{t \ln t}{\theta} dt \\ &= 1 + \frac{4}{\theta} \left( 0 - \frac{1}{4} \right) = 1 - \frac{1}{\theta} \end{aligned} \quad (10.39)$$

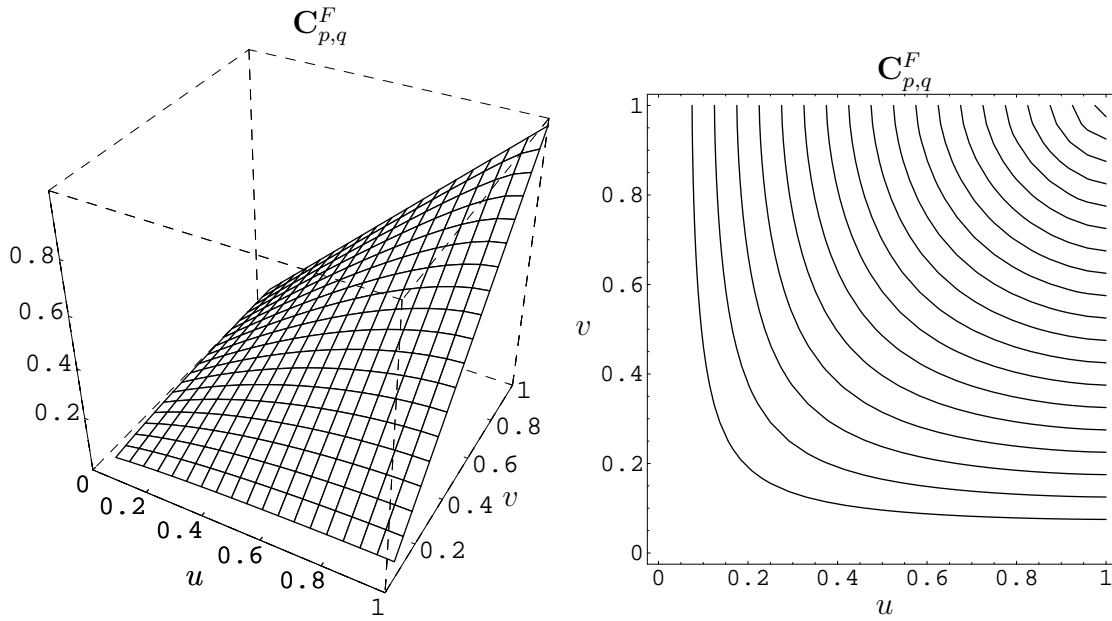


FIG. 10.6 – Représentation graphique et lignes de niveau d’une copule de Gumbel bivariable de paramètre  $\theta = 1.5$ .

Une propriété intéressante de la copule de Gumbel est qu’elle permet de capturer une dépendance dans les queues de distribution. En effet, la dérivée de l’inverse de la fonction génératrice de la copule de Gumbel est

$$\varphi^{-1'}(t) = -\frac{t^{(1/\theta)-1} \exp(-t^{1/\theta})}{\theta} . \quad (10.40)$$

On a ainsi  $\varphi^{-1'}(0) = -\infty$  et la mesure de dépendance à droite est

$$\lambda_U = 2 - 2^{1/\theta} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\exp(-(2t)^{1/\theta})}{\exp(-t^{1/\theta})} = 2 - 2^{1/\theta} . \quad (10.41)$$

Deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  dont la structure de dépendance est décrite par la copule de Gumbel sont par conséquent indépendantes dans les queues droites si  $\theta = 1$  et présentent une dépendance dans les queues droites qui est une fonction de  $\theta$  lorsque  $\theta > 1$ .

Par contre on obtient une indépendance des queues gauches d’une distribution multivariée dont la structure de dépendance est une copule de Gumbel :

$$\lambda_L = 2^{1/\theta} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\exp(-(2t)^{1/\theta})}{\exp(-t^{1/\theta})} = 0 . \quad (10.42)$$

Cette asymétrie de la dépendance serait par exemple appropriée pour modéliser la dépendance entre les pertes individuelles d’un portefeuille en vue du calcul de value at risk. En effet, l’utilisation d’une copule de Gumbel permettrait d’obtenir des distributions des pertes multivariées à queues épaisses telles que documentées dans DUFFIE & PAN [48] et BRADLEY & TAQQU [22].

### La sous-famille des copules de Clayton

La famille des copules de Clayton est initialement proposée copule de KIMELDORF AND SAMPSON [105]. Elle est aussi étudiée par CLAYTON [31], COX & OAKES [36] et par COOK & JOHNSON [33].

C'est la raison pour laquelle elle parfois nommée *famille de Cook and Johnson* dans la littérature (voir GENEST & MACKAY [70]) ou copule de Kimeldorf and Sampson (voir JOE [98] p. 141) ou encore *famille de copules de Pareto* (voir HUTCHINSON & LAI [93]). On l'appellera copule de Clayton, pour être cohérent avec les ouvrages les plus récents, comme CHERUBINI & AL [30] ou RONCALLI [128]. Par ailleurs, dans les logiciels qui permettent de construire des distributions multivariées à l'aide des copules (S-Plus, R et Matlab), le terme employé est aussi copule de Clayton.

Le générateur de la sous-famille des copules de Clayton est

$$\varphi^C(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1) \quad (10.43)$$

où  $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$  est le paramètre de la copule. On obtient ainsi, dans le cas bivarié :

$$\mathbf{C}_\theta^C(u, v) = \max \left[ (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, 0 \right] . \quad (10.44)$$

La sous-famille des copules de Clayton atteint la borne inférieure de Fréchet-Hoeffding  $\mathbf{C}^-$  pour  $\theta = -1$ , est égale à la copule-produit  $\mathbf{C}^\perp$  lorsque  $\theta \rightarrow 0$  et atteint la borne supérieure de Fréchet-Hoeffding lorsque  $\theta \rightarrow +\infty$ . La figure 10.7 représente la copule bivariée de Clayton ainsi que les lignes de niveau pour  $\theta = 10$ .

Le générateur de la sous-famille des copules de Clayton est strict pour  $\theta > 0$  et permet une extension multivariée. Le générateur de la version stricte des copules de Clayton est  $\varphi^C(t) = t^{-\theta} - 1$  et la copule multivariée à  $N$  dimensions s'écrit (voir CHERUBINI & AL [30] p. 150) :

$$\mathbf{C}_\theta^C(u_1, \dots, u_N) = (u_1^{-\theta} + \dots + u_N^{-\theta} - N + 1)^{-1/\theta} . \quad (10.45)$$

Le tau de Kendall pour la famille des copules de Clayton (et de Kimeldorf and Sampson) est donné par :

$$\begin{aligned} \tau &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{t^{\theta+1} - t}{\theta} dt \\ &= 1 + \frac{4}{\theta} \left( \frac{1}{\theta+2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{\theta}{\theta+2} . \end{aligned} \quad (10.46)$$



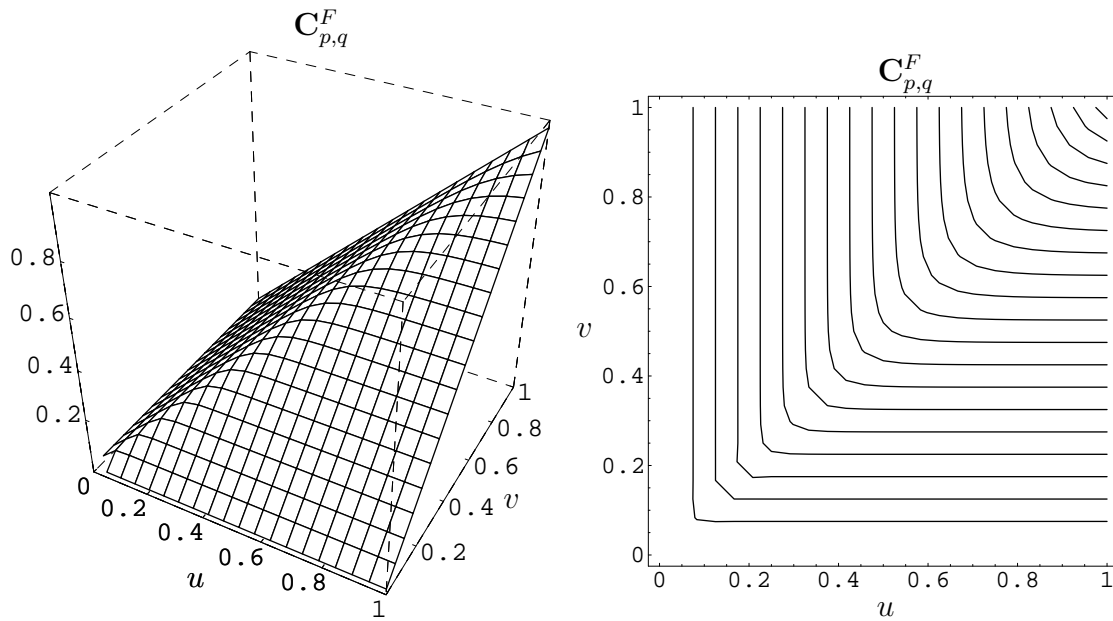


FIG. 10.7 – Représentation graphique et lignes de niveau d’une copule de Clayton bivariée de paramètre  $\theta = 10$ .

Une propriété intéressante de la famille des copules de Clayton est qu’elle présente une dépendance de queue à gauche. En effet la dérivée de l’inverse de la fonction génératrice de la copule de Clayton est donnée par

$$\varphi^{-1'}(t) = -\frac{(1+t)^{-(1/\theta)-1}}{\theta}.$$

On a par conséquent  $\varphi^{-1'}(0) = -1/\theta$  qui est fini ce qui veut dire que la copule de Clayton implique une indépendance de queue à droite comme l’indique le théorème 10.5. Par contre, on obtient la mesure de dépendance de queue à gauche suivante :

$$\lambda_L = 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1+2t}{1+t} \right)^{-(1/\theta)-1} = 2^{-1/\theta}. \quad (10.47)$$

D’après l’équation (10.47), la copule de Clayton implique une dépendance de queue à gauche qui augmente avec le paramètre  $\theta$  de la copule. C’est donc une copule qui peut être intéressante pour modéliser la dépendance des rendements puisqu’elle capture la dépendance des rendements largement inférieurs à leurs moyennes historiques.

La figure 10.8 présente 10’000 données simulées des distributions bivariées dont les structures de dépendance sont la copule de Gumbel et la copule de Clayton en comparaison avec la copule normale. Les marges sont identiques (distributions normales centrée-réduite) pour les trois distributions bivariées pour bien pouvoir se focaliser sur la structure de dépendance. Par ailleurs, ces trois distributions bivariées présentent un même tau de Kendall  $\tau = 0.6$ .

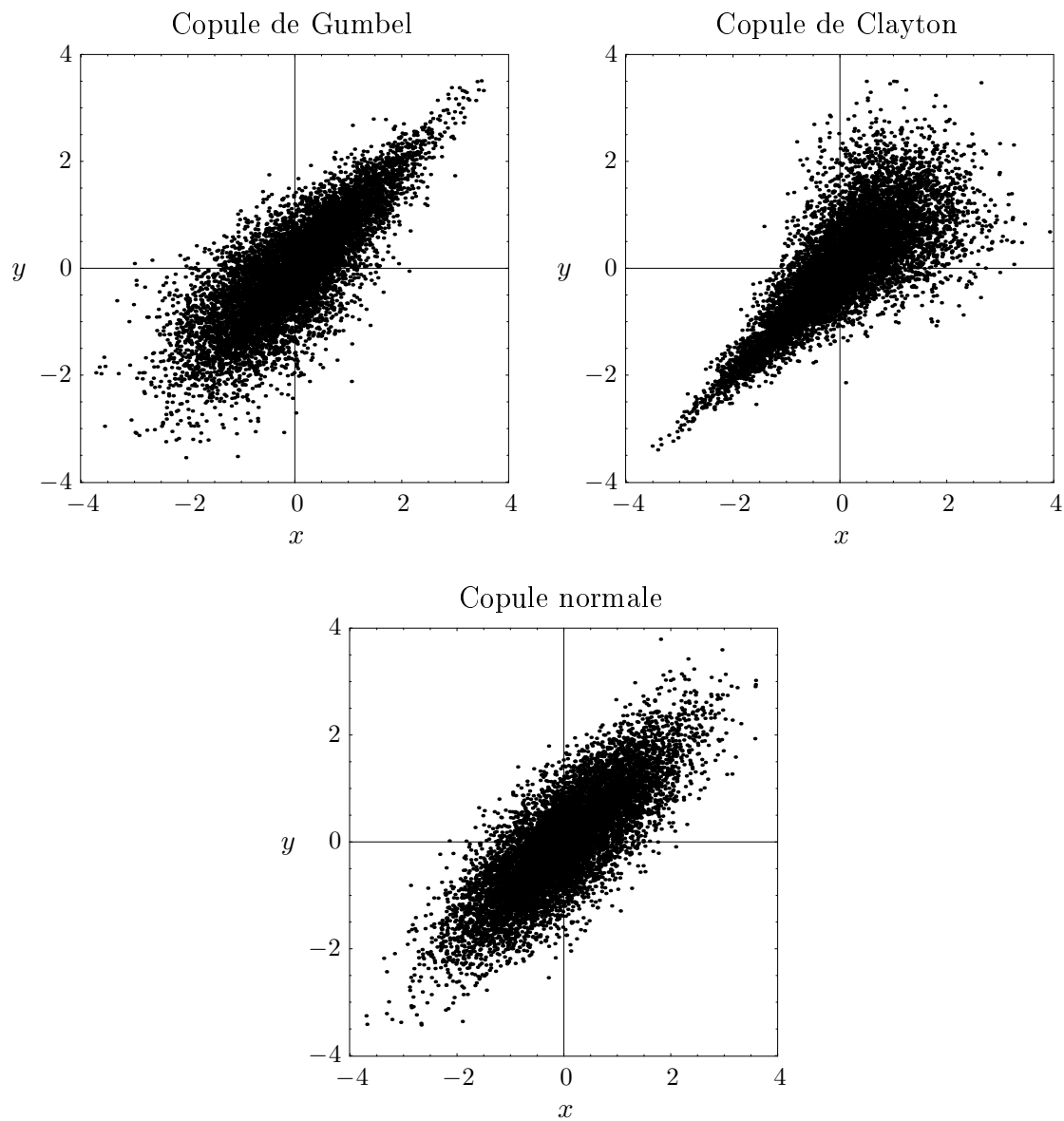


FIG. 10.8 – 10'000 paires d'observations simulées de trois distributions bivariées ayant des marges normales  $N(0,1)$  et un tau de Kendall égal à 0.6. Les structures de dépendance sont la copule de Gumbel, la copule de Clayton et la copule normale.

# Chapitre 11

## Estimation et simulation des copules

En statistique multivariée, la modélisation est sensée capturer les caractéristiques importantes d'observations multivariées en modélisant non seulement la forme des distributions univariées ou marges mais aussi la structure de dépendance de la manière la plus simple possible. Pour chaque série de données, il s'agit de choisir d'une part les distributions marginales qui correspondent le mieux à l'échantillon et d'autre part une copule offrant des propriétés désirables. Lorsqu'on choisit une copule paramétrique quelconque pour modéliser la structure de dépendance d'un vecteur aléatoire, le vrai vecteur des paramètres de cette copule est bien évidemment inconnu. Il faut alors l'estimer à l'aide de données empiriques du vecteur aléatoire.

Dans ce chapitre, on présente les différentes méthodes utilisées pour estimer les paramètres d'une copule. Mais avant de présenter ces méthodes, on discutera une méthode non-paramétrique pour modéliser la copule entre variables aléatoires. Cette méthode exige un nombre important d'observation et son avantage réside dans le fait qu'on laisse les données exprimer leur dépendance, sans faire à priori le choix subjectif d'une famille de copule. On finira ce chapitre par une présentation des méthodes de simulation des copules.

### 11.1 La copule empirique

On considère la copule empirique introduite par PAUL DEHEUVELS [44] qui la nommait «fonction de dépendance empirique». L'idée de Deheuvels est de construire une fonction de dépendance ou copule à l'aide d'un échantillon d'observations d'un vecteur aléatoire, sans faire à priori une hypothèse sur la forme paramétrique de la copule entre les variables aléatoires. La modélisation de la dépendance par une méthode non-paramétrique permet d'estimer la forme de la copule qui va converger vers la forme réelle de la copule pour un nombre d'observations  $n \rightarrow \infty$ . On définira tout d'abord la copule empirique bivariee avant de faire une extension multivariée et donner les mesures de dépendances usuelles associées à cette copule empirique (voir NELSEN [119] p. 176 ss).

**Définition 11.1 (Copule empirique de Deheuvels).** Soit  $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^T$  un échantillon de taille  $T$  d'un vecteur aléatoire  $(X, Y)'$  suivant une distribution bivariée continue. La copule empirique est la fonction  $\hat{\mathbf{C}}_T$  donnée par :

$$\hat{\mathbf{C}}_T \left( \frac{i}{T}, \frac{j}{T} \right) = \frac{\text{nombre de paires } (x_k, y_k) \text{ telles que } x \leq x_{[i]} \text{ et } y \leq y_{[j]}}{T}. \quad (11.1)$$

où  $x_{[i]}$  et  $y_{[j]}$ ,  $1 \leq i, j \leq T$ , désignent les observations ordonnées de l'échantillon.

NELSEN [119] a ensuite introduit la *fréquence de la copule empirique* de la façon suivante :

$$\hat{\mathbf{c}}_T \left( \frac{i}{T}, \frac{j}{T} \right) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{pour toute paire } (x_{[i]}, y_{[j]}) \text{ appartenant à l'échantillon,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (11.2)$$

La fréquence de la copule empirique peut s'interpréter comme une densité de probabilité jointe au sens des distributions discrètes. On note que le lien entre  $\mathbf{C}_T$  et  $\mathbf{c}_T$  est le suivant :

$$\hat{\mathbf{C}}_T \left( \frac{i}{T}, \frac{j}{T} \right) = \sum_{p=1}^i \sum_{q=1}^j \hat{\mathbf{c}}_T \left( \frac{p}{T}, \frac{q}{T} \right),$$

et

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{c}}_T \left( \frac{i}{T}, \frac{j}{T} \right) &= \hat{\mathbf{C}}_T \left( \frac{i}{T}, \frac{j}{T} \right) - \hat{\mathbf{C}}_T \left( \frac{i-1}{T}, \frac{j}{T} \right) - \hat{\mathbf{C}}_T \left( \frac{i}{T}, \frac{j-1}{T} \right) \\ &\quad + \hat{\mathbf{C}}_T \left( \frac{i-1}{T}, \frac{j-1}{T} \right). \end{aligned}$$

Pour un vecteur de variables aléatoires  $(X_1, \dots, X_N)$  dont on dispose d'un échantillon d'observations  $(x_{1:1}, \dots, x_{1:T}, \dots, x_{N:1}, \dots, x_{N:T})$ , CHERUBINI ET AL [30] p.161 donnent l'expression la copule empirique multivariée.

L'utilité de la copule empirique est qu'on peut la comparer à une famille de copules connues. Par exemple, BOUYÉ & AL [16] étudie la dépendance entre les prix spot et forward à 15 mois de l'Aluminium. Il représente les courbes de niveau de la copule empirique ainsi que celle de la copule normale dont le paramètre est la corrélation empirique des deux prix. BOUYÉ & AL observe que la copule normale n'est pas très bien adaptée pour modéliser la dépendance entre les deux variables.

De plus, NELSEN [119] p.178 ss montre que la copule empirique peut être utilisée pour estimer des mesures de dépendance.

**Théorème 11.1.** Soit  $\hat{\mathbf{C}}_T$  et  $\hat{\mathbf{c}}_T$  respectivement la copule empirique et la fréquence de la copule empirique pour un échantillon  $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^T$ . Les versions empiriques du  $\varrho$  de Spearman et du  $\tau$  de Kendall sont données par :

$$\hat{\varrho}_T = \frac{12}{T^2 - 1} \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^T \left[ \hat{\mathbf{C}}_T \left( \frac{i}{T}, \frac{j}{T} \right) - \frac{i}{T} \cdot \frac{j}{T} \right]; \quad (11.3)$$

et

$$\hat{\tau}_T = \frac{2n}{n-1} \sum_{i=2}^T \sum_{j=2}^T \sum_{p=1}^{i-1} \sum_{q=1}^{j-1} \left[ \hat{\mathbf{c}}_T \left( \frac{i}{T}, \frac{j}{T} \right) \hat{\mathbf{c}}_T \left( \frac{p}{T}, \frac{q}{T} \right) - \hat{\mathbf{c}}_T \left( \frac{i}{T}, \frac{q}{T} \right) \hat{\mathbf{c}}_T \left( \frac{p}{T}, \frac{j}{T} \right) \right]. \quad (11.4)$$

SCAILLET & FERMANIAN [132] proposent une autre méthode non-paramétrique pour la modélisation des copules : il s'agit d'une approche de l'estimateur à noyau de la copule (Kernel-based estimator) qui a l'avantage de fournir une fonction lisse et différentiable comme estimation de la copule sans pour autant faire des hypothèses à priori sur la structure de dépendance.

## 11.2 Estimation des paramètres de la copule

Le chapitre 10 présentait quelques unes de copules paramétriques les plus utilisées en économie et en finance et leurs propriétés. L'une ou l'autre de ces copules paramétriques peut être choisie grâce à ses propriétés intéressantes pour la modélisation de la dépendance d'un vecteur aléatoire. Une fois le choix de la copule paramétrique fait, il est nécessaire d'estimer des paramètres de la copule. Dans cette section, on présentera différentes méthodes pour l'estimation de ces paramètres.

### 11.2.1 La méthode du maximum de vraisemblance

Le principe du **maximum de vraisemblance** offre une méthode pour trouver des estimateurs consistants et asymptotiquement efficaces pour un ou plusieurs paramètres d'une distribution paramétrique qu'elle soit discrète ou continue (voir GREENE [79], HAYASHI [87]).

La méthode du maximum de vraisemblance est utile pour l'estimation des paramètres d'une copule, puisque le théorème de SKLAR donne la décomposition canonique de chaque distribution jointe qui s'écrit comme une fonction de la copule et des distributions marginales :

$$F(\mathbf{X}|\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_N, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{C}(F_1(x_1|\boldsymbol{\alpha}_1), \dots, F_N(x_N|\boldsymbol{\alpha}_N)|\boldsymbol{\theta}), \quad (11.5)$$

où  $\mathbf{C}$  est une copule dont le vecteur de paramètres est  $\boldsymbol{\theta}$  et  $F_1, \dots, F_N$  sont les marges dont les vecteurs de paramètres respectifs sont  $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_N$ .

Si  $\mathbf{c}$  est la densité de la copule et  $f_1, \dots, f_N$  sont les densités marginales, alors la densité jointe paramétrique du vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  s'écrit :

$$f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_N, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{c}(F_1(x_1|\boldsymbol{\alpha}_1), \dots, F_N(x_N|\boldsymbol{\alpha}_N)|\boldsymbol{\theta}) \prod_{n=1}^N f_n(x_n|\boldsymbol{\alpha}_n). \quad (11.6)$$

Si l'on dispose de  $T$  observations indépendantes du vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$ , la densité jointe est égale au produit des densités individuelles. Cette densité jointe, ou **fonction de vraisemblance** est une fonction des  $N$  vecteurs de paramètres inconnus des densités marginales  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  et du vecteur de paramètres inconnus de la copule  $\theta$ .

$$\begin{aligned} L(\alpha_1, \dots, \alpha_N, \theta | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T) &= f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T | \alpha_1, \dots, \alpha_N, \theta) \\ &= \prod_{t=1}^T f(\mathbf{x}_t | \alpha_1, \dots, \alpha_N, \theta). \end{aligned} \quad (11.7)$$

Le logarithme naturel de cette fonction de vraisemblance est ainsi donné par :

$$\begin{aligned} \ln L(\alpha_1, \dots, \alpha_N, \theta | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T) &= \sum_{t=1}^T \ln f(\mathbf{x}_t | \alpha_1, \dots, \alpha_N, \theta) \\ &= \sum_{t=1}^T \ln \mathbf{c}(F_1(x_{t1} | \alpha_1), \dots, F_N(x_{tN} | \alpha_N) | \theta) + \sum_{t=1}^T \sum_{n=1}^N \ln f_n(x_{tn} | \alpha_n). \end{aligned} \quad (11.8)$$

L'estimateur par maximum de vraisemblance du vecteur de paramètres de la copule  $\theta$  et des vecteurs des paramètres des distributions marginales  $\alpha_i$  est celui qui maximise le logarithme naturel de la fonction de vraisemblance. Cette méthode est dite **méthode du maximum de vraisemblance à information complète** puisqu'elle permet d'estimer à la fois les paramètres des densités marginales et les paramètres de la copule. BOUYÉ & AL [16] parlent de *méthode exacte du maximum de vraisemblance* ou EML<sup>1</sup> et notent :

$$\hat{\Theta}^{\text{EML}} = (\hat{\alpha}_1^{\text{EML}}, \dots, \hat{\alpha}_N^{\text{EML}}, \hat{\theta}^{\text{EML}}) = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln f(\mathbf{x}_t | \alpha_1, \dots, \alpha_N, \theta). \quad (11.9)$$

Certaines études empiriques utilisent cette méthode pour l'estimation des paramètres de la copule, entre autres FREES & VALDEZ [67] et COOK & JOHNSON [33].

Néanmoins, la maximisation de la fonction (11.8) n'est pas toujours possible. D'une part, lorsque le nombre d'observations ou la dimension de la densité jointe sont élevés, la méthode décrite ci-haut peut s'avérer difficile à implémenter. D'autre part l'optimisation numérique avec plusieurs paramètres est beaucoup plus coûteuse en comparaison de plusieurs optimisations numériques avec chacune moins de paramètres.

Pour résoudre ce problème, une **méthode de maximum de vraisemblance à information limitée** est envisagée (voir GREENE [79], p. 134 ss). La démarche est d'estimer séparément les paramètres des lois marginales et les paramètres de la copule. JOE & XU [99] parlent de *méthode d'inférence des fonction sur les marges* ou IFM<sup>2</sup>. Ils décrivent les deux étapes de l'estimation :

---

<sup>1</sup>Exact maximum likelihood

<sup>2</sup>Inference functions for margins method

1. L'estimation des  $N$  paramètres de vecteurs inconnus des marges univariées en spécifiant  $N$  fonctions de vraisemblance unidimensionnelles :

$$\ln L_n(\boldsymbol{\alpha}_n | x_{1n}, \dots, x_{Tn}) = \sum_{t=1}^T \ln f_n(x_{tn} | \boldsymbol{\alpha}_n), \quad n = 1, \dots, N, \quad (11.10)$$

dont la maximisation donne une estimation des paramètres des densités univariées  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1^{\text{IFM}}, \dots, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_N^{\text{IFM}}$ .

2. Ensuite, on remplace les vecteurs  $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_N$  par les valeurs estimées lors de la première étape et on maximise la fonction de vraisemblance multidimensionnelle (11.8) par rapport au vecteur de paramètres inconnus de la copule :

$$\ln L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T; \hat{\boldsymbol{\alpha}}_1^{\text{IFM}}, \dots, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_N^{\text{IFM}}). \quad (11.11)$$

La solution de cette deuxième maximisation donne  $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{\text{IFM}}$  qui est l'estimateur des paramètres de la copule par la méthode d'inférence des fonctions sur les marges.

La maximisation séparée des fonctions de vraisemblance peut être plus aisée que la maximisation de la fonction (11.8). En général

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{\text{EML}} \neq \hat{\boldsymbol{\theta}}^{\text{IFM}};$$

et JOE [98] p. 305 ss montre que l'estimateur IFM est plus efficient que l'estimateur EML. En outre, lorsqu'il y a une erreur de spécification de la densité jointe les estimateurs par maximum de vraisemblance à information limitée offrent des résultats valables pour les paramètres des marges alors que les estimateurs par maximum de vraisemblance à information complète donnent des résultats erronés.

### 11.2.2 Méthode d'estimation semi paramétrique

Cette approche vise à décomposer l'estimation des paramètres de la distribution multivariée en spécifiant séparément les marges et la structure de dépendance dans le but d'améliorer la fiabilité de l'estimation. La méthode d'estimation semi paramétrique s'apparente à la méthode du maximum de vraisemblance à information limitée en ce sens qu'elle s'articule en deux étapes.

1. La première étape consiste à utiliser une approche **non paramétrique** pour la spécification des marges. Il s'agit de transformer les données  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T)$  en vecteurs uniformes  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_T)$ . Chaque vecteur  $\hat{\mathbf{u}}_t, t = 1, \dots, T$  est défini comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_t &= (\hat{u}_{t1}, \dots, \hat{u}_{tN}) \\ &= (\hat{F}_1(x_{t1}), \dots, \hat{F}_N(x_{tN})); \end{aligned} \quad (11.12)$$

où  $\hat{F}_n(x_{tn})$  est la statistique de rang normalisé c'est-à-dire :

$$\hat{F}_n(x_{tn}) = \frac{1}{T} r_{tn} \quad \text{avec } r_{tn} \text{ le rang de l'observation } x_{tn}.$$

Dans ce cas, aucune hypothèse n'est faite sur la forme paramétrique des marges et les estimations des lois marginales sont basées sur les distributions empiriques :

$$\ln L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T) = \sum_{t=1}^T \mathbf{c}(\hat{F}_1(x_{t1}), \dots, \hat{F}_N(x_{tN}) | \boldsymbol{\theta}) . \quad (11.13)$$

2. La deuxième étape consiste à maximiser le logarithme de la fonction de vraisemblance étant donné les marges empiriques observées :

$$\ln L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T) = \sum_{t=1}^T \mathbf{c}(\hat{F}_1(x_{t1}), \dots, \hat{F}_N(x_{tN}) | \boldsymbol{\theta}) . \quad (11.14)$$

Puisque cette méthode est basée sur des distributions empiriques, BOUYÉ & AL [16] parlent de *maximum de vraisemblance canonique* (CML)<sup>3</sup>. L'estimateur  $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{\text{CML}}$  du vecteur de paramètres de la copule est celui qui maximise la log-vraisemblance de l'équation (11.14) :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{\text{CML}} = \arg \max \sum_{t=1}^T \mathbf{c}(\hat{F}_1(x_{t1}), \dots, \hat{F}_N(x_{tN}) | \boldsymbol{\theta}) . \quad (11.15)$$

La méthode du maximum de vraisemblance canonique est particulièrement intéressante lorsque l'attention porte sur la structure de dépendance entre les variables aléatoires et non sur les distributions marginales. Lorsque les différentes méthodes de basées sur le principe du maximum de vraisemblance (EML, IFM et CML) donnent des estimations ayant des différences considérables, ceci est une indication sur une probable mauvaise spécification des lois marginales.

### 11.2.3 La méthode des moments

Dans certaines situations, on recherche un estimateur consistant d'un paramètre et l'efficacité est secondaire. C'est par exemple le cas lorsque la fonction de vraisemblance de l'équation (11.8) a une forme compliquée. Une technique d'estimation employée dans ces situations est la méthode des moments. Pour estimer un vecteur de paramètres  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_K)$ , la méthodologie consiste à calculer sur la base d'observations  $K$  statistiques ou moments  $g_1, \dots, g_K$  dont la limite en probabilité est une fonction connue des paramètres (voir GREENE [79] p. 137 ss). Puisque ces  $K$  moments sont égaux à des fonctions connues des paramètres, il suffit ensuite d'inverser

---

<sup>3</sup>Canonical maximum likelihood



ces fonctions pour exprimer les paramètres en tant que fonctions des moments. Soit  $g_k(\mathbf{x})$  une fonction continue des observations et

$$\bar{g}_k = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T g_k(\mathbf{x}_t), \quad k = 1, \dots, K. \quad (11.16)$$

On a

$$\text{plim} \bar{g}_K := E(g_k(\mathbf{x})) = \gamma_k(\boldsymbol{\theta}). \quad (11.17)$$

Les  $K$  paramètres à estimer sont les solutions du système d'équations des moments :

$$\begin{aligned} \bar{g}_1 &- \gamma_1(\boldsymbol{\theta}) = 0 \\ \bar{g}_2 &- \gamma_2(\boldsymbol{\theta}) = 0 \\ &\vdots \\ \bar{g}_K &- \gamma_K(\boldsymbol{\theta}) = 0 \end{aligned} \quad (11.18)$$

L'estimateur par la méthode des moments, noté  $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{\text{MOM}}$ , est la solution de ce système d'équations :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{\text{MOM}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}[\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_K]. \quad (11.19)$$

Lorsque l'on peut calculer des moments tels que leur limite en probabilité est une fonction connue des paramètres à estimer, il est toujours possible d'estimer les paramètres des distributions marginales et les paramètres de la copule à l'aide de la méthode des moments.

Cependant, la dérivation de tels moments n'est souvent pas évidente, raison pour laquelle on recourt à une **méthode des moments basée sur les mesures de dépendance** pour l'estimation des paramètres de la copule.

Cette méthode est plus ou moins triviale dans la mesure où on part des mesures de dépendance estimées à l'aide de l'échantillon. Puisque ces mesures de dépendance sont des fonctions des paramètres de la copule, on déduit les estimateurs des paramètres des estimateurs des mesures de dépendance. En fait, cette méthode revient à remplacer les moments théoriques, fonctions des paramètres de la copule de la forme (11.16) par des moments empiriques. Au chapitre 9, on a en effet vu que toutes les mesures de dépendance entre les variables aléatoires sont des fonctions de la copule qui relie ces variables aléatoires.

Soit un échantillon d'observations  $\mathbf{x}$  d'un vecteur aléatoire  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$  dont la copule est  $\mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}}$ . Toutes les mesures de dépendance entre les variables aléatoires du vecteur  $\mathbf{X}$  peuvent s'écrire comme une fonction de la copule  $\mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}}$ . En effet, on a

$$F(x_1, \dots, x_N) = \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}}(F_1(x_1), \dots, F_N(x_N)).$$

La distribution jointe de deux variables du vecteur  $\mathbf{X}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} F_{12}(x_1, x_2) &= \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}}(F_1(x_1), F_2(x_2), F_3(\infty), \dots, F_N(\infty)) \\ &= \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}}(F_1(x_1), F_2(x_2), 1, \dots, 1). \end{aligned}$$

De manière générale, chaque distribution bidimensionnelle de deux variables aléatoires du vecteur  $\mathbf{X}$  peut s'écrire comme une fonction de la copule et des marges unidimensionnelles concernées. Par conséquent, toute mesure de dépendance entre deux variables peut s'écrire comme une fonction de la copule :

$$\kappa(X_i, X_j) = \kappa_{i,j}(\mathbf{C}_\theta) = \kappa_{i,j}(\theta) . \quad (11.20)$$

Soit  $\hat{\kappa}_{i,j}$  l'estimateur non paramétrique ou la version empirique de  $\kappa_{i,j}(\theta)$ . La méthode des moments basées sur les mesures de dépendance revient à résoudre le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{llll} \hat{\kappa}_{1,2} & - & \kappa_{1,2}(\theta) & = 0 \\ & \vdots & & \\ \hat{\kappa}_{1,N} & - & \kappa_{1,N}(\theta) & = 0 \\ \hat{\kappa}_{2,3} & - & \kappa_{2,3}(\theta) & = 0 \\ & \vdots & & \\ \hat{\kappa}_{N-1,N} & - & \kappa_{N-1,N}(\theta) & = 0 \end{array} \right. \quad (11.21)$$

Lorsque le nombre d'équations du système (11.21) est supérieur au nombre de paramètres à estimer, on recourt à la minimisation d'une certaine mesure de la distance entre le vecteur  $\hat{\kappa}_{i,j}$  et le vecteur  $\kappa_{i,j}(\theta)$  :

$$\hat{\theta}^{\text{MOM}} = \arg \min_{\theta} [[\hat{\kappa}_{i,j} - \kappa_{i,j}(\theta)]' \mathbf{W} [\hat{\kappa}_{i,j} - \kappa_{i,j}(\theta)]] , \quad (11.22)$$

où  $\mathbf{W}$  est une matrice définie positive et symétrique telle que l'estimateur est consistant, asymptotiquement normal et efficace sous des certaines conditions de régularité (voir MITTELHAMMER [115] p. 491).

Par exemple, on considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  dont la copule est une copule de Gumbel de paramètre  $\theta$ . Si on choisit la tau de Kendall comme mesure de dépendance on a (voir équation (10.39)) :

$$\tau(\mathbf{C}_\theta^G) = \tau(\theta) = 1 - 1/\theta . \quad (11.23)$$

Pour  $T$  observations des variables  $X$  et  $Y$ , on calcule la version empirique du tau de Kendall notée  $\hat{\tau}$ . L'estimateur par la méthode des moments basé sur le tau de Kendall est la solution de l'équation :

$$\hat{\tau} = 1 - \frac{1}{\theta} ; \quad (11.24)$$

et on obtient l'estimateur du paramètre de la copule de Gumbel :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{1 - \hat{\tau}} . \quad (11.25)$$

## 11.3 Simulation des fonctions copules

La simulation est un outil largement utilisé pour générer des valeurs suivant une certaine distribution. Dans cette section, on aborde la question de la simulation du vecteur aléatoire  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$  dont la distribution est

$$F(x_1, \dots, x_N) = \mathbf{C}(F_1(x_1), \dots, F_N(x_N)) . \quad (11.26)$$

Ce problème revient à simuler le vecteur aléatoire  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_N)$  dont la distribution est la copule  $\mathbf{C}$  et à utiliser la transformation  $\mathbf{X} = (F_1^{-1}(U_1), \dots, F_N^{-1}(U_N))$ .

La principale difficulté réside dans la simulation de la copule  $\mathbf{C}$ . Deux méthodes sont présentées ci-après pour simuler un vecteur aléatoire uniforme de distribution  $\mathbf{C}$ .

### 11.3.1 La méthode des distributions

Cette méthode est la méthode privilégiée lorsque la distribution multidimensionnelle est plus facile à simuler que la copule. C'est le cas pour les distributions multidimensionnelles employées couramment en statistiques. Celles-ci sont implémentées dans plusieurs logiciels statistiques, si bien qu'il est aisé de simuler un vecteur aléatoire suivant une telle distribution.

Concrètement, il s'agit d'exploiter la relation :

$$\mathbf{C}(U_1, \dots, U_N) = F(F^{-1}(U_1), \dots, F^{-1}(U_N)) . \quad (11.27)$$

Pour simuler le vecteur  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_N)'$ , il suffit de simuler le vecteur aléatoire  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)'$  dont la distribution est  $F$  est d'appliquer la transformation

$$\mathbf{U} = (F_1(X_1), \dots, F_N(X_N))' .$$

On considère le cas de la simulation d'une copule normale à  $N$  dimensions  $\mathbf{C}_\rho^N$ . L'algorithme est le suivant :

#### Algorithme 11.1.

- Trouver la décomposition de Cholesky  $P$  de  $\rho$  qui vérifie  $\mathbf{P}\mathbf{P}' = \rho$
- Simuler le vecteur aléatoire  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_N)'$  où les  $Z_i$  sont des variables aléatoires indépendantes suivant une distribution normale standardisée  $N(0, 1)$  ;
- Calculer  $\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{Z}$  ;
- Appliquer la transformation  $\mathbf{U} = (\Phi(X_1), \dots, \Phi(X_N))'$  .

On obtient un vecteur  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_N)'$  de variables aléatoires uniformes entre 0 et 1 dont la copule est normale de paramètre  $\boldsymbol{\rho}$ . De cette manière, on peut simuler un vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  dont la copule est normale de paramètre  $\boldsymbol{\rho}$  et les marges quelconques en effectuant la transformation  $\mathbf{X} = (F_1^{-1}(U_1), \dots, F_N^{-1}(U_N))$  où  $F_1, \dots, F_N$  sont les marges.

À titre d'illustration, on simule deux distributions  $F(x_1, x_2) = \mathbf{C}(F_1(x_1), F_2(x_2))$  où  $\mathbf{C}$  est une copule normale de paramètre  $\rho = 0.5$ . Les marges sont respectivement normale  $N(0, 1)$  et Student  $t_5$  dans le graphique de gauche et chi-carré  $\chi_1^2$  et  $\chi_8^2$  dans le graphique de droite.

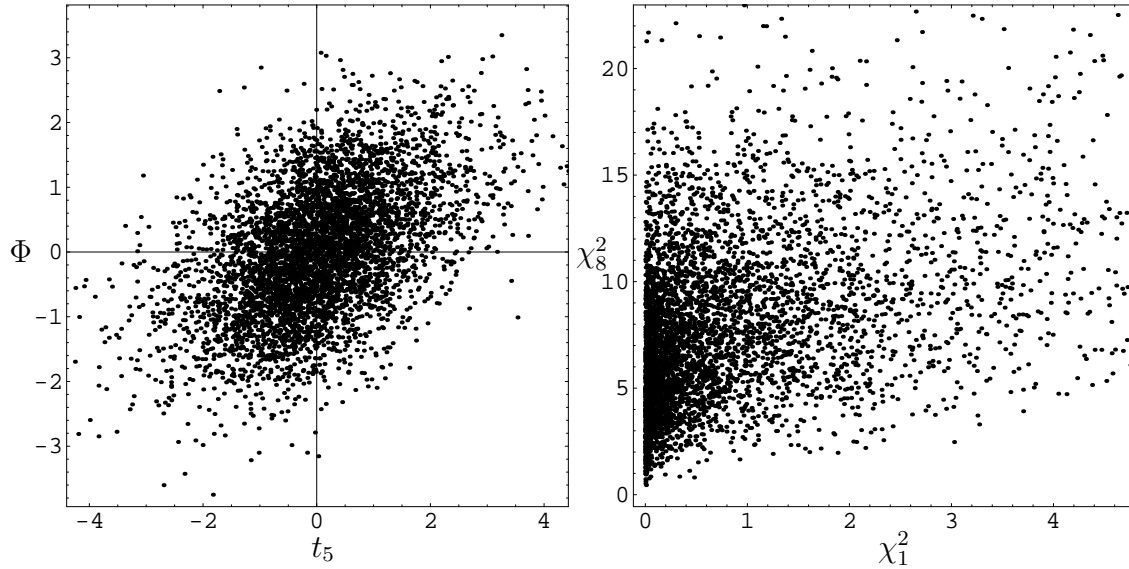


FIG. 11.1 – Simulation de la copule normale  $\rho = 0.5$  avec des marges différentes

On considère à présent la simulation de la copule de Student. Soit  $\mathbf{X}$  un vecteur aléatoire qui suit une distribution de Student  $t_{\boldsymbol{\rho}, \nu}$  où  $\boldsymbol{\rho}$  est la matrice de corrélation et  $\nu$  le nombre de degré de liberté. Par définition de la distribution de Student, on a :

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{Z}}{\sqrt{\chi_\nu^2 / \nu}} ; \quad (11.28)$$

où  $\mathbf{Z}$  est un vecteur aléatoire normal standardisé dont la matrice de corrélation est  $\boldsymbol{\rho}$  et  $\chi_\nu^2$  une variable aléatoire suivant une distribution du chi-carré avec  $\nu$  degrés de liberté. On exploite cette relation pour simuler la copule de Student et on obtient l'algorithme suivant :

#### Algorithme 11.2.

- Trouver la décomposition de Cholesky  $P$  de  $\boldsymbol{\rho}$  qui vérifie  $\mathbf{P}\mathbf{P}' = \boldsymbol{\rho}$
- Simuler le vecteur aléatoire  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_N)'$  où les  $Z_i$  sont des variables aléatoires indépendantes suivant une distribution normale standardisée  $N(0, 1)$  ;

- Simuler une variable aléatoire indépendante de  $\mathbf{Z}$  et suivant une distribution du chi-carré avec  $\nu$  degrés de liberté;
- Calculer  $\mathbf{X} = \frac{\mathbf{PZ}}{\sqrt{\chi_\nu^2/\nu}}$ ;
- Appliquer la transformation  $\mathbf{U} = (T_\nu(X_1), \dots, T_\nu(X_N))'$  où  $T_\nu$  est la fonction de répartition d'une distribution de Student avec  $\nu$  degrés de liberté.

On illustre la simulation de la copule de Student en simulant deux distributions  $F(x_1, x_2) = \mathbf{C}(F_1(x_1), F_2(x_2))$  où  $\mathbf{C}$  est la copule de Student de paramètres  $\rho = 0.5$  et  $\nu = 1$ . Les marges sont respectivement normale  $N(0, 1)$  et Student  $t_5$  dans le graphique de gauche et chi-carré  $\chi_1^2$  et  $\chi_8^2$  dans le graphique de droite.

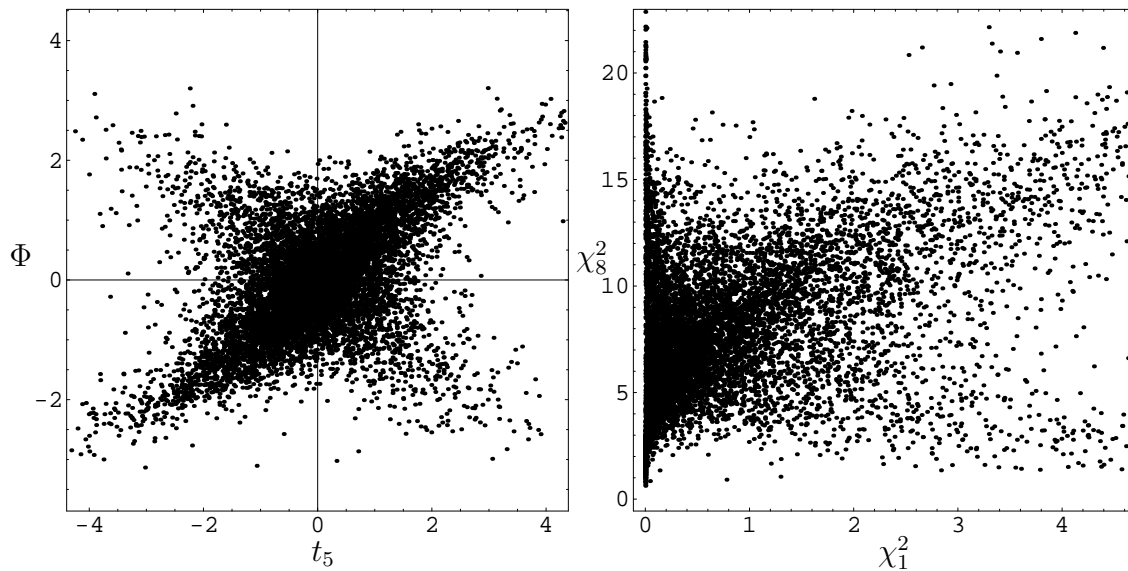


FIG. 11.2 – Simulation de la copule de Student  $\rho = 0.5, \nu = 1$  avec des marges différentes

### 11.3.2 La méthode des distributions conditionnelles

L'idée de base pour la simulation des données multivariées est construite sur le théorème de Bayes sur les distributions conditionnelles. Pour simuler des variables aléatoires indépendantes, c'est-à-dire des variables dont la copule est la copule produit  $\mathbf{C}^\perp$ , il suffit simplement de simuler indépendamment chacune des variables aléatoires. Pour simuler deux ou plusieurs variables aléatoires dépendantes, il faut simuler la première variable de manière indépendante et ensuite procéder à des conditionnements successifs.

En effet, lorsqu'un vecteur aléatoire  $(X, Y)'$  suit une distribution bivariable  $F$ , alors on peut écrire selon le théorème de Bayes  $F(x, y) = F_X(x) \cdot F_{Y|X}(y)$  où  $F_X$  est la distribution de  $X$  et  $F_{Y|X}$  est la distribution conditionnelle de  $Y$  étant donné  $X = x$ . Pour générer le vecteur  $(X, Y)'$ , il suffit par conséquent de simuler  $X$  selon

la distribution  $F_X$  et de simuler  $Y$  selon la distribution  $F_{Y|X}$  et indépendamment de  $X$ . Ce procédé peut être itéré pour simuler des vecteurs à  $N$  dimensions suivant une certaine distribution multivariée.

On considère la simulation du vecteur  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_N)' \sim \mathbf{C}$  où les variables  $U_1, \dots, U_N$  suivent chacune une distribution uniforme entre 0 et 1. Ceci signifie que

$$P[U_1 \leq u_1, \dots, U_N \leq u_N] = \mathbf{C}(u_1, \dots, u_N). \quad (11.29)$$

On note  $\mathbf{C}_n(u_1, \dots, u_n)$  la marge à  $n$  dimensions de la copule  $\mathbf{C}(u_1, \dots, u_N)$  :

$$\mathbf{C}_n(u_1, \dots, u_n) = C(u_1, \dots, u_n, 1, \dots, 1), \quad n = 2, \dots, N-1. \quad (11.30)$$

On obtient par conséquent

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1(u_1) &= P[U_1 \leq u_1] &= \mathbf{C}(u_1, 1, \dots, 1) \\ \mathbf{C}_2(u_1, u_2) &= P[U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2] &= \mathbf{C}(u_1, u_2, 1, \dots, 1) \\ &\vdots \\ \mathbf{C}_N(u_1, \dots, u_N) &= P[U_1 \leq u_1, \dots, U_N \leq u_N] &= \mathbf{C}(u_1, \dots, u_N). \end{aligned}$$

Puisque la distribution jointe de  $U_1, \dots, U_N$  est  $\mathbf{C}$ , la distribution conditionnelle de la variable aléatoire  $U_n, n = 2, \dots, N$  étant donné les valeurs des  $n-1$  premiers composantes du vecteur  $\mathbf{U}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} C_n(u_n|u_1, \dots, u_{n-1}) &= P[U_n \leq u_n | U_1 = u_1, \dots, U_{n-1} = u_{n-1}] \\ &= \frac{\partial^{n-1} C_n(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_{n-1}} \bigg/ \frac{\partial^{n-1} C_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1})}{\partial u_1 \dots \partial u_{n-1}}, \end{aligned} \quad (11.31)$$

lorsque le numérateur et le dénominateur existent. Les distributions conditionnelles données par l'équation (11.31) suggèrent l'algorithme suivant pour la génération des nombres aléatoires  $(u_1, \dots, u_N)$  dont la copule est  $\mathbf{C}$ .

### Algorithme 11.3.

- Générer un nombre aléatoire  $u_1$  d'une distribution uniforme entre 0 et 1 ;
- Générer un nombre aléatoire  $u_2$  d'une distribution  $C_2(u_2|u_1)$  ;
- $\vdots$
- Générer un nombre aléatoire  $u_N$  d'une distribution  $C_N(u_N|u_1, \dots, u_{N-1})$ .

Pour simuler un nombre aléatoire  $u_n$  dont la distribution est  $C_n(u_n|u_1, \dots, u_{n-1})$ , on utilise une méthode de transformation inverse, c'est-à-dire qu'on génère un nombre aléatoire  $v$  d'une distribution  $U[0, 1]$  et on calcule  $u_n = C_n^{-1}(v|u_1, \dots, u_{n-1})$ .

Un résultat important facilite la simulation des copules archimédiennes puisqu'il donne une forme générale de la distribution conditionnelle (voir CHERUBINI & AL [30] p. 183).

**Théorème 11.2.** Soit  $\mathbf{C}(u_1, \dots, u_N) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_N))$  une copule archimédienne dont le générateur est  $\varphi$ , alors, pour  $n = 2, \dots, N$

$$\mathbf{C}_n(u_n | u_1, \dots, u_{n-1}) = \frac{\varphi^{-1(n-1)}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n))}{\varphi^{-1(n-1)}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_{n-1}))} \quad (11.32)$$

où  $\varphi^{-1(n-1)}$  dénote la  $(n-1)$ -ième dérivée de  $\varphi^{-1}$ .

Pour les copules à deux dimensions, JOE [98] p. 146 ss donne la forme analytique  $C_2^{-1}(v | u_1)$ . Mais dans de nombreux cas, il n'est pas possible d'obtenir une forme analytique de  $C_n^{-1}(v | u_1, \dots, u_{n-1})$  et il faut alors résoudre l'équation  $u_n = C_n^{-1}(v | u_1, \dots, u_{n-1})$  par une méthode numérique. De ce fait, d'autres méthodes dites analytiques (voir RONCALLI [128] p. 246) ont été développées pour traiter la simulation spécifique à une copule ou à une famille de copules. Par exemple, GENEST AND MACKAY [70] proposent l'algorithme suivant basé sur les distributions conditionnelles pour la simulation des nombres aléatoires  $(u_1, \dots, u_N)$  dont la distribution est une copule archimédienne de générateur  $\varphi$  :

**Algorithme 11.4.**

- Simuler  $N$  variables aléatoires  $v_1, \dots, v_N$  d'une distribution uniforme entre 0 et 1 ;
- Prendre  $u_1 = v_1$  ;
- Prendre  $v_2 = \frac{\varphi^{-1(1)}(\pi_2)}{\varphi^{-1(1)}(\pi_1)}$  et résoudre pour  $u_2$  ;
- $\vdots$
- Prendre  $v_N = \frac{\varphi^{-1(N-1)}(\pi_N)}{\varphi^{-1(N-1)}(\pi_{N-1})}$  et résoudre pour  $u_N$ .

Les deux figures suivantes présentent la simulation de 10'000 observations de variables aléatoires dont la copule est une copule archimédienne (Gumbel et Clayton) et les marges des distributions normale, student et  $\chi^2$ .

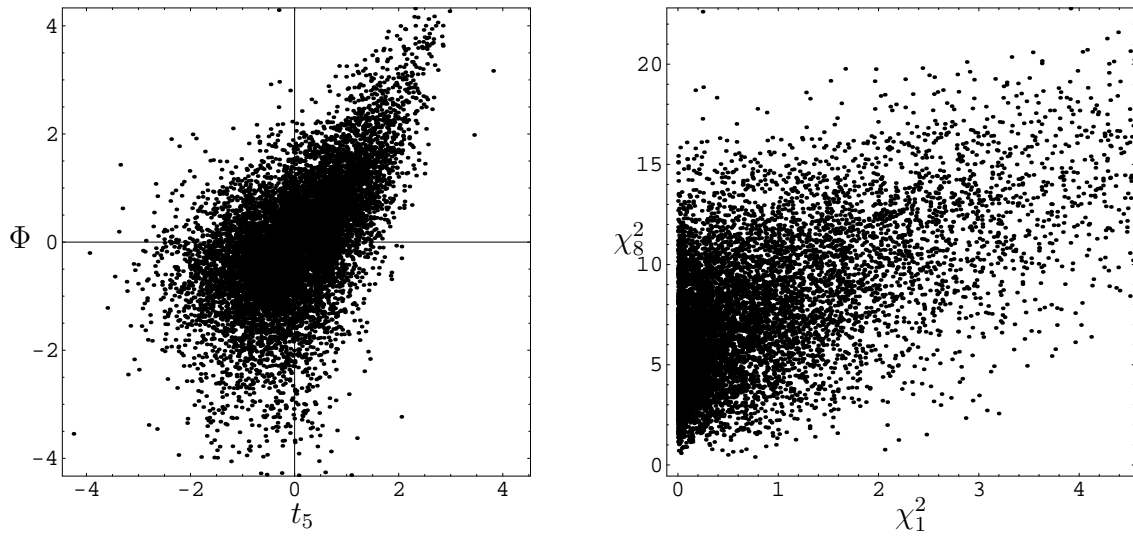


FIG. 11.3 – Simulation de la copule de Gumbel  $\theta = 2$  avec des marges  $N(0, 1)$  et  $t_5$  à gauche et  $\chi_8^2$  et  $\chi_1^2$  à gauche

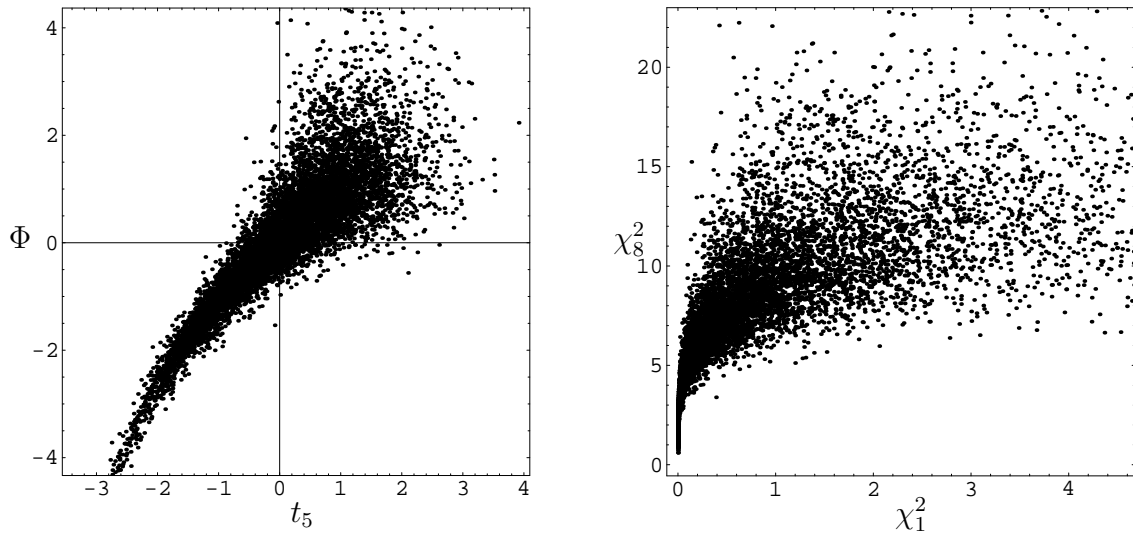


FIG. 11.4 – Simulation de la copule de Clayton  $\theta = 6$  avec des marges  $N(0, 1)$  et  $t_5$  à gauche et  $\chi_8^2$  et  $\chi_1^2$  à gauche



## Quatrième partie

### Modélisation de la dépendance des défauts : Une approche par les fonctions copules



# Chapitre 12

## Copules et dépendance des défauts dans les modèles structurels

Un défi majeur dans l'estimation du risque de crédit des portefeuilles de prêts ou d'obligations d'une institution financière est la modélisation de la dépendance des défauts. En effet, la plus grande crainte d'un investisseur en obligations est la survenance des défauts de plusieurs contreparties à un horizon de temps donné. Cela impliquerait des pertes en chaîne sur plusieurs positions pouvant même mener à la faillite.

Aujourd'hui, certains dérivés de crédits ont des payoffs qui sont liés à la survenance de plusieurs défauts sur les obligations sous-jacentes (CBOs, CDOs etc, voir chapitre 1). Pour évaluer ces dérivés de crédits, il est essentiel de pouvoir mesurer la dépendance entre les défauts des obligations sous-jacentes.

Dans le contexte du risque de crédit, la survenance de plusieurs défauts est ce qu'on pourrait nommer le «risque de crédit extrême». Ce risque extrême est celui qu'on observe lors des grandes crises ou crash financiers dont on a fait un bref inventaire dans le chapitre 2. Une bonne mesure du risque extrême est la probabilité que plusieurs crédits fassent défaut, ou la probabilité jointe de défaut.

Il est évident que le risque extrême de crédit est la conséquence des interdépendances entre différents crédits d'un portefeuille. L'étape cruciale en direction d'une quantification du risque extrême est la modélisation de la dépendance entre les défauts individuels. Cette modélisation est par ailleurs un préalable à la gestion active des portefeuilles de crédits, selon des considérations rendement-risque.

L'objectif de ce chapitre est d'utiliser les fonctions copules pour formuler des modèles pouvant rendre compte de la dépendance des défauts dans les portefeuilles de crédits. Dans ce chapitre, on se concentre sur l'analyse du rôle des copules dans les modèles structurels du risque de crédit au niveau du portefeuille en s'appuyant sur la recherche récente en matière de modélisation de dépendance en gestion des risques en général, voir EMBRECHTS & AL [58]. Dans ces modèles, appelés aussi modèles à variable latente, voir chapitre 4, on a vu que la seule source de dépendance entre

les défauts des crédits provient de la dépendance entre les variables latentes. Les modèles CreditMetrics<sup>TM</sup> et MOODY'S KMV sont les principaux modèles à variable latente dans lesquels la variable latente considérée est le rendement des actifs.

On considère un portefeuille de  $m$  crédits et on fixe un horizon de temps d'une année puisque l'horizon d'évaluation de la plupart des modèles de risque de crédit est d'une année. Comme on l'a vu au chapitre 7, à chaque crédit  $i = 1, \dots, m$  est associée une statistique de perte ou une indicatrice de défaut  $L_i$  qui prend ses valeurs dans l'ensemble  $\{0, 1\}$ . La valeur 0 indique le non-défaut et la valeur 1 indique le défaut. Au temps  $t = 0$ , qui est le temps de l'analyse, tous les crédits se trouvent à un état de non-défaut. On s'intéresse au vecteur aléatoire  $\mathbf{L} = (L_1, \dots, L_m)'$  qui constitue la statistique de perte du portefeuille dans son ensemble au temps  $t = 1$ .

Chaque statistique de perte  $L_i$  est subordonnée à une variable latente  $X_i$  qui représente le rendement des actifs. Soit  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)'$  le vecteur aléatoire qui représente les variables latentes qui conduisent le défaut au temps  $t = 1$  et soit  $(d_1, \dots, d_m)'$  le vecteur déterministe des seuils de défaut. La probabilité de défaut du crédit  $i$  est la probabilité que la variable latente  $X_i$  passe sous le seuil de défaut  $d_i$  au temps  $t = 1$ . La dépendance des défauts ou la dépendance du vecteur  $\mathbf{L}$  est donc complètement déterminée par la dépendance des variables latentes. A la section 12.1 on montrera que le choix de la structure de dépendance, en d'autres termes le choix de la copule entre les variables latentes, a une importance capitale sur une mesure de risque agrégé du portefeuille de crédits à savoir la probabilité jointe de défaut. La section 12.2 s'intéresse à la copule implicite du modèle CreditMetrics<sup>TM</sup> décrit à la section 4.5. Enfin, les deux dernières sections de ce chapitre montrent, à l'aide d'un exemple, la sensibilité de la probabilité jointe de défaut et du capital économique au choix de la copule.

## 12.1 Copules et probabilité jointe de défaut

Dans cette section, on examine le rôle du choix de la copule sur la probabilité jointe de défaut. La fonction de probabilité  $p(\mathbf{l})$  de la statistique de perte du portefeuille  $\mathbf{L}$  est donnée par :

$$p(\mathbf{l}) = P(L_1 = l_1, \dots, L_m = l_m), \quad \mathbf{l} \in \{0, 1\}^m. \quad (12.1)$$

Le risque le plus extrême qui correspond au défaut de tous les crédits a la probabilité  $\pi_m$  donnée par :

$$\pi_m = p(\mathbf{l}), \quad \text{où } \mathbf{l} = (1, \dots, 1)'.$$

Soit à présent  $\mathbf{C}$  la copule du vecteur  $\mathbf{X}$  de variables latentes telle que

$$F(x_1, \dots, x_m) = \mathbf{C}(F_1(x_1), \dots, F_m(x_m)), \quad (12.2)$$

où  $F_1, \dots, F_m$  sont les distributions marginales des variables  $X_1, \dots, X_m$ . On observe que la probabilité  $\pi_m$  peut être écrite en termes de la copule  $\mathbf{C}$  et des probabilités individuelles de défaut. On a en effet :

$$\begin{aligned}\pi_m &= P(L_1 = 1, \dots, L_m = 1) \\ &= P(X_1 \leq d_1, \dots, X_m \leq d_m) \\ &= \mathbf{C}(F_1(d_1), \dots, F_m(d_m)) \\ &= \mathbf{C}(p_1, \dots, p_m),\end{aligned}\tag{12.3}$$

où  $p_1, \dots, p_m$  sont les probabilités individuelles de défaut. L'équation (12.3) montre que le choix de la copule est primordial, car celle-ci détermine la probabilité d'événements extrêmes de crédit comme le défaut de plusieurs crédits du portefeuille. Le tableau 12.1 donne la probabilité jointe de défaut pour trois copules particulières : les deux bornes de Fréchet-Hoeffding et la copule-produit.

Copule	Probabilité jointe de défaut $\pi_m$
$\mathbf{C}^-$	$\max(p_1 + p_2 + \dots + p_m - m + 1, 0)$
$\mathbf{C}^\perp$	$p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_m$
$\mathbf{C}^+$	$\min(p_1, p_2, \dots, p_m)$

TAB. 12.1 – Copules et probabilités de défaut

L'inégalité de Fréchet-Hoeffding de l'équation (8.34) assure que la probabilité jointe de défaut est la plus faible lorsque les variables latentes possèdent la structure de dépendance la plus négative c'est-à-dire  $\mathbf{C}^-$  et est la plus élevée lorsque les variables latentes possèdent la structure de dépendance la plus positive, c'est-à-dire  $\mathbf{C}^+$ . La différence entre la probabilité jointe associée à  $\mathbf{C}^+$  et la probabilité jointe associée à une copule quelconque  $\mathbf{C}$  peut être considérée comme une mesure du degré de diversification du portefeuille. En effet,  $\mathbf{C}^+$  est la copule de variables comonotones, et implique la concentration parfaite du portefeuille comme par exemple un portefeuille composé de plusieurs obligations du même émetteur. Dans ce cas, le défaut d'une obligation implique le défaut de toutes les autres obligations du portefeuille. Plus la copule  $\mathbf{C}$  des variables latentes est «éloignée» de la copule  $\mathbf{C}^+$ , plus le portefeuille est diversifié et moins grande est la probabilité de plusieurs défauts simultanés.

En outre, l'ordre de concordance sur les fonctions copules indique que pour deux copules différentes  $\mathbf{C}_1$  et  $\mathbf{C}_2$  des variables latentes telles que  $\mathbf{C}_1 \prec \mathbf{C}_2$  on a :

$$\pi_{m1} = \mathbf{C}_1(p_1, \dots, p_m) \leq \pi_{m2} = \mathbf{C}_2(p_1, \dots, p_m),$$

où  $\pi_{m1}$  et  $\pi_{m2}$  sont les probabilités jointes de défaut associées aux copules  $\mathbf{C}_1$  respectivement  $\mathbf{C}_2$ .

On considère maintenant la probabilité qu'un nombre  $k \leq m$  de crédits du portefeuille fassent défaut. Cette probabilité est notée  $\pi_k$ . Quel lien existe-t-il entre

la copule  $\mathbf{C}$  et cette probabilité ? Pour simplifier l'analyse, on suppose que le vecteur des variables latentes  $\mathbf{X}$  est interchangeable. Ceci signifie que  $(X_1, \dots, X_m)$  a la même distribution que le vecteur  $(X_{\Pi(1)}, \dots, X_{\Pi(m)})$  pour toute permutation  $(\Pi(1), \dots, \Pi(m))$  de  $(1, \dots, m)$ . Autrement dit, pour chaque  $k \in \{1, \dots, m-1\}$ , toutes les  $\binom{m}{k}$  distributions marginales possibles à  $k$  dimensions du vecteur  $\mathbf{X}$  sont identiques. Lorsque le vecteur des variables latentes  $\mathbf{X}$  est interchangeable, le vecteur des statistiques de perte  $\mathbf{L}$  est lui aussi interchangeable. Ceci signifie aussi que tous les sous-vecteurs de même dimension du vecteur  $\mathbf{L}$  possèdent la même distribution.

$$\pi_k := P(L_1 = 1, \dots, L_k = 1), \quad \{1, \dots, k\} \subseteq \{1, \dots, m\}, 1 \leq k \leq m. \quad (12.4)$$

Dans ce cas particulier du vecteur interchangeable,  $\pi_k$  est la probabilité qu'au moins  $k$  titres tirés de manière aléatoire dans le portefeuille de  $m$  titres fassent défaut dans l'intervalle de temps choisi. On parlera alors de «probabilité jointe de défaut de  $k$ -ième ordre». On a par exemple les probabilités jointes de défaut de 1er et 2ème ordre suivantes :

$$\begin{aligned} \pi_1 &= P(L_i = 1) \quad \forall i \\ \pi_2 &= P(L_i = 1, L_j = 1) \quad i \neq j \end{aligned}$$

La covariance entre deux statistiques de perte est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(L_i, L_j) &= E(L_i L_j) - E(L_i)E(L_j) \\ &= P(L_i = 1, L_j = 1) - P(L_i = 1) \cdot P(L_j = 1) \\ &= \pi_2 - \pi_1^2. \end{aligned}$$

On montre ci-après que la probabilité jointe de défaut de  $k$ -ième ordre est fonction de la marge  $k$  dimensions de la copule  $\mathbf{C}$  :

$$\begin{aligned} \pi_k &= P(L_1 = 1, \dots, L_k = 1) \\ &= P(X_1 \leq d_1, \dots, X_k \leq d_k, X_{k+1} \leq \infty, X_m \leq \infty) \\ &= \mathbf{C}(p_1, \dots, p_k, 1, \dots, 1) \\ &= \mathbf{C}_{1, \dots, k}(p_1, \dots, p_k), \end{aligned} \quad (12.5)$$

où  $\mathbf{C}_{1, \dots, k}$  est la marge à  $k$  dimensions de la copule  $\mathbf{C}$ , voir équation (8.29).

En général, les probabilités individuelles de défaut  $p_i$  sont très faibles. Les probabilités des équations (12.3) et (12.5) sont par conséquent des valeurs de la fonction copule pour des valeurs  $p_i$  très petites. Ces probabilités seront alors d'autant plus grandes que la copule présente une dépendance de queue à gauche importante comme on le verra à la section 12.3. Avant cela, on montre ci-après que CreditMetrics<sup>TM</sup> prend implicitement comme structure de dépendance  $\mathbf{C}$  des variables latentes la copule normale.

## 12.2 La copule implicite de CreditMetrics<sup>TM</sup>

CreditMetrics<sup>TM</sup>, voir section 7.1.3, utilise comme variable latente le log-rendement annuel standardisé de la firme émettrice du crédit. Pour chaque crédit  $i$ , ce log-rendement est modélisé par une variable aléatoire  $\tilde{X}_i$  qui suit une distribution normale centrée réduite. Le défaut survient lorsque le log-rendement standardisé c'est-à-dire  $\tilde{X}_i$  passe au dessous d'un seuil  $c_i$  déterminé par le rating du crédit. Le seuil  $c_i$  est donné par  $\Phi^{-1}(p_i)$  où  $p_i$  est la probabilité de défaut pour tous les crédits de la même classe de rating que le crédit  $i$ . Pour le portefeuille dans son ensemble, le défaut de tous les crédits survient lorsque tous les log-rendements passent simultanément sous leurs seuils de défaut respectifs. La probabilité jointe de défaut s'écrit :

$$\begin{aligned} P(L_1 = 1, \dots, L_m = 1) &= P(\tilde{X}_1 < c_1, \dots, \tilde{X}_m < c_m) \\ &= \mathbf{F}(c_1, \dots, c_m), \end{aligned} \quad (12.6)$$

où  $\mathbf{F}$  est la fonction de distribution jointe des log-rendements standardisés. Or, CreditMetrics<sup>TM</sup> fait l'hypothèse que la distribution jointe des log-rendements  $\mathbf{F}$  est une distribution normale multivariée. Pour un portefeuille de  $m$  crédits, la probabilité jointe de défaut s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(c_1, \dots, c_m) &= \Phi_m(c_1, \dots, c_m, \boldsymbol{\rho}) \\ &= \mathbf{C}_{\boldsymbol{\rho}}^N(\Phi(c_1), \dots, \Phi(c_m)) \\ &= \mathbf{C}_{\boldsymbol{\rho}}^N(p_1, \dots, p_m), \end{aligned} \quad (12.7)$$

où  $\Phi$  désigne la fonction de répartition de la loi normale,  $\Phi_m$  désigne la fonction de répartition normale multivariée à  $m$  dimensions.

L'équation (12.7) montre que CreditMetrics<sup>TM</sup> utilise implicitement comme structure de dépendance entre les log-rendements la **copule normale**, dont le paramètre est la matrice de corrélation des log-rendements. Cependant, le concept des fonctions copules n'est pas utilisé explicitement dans les documents techniques de CreditMetrics<sup>TM</sup>. MOODY'S KMV est similaire à CreditMetrics<sup>TM</sup> au niveau de la modélisation de la dépendance des défauts. Ces deux modèles font l'hypothèse que le vecteur des variables latentes suit une distribution normale multivariée. La seule différence entre ces modèles réside dans la calibration des probabilités de défaut individuelles. En effet, CreditMetrics<sup>TM</sup> classe les crédits par groupes de qualité similaire sur la base d'un système de rating externe alors que MOODY'S KMV utilise la distance au défaut pour calculer la probabilité de défaut (voir section 4.4).

Comme on l'a vu au chapitre 10, il existe plusieurs alternatives à la copule normale. Dans la section suivante, on examine le rôle des copules dans la mesure de risque extrême d'un portefeuille de crédits en s'appuyant sur des données empiriques du marché des actions.

## 12.3 Copule et probabilité jointe de défaut : Exemple d'application

Pour illustrer le rôle des copules dans la modélisation de la dépendance entre crédits, on considère séparément 3 portefeuilles de taille  $m = 5$  composé d'obligations émises par des grandes compagnies suisses allemandes et américaines, voir tableau 12.2. Comme on peut le constater, le choix est porté sur des grandes entreprises cotées en bourse, et qui émettent fréquemment des obligations. La troisième colonne du tableau 12.2 donne les notations S&P (long term credit rating) de ces entreprises au 15 décembre 2007<sup>1</sup>. Les 3 portefeuilles considérés dans cet exemple sont composés chacun d'obligations libellées dans la même monnaie.

Portefeuille	Émetteur	Rating
Portefeuille CH	Swiss Reinsurance	AA-
	Nestlé	AA
	UBS	AA-
	Credit Suisse	A+
	Zurich Financial Services	A+
Portefeuille DE	Muenchener Rueckversicherungs AG	AA-
	Allianz	AA
	DaimlerChrysler AG	A-
	Siemens AG	AA-
	Deutsche Telekom AG	A-
Portefeuille US	Philip Morris/Altria Group Inc	BBB+
	Procter & Gamber Co	AA-
	Eli Lilly & Co.	AA
	JP Morgan	A
	CBS Corp.	BBB

TAB. 12.2 – Description sommaire des portefeuilles

Ces obligations constituent par nature des titres de dettes émis par ces compagnies et sont des instruments de financement obéissant à des conditions précises de remboursement. Les détenteurs d'obligations sont des créanciers de l'émetteur qui a contracté à leur égard l'obligation de payer des intérêts périodiques et de rembourser la valeur nominale ou le principal à l'échéance de ces titres de dette.

En dehors du risque de marché auquel est assujéti tout titre financier, les obligations en tant que titres de dette, sont sujettes au risque de crédit provenant de toute défaillance de l'émetteur à payer les intérêts ou le principal. Sans tenir compte des caractéristiques spécifiques de ces obligations telles que le taux de coupon, l'échéance, les modalités de remboursement etc, on s'intéresse au risque de crédit, en particulier au risque de défaut de ces obligations.

<sup>1</sup>Voir site Internet <http://www2.standardandpoors.com>



On dispose des données journalières sur les cours des actions de ces émetteurs de juin 2003 à décembre 2007 à partir desquels on calculera la probabilité jointe de défaut des portefeuilles. Les graphiques de la figure 12.1 montrent l'évolution du cours des différentes actions au cours de la période d'observation. Ces cours sont tous indexés au cours du 2 juin 2003, de telle manière que tous les cours sont fixés à 100 au début de la période d'observation.

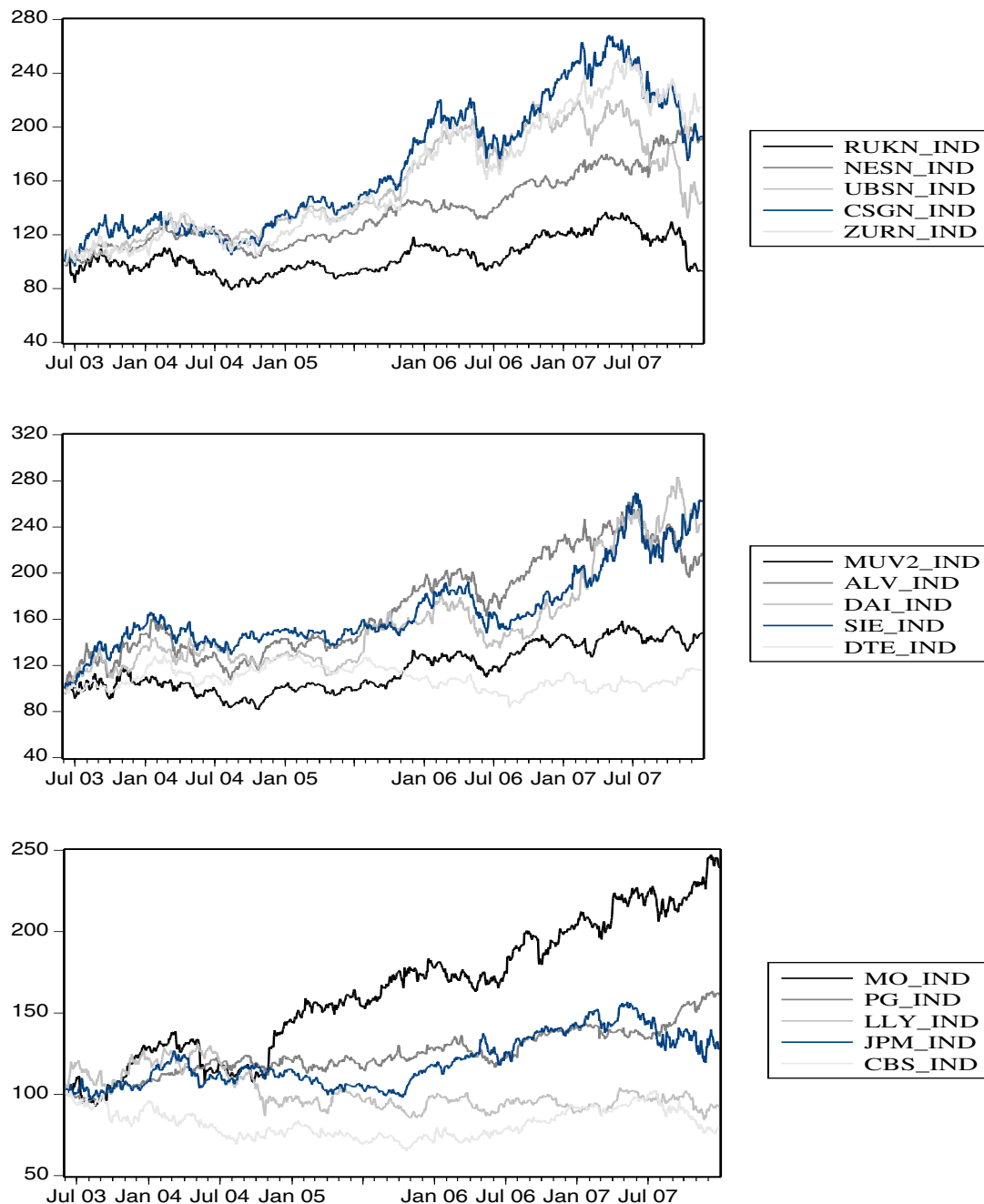


FIG. 12.1 – Cours des actions indexés au cours du 2 juin 2003

Source des données : Bloomberg

Dans un premier temps, il faut calculer les log-rendements annuels, car c'est à partir de ces derniers qu'on estimera les probabilités de défaut jointe des portefeuilles. Soit  $P_t^i$  le cours de l'action  $i$  à la date  $t$ . Le log-rendement journalier  $r_t^i$  de la même action est donné par :

$$r_t^i = \ln \left( \frac{P_t^i}{P_{t-1}^i} \right) .$$

On calcule ensuite des moyennes de rendements journaliers sur un mois

$$\bar{r} = \frac{1}{20} \sum_{j=1}^{20} r_{t-j+1} ,$$

puis on annualise ces moyennes pour obtenir des log-rendements moyens annualisés  $R_t^i$  à l'aide de la formule suivante (voir BENNINGA [11] p.81 ss) :

$$R_t^i = 252 \cdot \bar{r} .$$

L'échantillon se compose de 1175 observations des log-rendements annualisés pour chaque action. Le tableau 12.3 suivant donne les statistiques descriptives des log-rendements annualisés des ces actions, tandis que les diagramme de box de la figure 12.2 résument les distributions empiriques des log-rendements annualisés. Ces diagrammes dévoilent des distributions souvent marquées par des outliers, en particulier pour les actions suisses. Ces outliers sont surtout survenus à fin de la période d'observation, à la suite de la crise des «subprime» qui a surtout touché les valeurs financières.

Pour estimer la probabilité de défaut individuelle de chacun de ces émetteurs, on utilise la matrice de transition des ratings de Standard & Poor's [25]. Cette matrice de transition, qui figure dans l'annexe A, donne la probabilité de défaut en fonction du rating de la compagnie émettrice de l'obligation. CreditMetrics<sup>TM</sup> part de l'hypothèse que la distribution des log-rendements est normale. Un test de Jarque-Bera ( $\alpha=5\%$ ) ne rejette pas l'hypothèse de normalité des log-rendements seulement pour les log-rendements des titres CBS US, MUV2 GR et DAI GR. Dans tous les autres cas, la normalité est rejetée. De plus, les diagrammes de la figure 12.2 suggèrent des distributions univariées avec des queues plus épaisses que la normale.

Dans cette étude, on s'intéresse surtout à la distribution jointe des rendements de chaque portefeuille et donc à la structure de dépendance entre les rendements. La structure de dépendance choisie implicitement par CreditMetrics<sup>TM</sup> et MOODY'S KMV est la copule normale ayant comme paramètre la corrélation entre les log-rendements.

Émetteur	Action	Moyenne arithmétique	Médiane	Minimum	Maximum	Écart-type	Skewness	Kurtosis	Jarque-Bera
Swiss Reinsurance	RUKN VX	-0.0033	0.0578	1.8756	-3.5754	0.6989	-0.9698	5.6880	537.9334
Nestlé	NESN VX	0.1388	0.1087	1.7689	-1.2965	0.4758	0.1862	3.2331	537.9334
UBS	UBSN VX	0.0810	0.1581	1.8045	-3.4109	0.6950	-1.2201	6.3688	847.1739
Credit Suisse	CSGN VX	0.1365	0.2001	2.3321	-2.5421	0.7071	-0.5270	3.7726	83.6093
Zurich Financial Services	ZURN VX	0.1576	0.1862	2.2492	-2.3817	0.7129	-0.2509	3.6865	35.4001
Muenchener Rueckversicherungs AG	MUV2 GR	0.0782	0.0792	2.7709	-2.0656	0.7572	0.1054	3.1331	3.0434
Allianz	ALV GR	0.1464	0.2267	3.2020	-2.4024	0.7854	-0.1903	3.5413	21.4350
DaimlerChrysler AG	DAI GR	0.1858	0.1822	2.5643	-2.5643	0.8458	0.1264	3.0256	3.1587
Siemens AG	SIE GR	0.1949	0.2458	2.1944	-2.5003	0.7628	-0.4536	3.4529	50.3365
Deutsche Telekom AG	DTE GR	0.0342	0.0000	1.7458	-1.7998	0.6310	-0.0232	2.5429	10.3359
Philip Morris / Altria Group Inc	MO US	0.1840	0.2385	2.5738	-2.6162	0.6300	-0.1899	4.7664	159.8234
Procter & Gamble Co	PG US	0.1036	0.1274	1.1879	-1.1130	0.3676	-0.2661	3.0719	14.1166
Eli Lilly & Co	LLY US	-0.0405	-0.0694	2.1879	-2.7933	0.6888	0.0826	3.5209	14.6195
JP Morgan	JPM US	0.0560	0.0876	1.6958	-1.9965	0.5592	-0.2872	3.3159	21.0394
CBS	CBS US	-0.0501	-0.0241	1.7452	-2.0706	0.6175	-0.1656	2.9438	5.5245

TAB. 12.3 – Statistiques descriptives des log-rendements annualisés des actions

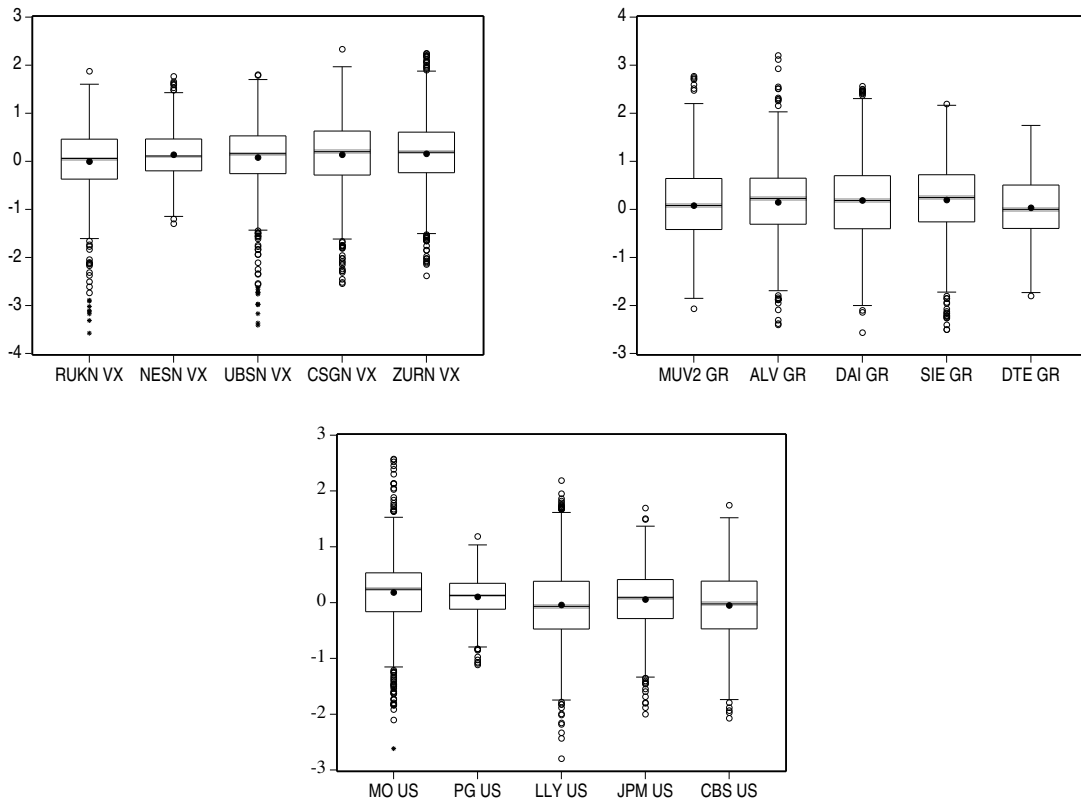


FIG. 12.2 – Distribution des log-rendements annualisés

L'hypothèse d'une copule normale est-elle cohérente avec les données empiriques dont on dispose ? Tout d'abord, le tableau 12.4 donne les coefficients de corrélation et les tau de Kendall pour les actions des trois portefeuilles. Ces mesures démontrent une dépendance relativement grande entre les log-rendements annualisés.

Pour tester graphiquement l'ajustement de la distribution jointe des rendements à la distribution normale multivariée, on utilise des graphiques quantiles-quantiles. Il s'agit alors de convertir les observations  $\mathbf{x}_i$  à plusieurs dimensions (ici 5) en une distance généralisée  $d_i^2$  qui mesure la distance entre une observation particulière et le vecteur moyen de l'échantillon  $\bar{\mathbf{x}}$  :

$$d_i^2 = (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) , \quad (12.8)$$

où  $\mathbf{S}$  est la matrice de covariance de l'échantillon. Cette distance, connue sous le nom de «distance de Mahalanobis» est un test intuitif d'ajustement entre une distribution normale multivariée et une quelconque distribution empirique. Lorsque les observations proviennent d'une distribution normale multivariée, alors ces distances suivent approximativement une distribution du  $\chi^2$  dont le nombre de degré de liberté est égal à la dimension de la distribution jointe, voir EVERITT & DUNN [59]. Ainsi lorsque l'on compare les distances ordonnées  $d_i^2$  avec les quantiles d'une distribution du  $\chi^2$  avec un nombre de degré de liberté approprié, on devrait obtenir

	RUKN VX	NESN VX	UBSN VX	CSGN VX	ZURN VX	MUV2 GR	ALV GR	DAI GR	SIE GR	DTE GR	MO US	PG US	LLY US	JPM US	CBS US
	Coefficient de corrélation														
RUKN VX	1.0000	0.3375	0.5930	0.6619	0.6245										
NESN VX		1.0000	0.0829	0.1955	0.3010										
UBSN VX			1.0000	0.7653	0.6730										
CSGN VX				1.0000	0.6508										
ZURN VX					1.0000										
MUV2 GR						1.0000	0.7623	0.4060	0.4899	0.3510					
ALV GR							1.0000	0.4907	0.6019	0.4419					
DAI GR								1.0000	0.4804	0.2116					
SIE GR									1.0000	0.4697					
DTE GR										1.0000					
MO US											1.0000	0.2746	0.2764	0.2032	0.1831
PG US												1.0000	0.3443	0.2688	0.0497
LLY US													1.0000	0.2453	0.1564
JPM US														1.0000	0.2358
CBS US															1.0000
	Tau de Kendall														
RUKN VX	1.0000	0.2706	0.3965	0.4288	0.4324										
NESN VX		1.0000	0.1040	0.1441	0.2074										
UBSN VX			1.0000	0.5120	0.4362										
CSGN VX				1.0000	0.4120										
ZURN VX					1.0000										
MUV2 GR						1.0000	0.5648	0.2730	0.3420	0.2448					
ALV GR							1.0000	0.3391	0.4268	0.3109					
DAI GR								1.0000	0.3325	0.1479					
SIE GR									1.0000	0.3101					
DTE GR										1.0000					
MO US											1.0000	0.2088	0.2028	0.1266	0.1322
PG US												1.0000	0.2499	0.2137	0.04223
LLY US													1.0000	0.2063	0.1021
JPM US														1.0000	0.1240
CBS US															1.0000

TAB. 12.4 – Coefficient de corrélation des log rendements annualisés

une droite depuis l'origine pour des données provenant d'une distribution normale multivariée. Les graphiques de la figure 12.3 comparent justement les distances ordonnées avec les quantiles d'une  $\chi^2_2$  pour les 3 portefeuilles considérés. On observe surtout pour les portefeuilles CH et DE un manque de linéarité du graphique, ce qui indique une inadéquation de la distribution normale multivariée pour la modélisation de la distribution jointe des log-rendements annualisés. On observe en particulier que les distributions empiriques ont des queues plus épaisses que la distribution normale, puisque ce sont les distances au carré élevées (qui correspondent aux observations extrêmes) qui s'écartent des quantiles de la distribution du  $\chi^2$ . Cependant, ces graphiques quantile-quantile ne permettent pas de détecter si la dépendance de queue est plus forte à gauche ou à droite. Les diagrammes de dispersion à l'annexe B, page 201 montrent que certaines distributions empiriques à deux dimensions ont tendance à afficher des queues de distribution à gauche, c'est-à-dire pour des rendements faibles. Ceci est surtout le cas pour le portefeuille CH tandis que les distributions empiriques à deux dimensions pour le portefeuille US indiquent l'absence de dépendance de queue.

L'équation 12.5 montrait que la probabilité jointe de défaut est fonction des probabilités individuelles de défaut et de la structure de dépendance. On estime ci-après les probabilités jointes de défaut des trois portefeuilles selon que la dépendance est modélisée par une copule de Clayton, de Student ou de Gumbel. Les paramètres des copules seront estimés par la méthode semi-paramétrique, voir section 11.2.2. Cette méthode comporte l'avantage qu'elle ne fait aucune hypothèse sur la forme des marges de la distribution jointe.

Comme on l'a vu au chapitre 10, les copules de Clayton de Student et de Gumbel sont des copules qui permettent de capturer des queues de distribution épaisses comme celles suggérées par la figure 12.3. On comparera les probabilités jointes de défaut impliquées par ces deux copules à des probabilités jointes de défaut impliquées par des copules ne présentant la propriété de dépendance de queue à gauche, comme par exemple les copules normale et de Gumbel.

Pour la copule normale l'unique paramètre à estimer est la matrice de corrélation entre les log-rendements tandis que pour la copule de Student, il s'agit en plus de la matrice de corrélation, de trouver l'estimateur du paramètre  $\hat{\nu}$  donnée par :

$$\hat{\nu} = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln \mathbf{c}(\hat{F}_1(x_{1t}), \hat{F}_2(x_{2t}); \nu) ; \quad (12.9)$$

où  $\mathbf{c}$  est la densité de la copule de Student donnée par l'équation 10.23.

Les estimateurs<sup>2</sup> du maximum de vraisemblance pour les copules normales et de student sont donnés dans les tableaux 12.5 et 12.6. Les valeurs entre parenthèses sont les écart-types des estimateurs et la troisième colonne donne la valeur maximale de la fonction de vraisemblance.

---

<sup>2</sup>Toutes les estimations sont faites avec le «Copula Package» du logiciel R

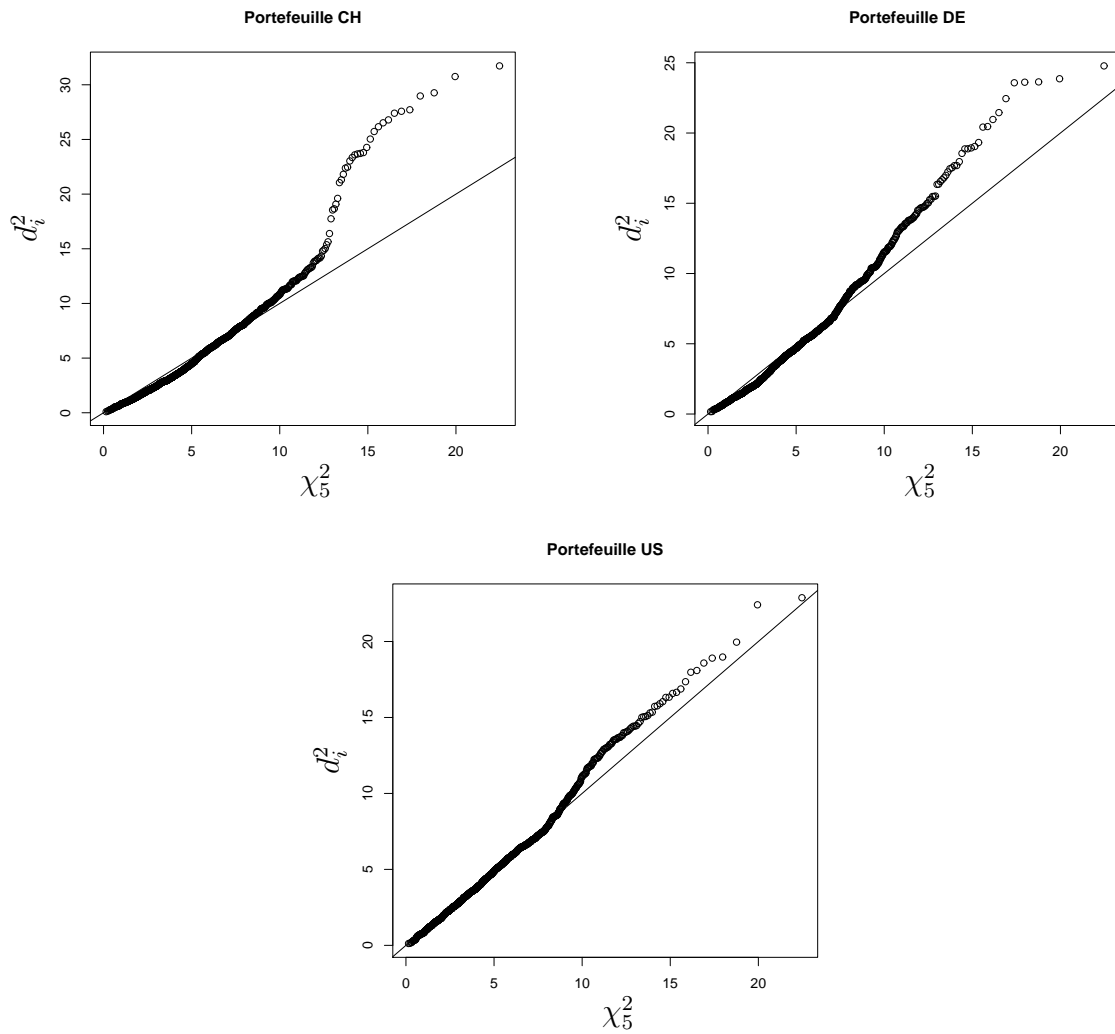


FIG. 12.3 – Test graphique de la plausibilité de la distribution normale multivariée

Pour les copules de Clayton et Gumbel, il s'agit de trouver l'estimateur du paramètre  $\hat{\theta}$ , voir équation (11.15) :

$$\hat{\theta} = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln \mathbf{c}(\hat{F}_1(x_{1t}), \dots, \hat{F}_5(x_{5t}); \theta) ; \quad (12.10)$$

où  $\mathbf{c}$  est la densité de la copule de Clayton respectivement de Gumbel à cinq dimensions.

Le tableau 12.7 reporte les résultats des estimations par maximum de vraisemblance des paramètres des copules archimédiennes. Les valeurs entre parenthèses sont les écart-types des estimateurs et ML désigne la valeur maximale de la fonction de vraisemblance.

Afin d'établir une comparaison entre les trois modèles choisis pour la structure de dépendance des log-rendements, on utilise le critère d'information d'Akaike, *AIC*.

Portefeuille	$\hat{\rho}^N$	ML
CH	$\begin{pmatrix} 1 & 0.3665 & 0.5876 & 0.6402 & 0.6249 \\ & (0.0235) & (0.0161) & (0.01436) & (0.01492) \\ & & 1 & 0.1188 & 0.2004 & 0.3043 \\ & & & (0.0273) & (0.0265) & (0.0249) \\ & & & & 1 & 0.7394 & 0.6526 \\ & & & & & (0.0106) & (0.0139) \\ & & & & & & 1 & 0.6186 \\ & & & & & & & (0.0150) \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$	1353.276
DE	$\begin{pmatrix} 1 & 0.7450 & 0.4187 & 0.4824 & 0.3455 \\ & (0.0100) & (0.0217) & (0.0196) & (0.0236) \\ & & 1 & 0.4973 & 0.5790 & 0.4393 \\ & & & (0.0195) & (0.0167) & (0.0213) \\ & & & & 1 & 0.4748 & 0.2041 \\ & & & & & (0.0202) & (0.0264) \\ & & & & & & 1 & 0.4576 \\ & & & & & & & (0.0208) \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$	1128.685
US	$\begin{pmatrix} 1 & 0.2884 & 0.2985 & 0.2039 & 0.1832 \\ & (0.0256) & (0.0254) & (0.0273) & (0.0277) \\ & & 1 & 0.3500 & 0.2819 & 0.0509 \\ & & & (0.0241) & (0.0258) & (0.0288) \\ & & & & 1 & 0.2558 & 0.1573 \\ & & & & & (0.0263) & (0.0280) \\ & & & & & & 1 & 0.2234 \\ & & & & & & & (0.0270) \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$	277.5371

TAB. 12.5 – Résultats des estimateurs des paramètres de la copule normale

Ce critère, basé sur la mesure d'information de Kullback-Leibler a pour objet de déterminer le modèle qui s'ajuste le mieux à la base de données. La valeur du critère est donnée par :

$$AIC = 2 \cdot (-\max \ln L) + 2K, \quad (12.11)$$

où  $\max \ln L$  est le logarithme de la fonction de vraisemblance à son maximum et  $K$  est le nombre de paramètre à estimer. Pour les modèles de Clayton et Gumbel on a  $K = 1$ , pour la copule normale  $K = 10$  tandis que pour la copule de Student  $K = 11$  puisque le modèle estime à la fois les coefficients de corrélation et le nombre de degrés de liberté. Plus le  $AIC$  est petit, mieux le modèle est adapté aux données. On observe que le modèle de Student est le mieux adapté pour les portefeuilles CH et DE, tandis que la copule normale est le meilleur modèle pour le portefeuille US. La copule de Gumbel est celle qui s'ajuste le moins bien aux échantillons.



Portefeuille	$\hat{\rho}^t$	$\hat{\nu}$	ML
CH	$\begin{pmatrix} 1 & 0.3776 & 0.5962 & 0.6353 & 0.6238 \\ & (0.0247) & (0.0173) & (0.01597) & (0.0163) \\ & & 1 & 0.1448 & 0.2124 & 0.2973 \\ & & & (0.02859) & (0.0279) & (0.0260) \\ & & & & 1 & 0.7440 & 0.6569 \\ & & & & & (0.0114) & (0.0146) \\ & & & & & & 1 & 0.6266 \\ & & & & & & & (0.0162) \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 12 \\ (1.8917) \end{matrix}$	1380.730
DE	$\begin{pmatrix} 1 & 0.7654 & 0.4209 & 0.5014 & 0.3716 \\ & (0.0106) & (0.0230) & (0.0205) & (0.0245) \\ & & 1 & 0.4975 & 0.6033 & 0.4627 \\ & & & (0.0211) & (0.0177) & (0.0225) \\ & & & & 1 & 0.4865 & 0.2260 \\ & & & & & (0.0214) & (0.0277) \\ & & & & & & 1 & 0.4484 \\ & & & & & & & (0.0226) \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 11 \\ (1.3823) \end{matrix}$	1176.958
US	$\begin{pmatrix} 1 & 0.2889 & 0.2991 & 0.2037 & 0.1838 \\ & (0.0257) & (0.0254) & (0.0273) & (0.0277) \\ & & 1 & 0.3513 & 0.2826 & 0.0516 \\ & & & (0.0241) & (0.0258) & (0.0289) \\ & & & & 1 & 0.2571 & 0.1569 \\ & & & & & (0.0264) & (0.0281) \\ & & & & & & 1 & 0.2223 \\ & & & & & & & (0.0271) \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 350 \\ (94.2721) \end{matrix}$	277.2542

TAB. 12.6 – Résultats des estimateurs des paramètres de la copule de Student

Portefeuille	Copule			
	Normale	Student	Clayton	Gumbel
CH	-2686.552	<b>-2739.46</b>	-1642.3044	-1386.107
DE	-2237.37	<b>-2331.916</b>	-1648.2888	-1258.224
US	<b>-535.0742</b>	-532.5084	-424.888	-321.8896

TAB. 12.8 – AIC selon le choix de la copule

On peut déduire de cet exemple que plus la dépendance est forte (Portefeuilles CH et DE) et moins la copule normale est adaptée pour la modélisation des de la dépendance. La principale faiblesse des copules archimédiennes réside sans doute dans le fait qu'elles sont caractérisées par un seul paramètre et ce même paramètre est valable pour toutes les sous-copules à  $k \leq 5$  dimensions. Ceci signifie par exemple que le paramètre de la copule de Clayton décrivant la dépendance entre les log

Portefeuille	Copule de Clayton		Copule de Gumbel	
	$\hat{\theta}$	ML	$\hat{\theta}$	ML
CH	0.6478 (0.0208)	822.1522	1.3788 (0.0144)	694.0535
DE	0.6376 (0.0204)	825.1444	1.3720 (0.0143)	630.112
US	0.2620 (0.016)	213.4440	1.1608 (0.0112)	161.9448

TAB. 12.7 – Résultats des estimations des paramètres des copules de Clayton et Gumbel

rendements des actions UBSN VX et CSG VX est le même que celui décrivant de la copule entre UBSN VX et NESN VX. Or, il est évident que la dépendance entre les deux valeurs financières est plus forte que celle entre l'UBS et Nestlé. Ceci est très probablement la raison pour laquelle les copules archimédiennes sont peu adaptées à la modélisation de la dépendance de vecteurs aléatoires de dimension supérieure à 2, surtout lorsque les marges à 2 dimensions ou plus de la distribution jointe du vecteur sont sensiblement différentes les unes des autres.

Les probabilités jointes de défaut pour ces 3 portefeuilles sont ensuite estimées, selon que la dépendance est modélisée par une copule normale, de Student, de Clayton ou de Gumbel dont les paramètres ont été précédemment estimés, voir tableau 12.9. Le calcul de la probabilité de défaut se fait chaque fois à l'aide de l'équation (12.3). Les probabilités individuelles de défaut sont données par la matrice de transition et dépendent du rating de l'émetteur du crédit. On utilise les probabilités individuelles de défauts suivantes : AA :0.01%; AA- :0.02%; A+ :0.05%; A- :0.06%; A :0.07%; BBB :0.23%.

On observe que les probabilités jointes de défaut impliquées par la copule normale et par la copule de Gumbel sont les plus faibles. En effet, le défaut joint correspond à des log-rendements situés à l'extrémité gauche de la distribution jointe. Or, ces deux copules sont justement caractérisées par des queues gauches écrasées, ce qui implique une probabilité très faible pour des événements situés à l'extrême gauche de la distribution. De plus, on peut conclure que la queue gauche de la distribution jointe construite avec une copule de Gumbel est beaucoup plus écrasée que celle construite avec une copule normale. Les probabilités jointes de défaut sont en effet inférieures pour la copule de Gumbel que pour la copule normale.

Par contre les deux autres copules impliquent des probabilités jointes de défaut sensiblement supérieures à celles impliquées par les copule normale et de Gumbel. La raison est que les copule de Student et de Clayton se caractérisent par une dépendance de queue à gauche plus ou moins forte, selon les paramètres des copules. On note par ailleurs que la copule de Clayton implique des probabilités jointes de défaut supérieures à la copule de Student.

Portefeuille	Copule			
	Normale	Student	Clayton	Gumbel
CH	3.390417e-11	2.309567e-06	1.862103e-05	2.633152e-12
DE	7.448883e-08	1.603409e-06	2.071186e-05	6.378142e-12
US	3.843351e-10	5.84254e-10	1.598501e-06	1.156319e-13

TAB. 12.9 – Probabilité jointe de défaut en selon le choix de la copule

Les résultats de la table 12.9 montrent une très grande sensibilité de la probabilité de défaut à la structure de dépendance entre les log-rendements. Ceci souligne l'importance du modèle choisi pour la structure de dépendance entre les log-rendements. Une inadéquation du modèle choisi pour la structure de dépendance peut avoir comme conséquence une large mésestimation des probabilités jointes de défaut.

## 12.4 Copule et capital économique

Dans cette section, on examine le rôle des copules dans le calcul du capital économique. Comme on l'a vu à la section 3.4, le capital économique constitue le montant des fonds propres nécessaire pour couvrir l'exposition au risque de crédit du portefeuille. Contrairement au niveau des fonds propres réglementaires, le capital économique est calculé en tenant compte du degré de diversification du portefeuille et de ses caractéristiques propres. La mesure du capital économique est donnée par l'équation (3.18) :

$$EC_{1-\alpha} = q_{1-\alpha} - E(\tilde{L}) ,$$

où

- $q_{1-\alpha}$  est le  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ -quantile de la distribution de la perte globale  $\tilde{L}$
- $E(\tilde{L})$  est l'espérance mathématique de la perte globale du portefeuille.

Le calcul de  $E(\tilde{L})$  ne dépend pas de la structure de dépendance entre pertes individuelles. En effet, l'espérance mathématique étant un opérateur linéaire on obtient, voir :

$$E(\tilde{L}) = E\left(\sum_{i=1}^m \tilde{L}_i\right) = \sum_{i=1}^m E(\tilde{L}_i) . \quad (12.12)$$

Comme il est d'usage de faire l'hypothèse que la perte en cas de défaut (ou le taux de recouvrement) et l'exposition en cas de défaut sont non aléatoires, on obtient l'expression suivante de l'espérance de la perte globale, voir section 3.2 :

$$E(\tilde{L}) = \sum_{i=1}^m \underbrace{EAD_i \times LGD_i}_{\omega_i} \times E(L_i) = \sum_{i=1}^m \omega_i PD_i , \quad (12.13)$$

où  $PD_i$  est la probabilité de défaut du crédit  $i$ .

Le calcul du quantile  $q_{1-\alpha} = F_{\tilde{L}}^{-1}(1 - \alpha)$ , où  $F_{\tilde{L}}$  est la fonction de répartition de  $\tilde{L}$  dépend lui de la structure de dépendance entre pertes individuelles. La fonction  $F_{\tilde{L}}$  s'écrit de la manière suivante :

$$F_{\tilde{L}}(l) = P(\tilde{L} \leq l) = P\left(\sum_{i=1}^m \tilde{L}_i \leq l\right) = P\left(\sum_{i=1}^m \omega_i L_i \leq l\right). \quad (12.14)$$

Dans le cadre d'un modèle de défaut où les seuls états relevant sont défaut et non défaut, la perte minimale  $l_{min} = 0$  correspond au non-défaut de tous les crédits tandis que la perte maximale au défaut de tous les crédits  $l_{max} = \sum_{i=1}^m \omega_i$ . On a

$$F_{\tilde{L}}(l_{min}) = P(\tilde{L} = 0) = P(X_1 > d_1, \dots, X_m > d_m) \text{ et } F_{\tilde{L}}(l_{max}) = 1.$$

Soit à présent  $l_k = \sum_{i=1}^k \omega_i$  la perte qui survient lorsque  $k \leq m$  du portefeuille font défaut.  $l_k$  est une valeur de la perte globale qui se situe dans l'intervalle  $[l_{min}, l_{max}]$ .

La probabilité qu'au moins  $k$  crédits fassent défaut est en fait égale à la probabilité que la perte globale soit supérieure ou égale à  $l_k$ . Dans le cadre des modèles structurels, la probabilité qu'au moins  $k$  crédits fassent défaut est égale à la probabilité qu'au moins  $k$  variables latentes soient inférieures à leurs seuils de défaut respectifs soit :

$$P(\tilde{L} \geq l_k) = P(X_1 < d_1, \dots, X_k < d_k, X_{k+1} < \infty, \dots, X_m < \infty).$$

Cette probabilité s'exprime à travers une marge à  $k$  dimensions de la copule, voir équation (12.5) :

$$P(\tilde{L} \geq l_k) = \mathbf{C}(p_1, \dots, p_k, 1, \dots, 1) = \mathbf{C}_{1, \dots, k}(p_1, \dots, p_k). \quad (12.15)$$

On a alors

$$F_{\tilde{L}}(l_k) = 1 - \mathbf{C}_{1, \dots, k}(p_1, \dots, p_k). \quad (12.16)$$

Il devient à présent évident que dans le cadre des modèles structurels, la fonction de répartition de la perte globale est dépendante de la copule entre les variables latentes. En effet, une copule  $\mathbf{C}$  à  $m$  dimensions possède les mêmes propriétés que ses marges à  $k \leq m$  dimensions. Soient deux copules  $\mathbf{C}_1$  et  $\mathbf{C}_2$  telles  $\mathbf{C}_1 \succ \mathbf{C}_2$ . Lorsque l'on modélise la dépendance entre les variables latentes successivement par les copule  $\mathbf{C}_1$  et  $\mathbf{C}_2$ , alors la fonction de répartition des pertes  $F^1$  impliquée par la copule  $\mathbf{C}_1$  va dominer au sens statistique la fonction  $F^2$  impliquée par la copule  $\mathbf{C}_2$ , voir figure 12.4. Ceci signifie qu'en chaque point  $l \in [0, l_{max}]$ , on aura

$$F_{\tilde{L}}^1(l) \leq F_{\tilde{L}}^2(l). \quad (12.17)$$

À travers la fonction de répartition de la perte globale, le choix de la copule détermine le quantile qui est égal à  $F_{\tilde{L}}^{-1}(1 - \alpha)$ . Par conséquent, le choix de la copule influence directement le niveau capital économique à détenir pour couvrir le risque de crédit.

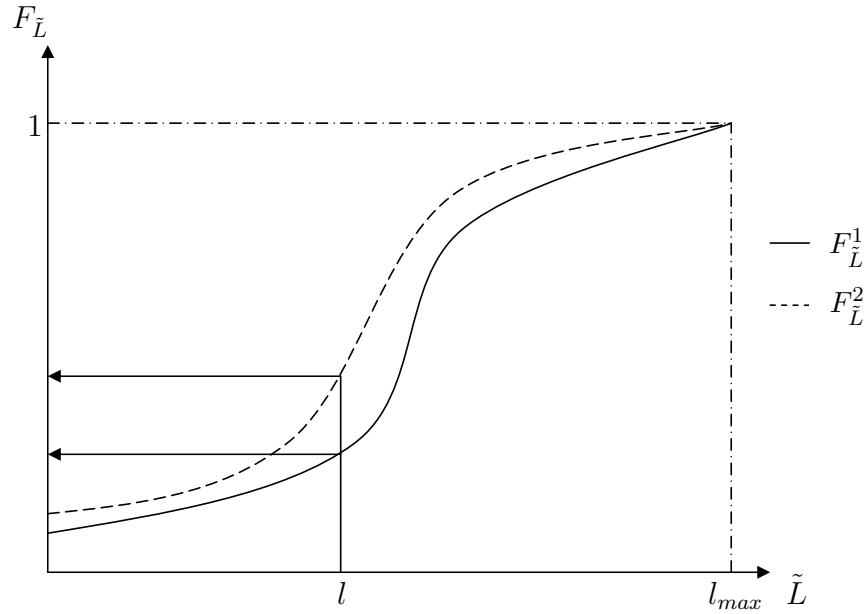


FIG. 12.4 – Effet de la copule sur la fonction de répartition des pertes globales

TANG & VALDEZ [145] ont effectué une étude sur le rôle des copules dans l'agrégation des risques en assurance. En utilisant des données sur les pertes de quatre «business lines» en Australie, TANG & VALDEZ [145] examinent la sensibilité de la mesure de capital requise pour couvrir le risque global par rapport au choix de la copule qui lie les pertes individuelles. Ils limitent leur choix en ne considérant que des copules elliptiques. Le résultat de leurs simulations montrent une différence considérable entre les distributions des pertes globales selon le choix de la copule. Leur conclusion est qu'il y a une large variation du capital requis selon l'hypothèse faite sur la structure de dépendance entre les différentes pertes.

Dans le cadre des modèles structurels du risque de crédit, il est possible d'obtenir une distribution empirique des pertes globales et d'en déduire la mesure du capital économique. En effet, pour un portefeuille de  $m$  crédits, la perte globale peut s'écrire :

$$\tilde{L}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^m \omega_i \cdot \mathbf{1}_{X_i \leq d_i} . \quad (12.18)$$

Pour chaque réalisation du vecteur  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)'$  des variables latentes, on obtient une observation de la perte globale à l'aide de l'équation 12.18. Si l'on dispose d'un échantillon de  $N$  observations du vecteur des variables latentes, on construit l'échantillon de  $N$  observations de la perte globale dont on peut déduire une mesure empirique du capital économique.

A titre d'illustration, on considère un portefeuille de  $m = 10$  crédits décrit par le tableau 12.10. On considère des crédits de faible rating de sorte que les pertes individuelles et jointes sont plus ou moins fréquentes. Les probabilités individuelles de défaut  $PD_i$  proviennent de la matrice de transition de Standard & Poor's, voir

Annexe A. On suppose que les variables latentes  $X_i$  suivent chacune une distribution normale centrée réduite, de telle manière que le seuil de défaut  $d_i$  est donné par :

$$d_i = \Phi^{-1}(PD_i)$$

Crédit	Rating	Probabilité de défaut	Perte en cas de défaut (CHF)	Seuil de défaut
$i$		$p_i$	$w_i$	$d_i = \Phi^{-1}(p_i)$
1	BB	0.0115	30'000	-2.2734
2	BB	0.0115	30'000	-2.2734
3	BB-	0.0197	25'000	-2.0600
4	BB-	0.0197	25'000	-2.0600
5	B+	0.0319	20'000	-1.8536
6	B+	0.0319	20'000	-1.8536
7	B	0.0899	15'000	-1.3414
8	B	0.0899	15'000	-1.3414
9	B-	0.1301	10'000	-1.1259
10	B-	0.1301	10'000	-1.1259

TAB. 12.10 – Description du portefeuille

Pour mettre en évidence le rôle du choix de la structure de dépendance du vecteur de variables latentes, on simule 10'000 observations de trois vecteurs  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_{10})$ ,  $\mathbf{X}' = (X'_1, \dots, X'_{10})$  et  $\mathbf{X}'' = (X''_1, \dots, X''_{10})$  de variables latentes ayant les mêmes marges (normales standard) mais des structures de dépendance différentes.

Pour faire en sorte que ces vecteurs soient comparables au niveau de la dépendance, on choisit un tau Kendall identique et égal 0.6 pour tous les sous-vecteurs à deux dimensions des vecteurs  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{X}'$  et  $\mathbf{X}''$ . Ceci signifie que

$$\tau_{X_i, X_j} = \tau_{X'_i, X'_j} = \tau_{X''_i, X''_j} = 0.6, \quad i \neq j.$$

Premièrement, on simule un vecteur  $\mathbf{X}$  de distribution normale multivariée. Ceci implique le choix de la copule normale. A partir de ce tau de Kendall connu, on déduit aisément le paramètre de la copule normale à l'aide de l'équation (10.13) qui donne la relation entre le tau de Kendall et le coefficient de corrélation. Le paramètre de la copule normale entre les variables latentes est par conséquent la matrice de corrélation  $\boldsymbol{\rho}$  dont les tous les éléments hors-diagonale sont égaux à

$$\rho_{ij} = \sin\left(\frac{\tau_{ij} \cdot \pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{0.6 \cdot \pi}{2}\right) = 0.8090. \quad (12.19)$$

Deuxièmement, on simule un vecteur de variables latentes  $\mathbf{X}'$  dont la structure de dépendance est une copule de Clayton. Pour une copule de Clayton de dimension  $m$

et de paramètre  $\theta$ , on peut montrer que chaque marge de dimension  $k \leq m$  est une aussi copule de Clayton de paramètre  $\theta$ . Sachant alors que le tau de Kendall est égal à 0.6 pour tous les sous-vecteurs à deux dimensions  $(X'_i, X'_j)$ , on peut calculer le paramètre des sous-copules de dimension 2 à l'aide de l'équation (10.46). On déduit alors l'unique paramètre de la copule de Clayton :

$$\tau = \frac{\theta}{\theta + 2} \Leftrightarrow \theta = \frac{2\tau}{1 - \tau} = \frac{2 \cdot 0.6}{1 - 0.6} = 3. \quad (12.20)$$

Enfin, on simule un vecteur  $\mathbf{X}''$  ayant une structure de dépendance représentée par une copule de Student de paramètres  $\boldsymbol{\rho}$  et  $\nu = 10$  degrés de liberté. En effet, un tau de Kendall égal à 0.6 pour les sous-vecteurs de dimension 2 implique, comme pour la copule de Student la même matrice de corrélation que la copule normale.

Pour chaque observation du vecteur de variables latentes  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{X}'$  ou  $\mathbf{X}''$ , l'équation (12.18) donne une observation de la perte globale qu'on désignera respectivement par  $\tilde{L}$ ,  $\tilde{L}'$  et  $\tilde{L}''$ . Pour chacune des trois structures de dépendance choisies, on obtient donc 10'000 observations de la perte globale dont la distribution est représentée les histogrammes de la figure 12.5.

On remarque la structure de dépendance entre les variables latentes influence la forme de la distribution, en particulier la queue de la distribution. Les copules de Clayton et de Student conduisent à des queues plus épaisses que la copule normale. Cela est dû à la propriété de dépendance de queue à gauche que les copules de Clayton et de Student possèdent.

Ces résultats sont cohérents avec les résultats de la section 12.1. En effet, puisque les copules de Clayton et de Student aboutissent à des probabilités jointes de défaut supérieures à celles de la copule normale, les pertes liées aux défauts joints seront plus fréquentes pour ces copules que pour la copule normale.

Dans cet exemple, on obtient des mesures de tendance centrale ainsi que des mesures de dispersions des pertes globales qui sont différentes selon le choix de la copule. Le tableau 12.11 donne les mesures de tendance centrale et de dispersion de la perte globale selon le choix de la copule. Les résultats obtenus sont quasiment identiques, sauf que l'écart-type de la perte globale avec une copule Clayton est supérieure de 6.43% à celle obtenue avec les copules normale et de student.

	Copule Normale $\tilde{L}$	Copule de Clayton $\tilde{L}'$	Copule de Student $\tilde{L}''$
Moyenne	39495	39293	38413,5
Écart-type	57003.3325	60668.2224	56654.8012

TAB. 12.11 – Moyenne et écart-type de la perte globale selon le choix de la copule

Le tableau 12.12 donne le capital économique requis pour divers niveaux de signification selon la distribution simulée des pertes. Quelque soit le niveau de signification,

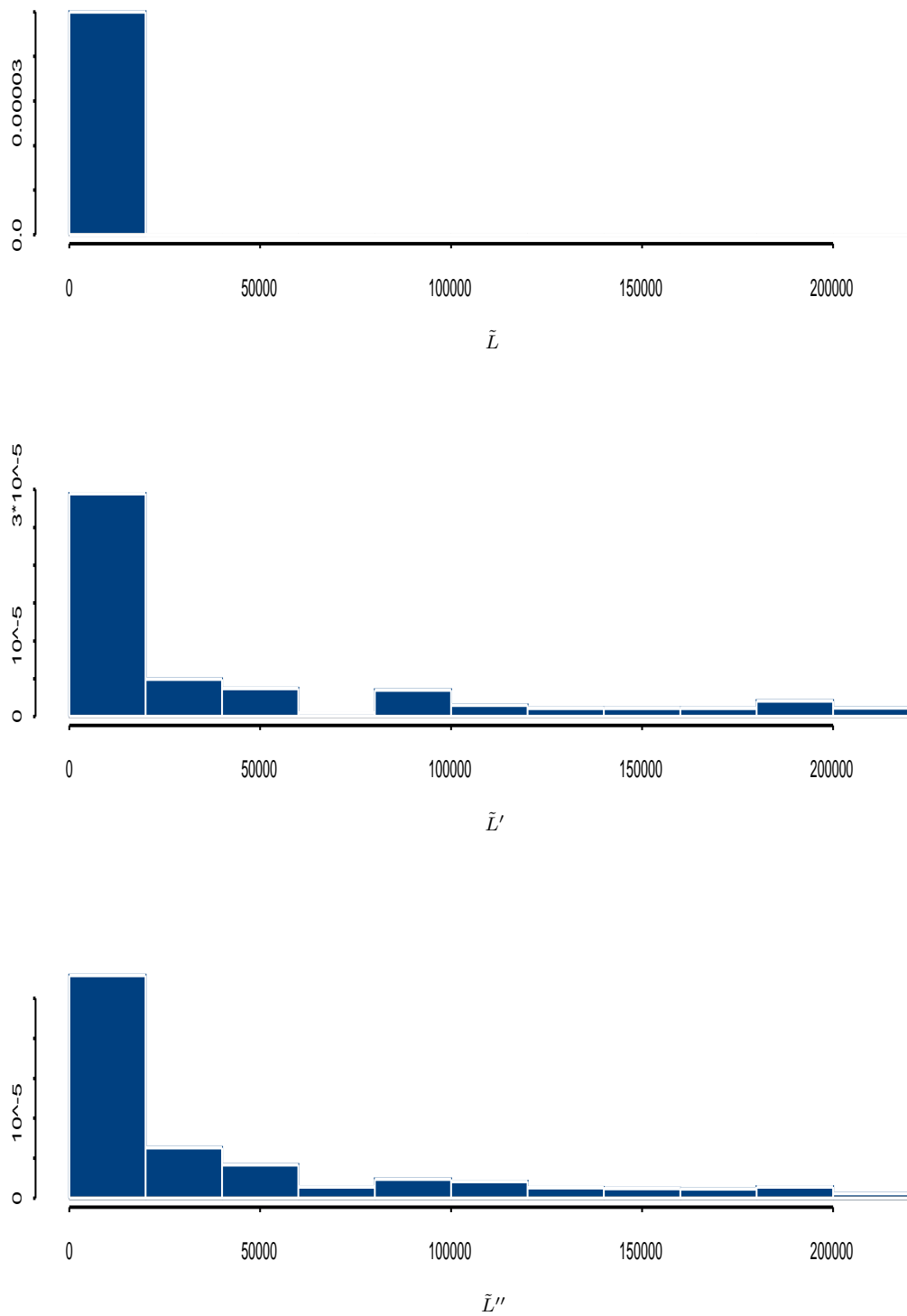


FIG. 12.5 – Distribution de la perte globale selon le choix de la copule



le capital économique est inférieur pour la copule normale que pour les copules de Clayton et de Student.

	Copule Normale	Copule de Clayton	Copule de Student
$EC_{95\%}$	130505	145707	138586.5
$EC_{97.5\%}$	130505	145707	138586.5
$EC_{99\%}$	175505	185707	176586.5

TAB. 12.12 – Capital économique selon le niveau de signification et la copule

Le tableau 12.12 montre que pour un portefeuille dont le tau de Kendall de chaque sous-vecteur à 2 dimensions du vecteur des variables latentes est identique, la mesure du capital économique est sensiblement différente selon le choix de la copule. Pour un niveau des signification de 95% et 97.5%, la copule de Clayton implique un niveau du capital économique qui est environ 12% supérieur au capital économique impliqué par la normale. La copule de Student elle implique un niveau de capital 6% supérieur à celui impliqué par la copule normale. Pour un niveau de signification de 99%, le capital économique impliqué par la copule normale est plus ou moins égal à celui impliqué par la copule de Student. Ceci signifie que les queues extrêmes des deux distributions sont pareilles, tandis que celle de la distribution jointe décrite par la copule de Clayton est bien plus épaisse.

Il est par conséquent évident que si une copule normale est utilisée à tort pour modéliser la dépendance entre les variables latentes, il y a un risque de sous estimation du capital nécessaire pour couvrir le risque de crédit du portefeuille.

TANG & VALDEZ [145], qui modélisent directement la copule entre les pertes alors qu'ici on modélise la copule entre les variables latentes, parviennent à des résultats similaires. Ils obtiennent en effet aussi des formes différentes de la distribution des pertes globale selon le choix de la copule.

Dans un article récent, MALEVERGNE & SORNETTE [110] testent l'hypothèse nulle que la dépendance entre les actifs financiers peut être modélisée par la copule normale. Leur base de données se compose entre autres des rendements journaliers de 22 titres parmi les plus grandes compagnies cotées au New York Stock Exchange.

Ils constatent que pour la plupart des paires d'actifs financiers, l'hypothèse de la copule normale ne peut être rejetée. Cependant, malgré la qualification apparente de l'hypothèse normale de copule, une copule non normale, telle que la copule de Student, n'est pas non plus rejetée si elle a «suffisamment de degrés de liberté». MALEVERGNE & SORNETTE [110] concluent alors qu'il peut s'avérer dangereux de toujours utiliser l'hypothèse d'une copule normale, particulièrement lorsque le coefficient de corrélation entre les paires d'actifs est élevé. Dans de tels cas, la dépendance de queue négligée par la copule normale est importante, et le choix d'une copule normale mènerait à la sous estimation des événements extrêmes. De plus, d'autres travaux tels que MASHAL & ZEEVI [113] et BREYMAN & AL. [23] ont

prouvé que l'ajustement empirique de la copule de student est généralement supérieur à celui de la copule normale. La raison principale est la capacité de la copule de student de capturer mieux le phénomène des valeurs extrêmes dépendantes, qui est souvent observé pour les rendements des actifs financiers.

La copule de Student, même en comparaison avec les copules archimédiennes, s'avère très intéressante pour modéliser la dépendance en finance. La raison majeure est qu'elle permet de prendre en compte les particularités de la dépendance des sous-vecteurs bivariés à travers le coefficient de corrélation, tout en ayant un unique paramètre qui caractérise la dépendance de queue de tout le vecteur. En effet, le désagrément majeur des copules archimédiennes, comme par exemple la copule de Clayton considérée dans cette section est qu'elle ne comporte qu'un seul paramètre qui caractérise la dépendance de tout le vecteur. Néanmoins, la copule de Student implique une dépendance symétrique n'est pas adaptée à la modélisation de toute la distribution des variables latentes. Mais puisque l'intérêt porte souvent seulement sur la queue droite de la distribution des pertes, la copule de student peut s'avérer un excellent choix.

# Chapitre 13

## Copules et dépendance des défauts dans les modèles réduits

A l'inverse des modèles structurels, les modèles à forme réduite discutés au chapitre 5 ne partent pas d'une variable latente sensée conduire le défaut, mais considèrent comme exogène le processus qui conduit le défaut. En fait, cette classe de modèles inclue les modèles structurels comme des cas particuliers où le défaut est défini de manière endogène. Les modèles à forme réduite présentent plusieurs avantages, entre autres le fait qu'ils permettent de rendre compte des ruptures (*sudden surprises*) : en effet le défaut est considéré comme le saut du processus stochastique, et la probabilité de défaut, sur toute période de temps est non nulle. Dans ce chapitre, on étudie le risque de défaut au niveau du portefeuille dans le cadre des modèles à forme réduite, à travers une modélisation de la dépendance des défauts à l'aide des fonctions copules.

L'*input* des modèles à forme réduite est le spread observé sur les marchés des crédits risqués comme les obligations. En dehors des rating attribués par les agences de notation, les spreads, notamment ceux des CDS, sont les indicateurs de la qualité des crédits les plus employés. Le principal avantage des spreads est qu'il sont un indicateur continu du risque de défaut des émetteurs d'obligations par le marché. En effet, une hausse des spreads d'un CDS indique la détérioration dans la perception de la qualité de crédit ; une baisse, l'opposé. Comme on l'a vu à la section 5.3, c'est à partir de ces spreads que sont calibrés les paramètres des modèles réduits. La section suivante étudie la relation entre copule et probabilité jointe de survie dans les modèles réduits.

### 13.1 Copules et probabilité jointe de survie

On considère un portefeuille de  $m$  crédits et l'on fixe un horizon de temps quelconque  $T$ . Dans le cadre d'un modèle d'intensité, le défaut du crédit  $i$  à la date  $t$  est modélisé par le saut d'un processus stochastique de Poisson d'intensité  $\lambda_i(t)$ . Comme on l'a

vu au chapitre 5, ce paramètre s'interprète, comme étant la probabilité instantanée de défaut au temps  $t$  étant donné la survie jusqu'à la date  $t$ .

La durée de survie  $\tau_i$  de chaque crédit  $i$  est une variable aléatoire qui suit une distribution exponentielle de paramètre  $\lambda_i(t)$ . Chaque crédit possède alors une probabilité non nulle de défaut à chaque instant ; et la distribution de  $\tau_i$  donne les probabilités de défaut à tous les horizons. À l'instant  $t$ , on estimera la probabilité de défaut à l'horizon  $T$  par :

$$p_i = P_t(\tau_i \leq T) = 1 - E_t \left[ \exp \left( - \int_t^T \lambda_i(s) ds \right) \right] , \quad (13.1)$$

où  $E_t$  dénote l'espérance mathématique étant donné l'information disponible au temps  $t$ . Lorsque l'on fait l'hypothèse que l'intensité de défaut sera constante entre  $t$  et  $T$ , on obtient l'estimation suivante de la probabilité de défaut à l'horizon  $T$  :

$$p_i = 1 - e^{-\lambda_i(t)(T-t)} . \quad (13.2)$$

Cette hypothèse, comme on l'a vu à la section 5.4.2, a permis d'obtenir une relation linéaire simple entre le spread du CDS et l'intensité de défaut, voir équation (5.36).

À la date  $t$ , la fonction de survie du crédit  $i$  à tout horizon  $T$  est modélisée par la fonction suivante :

$$S_i(T) = P(\tau_i > T) = e^{-\lambda_i(t)(T-t)} . \quad (13.3)$$

On s'intéresse à un portefeuille de  $m$  crédits et à la fonction de survie multidimensionnelle  $\mathbf{S}(T_1, T_2, \dots, T_m)$  définie par :

$$\mathbf{S}(T_1, T_2, \dots, T_m) = P(\tau_1 > T_1, \dots, \tau_m > T_m) . \quad (13.4)$$

Si on choisit  $T_i$  égale à la maturité du crédit  $i$ , l'équation (13.4) donne la probabilité qu'aucun crédit ne fasse défaut avant sa maturité. Bien évidemment, la fonction de survie unidimensionnelle est

$$S_i(T_i) = \mathbf{S}(0, \dots, 0, T_i, 0, \dots, 0) ,$$

et la relation entre la fonction de survie multidimensionnelle et la fonction de répartition multidimensionnelle n'est pas aussi directe que dans le cas univarié :

$$\mathbf{S}(T_1, T_2, \dots, T_m) \neq 1 - \mathbf{F}(T_1, T_2, \dots, T_m) .$$

Pour construire des fonctions de survie multidimensionnelles et en déduire des probabilités de survie jointes à des horizons divers, on utilisera le concept de la copule. Soit  $\mathbf{S}$  une fonction de survie jointe à  $m$  dimensions dont les marges sont  $S_1, \dots, S_m$ . Le théorème 8.11 permet de lier des survies unidimensionnelles à une fonction de survie jointe au travers de la copule de survie. La probabilité jointe de survie à un

horizon commun à tous les crédits  $T$  est donc fonction des survies marginales et de la copule de survie entre les durées de survie.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(T, \dots, T) &= P(\tau_1 > T, \dots, \tau_m > T) \\ &= \bar{\mathbf{C}}(S_1(T), \dots, S_m(T)) . \end{aligned} \quad (13.5)$$

On considère à titre d'exemple un portefeuille composé de  $m$  crédits et on suppose que les durées de survies des crédits sont liées par une copule normale de paramètre  $\Sigma$ . Puisque la copule normale possède la propriété de symétrie radiale on a :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}_{\boldsymbol{\rho}}^N(u_1, u_2, \dots, u_n) &= \sum_{i=1}^n u_i - (n-1) + \mathbf{C}_{\boldsymbol{\rho}}^N(1-u_1, \dots, 1-u_n) \\ &= \mathbf{C}_{\boldsymbol{\rho}}^N(u_1, u_2, \dots, u_n) . \end{aligned}$$

Dans ce cas, la probabilité jointe de survie à un horizon d'un an est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(1, \dots, 1) &= P(\tau_1 > 1, \dots, \tau_m > 1) \\ &= \mathbf{C}_{\Sigma}^N(S_1(1), \dots, S_m(1)) \\ &= \Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(S_1(1)), \dots, \Phi^{-1}(S_m(1))) . \end{aligned} \quad (13.6)$$

De même, la probabilité jointe de défaut à un horizon d'un an est donnée par :

$$P(\tau_1 \leq 1, \tau_2 \leq 1, \dots, \tau_m \leq 1) = \Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(F_1(1)), \dots, \Phi^{-1}(F_m(1))) ; \quad (13.7)$$

où  $F_i(t) = 1 - S_i(t)$ .

La question fondamentale qui se pose dans ce chapitre est de savoir comment modéliser la dépendance entre les durées de survies en vue d'estimer la probabilité jointe de survie. Dans leurs travaux, JARROW, LANDO & YU [96] supposaient que la seule source de corrélation entre les durées de survie des crédits est la corrélation entre les intensités de défaut de ces crédits. Cette hypothèse signifie en fait que les facteurs de risque communs influencent les intensités de défaut, et que une fois ces intensités données, les facteurs de risque spécifiques deviennent indépendants les uns des autres. En d'autres termes, ceci correspond à dire que la structure de dépendance entre les durées de survie est égale à la structure de dépendance entre les intensités.

Puisque la relation entre le spread de crédit et l'intensité de défaut est, sous certaines hypothèses, linéaire et positive (voir équation (5.36)) et que la structure de dépendance est invariante par rapport aux transformations strictement monotones croissantes, on déduit que la structure de dépendance entre les durées de survie est égale à la structure de dépendance entre les spreads de crédits. On modélisera donc à la section suivante la dépendance des durées de survie par la copule entre les spreads de crédits. Les paramètres de celle-ci seront estimés à l'aide d'observations empiriques sur les marchés des spreads des CDS.

## 13.2 Copules et probabilité jointe de survie : Exemple d'application

On considère à nouveau les trois portefeuilles du chapitre précédent, voir tableau 12.2. Il s'agit d'étudier la sensibilité de la probabilité jointe de survie au choix de la copule entre les durées de survie. Dans cette section, les probabilités individuelles de survie sont calculées à partir du modèle d'intensité du risque de défaut et calibrées sur des données des spreads des CDS à 5 ans. Il s'agit de contrat CDS sur des titres de dette senior, c'est-à-dire des titres de dette bénéficiant de garanties spécifiques et dont le remboursement se fait prioritairement par rapport aux autres dettes, dites dettes subordonnées.

La base de données se compose des séries temporelles des spreads des CDS entre juin 2003 et décembre 2007. Les graphiques de la figure 13.2 montrent l'évolution des spreads (en points de base) des CDS à 5 ans au cours de la période d'observation. On observe, en particulier pour le portefeuille CH, une augmentation importante des spreads à partir de l'été 2007 en raison des turbulences sur les marchés des crédits et des incertitudes pesant sur l'environnement économique global.

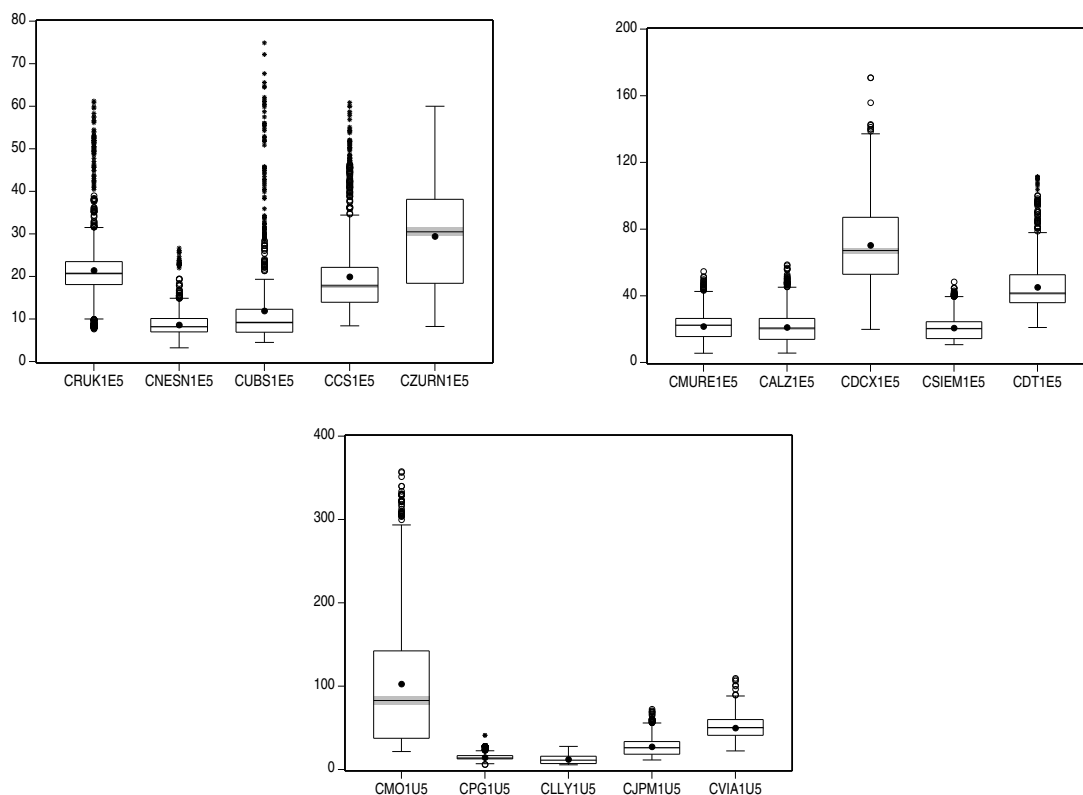


FIG. 13.1 – Distribution des spreads des CDS

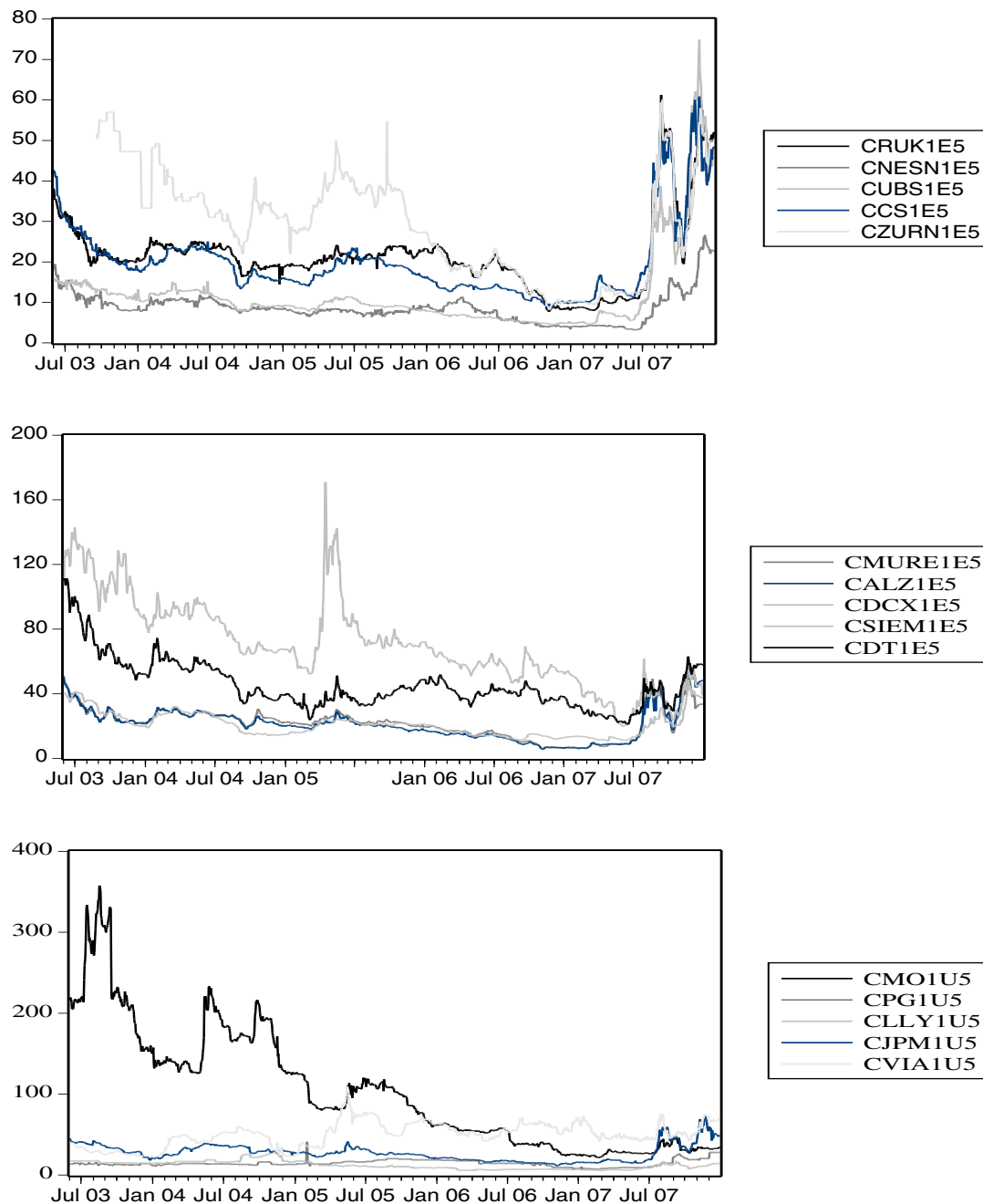


FIG. 13.2 – Evolution des spreads des CDS (5 ans)

Source des données : Bloomberg

Les diagrammes de Box<sup>1</sup> de la figure 13.1 montrent des distributions empiriques des spreads des CDS marquées par des valeurs aberrantes (outliers) surtout pour les valeurs financières.

<sup>1</sup>Chaque symbole utilisé dans les diagrammes de Box correspond à un émetteur précis, voir tableau 13.2

La relation rating-spread intuitive selon laquelle le rating et le spread sont inversement proportionnels est observée dans la base de données : en effet, pour le portefeuille CH, l'émetteur Nestlé qui possède le meilleur rating (voir tableau 12.2) affiche des spreads moins élevés et moins volatiles (voir tableau 13.1) que les spreads des autres émetteurs. Le tableau 13.1 donne les statistiques descriptives des spreads des CDS pour les trois portefeuilles considérés. On observe une grande volatilité des spreads pour les valeurs financières en raison de la crise des crédits à partir de juillet 2007. De plus, selon le test de Jarque-Bera, l'hypothèse d'une distribution normale pour modéliser la distribution des spreads des CDS est globalement rejetée, sauf pour les spreads de CBS Corp.

Le tableau 13.2 donne des estimations de la probabilité annuelle de survie et à un horizon de 5 années au 31.12.2007. Celles-ci sont calculées à partir des quotations des CDS à cette date de la manière suivante. On estime tout d'abord pour chaque crédit l'intensité de défaut à l'aide de l'équation (5.36) et en choisissant  $\delta_i = 40\%^2$ . On calcule ensuite les probabilités de survie aux horizons  $T = 1$  et  $T = 5$  à l'aide de l'équation (13.3).

Portefeuille	Symbole	Émetteur	Spread CDS	Survie 1 an	Survie 5 ans
Portefeuille CH	CRUK1E5	Swiss Reinsurance	52.023	0.998267403	0.99136698
	CNESN1E5	Nestlé	22.538	0.999249015	0.996250713
	CUBS1E5	UBS	45.799	0.998474531	0.992395892
	CCS1E5	Credit Suisse	48.431	0.998386936	0.991960656
	CZURN1E5	Zurich Financial Services	50	0.998334721	0.991701293
Portefeuille DE	CMURE1E5	Muenchener Rueckversicherungs AG	33.695	0.998877464	0.994399906
	CALZ1E5	Allianz	48.226	0.998393758	0.991994549
	CDCX1E5	DaimlerChrysler AG	45.132	0.998496731	0.992506219
	CS1EM1E5	Siemens AG	37.779	0.998741493	0.993723281
	CDT1E5	Deutsche Telekom AG	57.764	0.998076386	0.990418861
Portefeuille US	CMO1U5	Philip Morris/Altria Group Inc	34.401	0.998853957	0.994282905
	CPG1U5	Procter & Gambel Co	27.929	0.999069467	0.995355984
	CLLY1U5	Eli Lilly & Co.	14.358	0.999521515	0.997609861
	CJPM1U5	JP Morgan	49.231	0.998360312	0.991828404
	CVIA1U5	CBS Corp.	70.995	0.997636298	0.988237229

TAB. 13.2 – Estimation des probabilités individuelles de survie des différents émetteurs au 31.12.2007

Si l'on calcule les probabilités de défaut annuelles impliquées par les spreads à l'aide la formule  $p = 1 - S(1)$  où  $S(1)$  est la probabilité de survie à 1 an, on observe que celles-ci sont souvent supérieures aux probabilités de la matrice de transition Standards & Poor's, voir Annexe A. Les travaux d'ARVANITIS & AL. [3] ont aussi conclu que les modèles réduits ont tendance à aboutir à des probabilités de défaut supérieures aux probabilités de transition historiques. Ceci est probablement dû au fait qu'en réalité seule une partie des spreads sont une compensation pour le risque de défaut, l'autre partie étant une compensation liée à la liquidités des crédits.

<sup>2</sup>Le taux de recouvrement utilisé pour l'estimation des probabilités de défaut par le modèle standard de la banque américaine JP Morgan



Émetteur	CDS	Moyenne arithmétique	Médiane	Minimum	Maximum	Écart-type	Skewness	Kurtosis	Jarque-Bera
Swiss Reinsurance	CRUK1E5	21.44507	20.732	61.244	7.679	9.245072	1.664087	7.090114	1385.655
Nestlé	CNESN1E5	8.632814	8.214	26.665	3.25	3.69863	1.70576	8.112848	1882.687
UBS	CUBS1E5	11.9283	9.1805	74.901	4.5	9.961914	3.317856	15.16446	9568.334
Credit Suisse	CCS1E5	19.94713	17.819	60.835	8.397	9.475486	1.918332	6.784037	1447.107
Zurich Financial Services	CZURN1E5	29.45115	30.5	60	8.25	13.07321	0.151669	2.084129	43.40016
Muenchener Rueckversicherungs AG	CMURE1E5	21.67447	22.345	54.66	5.556	9.104003	0.290357	3.183867	18.49
Allianz	CALZ1E5	21.10143	20.667	58.718	5.659	9.972322	0.791566	3.887195	164.1221
DaimlerChrysler AG	CDCX1E5	70.31796	67.1065	170.882	19.86	26.9564	0.623076	3.178941	78.98164
Siemens AG	CS1EM1E5	20.75597	20.4145	48.401	10.704	7.509469	0.968251	3.46875	197.8268
Deutsche Telekom AG	CDT1E5	45.17806	41.569	111.5	21.047	15.25054	1.538884	6.328929	1024.295
Philip Morris / Altria Group Inc	CMO1U5	102.6756	82.7995	357.625	21.621	74.54476	1.008425	3.476995	214.0445
Procter & Gamble Co	CPG1U5	14.59745	14	41	6.155	4.00564	1.106567	6.9025	1003.019
Eli Lilly & Co	CLLY1U5	12.23162	11.3865	27.75	5.64	5.065495	0.735587	3.123926	108.6222
JP Morgan	CJPM1U5	27.33915	26.25	72.602	11.45	10.51649	1.050123	4.444688	323.825
CBS	CVIA1U5	49.84359	50.4295	109.53	22.4	15.04311	0.136691	3.018884	3.742194

TAB. 13.1 – Statistiques descriptives des spreads des CDS à 5 ans

Comme on l'a déjà souligné, l'un des avantages de l'utilisation des spreads pour l'estimation des probabilités de défaut est que les spreads sont spécifiques aux émetteurs et non à la catégorie de rating. Ainsi, deux émetteurs comme par exemple Credit Suisse et Zurich Financial Services se situent dans la même classe de rating (A+) mais leurs risques respectifs reflétés par le niveau de leur spreads sont différents. On observe par exemple que le marché juge en moyenne que l'émetteur Zurich Financial Services est plus risqué que Credit Suisse puisque le prix de la protection contre le défaut est légèrement plus élevé pour Zurich Financial Services que pour Credit Suisse.

Dans ce chapitre, on s'intéresse surtout à la structure de dépendance entre les spreads. On fera l'hypothèse que la structure de dépendance entre les spreads des CDS est égale à celle entre les intensités de défaut des différents crédits. En effet, puisque pour chaque crédit, le paramètre de la fonction de survie est calibré à partir des spreads des CDS, il est cohérent de déterminer la fonction de survie jointe en utilisant la structure de dépendance entre les spreads. Le tableau 13.3 présente les mesures d'association empiriques usuelles pour les trois portefeuilles. Ces mesures d'association démontrent une dépendance forte entre les spreads, en particulier pour le portefeuille CH. Ce dernier est en effet composé en majorité de valeurs financières, les plus touchées par la crise du crédit à partir de juillet 2007. Or, en période de crise, les corrélations augmentent fortement, d'où des corrélations supérieures à 0.9 par exemple entre les spreads des CDS de Credit Suisse et UBS ou entre ceux de Credit Suisse et Swiss Re.

En comparant ces mesures avec celles du tableau 12.4, on observe que les spreads des CDS sont souvent bien plus «corrélés» que les log-rendements annualisés pour les mêmes émetteurs. On cependant note que pour le portefeuille US, les spreads des CDS indiquent une bonne diversification, notamment avec des corrélations négatives, alors que les log-rendements annualisés affichaient des corrélations positives. Ceci démontre une certaine incohérence entre les marchés des crédits et la marchés actions incompatible avec les modèles structurels qui lient les spreads aux variables observées sur le marché des actions.

On observe en général que des rendements en baisse s'accompagnent d'une hausse des spreads des crédits et ceci est compatible avec les modèles structurels du risque de défaut. Pourtant, la deuxième moitié de 2007 s'est caractérisée par une augmentation très importante des spreads sans qu'il y ait une baisse équivalente des rendements des actions. La crise s'est fait ressentir surtout sur les marchés des crédits, tandis que les marchés actions sont restés plus ou moins solides sauf pour les valeurs financières.

Même si les distributions marginales des spreads peuvent être vraisemblablement modélisées par une distribution normale univariée comme l'indiquent les tests de Jarque-Bera du tableau 13.1, une distribution normale jointe est-elle appropriée pour la distribution jointe des spreads? Les graphiques de la figure 13.3 qui comparent les distances ordonnées aux quantiles d'une  $\chi^2$  avec cinq degrés de liberté suggèrent qu'une distribution normale multivariée n'est pas appropriée pour modéliser la distribution jointe des spreads, en particulier pour les portefeuille CH et

	CH1	CH2	CH3	CH4	CH5	DE1	DE2	DE3	DE4	DE5	US1	US2	US3	US4	US5
	Coefficient de corrélation														
CRUK1E5 (CH1)	1.0000	0.8526	0.8494	0.9146	0.6999										
CNESN1E5 (CH2)		1.0000	0.7999	0.7751	0.6413										
CUBS1E5 (CH3)			1.0000	0.9386	0.5156										
CCS1E5 (CH4)				1.0000	0.6384										
CZURN1E5 (CH5)					1.0000										
CMURE1E5 (DE1)						1.0000	0.9678	0.5025	0.8284	0.6532					
CALZ1E5 (DE2)							1.0000	0.4155	0.8651	0.6445					
CDCX1E5 (DE3)								1.0000	0.6196	0.7304					
CSIEM1E5 (DE4)									1.0000	0.8087					
CDT1E5 (DE5)										1.0000					
CMOIU5 (US1)											1.0000	0.-0.0274	0.7318	0.3828	-0.5088
CPG1U5 (US2)												1.0000	0.0830	0.4627	0.2867
CLLY1U5 (US3)													1.0000	0.5443	-0.4033
CJPM1U5 (US4)														1.0000	0.0115
CVIA1U5 (US5)															1.0000
	Tau de Kendall														
CRUK1E5	1.0000	0.6018	0.6171	0.6710	0.5879										
CNESN1E5		1.0000	0.5729	0.5519	0.4693										
CUBS1E5			1.0000	8305	0.6674										
CCS1E5				1.0000	0.6376										
CZURN1E5					1.0000										
CMURE1E5						1.0000	0.9032	0.4731	0.6926	0.4623					
CALZ1E5							1.0000	0.4690	0.6994	0.4757					
CDCX1E5								1.0000	0.5638	0.5253					
CSIEM1E5									1.0000	0.5498					
CDT1E5										1.0000					
CMOIU5											1.0000	0.0254	0.5922	0.4734	-0.2602
CPG1U5												1.0000	0.0293	0.2588	0.2524
CLLY1U5													1.0000	0.5221	-0.2318
CJPM1U5														1.0000	-0.0707
CVIA1U5															1.0000

TAB. 13.3 – Coefficient de corrélation et tau de Kendall des spreads des CDS

DE. Les diagrammes de dispersion à l'annexe C p 205 montrent aussi que les distributions empiriques à deux dimensions sont différentes d'une distribution normale bivariée.

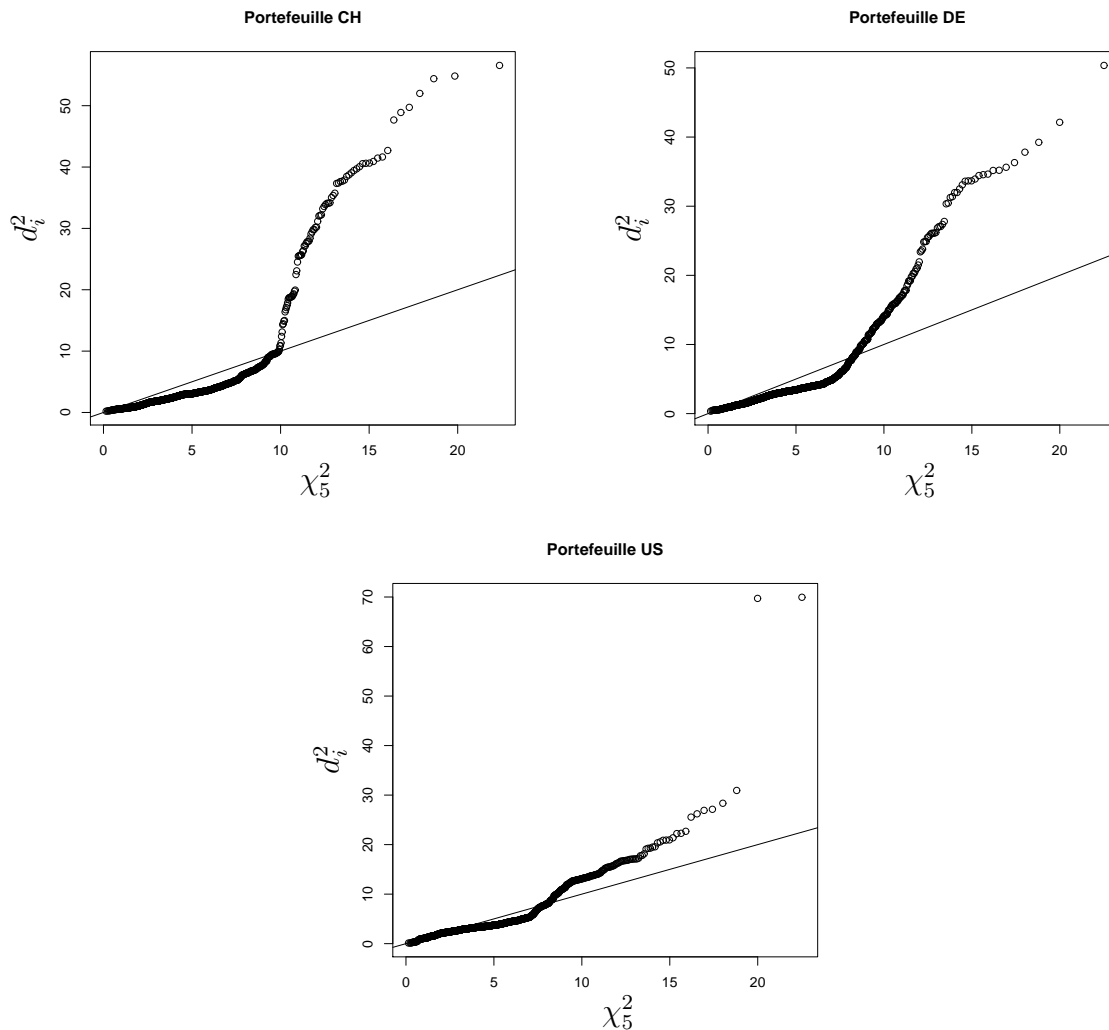


FIG. 13.3 – Test graphique de la plausibilité de la distribution normale multivariée

Comme au chapitre 12, on fait successivement l'hypothèse que les spreads possèdent comme structure de dépendance une copule de Clayton, une copule de Gumbel, une copule normale et une copule de Student. L'objectif est d'étudier la sensibilité de la probabilité jointe de survie au choix de la copule. On utilisera également une méthode semi-paramétrique pour l'estimation des paramètres des copules.

Les estimateurs<sup>3</sup> du maximum de vraisemblance des copules normales et de student sont donnés dans les tableaux 13.4 et 13.5. On observe que l'estimateur du nombre de degré de liberté est très élevé pour le portefeuille US, indiquant que la dépendance de queue est très faible pour ce portefeuille. En effet, comme on l'a vu dans le

<sup>3</sup>Toutes les estimations sont faites avec le «Copula Package» du logiciel R

tableau 10.1, pour un coefficient de corrélation donné, le nombre de degrés de liberté est inversement proportionnel à la mesure de dépendance de queue. Cependant, pour les portefeuilles CH et DE, le nombre de degré de liberté estimé pour le modèle de student est relativement important, suggérant la présence de queues de distributions épaisses. Ces résultats sont cohérents avec les graphiques de la figure 13.3 qui indiquaient déjà des queues de distributions épaisses pour les portefeuilles CH et DE.

Portefeuille	$\hat{\rho}^N$	ML
CH	$\begin{pmatrix} 1 & 0.8039 & 0.8378 & 0.8657 & 0.7761 \\ & (0.0082) & (0.0067) & (0.0056) & (0.0093) \\ & & 1 & 0.7712 & 0.7647 & 0.6649 \\ & & & (0.0095) & (0.0097) & (0.0134) \\ & & & & 1 & 0.9608 & 0.8186 \\ & & & & & (0.0016) & (0.0076) \\ & & & & & & 1 & 0.8011 \\ & & & & & & & (0.0083) \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$	3514.425
DE	$\begin{pmatrix} 1 & 0.9798 & 0.5089 & 0.8393 & 0.6576 \\ & (0.0008) & (0.0173) & (0.0065) & (0.0133) \\ & & 1 & 0.4682 & 0.8536 & 0.6579 \\ & & & (0.0181) & (0.0059) & (0.0133) \\ & & & & 1 & 0.6515 & 0.7219 \\ & & & & & (0.0132) & (0.0111) \\ & & & & & & 1 & 0.7587 \\ & & & & & & & (0.0097) \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$	3803.286
US	$\begin{pmatrix} 1 & 0.1874 & 0.7456 & 0.5259 & -0.3920 \\ & (0.0257) & (0.0102) & (0.0179) & (0.0222) \\ & & 1 & 0.1265 & 0.4688 & 0.3211 \\ & & & (0.0260) & (0.0201) & (0.0241) \\ & & & & 1 & 0.6271 & -0.3241 \\ & & & & & (0.0147) & (0.0238) \\ & & & & & & 1 & -0.0387 \\ & & & & & & & (0.0266) \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$	1207.593

TAB. 13.4 – Résultats des estimateurs des paramètres de la copule normale

Pour les copules de Clayton et Gumbel, il s'agit de trouver l'estimateur du paramètre  $\hat{\theta}$ , voir équation (11.15) :

$$\hat{\theta} = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln \mathbf{c}(\hat{F}_1(x_{1t}), \dots, \hat{F}_5(x_{5t}); \theta) ; \quad (13.8)$$

Portefeuille	$\hat{\rho}^t$	$\hat{\nu}$	ML
CH	$\begin{pmatrix} 1 & 0.8045 & 0.8366 & 0.8679 & 0.7755 \\ & (0.0087) & (0.0072) & (0.0059) & (0.0101) \\ & & 1 & 0.7741 & 0.7667 & 0.6617 \\ & & & (0.0100) & (0.0102) & (0.0143) \\ & & & & 1 & 0.9602 & 0.8233 \\ & & & & & (0.0018) & (0.0079) \\ & & & & & & 1 & 0.8038 \\ & & & & & & & (0.0087) \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$	20.7018 (4.6471)	3527.621
DE	$\begin{pmatrix} 1 & 0.9837 & 0.6212 & 0.8463 & 0.6514 \\ & (0.0008) & (0.0181) & (0.0073) & (0.0150) \\ & & 1 & 0.6001 & 0.8537 & 0.6536 \\ & & & (0.0190) & (0.0069) & (0.0149) \\ & & & & 1 & 0.7570 & 0.7832 \\ & & & & & (0.0124) & (0.0104) \\ & & & & & & 1 & 0.7613 \\ & & & & & & & (0.0109) \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$	6.7488 (0.5023)	3945.827
US	$\begin{pmatrix} 1 & 0.1877 & 0.7456 & 0.5277 & -0.3914 \\ & (0.0257) & (0.0254) & (0.0273) & (0.0277) \\ & & 1 & 0.1256 & 0.4676 & 0.3213 \\ & & & (0.0241) & (0.0258) & (0.0289) \\ & & & & 1 & 0.6278 & -0.3243 \\ & & & & & (0.0264) & (0.0281) \\ & & & & & & 1 & -0.0402 \\ & & & & & & & (0.0271) \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$	409.6249 (128.7204)	1206.522

TAB. 13.5 – Résultats des estimateurs des paramètres de la copule de Student

où  $\mathbf{c}$  est la densité de la copule de Clayton respectivement de Gumbel à cinq dimensions.

Le tableau 13.6 reporte les résultats des estimations par maximum de vraisemblance des paramètres des copules archimédiennes. Les valeurs entre parenthèses sont les écart-types des estimateurs et ML désigne la valeur maximale de la fonction de vraisemblance.

Portefeuille	Copule de Clayton		Copule de Gumbel	
	$\hat{\theta}$	ML	$\hat{\theta}$	ML
CH	1.8126 (0.0355)	2329.464	2.6508 (0.0316)	2854.451
DE	1.0088 (0.0239)	1523.94	1.8512 (0.0212)	1935.657
US	0.2750 (0.0160)	254.1622	1.1203 (0.0114)	64.0075

TAB. 13.6 – Résultats des estimations des paramètres des copules de Clayton et Gumbel

Comme on l'a fait au chapitre précédent, on utilise le critère d'information d'Akaike, *AIC* afin d'établir une comparaison entre les quatre modèles choisis pour la structure de dépendance entre les spreads de CDS. Selon ce critère, voir tableau 13.7, la copule de Student serait la copule la mieux adaptée aux données empiriques pour les portefeuilles CH et DE, tandis que la copule normale est le modèle le mieux adapté pour le portefeuille US. Ces résultats sont tout à fait cohérents avec les graphiques de la figure 13.3 qui montraient que la distribution normale multivariée est une approximation plus ou moins bonne pour modéliser la distribution jointe des spreads pour le portefeuille US. On observe de plus que pour les portefeuilles CH et DE, la copule de Gumbel est préférée à celle de Clayton selon le critère *AIC*. Ceci se rapporte au fait que les spreads des CDS possèdent plutôt une dépendance de queue à droite : la dépendance des spreads est plus importante pour des spreads élevés que pour des spreads faibles. Une hausse des spreads qui intervient surtout dans des périodes de crises conduit non seulement à une augmentation de la probabilité de défaut pour les crédits individuels mais aussi à une augmentation de la dépendance des défauts.

Portefeuille	Copule			
	Normale	Student	Clayton	Gumbel
CH	-7008.85	<b>-7033.242</b>	-4656.928	-5706.902
DE	-7586.572	<b>-7869.654</b>	-3045.88	-3869.314
US	<b>-2395.186</b>	-2391.044	-506.3244	-126.015

TAB. 13.7 – AIC selon le choix de la copule

On s'intéressera ici à la copule de survie entre les spreads, qui permettra de calculer des estimations de probabilités de survie des crédits. En effet, l'équation (13.5) fait le lien entre survie individuelle et copule de survie. A chaque copule estimée  $\mathbf{C}_{\hat{\theta}}$ , on associe une copule de survie unique  $\bar{\mathbf{C}}_{\hat{\theta}}$  selon l'équation :

$$\bar{\mathbf{C}}_{\hat{\theta}}(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^n u_i - 1 + \mathbf{C}_{\hat{\theta}}(1 - u_1, \dots, 1 - u_n) . \quad (13.9)$$

Néanmoins, pour les copules normale et de student, la copule de survie est égale à la copule puisque ces copules possèdent la propriété de symétrie radiale. La dernière étape consiste à estimer les probabilités jointes de survie à un horizon quelconque  $T$  à l'aide de la formule suivante :

$$\hat{S}(T) = \bar{C}_{\hat{\theta}}(\hat{S}_1(T), \dots, \hat{S}_5(T)) , \quad (13.10)$$

où  $\hat{S}_i(T) = \exp(-\bar{\lambda}_i(t)(T - t))$ .

A l'aide de l'équation (13.10), on calcule des estimations des probabilités de survie jointe à 1 an et à 5 ans en utilisant les probabilités de survie individuelles à 1 an et 5 ans du tableau 13.2. Les résultats sont donnés dans les tableaux 13.8 et 13.9. L'avantage de ce type de modélisation est qu'il est possible d'estimer la structure à terme des probabilités jointes de survie, c'est-à-dire de calculer les probabilités jointes de survie à des horizons divers.

Portefeuille	Copule			
	Normale	Student	Clayton	Gumbel
CH	0.9938978	0.9929674	0.9932274	0.9927825
DE	0.9946845	0.9924871	0.9928764	0.9925860
US	0.99346325	0.9934397	0.99344664	0.993441549

TAB. 13.8 – Probabilité jointe de survie 1 an en selon le choix de la copule

Portefeuille	Copule			
	Normale	Student	Clayton	Gumbel
CH	0.9801924	0.9812452	0.966243	0.963782
DE	0.9775439	0.9812851	0.964498	0.963051
US	0.9704036	0.9705307	0.967348	0.967314

TAB. 13.9 – Probabilité jointe de survie à 5 ans en selon le choix de la copule

On observe une fois de plus que le choix de la copule a une influence sur la valeur de la probabilité jointe de survie. Lorsqu'on compare les copules elliptiques, on remarque que la probabilité jointe de survie impliquée par la copule de Student est plus élevée que celle impliquée par la copule normale. En effet, puisque la probabilité jointe de survie est fonction de la copule de survie à des points proches de 1, une copule de survie présentant une dépendance de queue à droite impliquera des probabilités plus élevées. Lorsqu'on compare les deux copules archimédiennes, on remarque que la probabilité jointe de survie impliquée par la copule de Clayton est plus élevée que celle impliquée par la copule de Gumbel. Dans ce cas-ci, la copule de survie du modèle de Clayton possède une dépendance de queue à droite alors que celle du modèle de Gumbel possède une dépendance de queue à gauche. C'est la raison pour laquelle le modèle de Clayton conduit à des probabilités jointes de survie plus élevées.



## 13.3 Copule et capital économique dans les modèles réduits

Dans le cadre des modèles réduits, la perte globale à un horizon quelconque  $T$  d'un portefeuille de  $m$  crédits s'écrit :

$$\tilde{L}(T) = \sum_{i=1}^m \omega_i \cdot \mathbf{1}_{\tau_i \leq T} ; \quad (13.11)$$

où  $\omega_i = EAD_i \cdot LGD_i$  désigne la perte en cas de défaut pour chaque crédit  $i$ .

La copule entre les durées de survie  $\tau_i$  joue un rôle important dans la détermination du capital économique. Pour le montrer, on définit  $l_{min}$  et  $l_{max}$  la perte minimale respectivement la perte maximale du portefeuille à l'horizon  $T$ . On a évidemment  $l_{min} = 0$  puisque cet événement correspond à la survie de tous les crédits et  $l_{max} = \sum_{i=1}^m \omega_i$  qui correspond au défaut de tous les crédits.

Soit  $F_{\tilde{L}}$  la fonction de répartition des pertes à l'horizon  $T$ . La distribution  $F_{\tilde{L}}$  à chaque point  $l \in [l_{min}, l_{max}]$  est donnée par :

$$\begin{aligned} F_{\tilde{L}}(l_{min}) &= F_{\tilde{L}}(0) = P(\tilde{L} = 0) \\ &= P(\tau_1 > T, \dots, \tau_m > T) \\ &= \mathbf{S}(T, \dots, T) \\ &= \bar{\mathbf{C}}(S_1(T), \dots, S_m(T)) . \end{aligned} \quad (13.12)$$

$$\begin{aligned} F_{\tilde{L}}(l_{max}) &= F_{\tilde{L}}\left(\sum_{i=1}^m \omega_i\right) \\ &= P(\tau_1 < T, \dots, \tau_m < T) \\ &= \mathbf{C}((1 - S_1(T)), \dots, (1 - S_m(T))) \\ &= \mathbf{C}(F_1(T), \dots, F_m(T)) . \end{aligned} \quad (13.13)$$

On considère l'événement suivant :  $k \leq m$  crédits du portefeuille survivent à l'horizon  $T$ . La probabilité de cet événement s'écrit :

$$P(\tau_1 > T, \dots, \tau_k > T, \tau_{k+1} > 0, \dots, \tau_m > 0) . \quad (13.14)$$

Si on désigne par  $l_{m-k}$  la perte qui survient lorsque  $k$  crédits du portefeuille survivent et que au plus  $m - k$  crédits font défaut, alors la probabilité de l'équation (13.14) est en fait la probabilité que la perte globale du portefeuille soit inférieure ou égale à  $l_{m-k}$  :

$$\begin{aligned} P(\tilde{L}(T) \leq l_{m-k}) &= P(\tau_1 > T, \dots, \tau_k > T, \tau_{k+1} > 0, \dots, \tau_m > 0) \\ &= \bar{\mathbf{C}}(S_1(T), \dots, S_k(T), 1, \dots, 1) \\ &= \bar{\mathbf{C}}_{1, \dots, k}(S_1(T), \dots, S_k(T)) ; \end{aligned} \quad (13.15)$$

où  $\bar{\mathbf{C}}_{1,\dots,k}$  est une marge à  $k$  dimensions de la copule de survie  $\bar{\mathbf{C}}$  des durées de survie.

L'équation (13.15) montre clairement la relation entre la copule des durées de survie et la distributions des pertes globales d'un portefeuille de crédits. Il est alors évident que la forme de la copule et ses propriétés auront un impact sur la mesure du capital économique destiné à couvrir le risque de crédit du portefeuille.

Si l'on considère deux modèles différents pour la dépendance des durées de survie  $\mathbf{C}_1 \succ \mathbf{C}_2$ . Dans le cas bivarié, GEORGES & AL [72] p. 9 montrent que si

$$\mathbf{C}_1 \succ \mathbf{C}_2 \Leftrightarrow \bar{\mathbf{C}}_1 \succ \bar{\mathbf{C}}_2 . \quad (13.16)$$

Dans ce cas, si  $F_{\bar{L}(T)}^1$  et  $F_{\bar{L}(T)}^2$  sont les fonctions de répartition de la perte globale impliquées respectivement par les copules  $\mathbf{C}_1$  et  $\mathbf{C}_2$ , on aura :

$$F_{\bar{L}(T)}^1 \geq F_{\bar{L}(T)}^2 . \quad (13.17)$$

Ceci a comme conséquence que le quantile utile pour le calcul du capital économique impliqué par la copule  $\mathbf{C}_1$  sera inférieur au quantile impliqué par  $\mathbf{C}_2$  :

$$q_{1-\alpha}^1 = F_{\bar{L}(T)}^1{}^{-1}(1-\alpha) \leq q_{1-\alpha}^2 = F_{\bar{L}(T)}^2{}^{-1}(1-\alpha) . \quad (13.18)$$

Néanmoins, l'implication (13.16) n'est pas vérifiée lorsque la dimension de la copule est supérieure à 2. Une autre propriété des copules de survie, à savoir la propriété de dépendance de queue, a une influence sur la forme de la distribution des pertes globales. En effet, on peut observer que la fonction de répartition des pertes globales  $F_{\bar{L}(T)}(l)$  est une fonction de la copule de survie à des points proches, en général, de 1. La valeur de  $F_{\bar{L}(T)}(l)$  sera d'autant plus grande que la dépendance de queue à droite de la copule de survie est importante ou que la dépendance de queue à gauche de la copule des durées de survies est importante.

La spécification de la fonction de survie jointe à l'aide des copules permet de donner une formulation analytique pour la distribution des pertes globales du portefeuille de crédits. Les mesures agrégées de risque sont des fonctions de la copule entre les durées de survie de telle manière qu'il devient possible de calculer les mesures marginales de risque induites par chaque nouvelle position de crédit. En conséquence, le choix de la copule aura un rôle majeur dans l'estimation du capital économique mais aussi dans l'évaluation des mesures de performance ajustées au risque en permettant de considérer le revenu et le risque induit par l'ajout d'un crédit à un portefeuille.

# Conclusion

La crise qui secoue les marchés financiers depuis l'été 2007 trouve son origine dans une bulle spéculative qui s'est formée dans le secteur immobilier aux États-Unis. Orchestré par les banques d'affaires, le processus de titrisation - technique financière qui consiste à regrouper des créances de même nature (prêts immobiliers, prêts aux étudiants, les crédits automobiles etc) en vue de les revendre en titres de créances de rang divers - a exporté cette bulle spéculative et l'a mondialisée. Ces produits titrisés ont en effet été largement vendus aux investisseurs puisqu'ils offraient des rendements intéressants tout bénéficiant des notes avantageuses décernées par les agences de notation externes.

En cette période de turbulence sur les marchés financiers, les départements de gestion des risques des grandes banques sont montrés du doigt. Les échecs en matière de gestion des risques se sont révélés extrêmement coûteux, même pour les banques les plus performantes et les mieux capitalisées du monde. On peut d'ores et déjà affirmer que ces échecs proviennent d'une mésestimation des risques associés à certains produits financiers au centre de la crise : les actifs adossés à des crédits hypothécaires «subprime», les activités liées aux CDO et autres produits titrisés. En effet, la cause principale des difficultés rencontrées par les grandes banques était une sous-couverture en capital pour ces positions si bien que lorsque le marché a entamé son effondrement en juillet 2007, la faible dotation en capital sur ces positions a été épuisée en quelques semaines contraignant les banques à se recapitaliser d'urgence.

Malgré les réponses apportées par l'accord de Bâle II qu'on a discuté au chapitre 2, la mesure du risque de crédit et la détermination concomitante du capital destiné à couvrir le risque sont aujourd'hui au centre des débats qui agitent les autorités de réglementation ainsi que les institutions financières. En proposant de calculer les fonds propres nécessaires sur la base des modèles internes, l'accord de Bâle II, a voulu mettre en accord les méthodes de gestion du risque de crédit avec les progrès récents des modèles de risque de crédit. Bâle II a alors consacré véritablement le capital économique comme outil de mesure du risque de crédit dans les institutions financières. Cependant, les pertes essuyées par les banques ces derniers mois posent à nouveau la question de savoir comment calculer la dotation en capital adéquate pour les portefeuilles des crédits. Si la communauté bancaire partout dans le monde s'accorde sur le fait que le capital économique reste une approche adéquate, elle s'interroge sur les modèles qui ont conduit à une telle sous évaluation du risque de crédit de certaines positions comme les CDO.

Comme on l'a vu au chapitre 3 de ce travail, la modélisation du risque de crédit et la détermination du capital économique se font en deux étapes. La première étape est l'estimation du risque au niveau individuel. Le risque au niveau individuel est principalement déterminé par la probabilité de défaut donnée par les agences de notation à travers les ratings qu'ils octroient aux positions individuelles. L'accord de Bâle II a en quelque sorte consacré le rôle prudentiel des agences de notation externes dans le calcul des fonds propres réglementaires si bien que les agences de notation externes ont acquis un ascendant que les faits tendent aujourd'hui à remettre en cause. En plus des ratings, deux approches principales quantitatives pour la modélisation de risque de crédit au niveau des positions individuelles ont été développées relativement récemment. Ces deux approches, qui sont présentées dans la deuxième partie de cette thèse sont utiles dans la mesure où elles présentent une explication économique du risque de défaut et offrent une intuition pour la modélisation de la dépendance des défauts.

La deuxième et plus délicate étape est la modélisation de la dépendance des défauts. En effet, les pertes dues aux défauts individuels ne peuvent être considérées de manière indépendante mais doivent être étudiées conjointement car elles répondent en même temps aux mêmes facteurs de risque. Les modèles de risque de crédit ont, à ce jour, abordé la dépendance des défauts à l'aide des mesures de corrélation linéaire. Cette thèse a proposé de privilégier l'utilisation des fonctions copules pour modéliser la dépendance des défauts. Les fonctions copules décrites au chapitre 8 permettent la modélisation indépendante des distributions marginales et de la structure de dépendance entre variables aléatoires. Plusieurs raisons expliquent la popularité grandissante des fonctions copules parmi les chercheurs et praticiens en finance. La principale raison est que le concept de dépendance capturé par une fonction copule est bien plus général que le concept de la corrélation linéaire et capture tout aussi bien les relations non linéaires entre les variables. De plus, plusieurs études ont mis en évidence les phénomènes des queues épaisses observées empiriquement sur les distributions multivariées des rendements financiers.

Les copules, présentées dans la troisième partie de cette thèse, permettent justement de modéliser des distributions multivariées de pertes sur les actifs financiers ayant des queues épaisses de manière à rendre les modèles plus prédictifs de pertes importantes comme celles observées sur les CDO ces derniers mois.

Dans la dernière partie, cette thèse a proposé une application concrète des fonctions copules dans la modélisation de la dépendance en risque de défaut. On a voulu montrer l'importance du choix de la copule dans la détermination des mesures de risque agrégées pour les deux types d'approches quantitatives du risque de défaut en modélisant successivement la dépendance des défauts par la copule normale, la copule de Clayton, la copule de Gumbel et la copule de Student. Selon le critère d'information d'Akaike, on a comparé ces quatre modèles et il est apparu que malgré l'asymétrie caractéristique des distributions jointes, la copule de Student la mieux indiquée pour modéliser la dépendance compte tenu des données à dispositions dans les exemples d'application.

Dans le cas de l'approche structurelle du risque de défaut, on a montré au chapitre 12 que la probabilité jointe de défaut et le capital économique dépendent directement de la copule choisie pour modéliser la dépendance entre les variables latentes. On a vu dans un exemple d'application que la distribution normale n'est en général pas rejetée pour modéliser les distributions marginales des rendements. Cependant, la distribution empirique jointe des rendements présente des queues significativement épaisses si bien qu'une distribution normale multivariée est inadaptée pour la modéliser en particulier pour des portefeuilles à forte concentration.

Au chapitre 13, on a construit une fonction de survie multidimensionnelle, en modélisant les survies marginales par une distribution exponentielle et en choisissant pour la dépendance, la copule de survie entre les spreads des CDS. Ceci est une manière particulièrement intuitive et innovante de modéliser les défauts d'un portefeuille de permet le calcul de probabilités jointe de survie à différents horizons. En effet, les caractéristiques uniques des CDS, la croissance exponentielle de ce marché au courant de ces dernières années ont fait du marché des CDS un domaine particulier d'intérêt pour l'évaluation du niveau de risque ainsi que des dépendances des risques pour les crédits cotés. On est parti de l'idée que puisque le paramètre des distributions marginales durées de survie est calibré à partir des spreads des CDS, on peut faire l'hypothèse que l'unique source de dépendance entre les durées de survie provient de la dépendance entre les spreads. Cette hypothèse d'indépendance conditionnelle signifie en fait que les facteurs de risque communs influencent les spreads, une fois ces spreads donnés, les facteurs de risque spécifiques influençant les durées de survies deviennent indépendants. L'exemple d'application a révélé que si distributions marginales des spreads peuvent être modélisés par une distribution normale, la distribution jointe des spreads présente des queues épaisses. Une copule normale serait par conséquent inappropriée pour modéliser la dépendance des spreads.

Une propriété des copules s'est avérée primordiale pour le calcul des mesure de risque agrégée : la dépendance de queue. En effet, la gestion des risques, qui s'intéresse surtout aux queues des distributions s'attache surtout à détecter les comportement joints extrêmes des variables financières. En conséquence, comme le montrent les chapitres 12 et 13, la mesure de risque du portefeuille est d'autant plus grande que la copule choisie possède une importante dépendance de queue à gauche. Quelle que soit l'approche choisie pour modéliser le risque de défaut, l'emploi d'une copule normale a tendance à fortement sous-estimer les mesures de risque agrégées. Il ressort de ce travail, que l'utilisation de copule alternatives, en particulier la copule de Student, permettrait d'éviter une sous évaluation du risque des portefeuilles de crédits. Or, les crises, comme celle que les marchés financiers traversent aujourd'hui trouvent leur origine dans une sous-évaluation du risque. La modélisation de la dépendance par des fonctions copules prenant en compte la dépendance de queue permettrait aux institutions financières d'évaluer leurs niveau de capital de manière plus adéquate, ce qui conduirait à un renforcement de la stabilisation du système financier.

Malgré les progrès continuels en la matière, la modélisation du risque de crédit en particulier de la dépendance en risque de crédit est encore dans son enfance. Les

fonctions copules ouvrent une voie intéressante mais il est nécessaire de poursuivre le développement technique des modèles, de disposer des meilleures données pour les calibrer et d'élaborer des nouvelles méthodes permettant d'en améliorer la précision. De plus, aujourd'hui, plusieurs approches de type *top-down* de tarification ajustée pour le risque reposent sur l'existence d'un modèle assurant le lien entre crédits individuels et capital économique. La modélisation de la dépendance des défauts par les fonctions copules est indiquée pour ces approches si bien qu'une voie de recherche future consisterait à étudier dans quelle mesure le choix de la copule a une influence sur les contributions marginales au risque de chaque nouvelle position ajoutée à un portefeuille de crédits.

# Annexes





## Annexe A

# Matrice de transition de Standard & Poor's

«Transition rates compare issuer ratings at the beginning of a time period with ratings at the end of the period. To compute one-year rating transition rates by rating category, the rating on each entity at the end of a particular year was compared with the rating at the beginning of the same year. An issuer that remained rated for more than one year was counted as many times as the number of years it was rated. For instance, an issuer continually rated from the middle of 1984 to the middle of 1991 would appear in the six consecutive one-year transition matrices from 1985 to 1990. All 1981 static pool members still rated on Dec. 31, 2003, had 23 one-year transitions, while companies first rated between Jan. 1, 2002, and Dec. 31, 2002 had only one. Each one-year transition matrix displays all rating movements between letter categories from the beginning of the year through year-end.»(see Standard & Poor's [25] p.14).

From/To	AAA	AA+	AA	AA-	A+	A	A-	BBB+	BBB	BBB-	BB+	BB	BB-	B+	B	B-	CCC/C	D	N.R.
AAA	88.07	3.67	2.62	0.51	0.28	0.17	0.14	0.06	0.09	0	0.03	0.03	0	0	0	0	0	0	4.33
AA+	2.03	78.81	10.4	3.14	0.39	0.65	0.2	0.07	0.13	0.07	0.07	0	0	0.07	0	0	0	0	3.99
AA	0.61	1.22	82.09	7.48	2.62	1.51	0.34	0.47	0.18	0.05	0.05	0.02	0.02	0.02	0	0.02	0.05	0	3.23
AA-	0.05	0.24	2.91	78.79	9.22	3.06	0.69	0.26	0.19	0.1	0.05	0	0	0.05	0.12	0	0	0.02	4.25
A+	0	0.06	0.61	3.79	79.76	7.99	2.5	0.57	0.35	0.09	0.06	0.15	0.02	0.07	0.06	0.02	0.02	0.06	3.85
A	0.05	0.09	0.45	0.71	4.61	78.09	6.12	3.16	1.09	0.36	0.19	0.19	0.12	0.12	0.03	0.01	0.01	0.05	4.55
A-	0.1	0.04	0.1	0.32	0.87	6.27	75.06	8.33	2.89	0.71	0.2	0.22	0.14	0.12	0.02	0.02	0.08	0.04	4.45
BBB+	0.02	0.04	0.04	0.11	0.39	1.6	6.21	73.34	8.66	2.77	0.54	0.58	0.19	0.41	0.19	0.02	0.09	0.32	4.44
BBB	0.02	0.02	0.09	0.06	0.28	0.66	1.43	5.64	75.57	5.92	1.83	1.11	0.49	0.32	0.26	0.04	0.09	0.34	5.82
BBB-	0.05	0	0.08	0.15	0.15	0.41	0.38	1.72	7.17	71.62	5.9	2.84	1.14	0.68	0.38	0.3	0.56	0.46	6.01
BB+	0.12	0	0	0.12	0.08	0.28	0.32	0.64	2.74	9.51	65.31	6.04	3.46	1.49	0.93	0.16	0.81	0.64	7.33
BB	0	0	0.06	0.03	0	0.19	0.12	0.19	1.09	2.86	6.15	66.38	7.24	3.08	1.8	0.5	0.96	1.15	8.2
BB-	0	0	0	0.02	0.05	0.02	0.15	0.19	0.34	0.61	2.31	6.87	65.34	8.02	2.96	1.21	1.19	1.97	8.74
B+	0	0.02	0	0.07	0	0.05	0.13	0.08	0.08	0.15	0.32	1.39	5.04	68.89	6.15	2.39	2.44	3.19	9.61
B	0	0	0.07	0	0	0.18	0.18	0.11	0.14	0.04	0.4	0.61	1.73	6.68	59.08	5.12	5.88	8.99	10.79
B-	0	0	0	0	0.08	0.08	0.08	0.15	0.08	0.08	0.3	0.23	0.38	3.4	6.28	54.54	10.29	13.01	11.04
CCC/C	0.08	0	0	0	0.08	0	0.17	0.34	0.17	0	0.17	0.34	0.85	1.36	2.54	5.42	46.27	30.85	11.36

TAB. A.1 – Probabilités moyennes historiques de transition en % (1981-2003) Source : Standard &amp; Poor's [25]

## Annexe B

### Diagrammes de dispersion des log-rendements annualisés

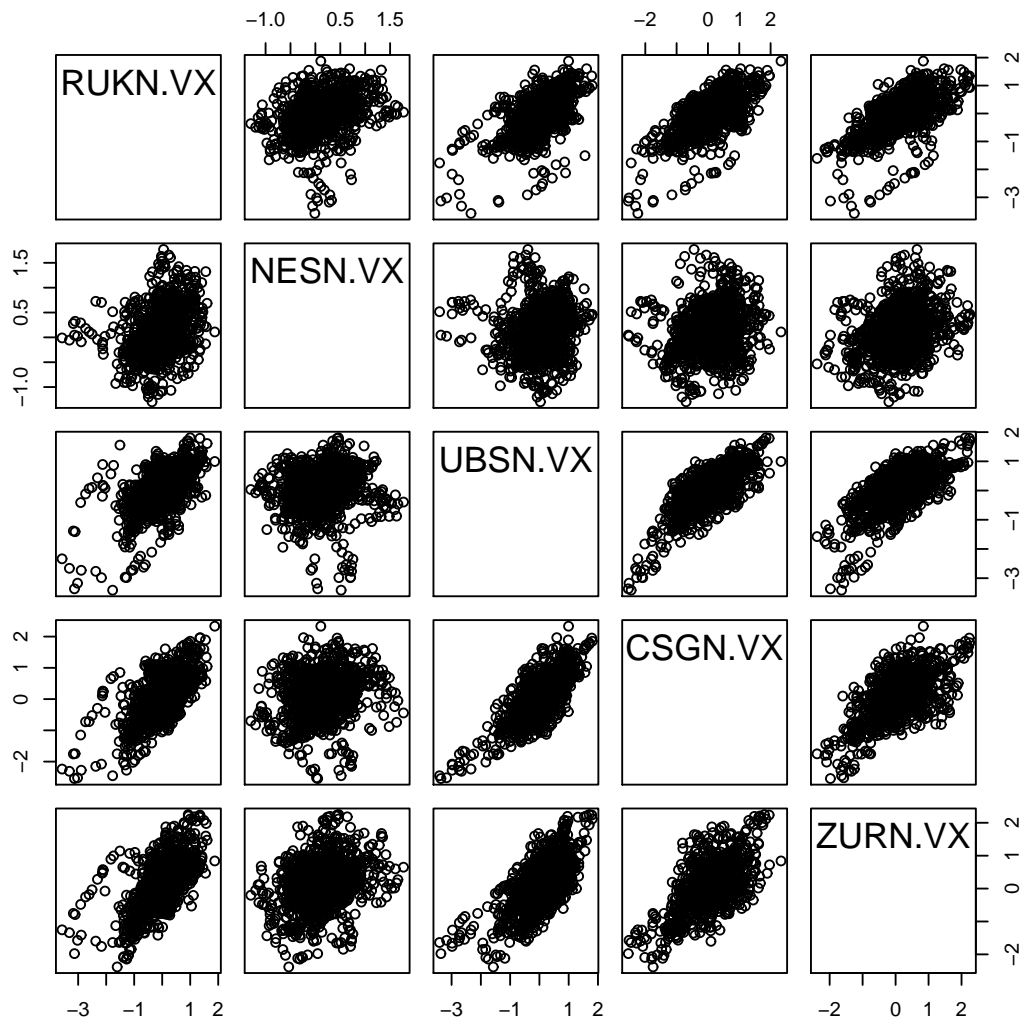


FIG. B.1 – Matrice des diagrammes de dispersion des log-rendements annualisés pour le portefeuille CH

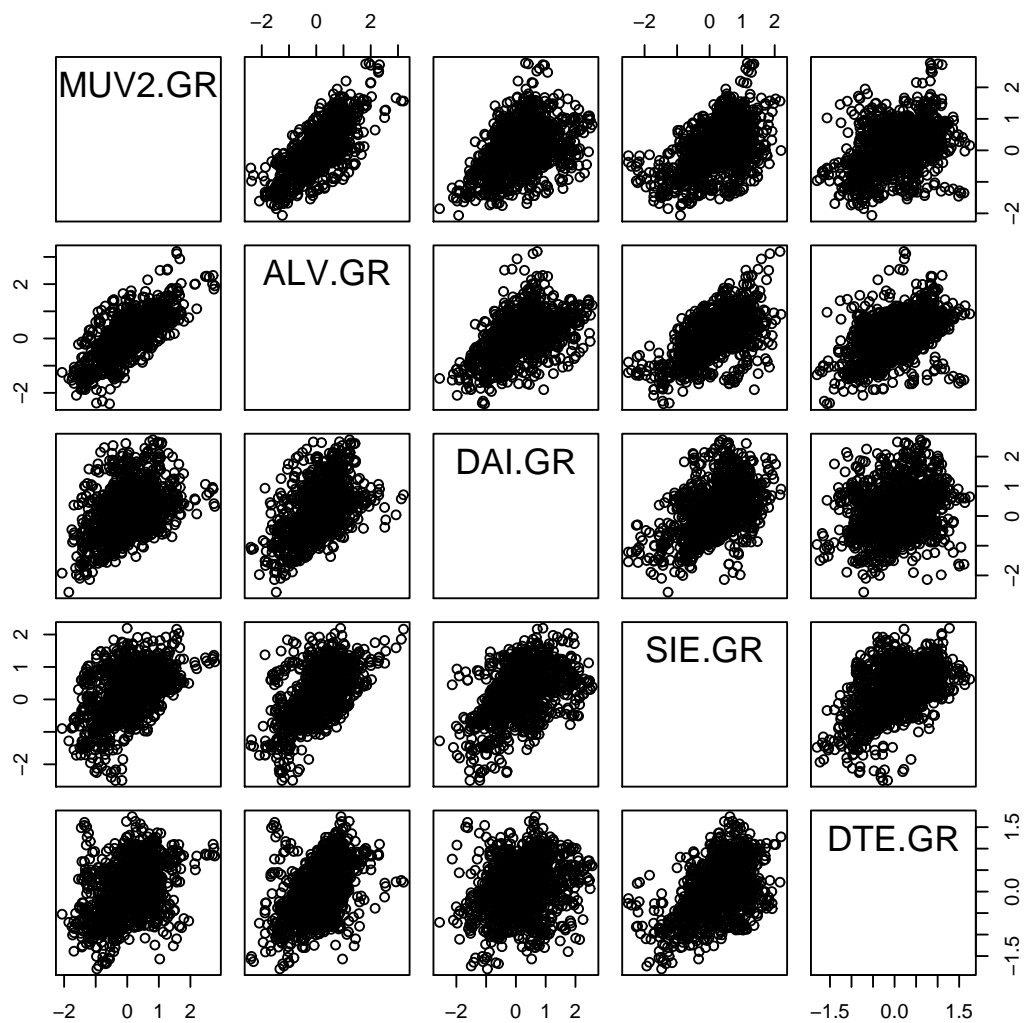


FIG. B.2 – Matrice des diagrammes de dispersion des log-rendements annualisés pour le portefeuille DE

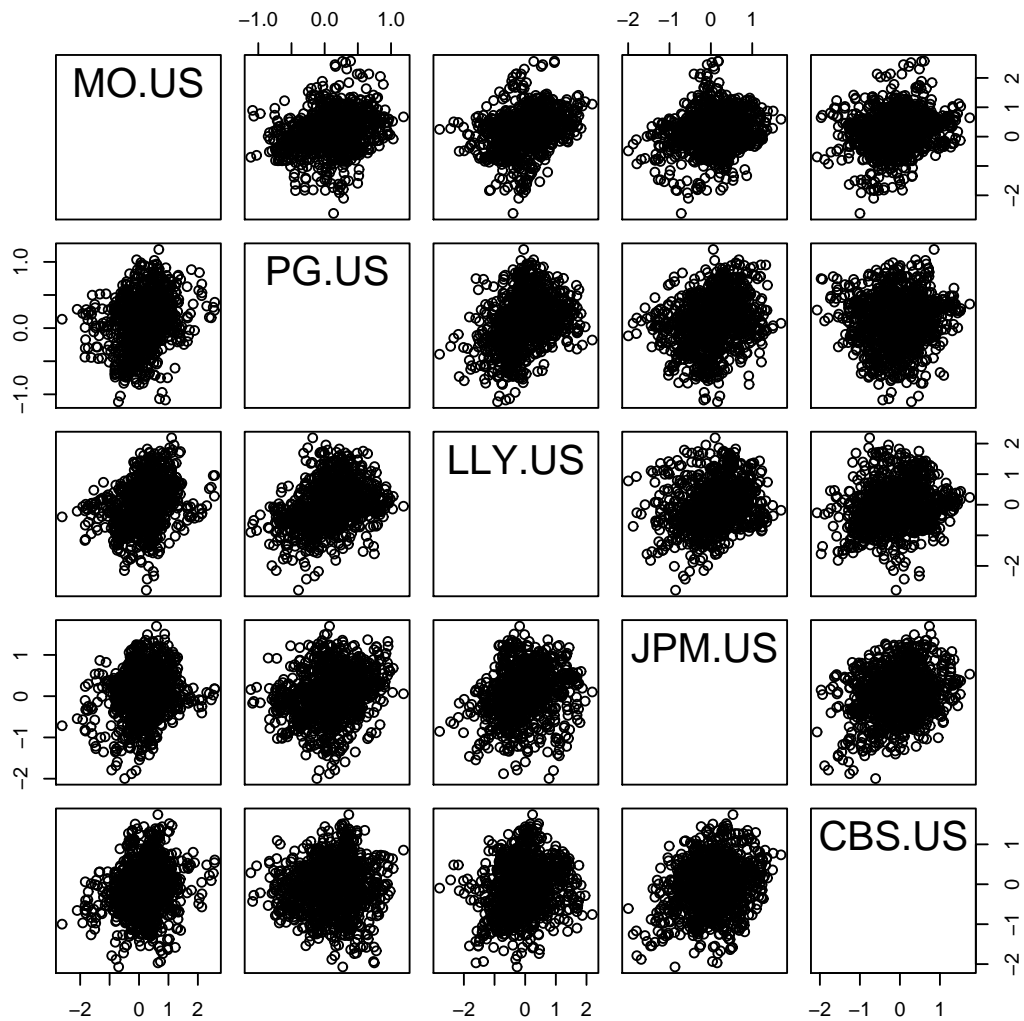


FIG. B.3 – Matrice des diagrammes de dispersion des log-rendements annualisés pour le portefeuille US

## Annexe C

### Diagrammes de dispersion des spreads des CDS

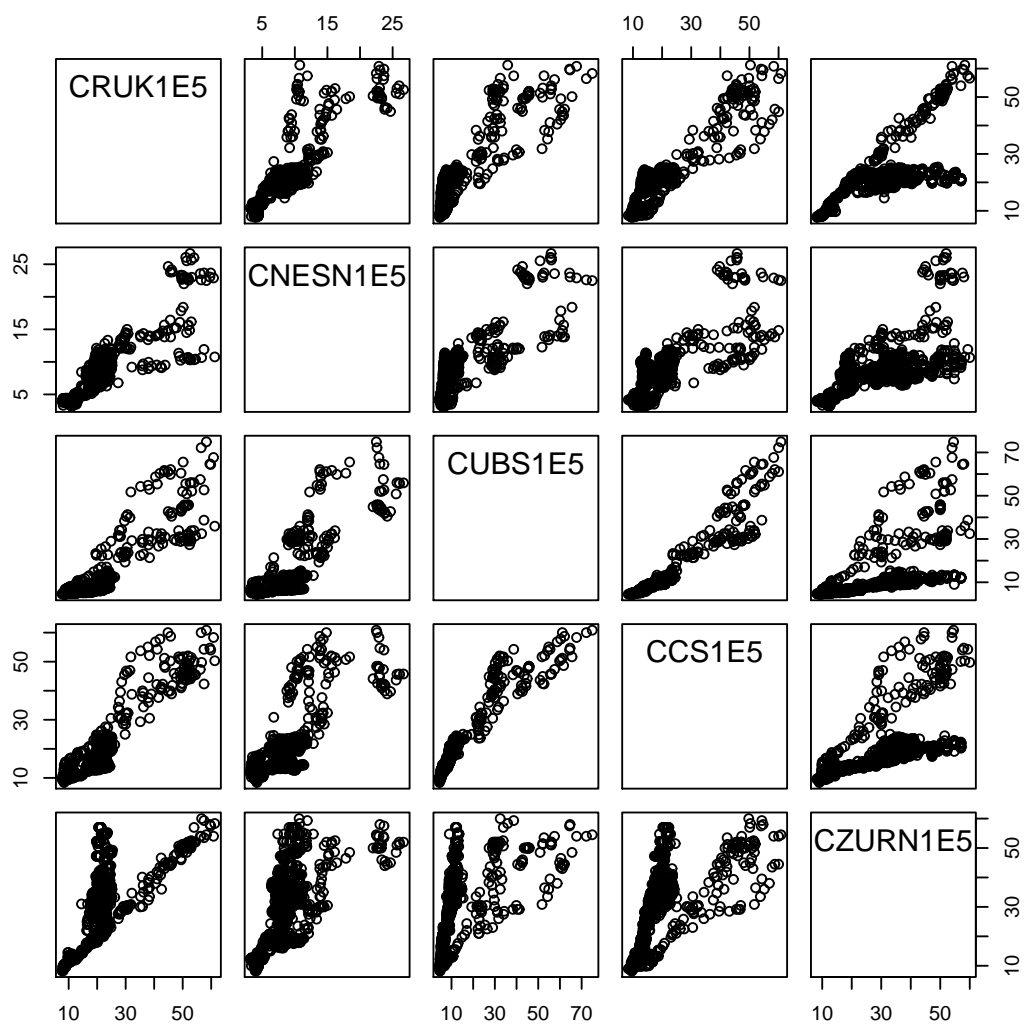


FIG. C.1 – Matrice des diagrammes de dispersion des spreads des CDS pour le portefeuille CH



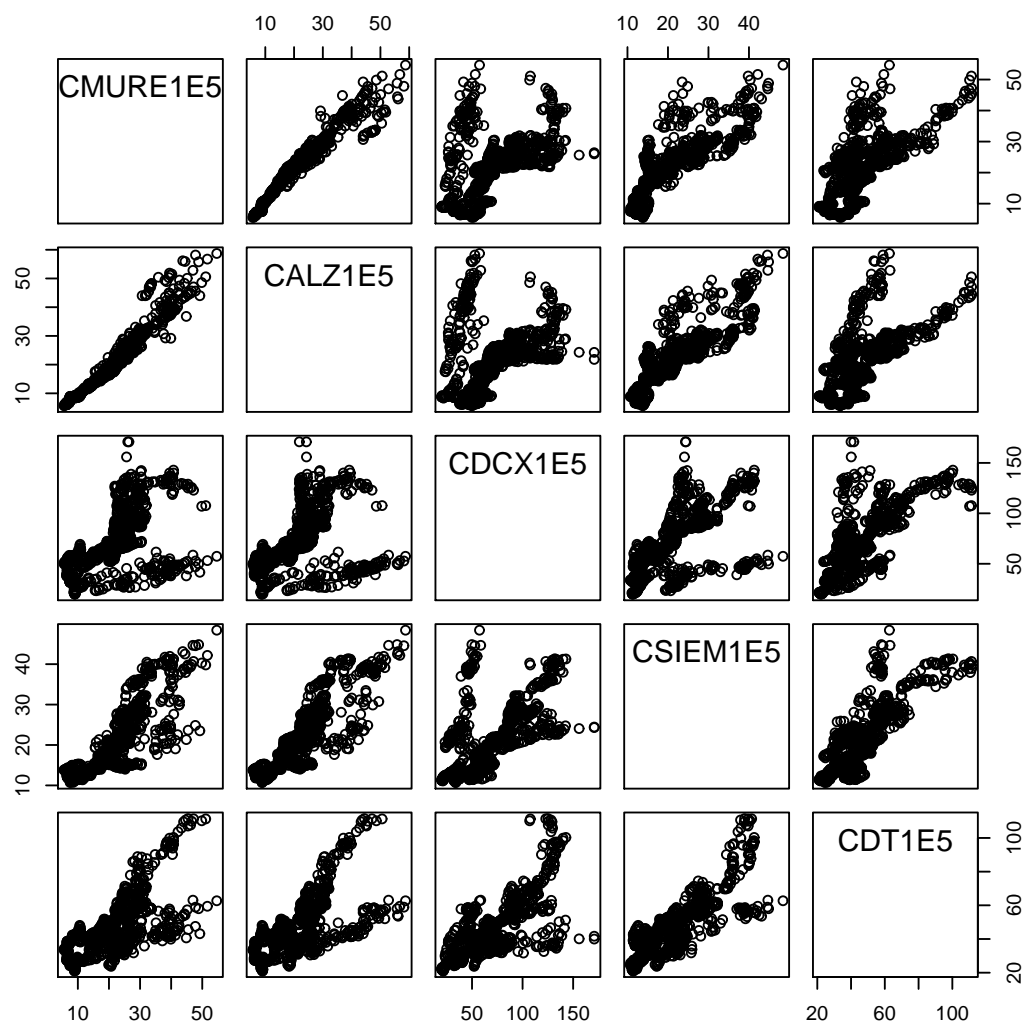


FIG. C.2 – Matrice des diagrammes de dispersion des spreads des CDS pour le portefeuille DE

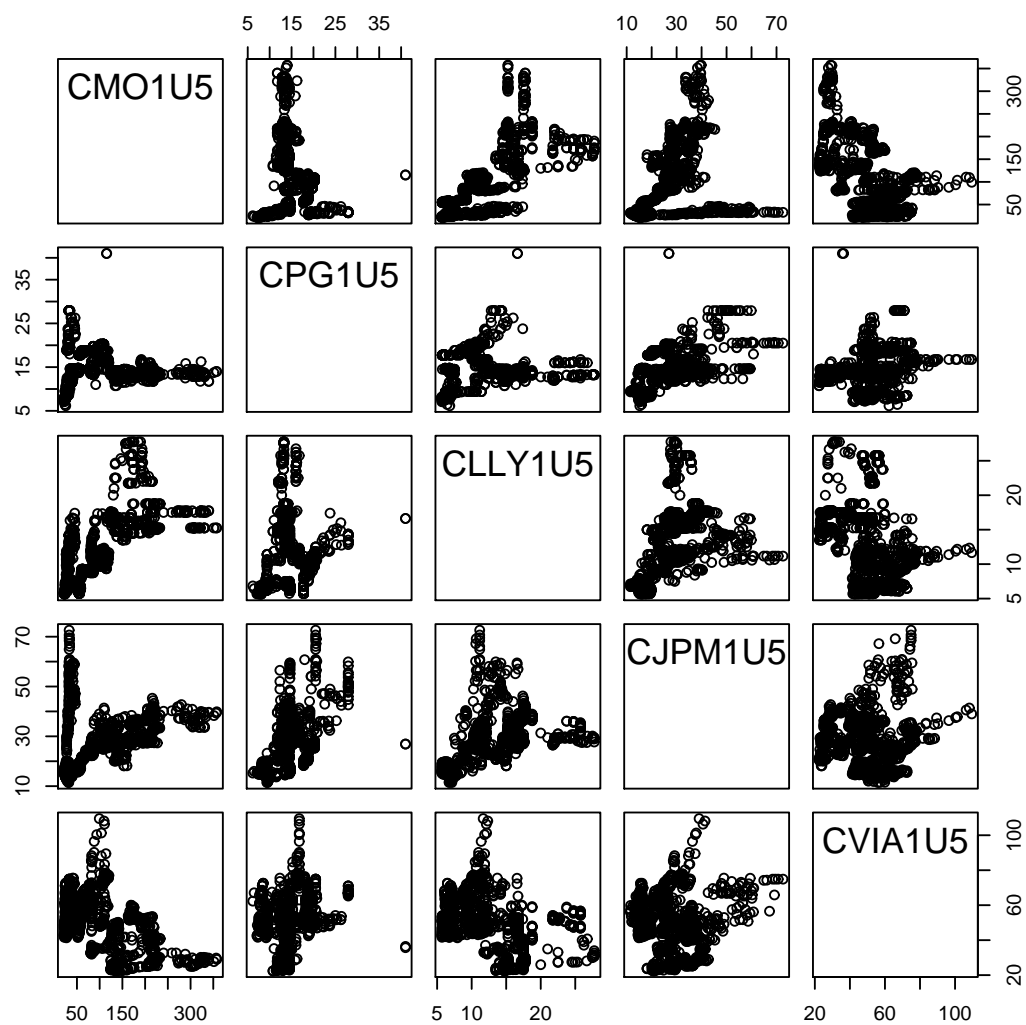


FIG. C.3 – Matrice des diagrammes de dispersion des spreads des CDS pour le portefeuille US

# Bibliographie

- [1] AMMER, J., PACKER, F. : How Consistent are Credit Ratings ? A Geographic and Sectoral Analysis of Default Risk. *Journal of Fixed Income*, Vol. 10, p. 24–30, December 2000.
- [2] ARTZNER, P., DELBAEN, F. : Default Risk Insurance and Incomplete Markets. *Mathematical Finance*, Vol. 5, p. 187–195, 1995.
- [3] ARVANITIS, A., GREGORY, J., LAURENT, J.-P. : Building Models for Credit Spreads. *Journal of Derivatives*, Vol. 6(3), p. 27–43, 1999.
- [4] BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION : Risk Management Guidelines for Derivatives, 1994.
- [5] BASLE COMITEE ON BANKING SUPERVISION : The Internal Ratings-Based Approach, Supporting Document to the New Basle Capital Accord, Consultative Document. Online in Internet : URL : <http://www.bis.org/publ/bcbsca10.pdf>, January 2001.
- [6] BASLE COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION : International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards. Online on Internet : URL : <http://www.bis.org/publ/bcbsc111.pdf> [12.2004], July 1988.
- [7] BASLE COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION : Core Principles for Effective Banking Supervision. Online in Internet : URL : <http://www.bis.org/publ/bcbs30a.pdf>, Sep. 1997.
- [8] BASLE COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION : Basel II : International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards : a Revised Framework. Online on Internet : URL : <http://www.bis.org/publ/bcbs107.htm> [12.2004], June 2004.
- [9] BASLE COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION : The New Basle Capital Accord - Second Consultative Document. Online on Internet : URL : <http://www.bis.org/publ/bcbsca03.pdf> [12.2204], January 2001.
- [10] BASLE COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION : Working Paper on the Regulatory Treatment of Operational Risks. Online on Internet :URL : [http://www.bis.org/publ/bcbs\\_wp8.pdf](http://www.bis.org/publ/bcbs_wp8.pdf) [12.2004], september 2001.
- [11] BENNINGA, S. : Financial Modelling. The MIT Press, 1999.
- [12] BLACK, F., COX, J. : Valuing corporate securities. *Journal of Finance*, Vol. 31, p. 351–367, 1976.

- [13] BLACK, F., SCHOLES, M. : The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, Vol. 81, p. 637–659, 1973.
- [14] BLANCO, R., BRENNAN, S., MARSH, I. : An Empirical Analysis of the Dynamic Relationship between Investment Grade Bonds and Credit Default Swaps. Working Paper, Bank of England, May 2003.
- [15] BLUHM, C., OVERBECK, L., WAGNER, C. : An Introduction to Credit Risk Modeling. Chapman and Hall, London, 2003.
- [16] BOUYÉ, E., DURRLEMAN, V., NIKEGHBALI, A., RIBOULET, G., RONCALLI, T. : Copulas for finance - a reading guide and some applications. Online on Internet : URL : <http://gro.creditlyonnais.fr/content/wp/copula-survey.pdf>, March 2000.
- [17] BOWERMAN, B., O'CONNELL, R. : Applied Statistics. Irwin, Chicago, 1997.
- [18] BRACHINGER, H. : From Variance to Value at Risk : A Unified Perspective on Standardized Risk Measures. In : Classification in the Information Age, p. 91–99, Springer, Berlin, 1999.
- [19] BRACHINGER, H. : Measurement of Risk. In : U., D. (Hg.) Optimization and Operations Research, Encyclopedia of Life Support Systems (EOLSS), p. 1119–1137, United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization (UNESCO), 2002.
- [20] BRACHINGER, H., EMMENEGGER, J. : Statistique pour économistes : Calcul de Probabilité. Université de Fribourg, 2005.
- [21] BRACHINGER, H., WEBER, M. : Risk as a primitive : a survey of measures of perceived risk. *OR Spektrum*, Vol. 19(4), p. 235–250, 1997.
- [22] BRADLEY, B., TAQQU, M. : Financial Risk and Heavy Tails. In : Handbook of Heavy-tailed Distributions in Finance, North Holland, 2003.
- [23] BREYMAN, W., DIAS, A., EMBRECHTS, P. : Dependence structure for multivariate high frequency data in finance. *Quantitative Finance*, Vol. 3, p. 1–14, 2003.
- [24] BROOKS, B. : Corporate Defaults in 2003 : Recede From Recent Highs. <http://www2.standardandpoors.com>, 2004.
- [25] BROOKS, B. : Corporate Defaults in 2003 Recede From Recent Highs. Online on Internet <http://www2.standardandpoors.com>, 2004.
- [26] BURHOUSE, S., FEID, J., FRENCH, G., LIGON, K. : Basel and the Evolution of Capital Regulation : Moving Forward, Looking Back. Online on Internet : URL : <http://www.fdic.gov/bank/analytical/fyi/2003/011403fyi.html> [12.2004], January 2003.
- [27] CARIBONI, J., SCHOUTENS, W. : Jumps in Intensity Models. Online on Internet : <http://www.financialmathematics.com>, May 2006.

- [28] CARTY, L., FONS, J. : Measuring Changes in Corporate Credit Quality. *The Journal of Fixed Income*, Vol. 4, p. 27–41, June 1994.
- [29] CHAN-LAU, J., MATHIESON, D., YAO, J. : Extreme Contagion in Equity Markets. Online on Internet : URL : <http://www.imf.org/External/Pubs/FT/staffp/2004/02/pdf/chanlau.pdf>, May 2002. IMF Staff Papers.
- [30] CHERUBINI, U., LUCIANO, E., VECCHIATO, W. : Copula Methods in Finance. John Wiley & Sons, Chichester, England, 2004.
- [31] CLAYTON, D. : A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familia tendency in chronic disease incidence. *Biometrika*, Vol. 65, p. 141–151, 1978.
- [32] COLES, S., CURRIE, J., TAWN, J. : Dependence Measures for Extreme Value Analyses, 1999. Working Paper, Lancaster University.
- [33] COOK, R., JOHNSON, M. : A Family of Distributions for modelling Non-Elliptical Symmetric Multivariate Data. *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. 43, p. 210–218, 1981.
- [34] COSSIN, D., HRICKO, T. : An Empirical Investigation of Credit Default Swaps. In : EFMA Proceedings, June 2001.
- [35] COSSIN, D., PIROTTE, H. : How Well Do Classical Credit Risk Pricing Models Fit Swap Transaction Data ? *European Financial Management Journal*, Vol. 4(1), p. 65–77, 1998.
- [36] COX, D., OAKES, D. : Analysis of Survival Data. Chapman & Hall, London, 1984.
- [37] CROSBIE, P., BOHN, J. : Modeling Default Risk. Online in Internet : <http://www.moodyskmv.com/research/ModelingDefaultRisk.pdf>, December 2003.
- [38] CROUHY, M., GALAI, D., MARK, R. : Risk Management. McGraw-Hill, New York, 2001.
- [39] D. AUNON-NERIN, T. H., D. COSSIN, HUANG, Z. : Exploring for the Determinants of Credit Risk in Credit Default Swap Transaction Data : Is Fixed-Income Markets' Information Sufficient to Evaluate Credit Risk ? Online on Internet : <http://www.fame.ch/library/EN/RP65.pdf>, December 2002. Working Paper.
- [40] DAS, S., FREED, L., GENG, G., KAPADIA, N. : Correlated Default Risk. <http://cisdm.som.umass.edu/research/pdffiles/correlateddefaultrisk.pdf>, 2002. Working Paper, Santa Clara University.
- [41] DE SERVIGNY, A. : Le risque de crédit : Nouveaux enjeux bancaires. Dunod, Paris, 2.ed Ed., 2003.
- [42] DE SERVIGNY, A., RENAULT, O. : Measuring and Managing Credit Risk. McGraw-Hill, New York, 2004.

- [43] DEHEUVELS, P. : Caractérisation complète des lois extrêmes multivariées et de la convergence des types extrêmes. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, Vol. 23(3-4), p. 1–36, 1978.
- [44] DEHEUVELS, P. : La fonction de dépendance empirique et ses propriétés . Un test non paramétrique d'indépendance. *Académie royale de Belgique - Bulletin de la Classe des Sciences*, Vol. 65, p. 274–292, 1979.
- [45] DEMARTA, S., MCNEIL, A. : The t copula and related copulas. *International Statistical Review*, p. 111–129, 2005.
- [46] DIETSCH, M., PETEY, J. : Mesure et gestion du risque de crédit dans les institutions financières. Revue Banque Édition, Paris, France, 2003.
- [47] DUFFIE, D. : Dynamic Asset Pricing Theory. Princeton University Press, 1992.
- [48] DUFFIE, D., PAN, J. : An overview of value at risk. *Journal of Derivatives*, Vol. 4, p. 7–49, 1997.
- [49] DUFFIE, D., SINGLETON, K. : An Econometric Model of the Term Structure of Interest Rate Swap Yields. *Journal of Finance*, Vol. 52, p. 1287–1321, 1997.
- [50] DUFFIE, D., SINGLETON, K. : Modeling term structure of defaultable bonds. *Review of Financial Studies*, Vol. 12, p. 687–720, 1999.
- [51] DUFFIE, D., SINGLETON, K. : Credit Risk : Pricing, Measurement, and Management. Princeton University Press, 2003.
- [52] DURRLEMAN, V., NIKEGHBALI, A., RONCALLI, T. : A simple transformation of copulas, 2000. Working Paper, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, Paris. Online in Internet : URL : <http://gro.creditlyonnais.fr/content/wp/copula-transform.pdf>.
- [53] DURRLEMAN, V., NIKEGHBALI, A., RONCALLI, T. : Which copula is the right one?, 2000. Working Paper, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, Paris. Online in Internet : URL : <http://gro.creditlyonnais.fr/content/wp/copula-choice.pdf>.
- [54] ELTON, E., GRUBER, M. : Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. John Wiley & Sons, New York, 5 Ed., 1995.
- [55] EMBRECHTS, P. : Extreme Value Theory : Potential and Limitations as an Integrated Risk Management Tool. Working Paper, ETH Zürich, 2000.
- [56] EMBRECHTS, P., KLÜPPELBERG, C., MIKOSCH, T. : Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. In : Application of Mathematics - Stochastic Modelling and Applied Probability, Vol. 33, Springer, Berlin, 1997.
- [57] EMBRECHTS, P., LINDSKOG, F., MCNEIL, A. : Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management. Online on Internet : URL : <http://www.math.ethz.ch/~baltes/ftp/copchapter.pdf>, 09 2001.
- [58] EMBRECHTS, P., MCNEIL, A., STRAUMANN, D. : Correlation and Dependence in Risk Management : Properties and Pitfalls. Working Paper, Department of Mathematics, ETH, Zürich. Online in Internet :

- URL : <http://www.risklab.ch/ftp/papers/CorrelationPitfalls.pdf> or  
 URL : <http://www.math.ethz.ch/~strauman/preprints/pitfalls.pdf>,  
 July 1999.
- [59] EVERITT, B., DUNN, G. : Applied Multivariate Data Analysis. Edward Arnold, London, 1 Ed., 1991.
  - [60] FANG, K., KOTZ, S., NG, K. : Symmetric multivariate and related distributions. In : Monographs on Statistics and Applied Probability, Vol. 36, Chapman and Hall, London, 1990.
  - [61] FOATA, D., FUCHS, A. : Processus Stochastiques : Processus de Poisson, chaînes de Markov et martingales. Dunod, Paris, 2002.
  - [62] FORTIN, I., KUZMICS, C. : Tail-dependence in Stock-return pairs. *International Journal of Intelligent Systems in Accounting, Finance and Management*, Vol. 11(2), p. 89–107, April/June 2002.
  - [63] FOULCHER, S., GOURIEROUX, C., TIOMO, A. : Term Structure of Default and Ratings. *Insurance and Risk Management*, Vol. 72, p. 207–276, 2004.
  - [64] FRANK, M. : On the simultaneous associativity of  $F(x, y)$  and  $x + y - F(x, y)$ . *Aequationes Mathematicae*, Vol. 19, p. 194–226, 1979.
  - [65] FRÉCHET, M. : Généralisations du théorème des probabilités totales. *Fundamenta Mathematicae*, Vol. 25, p. 379–397, 1935.
  - [66] FRÉCHET, M. : Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données. *Annales de l'Université de Lyon, Section A*, Vol. 9, p. 53–77, 1951.
  - [67] FREES, E., VALDEZ, E. : Understanding relationships using copulas. *Norht American Actuarial Journal*, Vol. 2, p. 1–25, 1998.
  - [68] GAGLIARDINI, P., GOURIEROUX, C. : Stochastic Migration Models with Application to Corporate Risk. *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 3(2), p. 188–226, 2005.
  - [69] GALAMBOS, J., KOTZ, S. : Characterizations of probability distributions : a unified approach with an emphasis on exponential and related models. Springer-Verlag, Berlin, 1978.
  - [70] GENEST, C., MACKAY, J. : Copules Archimédiennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont données. *Canadian Journal of Statistics*, Vol. 14, p. 145–159, 1986.
  - [71] GENEST, C., RIVEST, L.-P. : Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 88, p. 1034–1043, September 1993.
  - [72] GEORGES, P., LAMY, A., NICOLAS, E., QUIBEL, G., RONCALLI, T. : Multivariate Survival Modelling : A Unified Approach with Copulas. Online on Internet : URL : <http://gro.creditlyonnais.fr/content/wp/copula-survival.pdf>, 2001.

- [73] GESKE, R. : The valuation of corporate liabilities as compound options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 12(4), p. 541–552, 1977.
- [74] GLAUSER, M. : Messung von Marktrisiken unter Verwendung von Copulafunktionen : eine empirische Studie für den Schweizer Aktienmarkt. Thèse, Université de Fribourg, Suisse, Online on Internet : URL : <http://ethesis.unifr.ch/theses/GlauserM.pdf> [12.2004], 2003.
- [75] GORDY, M. : A Comparative Anatomy of Credit Risk Models, 1998.
- [76] GOURIEROUX, C., JASIAK, J. : Financial Econometrics. Princeton University Press, Princeton, 2001.
- [77] GOURIEROUX, C., MONFORT, A., POLIMENIS, V. : Affine Models for Credit Risk Analysis. *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 4, p. 494–530, 2006.
- [78] GRAIS, B. : Méthodes statistiques. Dunod Bordas, Paris, 1977.
- [79] GREENE, W. : Econometric Analysis. Prentice Hall, 4 Ed., 2000.
- [80] GUMBEL, E. : Bivariate exponential distributions. *Journal of American Statistical Association*, Vol. 55, p. 698–707, 1960.
- [81] GUMBEL, E. : Bivariate logistic Distributions. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 56(4), p. 335–349, 1961.
- [82] GUP, B. E. : The New Basel Capital Accord. South-Western Educational Publishing, 2004.
- [83] GUPTON, G., FINGER, C., BHATIA, M. : CreditMetrics - Technical Document. Techn. Ber., J.P. Morgan, 1997.
- [84] HARISSON, J., KREPS, D. : Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic theory*, Vol. 20, p. 381–408, 1979.
- [85] HARRISON, J., PLISKA, S. : Matingales and Stochastic integrals in the theory of continous trading. *Stochastic Processes and Their Applications*, Vol. 11, p. 215–260, 1981.
- [86] HARTMANN, P., STRAETMANS, S., VRIES, C. D. : Asset Market linkages in crisis periods. Online on Internet : URL : <http://www.ecb.int/pub/pdf/scpwps/ecbwp071.pdf>, 2001.
- [87] HAYASHI, F. : Econometrics. Princeton Universtiy Press, 2000.
- [88] HOGG, R., CRAIG, A. : Introduction to Mathematical Statistics. Prentice Hall, New Jersey, 5. ed Ed., 1995.
- [89] HONG, Y., TU, J., ZHOU, G. : Asymmetric Correlation of Stock Returns : Statistical Tests and Economic Evaluation. In : American Finance Association San Diego Mettings, Online on Internet : URL : [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=483622](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=483622), March 2003.
- [90] HOUGAARD, P. : A class of multivariate failing time distributions. *Biometrika*, Vol. 73, p. 671–678, 1986.



- [91] HULL, J., WHITE, A. : Valuing Credit Default Swaps I : No Counterparty Default Risk. *Journal of Derivatives*, Vol. 8(1), p. 29–40, 2000.
- [92] HULL, J., WHITE, A. : Valuing Credit Default Swaps II : Modeling Default Correlations. *Journal of Derivatives*, Vol. 8(3), p. 12–22, 2001.
- [93] HUTCHINSON, T., LAI, C. : Continuous Bivariate Distribution : Emphasising Applications, 1990.
- [94] INTERNATIONAL SWAPS AND DERIVATIVES ASSOCIATION : 1999 ISDA Credit Derivatives Definitions. Online on Internet : URL : <http://www.isda.org>, 1999.
- [95] JARROW, R., LANDO, D., TURNBULL, S. : A Markov model for the term structure of credit risk spreads. *Review of Financial Studies*, Vol. 10, p. 481–523, 1997.
- [96] JARROW, R., LANDO, D., YU, F. : Default Risk and Diversification : Theory and Applications. Online on Internet : URL : <http://web.cbs.dk/staff/dlando/jly20030602.pdf> [12.2004], 2001. Working Paper, Cornell University.
- [97] JARROW, R., TURNBULL, S. : Pricing options on financial securities subject to default risk. *Journal of Finance*, Vol. 50, p. 53–86, 1995.
- [98] JOE, H. : Multivariate Models and Dependence Concepts, Vol. 73. Monographs on Statistics and Applied Probability, London, 1997.
- [99] JOE, H., XU, J. J. : The estimation method of inference functions for margins for multivariate models. Techn. Ber., Department of Statistics, University of British Columbia, Vancouver., 1996.
- [100] JOHNSON, N., KOTZ, S. : Distributions in Statistics : Continuous Multivariate Distributions. J. Wiley and sons, 1972.
- [101] JORION, P. : Value at Risk : The new Benchmark for Controlling Market Risks. McGraw-Hill, New York, 2001.
- [102] KARLIN, S., TAYLOR, H. : A first course in stochastic processes. Academic Press, San Diego, 2nd Ed., 1975.
- [103] KENDALL, M. : A new measure of rank correlation. *Biometrika*, Vol. 30, p. 81–93, 1938.
- [104] KIMELDORF, G., SAMPSON, A. : One-parameter families of bivariate distribution with fixed marginals. *Communications in Statistics*, Vol. 4(3), p. 293–301, 1975.
- [105] KIMELDORF, G., SAMPSON, A. : Uniform representations of bivariate distributions. *Communications in Statistics*, Vol. 4(7), p. 617–627, 1975.
- [106] KOTZ, S., JOHNSON, N. : Encyclopedia of Statistical Sciences. Wiley, New York, 1985.
- [107] LI, D. : On Default Correlation : A Copula Function Approach. *Journal of Fixed Income*, Vol. 6, p. 43–54, March 2000.

- [108] LUCAS, D. : Default Correlation and Credit Analysis. *Journal of fixed Income*, Vol. 11, p. 76–87, 1995.
- [109] MADAN, D., UNAL, H. : Pricing the Risks of Default. *Review of Derivative Results*, Vol. 2, p. 121–160, 1995.
- [110] MALEVERGNE, Y., SORNETTE, D. : Testing the Gaussian copula hypothesis for financial assets dependence. *Quantitative Finance*, Vol. 3, p. 231–250, 2003.
- [111] MARKOWITZ, H. : Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, Vol. 7, p. 77–91, 1952.
- [112] MARKOWITZ, H. : Portfolio Selection : Efficient Diversification of Investments, Vol. 16 von *Cowles Foundation Monograph*. Yale University Press, London, 1959.
- [113] MASHAL, R., ZEEVI, A. : Beyond correlation : extreme co-movements between financial assets. Online on Internet URL : <http://www.columbia.edu/~rm586/pub/BeyondCorrelation.pdf> [08.05], 2002.
- [114] MERTON, R. : On the pricing of corporate debt : the risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, Vol. 29, p. 449–470, 1974.
- [115] MITTELHAMMER, R. : Mathematical Statistics for Economics and Business. Springer, New York, 1996.
- [116] MOODY'S INVERSTOR SERVICES : Default and Recovery Rates of Corporate Bond Issuers. Online on Internet : URL : <http://www.moodyskmv.com/research/whitepaper/02defstudy.pdf> [12.2004], February 2002.
- [117] MOODY'S INVERSTOR SERVICES : Structured Finance Rating Transitions : 1983-2003, February 2004.
- [118] NELSEN, R. : Copulas and association. In : *Advances in Probability Distributions with Given Marginals*, p. 51–74, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
- [119] NELSEN, R. : *An Introduction to Copulas*. Springer, New York, 3 Ed., 1999.
- [120] NICKELL, P., PERRAUDIN, W., VAROTTO, S. : Stability of Rating Transitions. Online in Internet : URL : <http://www.bankofengland.co.uk/workingpapers/wp133.pdf>, 1998.
- [121] ONG, M. K. : *Internal Credit Risk Models : Capital Allocation and Performance Measurement*. Risk Books, 1999.
- [122] PATTON, A. : On the Out-of-Sample Importance of Skewness and Asymmetric Dependence for Asset Allocation. *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 2(1), p. 130–168, 2003.
- [123] PHYSICA-VERLAG, A. S.-V. C. (Hg.) : *Kendall's Tau for Elliptical Distributions*, Heidelberg, 2003.
- [124] RAIMBOURG, P. : *Les agences de rating*. Economica, Paris, 1990.

- [125] RÉNYI, A. : On measures of dependence. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, Vol. 10, p. 441–451, 1959.
- [126] RODRIGUEZ, J. : Measuring Financial Contagion : A Copula Approach. Online on Internet : URL : <http://www.eurandom.nl/reports/reports202004/018JRreport.pdf>, 2003.
- [127] RONCALLI, T. : Introduction à la gestion des risques. Cours ENSAI 3ème année, 2001.
- [128] RONCALLI, T. : La gestion des risques financiers. Economica, Paris, 2004.
- [129] ROSS, S. : A simple approach to the valuation of risky streams. *Journal of Business*, Vol. 51, p. 453–475, 1978.
- [130] ROSS, S. : Introduction to Probability Models. Harcourt Academic Press, 7 Ed., 2000.
- [131] SANTOS, J. : Bank Capital Regulation in Contemporary Banking theory : a Review of the Literature. Techn. Ber., Basle Committee On Banking Supervision, September 2000.
- [132] SCAILLET, O., FERMANIAN, J. : Nonparametric Estimation of Copulas for Time Series. *Journal of Risk*, Vol. 5(4), p. 25–54, 2003.
- [133] SCARSINI, M. : On measures of concordance. *Stochastica*, Vol. 8, p. 201–218, 1984.
- [134] SCHMEIDLER, D. : Integral representation without additivity. *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 97, p. 255–261, 1986.
- [135] SCHMIDT, R. : Tail dependence for elliptically contoured distributions. Online in Internet : URL : <http://www.caesar.de/uploads/media/bonn-color.pdf>, 2002.
- [136] SCHONBUCHER, P., SCHUBERT, D. : Copula-dependent Default Risk in Intensity Models. Online in Internet : URL : <http://www.finasto.uni-bonn.de/schonbucher>, 2001. Working Paper.
- [137] SCHWEIZER, B., SKLAR, A. : Probability Metric Space.
- [138] SCHWEIZER, B., SKLAR, A. : Associative functions and statistical triangle inequalities. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, Vol. 8, p. 169–186, 1961.
- [139] SCHWEIZER, B., WOLFF, E. : Sur une mesure de dépendance pour les variables aléatoires. *Compte Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, Vol. 283, p. 659–661, 1976.
- [140] SCHWEIZER, B., WOLFF, E. : On nonparametric measures of dependence for random variables. *Annals of Statistics*, Vol. 9, p. 879–885, 1981.
- [141] SKLAR, A. : Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publ. Inst. Statis. Univ. Paris*, Vol. 8, p. 229–231, 1959.
- [142] SORNETTE, D. : Predictability of catastrophic events : Material rupture, earthquakes, turbulence, financial crashes, and human birth. In : Proceedings

- of the National Academy of Sciences of the United States of America, Vol. 229-231, p. 2522–2529, National Academy of Sciences of the United States of America, 2002.
- [143] STANLEY, H. E., AMARAL, L. A. N., BULDYREV, S. V., GOPIKRISHNAN, P., PLEROU, V., SALINGER, M. A. : Self-Organized Complexity in Economics and Finance. In : Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, Vol. 99, p. 2561–2565, JSTOR, 2002.
  - [144] STEINER, F., HEINKE, V. : Event Study Concerning International Bond Price Effects of Credit Rating Actions. *International Journal of Finance and Economics*, Vol. 6, p. 139–157, 2001.
  - [145] TANG, A., VALDEZ, E. A. : Economic Capital and the Aggregation of Risks using Copulas. Working Paper series - Actuarial Studies, 2005.
  - [146] TCHEN, A. : Inequalities for distributions with given marginals. *Annals of probability*, Vol. 8, p. 814–827, 1980.
  - [147] WANG, S., DHANE, J. : Comonotonicity, correlation order and premium principles. *Insurance Mathematics and Economics*, Vol. 22(3), p. 235–242, 1998.
  - [148] WIDDER, D. : The Laplace Transform. Princeton University Press, Princeton, 1946.
  - [149] WILSON, T. : Calculating Risk Capital. In : ALEXANDER, C. (Hg.) The Handbook of Risk Management and Analysis, chap. 7, p. 193–232, John Wiley & Sons, Chichester, 1996.
  - [150] YAARI, M. : The dual theory of choice under risk. *Econometrica*, p. 95–115, 1987.
  - [151] YU, F. : Correlated Defaults in Reduced Form Models. *Review of Financial Studies*, Vol. 14, p. 555–576, 2002.
  - [152] ZHOU, C. : A jump-diffusion approach to modeling credit risk and valuing defaultable securities. Online on Internet : URL : <http://www.federalreserve.gov/pubs/feds/1997/199715/199715pap.pdf>, 1997.
  - [153] ZHU, H. : An Empirical Comparison of Credit Spreads Between the Bond Market and the Credit Default Swap Market . EFMA 2004 Basel Meetings Paper, 2004.