

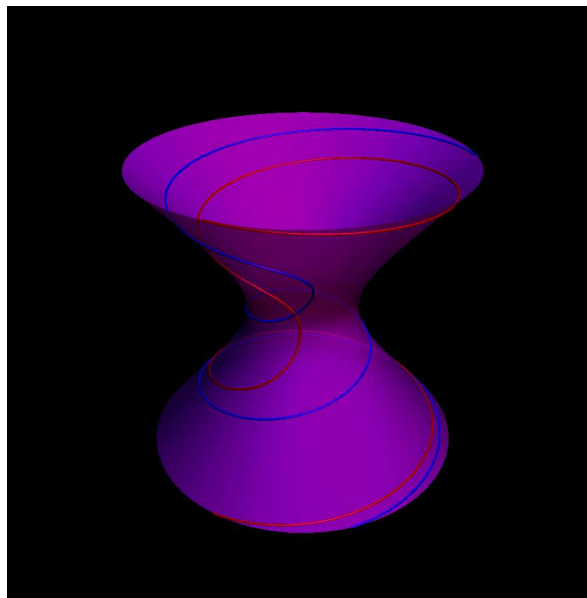
Aus dem Departement für Mathematik
Universität Freiburg (Schweiz)

Solitonlösungen des mittleren Krümmungsflusses

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der Würde eines
Doctor scientiarum mathematicarum
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Freiburg in der Schweiz

von
BEATRICE ROOST
aus Zürich



Nr. 1522
Druckerei: St. Paul à Fribourg
2006

Von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Freiburg in der Schweiz angenommen, auf Antrag von

Prof. Dr. Ralph Strebel, Universität Freiburg, Schweiz, Jury-Präsident

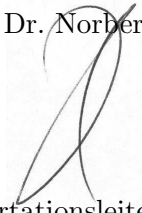
Prof. Dr. Norbert Hungerbühler, Universität Freiburg, Schweiz, Dissertationsleiter

Prof. Dr. Knut Smoczyk, Universität Hannover, Deutschland, Gutachter

PD Dr. Patrick Ghanaat, Universität Freiburg, Schweiz, Gutachter

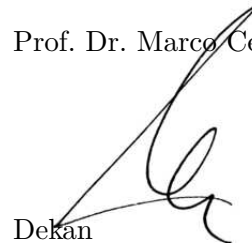
Freiburg (Schweiz), den 14. Juni 2006

Prof. Dr. Norbert Hungerbühler

A handwritten signature in black ink, consisting of a large, stylized 'N' followed by a smaller 'H' and a trailing flourish.

Dissertationsleiter

Prof. Dr. Marco Celio

A handwritten signature in black ink, featuring a large, sweeping 'M' followed by a smaller 'C' and a trailing flourish.

Dekan

Diese Arbeit wurde vom Schweizerischen Nationalfonds im Rahmen der Projekte Nr. 21-63464.00 und Nr. 200020-100051 unterstützt.

Meinen Eltern und meinem verstorbenen Grossi gewidmet

Inhaltsverzeichnis

Abstract	VII
Zusammenfassung	XI
1 Einleitung	1
1.1 Notationen und Definitionen	1
1.2 Der mittlere Krümmungsfluss	10
2 Solitonkurven	17
2.1 Inverse Problemstellung	17
2.2 Solitonkurven auf Riemannschen Flächen	19
2.3 Geometrie von Solitonkurven	29
3 Mehrdimensionale Solitonen	45
3.1 Problemstellung	45
3.2 Lösung mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen	47
4 Appendix	51
4.1 Einfache Schleifen	51
4.2 Einfache Zweiecke	52
4.3 Solitonkurven auf Rotationsflächen	54
4.3.1 Kegel	55
4.3.2 Hyperboloid	56
4.4 Solitonkurven auf Schraubenflächen	56

4.5 Differenzierbare Funktionen auf Banachräumen	58
Literatur	71
Dank	73
Curriculum vitae	75

Abstract

In this thesis we investigate particular problems in connection with solutions of the mean curvature flow. More precisely we are interested in solutions of the mean curvature flow which keep their form. Such solutions have, as we will see, special geometric and analytical properties.

In Chapter 1 we introduce the necessary tools from differential geometry and describe the general framework which we are going to work in. We briefly summerize the situation here.

Let N be an n -dimensional Riemannian manifold with metric \bar{g} equipped with a Killing vector field $X : M \rightarrow N$. This means, that X generates a one-parameter group $\varphi : N \times \mathbb{R} \rightarrow N$ of isometries on N by

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(x, t)}{dt} &= X(\varphi(x, t)) && \text{on } N \times \mathbb{R} \\ \varphi(x, 0) &= x && \text{on } N. \end{aligned}$$

Moreover, let M be a differentiable, connected m -dimensional manifold, $m = n - 1$. Let $F_t : M \rightarrow N$, $t \geq 0$, be a smooth family of immersions from M to N . The family F_t is called a solution of the mean curvature flow on $]0, T[$, $T > 0$, if

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_t &= -H\nu && \text{on } M \times]0, T[\\ F_0 &= f && \text{on } M, \end{aligned}$$

where $f : M \rightarrow N$ describes a given initial hypersurface M_0 . H is the mean curvature of $F_t(M)$ with respect to the unit normal vector field ν on $F_t(M)$.

We say that F_t is a soliton solution of the mean curvature flow with respect to the Killing vector field X , if $\tilde{F}_t := \varphi^{-1}(F_t, t)$ is stationary in normal direction, i.e. if $\tilde{F}_t(M)$ is the given initial manifold $M_0 = F_0(M)$ for all $t \in]0, T[$. In Section 1.2 we prove that soliton solutions are characterized by

$$-\langle X(f), \nu(f) \rangle = H(f). \quad (*)$$

In the same chapter we briefly comment on the physical roots of the mean curvature flow and give a survey on some important mathematical results concerning the mean curvature flow including the relevant references. In particular we motivate the notation of a soliton

solution by the blow-up results on singularities of the mean curvature flow. In the sequel we see that soliton solutions have interesting geometric properties (c.f. Section 2.3).

In Chapter 2, we investigate soliton curves on surfaces. We start with an inverse problem in Section 2.1: We prescribe a curve and ask, if there exists a metric which makes the given curve a soliton. In a particular case, our Theorem 2.1.1 answers this question completely. In Section 2.2 we treat the existence and uniqueness problem for global solutions for curves. In particular, we prove the following theorem:

Theorem 2.2.5. *Let N be a two-dimensional differentiable, geodesically complete Riemannian manifold, which carries a smooth Killing vector field $X : N \rightarrow TN$. Then, for each point $P \in N$ and every direction $Q \in T_P N$ with $Q \neq 0$ there exists a unique soliton curve through P which is tangential to Q and which can be extended arbitrarily far to both sides.*

In addition, we prove, that every pair of points which are close to each other can be joined by a unique short soliton curve. In Section 2.3, we investigate the geometric properties of soliton curves on Riemannian surfaces. Here, the following theorem plays a crucial role:

Theorem 2.3.9. *Each Killing vector field on a two dimensional Riemannian manifold possesses locally a conjugate potential.*

From this theorem, it follows that the total curvature of a closed polygon whose sides are soliton curves and which is the boundary of a simply connected domain, vanishes. This fact, together with the Gauss-Bonnet theorem then yields the central Theorem 2.3.12. This theorem establishes a formula, which formally looks like the formula of Gauss-Bonnet for closed polygons which consists of geodesic curves. From this formula arise criteria for the possibility for soliton curves to be closed, as well as for soliton curves to be embedded (which means that the curves have no self intersections). Finally the formula allows to exclude that two distinct soliton curves cut each other more than once if the Gaussian curvature of the surface is non-positive. In particular this answers the question when two arbitrary points (which may be located far away from each other) can be joined by a *unique* soliton curve. In particular, it follows immediately that in euclidian space \mathbb{R}^2 soliton curves cannot be closed and are always embedded, independently of the Killing vector field. As a further example, we prove that every soliton curve on a regular cone must be embedded if the opening angle of the cone is larger than or equal to $\frac{\pi}{3}$. This and further examples are illustrated by computer images. The conclusions of this section generalize in particular the results for Yin-Yang curves in [14].

Chapter 3 is dedicated to the study of higher dimensional soliton solutions. Section 3.1 introduces the problem of local solvability of the soliton equation. We confine ourselves to the corresponding boundary value problem. We motivate this investigation by the following question: Let γ be a closed curve in a three-dimensional manifold N , which moves under the action of a one parametric group of isometries on N . The question is whether or not one can find a surface with boundary γ which solves the soliton equation (*). This surface would then move under the influence of the mean curvature flow together with the boundary γ by the group of isometries. In Section 3.2 we prove a corresponding existence result for small Killing vector fields and for a certain class of boundary curves. The key

ingredient here is the implicit function theorem. The existence theorem reads as follows:

Theorem 3.2.3 *Let N be an n -dimensional Riemannian manifold with a Killing vector field X . Moreover let $N' \subset N$ be an admissible minimal hypersurface. If γ is the boundary of a $C^{2,\alpha}$ domain $\Sigma \subset N'$, then there exists a soliton hypersurface with respect to the Killing field λX and boundary γ provided λ is sufficiently small.*

The chapter ends with a brief description of a numerical algorithm to solve the boundary value problem for a soliton surface that is a soliton with respect to a screw motion in \mathbb{R}^3 . The numerical solution is presented in a computer image.

Some tedious proofs and calculations are placed in the appendix.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit geht es um spezielle Probleme im Zusammenhang mit Lösungen des mittleren Krümmungsflusses. Genauer gesagt interessieren uns Lösungen des mittleren Krümmungsflusses, welche ihre Form beibehalten. Derartige sogenannte Solitonlösungen haben, wie sich zeigt, besondere geometrische und analytische Eigenschaften.

Im Kapitel 1 stellen wir die nötigen differentialgeometrischen Werkzeuge zusammen und beschreiben den allgemeinen Rahmen, in dem wir arbeiten werden. Diesen geben wir hier kurz wieder.

Sei N eine n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit der Metrik \bar{g} , ausgerüstet mit einem Killingfeld $X : N \rightarrow TN$. Das heisst, X generiert eine Einparametergruppe $\varphi : N \times \mathbb{R} \rightarrow N$ von Isometrien auf N via

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(x, t)}{dt} &= X(\varphi(x, t)) && \text{auf } N \times \mathbb{R} \\ \varphi(x, 0) &= x && \text{auf } N. \end{aligned}$$

Weiter sei M eine differenzierbare, zusammenhängende m -dimensionale Mannigfaltigkeit, $m = n - 1$. Sei $F_t : M \rightarrow N$, $t \geq 0$, eine glatte Familie von Immersionen von M nach N . Die Abbildung F_t heisst eine Lösung des mittleren Krümmungsflusses auf $]0, T[$, $T > 0$, wenn:

$$\frac{d}{dt} F_t = -H\nu \quad \text{auf } M \times]0, T[\quad (1)$$

$$F_0 = f \quad \text{auf } M, \quad (2)$$

wobei $f : M \rightarrow N$ eine gegebene Anfangshyperfläche M_0 beschreibt. H ist die mittlere Krümmung von $F_t(M)$ bezüglich des Einheitsnormalenvektorfeldes ν auf $F_t(M)$.

Wir sagen nun, dass F_t eine Solitonlösung des mittleren Krümmungsflusses bezüglich des Killingvektorfeldes X ist, wenn $\tilde{F}_t := \varphi^{-1}(F_t, t)$ in Normalenrichtung stationär ist, das heisst $\tilde{F}_t(M)$ ist die gegebene Untermannigfaltigkeit $M_0 = F_0(M)$ für alle $t \in]0, T[$. Wir beweisen im Abschnitt 1.2, dass die Solitonlösungen durch folgende Gleichung charakterisiert sind:

$$-\langle X(f), \nu(f) \rangle = H(f). \quad (3)$$

Im selben Kapitel gehen wir kurz auf die physikalischen Wurzeln ein und geben einen Überblick über einige wichtige mathematische Resultate zum mittleren Krümmungsfluss

mit entsprechenden Literaturhinweisen. Wir motivieren insbesondere den Begriff der Solitonlösung durch die Blow-up-Resultate von Singularitäten des mittleren Krümmungsflusses. Im Weiteren werden wir sehen, dass Solitonlösungen auch interessante geometrische Eigenschaften (siehe Abschnitt 2.3) besitzen.

Im Kapitel 2 untersuchen wir Solitonkurven auf Riemannschen Flächen. Im Abschnitt 2.1 betrachten wir zunächst ein inverses Problem. Das heisst, wir geben eine Kurve vor und fragen uns, ob eine Metrik existiert, so dass diese Kurve eine Solitonkurve ist. In einem speziellen Fall beantwortet das Theorem 2.1.1 diese Frage vollständig. Im Abschnitt 2.2 behandeln wir die Existenz und Eindeutigkeit von globalen Lösungen. Dabei bewiesen wir das folgende Theorem 2.2.5:

Theorem 2.2.5. *Sei N eine zweidimensionale, differenzierbare, geodätisch vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, welche ein glattes Killingvektorfeld $X : N \rightarrow TN$ trägt. Dann existiert für jeden Punkt $P \in N$ und jedes $Q \in T_P N$ mit $Q \neq 0$ eine eindeutige und beidseits beliebig weit fortsetzbare Solitonkurve γ bezüglich X durch P und tangential an Q .*

Zusätzlich bewiesen wir, dass zwei genügend nahe beieinander liegende Punkte durch eine eindeutige kurze Solitonkurve verbunden werden können. Im Abschnitt 2.3 untersuchen wir dann die geometrischen Eigenschaften von Solitonkurven auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Dabei spielt das folgende Resultat eine wichtige Rolle:

Theorem 2.3.9. *Jedes Killingvektorfeld auf einer zweidimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit besitzt lokal ein konjugiertes Potential.*

Mit Hilfe dieses Satzes wird dann gezeigt, dass die Totalkrümmung eines Polygonzuges, welcher aus Solitonstücken besteht und ein einfachzusammenhängendes Gebiet berandet, verschwindet. Aus dieser Tatsache und dem Satz von Gauss-Bonnet folgt dann das zentrale Theorem 2.3.12. Dieses Ergebnis etabliert eine Formel, welche formal wie die Formel von Gauss-Bonnet für Polygonzüge aus Geodäten aussieht. Daraus ergeben sich dann Aussagen darüber, unter welchen Umständen geschlossene Solitonkurven vorkommen können, sowie darüber wann Solitonkurven eingebettet sind (das heisst, keine Selbstschnitte aufweisen). Schliesslich werden auch Aussagen darüber möglich, wann sich zwei verschiedene Solitonkurven mehr als einmal schneiden können. Insbesondere beantwortet dies die Frage nach der eindeutigen Verbindbarkeit zweier weit auseinanderliegenden Punkte durch Solitonkurven. So zeigt sich beispielsweise, dass im euklidischen \mathbb{R}^2 unabhängig vom Killingvektorfeld keine geschlossenen Solitonkurven existieren, und dass Solitonkurven dort eingebettet sein müssen. Als weiteres Beispiel beweisen wir, dass jede Solitonkurve auf einem Rotationskegel eingebettet ist, wenn der halbe Öffnungswinkel des Kegels grösser oder gleich $\frac{\pi}{6}$ ist. Diese und weitere Beispiele werden mit Computergraphiken illustriert. Die Ergebnisse dieses Abschnittes verallgemeinern insbesondere Resultate über Yin-Yang-Kurven in [14].

Im Kapitel 3 geht es um mehrdimensionale Solitonlösungen. Im Abschnitt 3.1 wird das Problem der lokalen Lösbarkeit der Solitongleichung eingeführt. Wir beschränken uns auf das entsprechende Randwertproblem. Wir motivieren die Untersuchung durch folgende Fragestellung: Sei eine geschlossene Kurve γ auf einer drei-dimensionalen Mannigfaltigkeit N vorgegeben, welche sich unter dem Einfluss einer einparametrischen Gruppe von Isometri-

en auf N fortbewegt. Die Frage ist dann, ob in die gegebene Kurve eine Fläche eingespannt werden kann, die der Solitongleichung (3) genügt. Diese Fläche würde sich dann unter dem mittleren Krümmungsfluss zusammen mit der gegebenen Randkurve gerade unter der Isometriegruppe bewegen. Im Abschnitt 3.2 wird für kleine Killingvektorfelder und geeignete Randdaten das genannte Problem mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen gelöst und folgender Satz bewiesen:

Theorem 3.2.3. *Sei N eine n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einem Killingvektorfeld X . Weiter sei $N' \subset N$ eine zugelassene minimale Hyperfläche. Ist dann γ der Rand eines $C^{2,\alpha}$ Gebietes $\Sigma \subset N'$, so existiert für genügend kleines λ eine Solitonhyperfläche bezüglich des Killingvektorfeldes λX mit dem Rand γ .*

Das Kapitel wird durch eine kurze Beschreibung eines numerischen Verfahrens zur Lösung des Randwertproblems für eine Solitonfläche bezüglich einer Schraubung in \mathbb{R}^3 abgeschlossen. Die Numerische Lösung ist in einer Computergraphik dargestellt.

Einzelne technische Beweise und Berechnungen sind in den Appendix verbannt.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Notationen und Definitionen

In diesem Abschnitt führen wir die im weiteren Verlauf nötigen Notationen und Definitionen ein. Die grundlegenden Objekte, mit denen wir uns befassen sind Mannigfaltigkeiten. Sie stellen die natürliche Verallgemeinerung des Flächenbegriffs der klassischen Geometrie dar.

Definition 1.1.1. Eine **Mannigfaltigkeit** M der Dimension m ist ein zusammenhängender parakompakter¹ Hausdorff Raum mit der Eigenschaft, dass jeder seiner Punkte p eine offene Umgebung U besitzt, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge Ω von \mathbb{R}^m ist.

Ein solcher Homöomorphismus $x : U \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^m$ heisst **Karte** und U das dazugehörige **Kartengebiet**.

Ein **Atlas** ist eine Menge $\{U_\alpha, x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ von Karten, falls die Mengen U_α eine offene Überdeckung von M bilden.

Zwei Atlanten heissen **kompatibel**, wenn ihre Vereinigung wieder ein Atlas ist. Im allgemeinen wird eine Karte **kompatibel mit einem Atlas** genannt, wenn das Hinzufügen der Karte zum Atlas wieder einen Atlas liefert. Ein Atlas heisst **maximal**, wenn jede kompatible Karte mit diesem Atlas bereits in diesem liegt.

Ein Atlas $\{U_\alpha, x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ einer Mannigfaltigkeit heisst **differenzierbar**, falls alle Kartenwechsel

$$x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

von der Klasse C^∞ sind (im Falle $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$).

Ein maximaler differenzierbarer Atlas heisst **differenzierbare Struktur**.

¹Ein Hausdorff Raum M heisst parakompakt, wenn jede offene Überdeckung eine lokal endliche Verfeinerung besitzt. Das heisst, dass für jede offene Überdeckung $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ von M eine lokal endliche offene Überdeckung $(\Omega'_\beta)_{\beta \in B}$ von M existiert, so dass $\forall \beta \in B \exists \alpha \in A : \Omega'_\beta \subset \Omega_\alpha$.

Eine Mannigfaltigkeit mit einer maximalen differenzierbaren Struktur heisst **differenzierbare Mannigfaltigkeit**. \diamond

Bemerkung 1.1.2. Jeder Atlas ist in einem maximalen Atlas enthalten, nämlich in jenem, der alle Karten, die mit ihm kompatibel sind, enthält. \diamond

Gewisse Teilmengen von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten können in natürlicher Weise selbst als Mannigfaltigkeiten aufgefasst werden:

Definition 1.1.3. Sei N eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $M \subset N$ heisst **differenzierbare Untermannigfaltigkeit** der Dimension $m = n - k$ der differenzierbaren Mannigfaltigkeit N , falls es für jeden Punkt $p \in M$ eine Karte (U, x) von N mit $p \in U$ gibt, so dass $x(U \cap M) \subset \mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{m+k}$. $x|_{U \cap M}$ ist dann eine Karte für M und die Gesamtheit dieser Karten ist ein differenzierbarer Atlas für M . Die Zahl k heisst **Codimension** von M in N . Falls $k = 1$ ist, so sagt man, M sei eine **Hyperfläche** in N . \diamond

Die Differenzierbarkeit von reellen Funktionen auf Mannigfaltigkeiten wird mit Hilfe von Karten definiert:

Definition 1.1.4. Sei $U \subset M$ ein Kartengebiet. Die Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ heisst **differenzierbar von der Klasse C^∞ (glatt)**, falls $(f \circ x^{-1})|_{x(U)}$ differenzierbar von der Klasse C^∞ ist.

Ist W eine beliebige offene Teilmenge von M , so heisst $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ **glatt**, falls $f|_{U \cap W}$ glatt ist für alle Kartengebiete $U \subset M$. \diamond

Motiviert durch den Begriff der Tangentialebene an eine Fläche im Raum definiert man den Begriff des Tangentialraums an eine allgemeine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Definition 1.1.5. Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Der **Tangentialraum** $T_p M$ von M im Punkt p ist die Menge aller linearen Abbildungen

$$X_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R},$$

die

$$X_p(f \cdot g) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g)$$

erfüllen. Mit den Vektorraumoperationen

$$\begin{aligned} (X_p + Y_p)(f) &= X_p(f) + Y_p(f) \\ (\alpha X_p)(f) &= \alpha X_p(f) \end{aligned}$$

für $f \in C^\infty(M)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ wird $T_p M$ zu einem Vektorraum. \diamond

Sei $p \in U \subset M$ und $x : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ eine Karte. Wir betrachten die folgenden Elemente aus $T_p M$:

$$B_i(p) : f \mapsto \frac{\partial}{\partial \xi^i} (f \circ x^{-1})|_{x(p)} \quad (1.1)$$

wobei $f \in C^\infty(M)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Diese Vektoren $B_i(p)$, $i = 1, 2, \dots, m$, bilden eine Basis von $T_p M$. Jeder Vektor $X_p \in T_p M$ lässt sich also schreiben als $X_p = X^i B_i(p)$, $X^i \in \mathbb{R}$, wobei wir hier und im weiteren stillschweigend die übliche Summenkonvention verwenden.

Nun lassen sich Vektorfelder auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten einführen:

Definition 1.1.6. Sei $W \subset M$. Ein **Vektorfeld** v auf W ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} v : W &\rightarrow TM = \bigcup_{p \in W} T_p M \\ p &\mapsto v(p) \in T_p M. \end{aligned}$$

Sei $U \subset M$ ein Kartengebiet zur Karte x . Dann gilt für $p \in U$:

$$v(p) = v^i(p) B_i(p).$$

Das Vektorfeld v heisst **glatt** auf U , falls die Koeffizienten $v^i(p)$ glatte Funktionen auf U sind. v heisst **glatt** auf W , falls $v|_{U \cap W}$ glatt ist für alle Kartengebiete U . \diamond

Nun können wir die Ableitung reellwertiger Funktionen auf Mannigfaltigkeiten definieren.

Definition 1.1.7. Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M . Das **Differential** von f in $p \in M$ ist dann die lineare Abbildung

$$df_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad X_p \mapsto df_p(X_p) := X_p(f). \quad \diamond$$

Um weiter unten allgemeine Tensorfelder auf M definieren zu können, benötigen wir nun noch den zu $T_p M$ dualen Vektorraum sowie dessen Basis.

Definition 1.1.8. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Der zum Tangentialraum $T_p M$ duale Vektorraum heisst **Kotangentialraum** von M im Punkte p und wird mit $T_p^* M$ bezeichnet. \diamond

Bemerkung 1.1.9. Die duale Basis in $T_p^* M$ zur Basis $B_i(p)$ in $T_p M$, welche in (1.1) eingeführt wurde, besteht aus den Koordinatendifferentiale dx^j :

$$dx_p^j(B_i(p)) = B_i(p)(x^j) = \frac{\partial}{\partial \xi^i}(x^j \circ x^{-1})|_{x(p)} = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \xi^j|_{x(p)} = \delta_i^j$$

denn $x^j \circ x^{-1} : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Abbildung $(\xi^1, \dots, \xi^m) \mapsto \xi^j$. \diamond

Wir machen differenzierbare Mannigfaltigkeiten zu metrischen Räumen, indem wir zunächst Riemannsche Metriken einführen:

Definition 1.1.10. Eine **Riemannsche Metrik** auf M ist eine Familie g von Skalarprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, welche differenzierbar von p abhängen. Das heisst, für alle differenzierbaren Vektorfelder v und w auf M ist die Abbildung $p \mapsto \langle v(p), w(p) \rangle_p$ glatt. Die Riemannsche Metrik $(\langle \cdot, \cdot \rangle_p)_{p \in M}$ heisst auch die **erste Fundamentalform** von M .

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer Riemannschen Metrik g heisst **Riemannsche Mannigfaltigkeit**. Wir schreiben gelegentlich $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$, um anzudeuten, welche Metrik gemeint ist. \diamond

Auf einer differenzierbaren Untermannigfaltigkeit einer Riemannschen Mannigfaltigkeit wird durch Einschränkung der ersten Fundamentalform eine Riemannsche Metrik induziert.

Sei $v, w \in T_p M$ mit $v = v^i B_i(p)$, $w = w^j B_j(p)$. Dann ist $\langle v, w \rangle_p = g_{ij}(p) v^i w^j$. Dabei ist $g_{ij}(p) = \langle B_i(p), B_j(p) \rangle$ eine positiv definite $(m \times m)$ -Matrix.

Mit der Metrik g einer Riemannschen Mannigfaltigkeit können wir neben der Ableitung einer reellen Funktion auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit auch ihren Gradienten definieren.

Definition 1.1.11. Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Metrik g und $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Der **Gradient** $\nabla_g F_p \in T_p M$ von F in $p \in M$ bezüglich der Metrik g ist definiert durch die Bedingung

$$dF_p v = \langle \nabla_g F_p, v \rangle_g$$

für alle $v \in T_p M$. ◇

Wir interessieren uns für Kurven auf Mannigfaltigkeiten, insbesondere für Kurven auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit speziellen Eigenschaften. Zuerst definieren wir, was eine glatte Kurve auf einer Mannigfaltigkeit ist, bevor wir mit Hilfe der Riemannschen Metrik ihre Länge definieren.

Definition 1.1.12. Eine stetige Kurve $\gamma : I := [a, b] \rightarrow M$ heisst **glatt**, falls für jede Karte $x : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ gilt, dass $x \circ \gamma|_{\gamma^{-1}(U)}$ glatt ist. ◇

Sei $\gamma : I \rightarrow M$ eine glatte Kurve. Wir definieren $\frac{d\gamma}{dt}(t) = \dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)} M$ durch

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) : C^\infty(U) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)(t). \end{aligned}$$

Ist dann $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ eine glatte Kurve, so erhalten wir folgende Beziehung zwischen der Ableitung von $\varphi(\gamma(t))$ und dem Gradienten:

$$\frac{d}{dt}\varphi(\gamma(t)) = d\varphi(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) = \langle \nabla_g \varphi(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle_g. \quad (1.2)$$

Definition 1.1.13. Sei $\gamma : I := [a, b] \rightarrow M$ eine glatte Kurve. Die **Länge** von γ ist definiert durch

$$L(\gamma) = \int_I \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_I \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle_{\gamma(t)}} dt.$$

Diese Definition überträgt sich in natürlicher Weise auf stückweise glatte Kurven. ◇

Sei M eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Mit Hilfe der soeben definierten Kurvenlänge lässt sich nun M in der Tat zu einem metrischen Raum machen:

Definition 1.1.14. Die Abbildung

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (p, q) \mapsto \inf \{ L(\gamma) \mid \gamma : I = [a, b] \rightarrow M \text{ glatt}, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q \}$$

definiert eine **Metrik** auf M . \diamond

Kurven, welche lokal kürzeste Verbindungslinien zwischen je zwei ihrer Punkte sind, heißen geodätische Kurven:

Definition 1.1.15. Eine glatte Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ heißt **geodätisch** genau dann, wenn jeder Punkt $\gamma(t)$, $t \in I$, in einer nichttrivialen Teilkurve enthalten ist, deren Länge die Distanz ihrer Endpunkte im Sinne der Metrik d ist. \diamond

Je zwei genügend nahe beieinanderliegende Punkte auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit lassen sich durch eine Geodäte verbinden. Andererseits ist es, selbst für zusammenhängende Mannigfaltigkeiten, eine spezielle Eigenschaft, wenn sich zwei *beliebige* Punkte durch eine Geodäte verbinden lassen oder wenn sich jede Geodäte beliebig weit fortsetzen lässt:

Definition 1.1.16. Eine Mannigfaltigkeit M heißt **geodätisch vollständig**, wenn sich jede geodätische Kurve im Sinne der Kurvenlänge beliebig als Geodäte fortsetzen lässt. \diamond

Die Eigenschaft der geodätischen Vollständigkeit lässt sich mit Hilfe der zuvor eingeführten Metrik d charakterisieren: Die Tatsache, dass M geodätisch vollständig ist, ist nämlich nach dem Satz von Hopf-Rinow äquivalent dazu, dass (M, d) vollständig ist.

Bisher haben wir reelle Funktionen auf Mannigfaltigkeiten, sowie Kurven auf Mannigfaltigkeiten betrachtet. Wir benötigen auch allgemeine Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten:

Definition 1.1.17. Seien M und N zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt **differenzierbar** in $p \in M$, wenn für Karten (U, x) mit $p \in U \subset M$ und (V, y) mit $f(p) \in V \subset N$ gilt, dass $y \circ f \circ x^{-1}$ glatt ist in $x(p)$. Sie heißt **differenzierbar (glatt)**, falls f differenzierbar in jedem Punkt $p \in M$ ist.

Das **Differential** df_p einer glatten Abbildung $f : M \rightarrow N$ in $p \in M$ ist die lineare Abbildung $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$, $X \mapsto df_p(X)$ mit $df_p(X) : C^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto df_p(X)(\varphi) = X(\varphi \circ f)$.

Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt **Immersion**, falls $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ in jedem Punkt $p \in M$ injektiv ist, d.h. $\text{rang } df_p = m = \dim M$.

Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt **Einbettung**, falls f eine Immersion ist und M homöomorph auf $f(M)$ abbildet.

Sind M und N Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit induzierter Metrik d_M respektive d_N , so heißt $f : M \rightarrow N$ **Isometrie**, falls $\forall p, q \in M \ d_M(p, q) = d_N(f(p), f(q))$. \diamond

Bemerkung 1.1.18. (a) Ist $f : M \rightarrow N$ eine Einbettung, so ist das Bild $f(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von N .

(b) Die obige Definition des Differentials stimmt im Falle $N = \mathbb{R}$ mit der Definition 1.1.7 überein, falls wir $T_q\mathbb{R}$ mit \mathbb{R} identifizieren:

$$\begin{aligned} i : T_q\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\mapsto i(X) := X(\text{id}) \end{aligned} \quad \diamond$$

Zuvor betrachteten wir allgemeine Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten. Jetzt definieren wir spezielle Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M , welche im Zusammenhang mit Isometriegruppen von M stehen, nämlich Killingvektorfelder:

Definition 1.1.19. Sei M eine m -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein Vektorfeld $X : M \rightarrow TM$ heisst **Killingvektorfeld** auf M , falls X eine Einparametergruppe $\varphi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ von Isometrien auf M generiert via

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(x, t)}{dt} &= X(\varphi(x, t)) && \text{auf } M \times \mathbb{R} \\ \varphi(x, 0) &= x && \text{auf } M. \end{aligned}$$

Dabei fassen wir $\varphi(x, \cdot)$ als Kurve in M auf. \diamond

Als Verallgemeinerung von Richtungsableitungen von Funktionen betrachten wir nun noch Ableitungen von Vektorfeldern längs anderen Vektorfeldern.

Definition 1.1.20. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Dann bezeichnet $\Gamma(TM)$ die Menge aller glatten Vektorfelder auf M .

Ein **linearer (Koszul-) Zusammenhang** oder eine **kovariante Ableitung** ∇ auf TM ist eine bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

mit den Eigenschaften

- a) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$
- b) $\nabla_X fY = X(f)Y + f \nabla_X Y$

für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$, $f \in C^\infty(M)$. \diamond

Definition 1.1.21. Sei $x : U \rightarrow \Omega$ eine Karte. Der Zusammenhang ∇ definiert die **Christoffelsymbole** $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$ bezüglich der Basis B_i durch

$$\nabla_{B_i} B_j =: \Gamma_{ij}^k B_k. \quad \diamond$$

Mit Hilfe einer Einbettung $f : M \rightarrow N$ können wir auch Vektorfelder auf M nach N transportieren.

Definition 1.1.22. Seien M und N zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : M \rightarrow N$ eine Einbettung. Dann definieren wir:

- (i) Die Einbettung f induziert eine Abbildung $f_* : TM \rightarrow Tf(M) \subset TN$ durch

$$X \mapsto f_*(X) = Y \in Tf(M), \quad Y : C^\infty(f(U)) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto X(\varphi \circ f).$$

Dabei ist U eine offene Menge in M . Die Abbildung f_* heisst **push forward**.

- (ii) Ist N eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Metrik h , so wird auch M zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit durch die Definition

$$\langle X, Y \rangle_{f^*h_p} := \langle f_*(X), f_*(Y) \rangle_{h_{f(p)}} \quad \text{für } X, Y \in T_pM.$$

Dann heisst f^*h **pull back** der Metrik h . Die Einbettung f wird dadurch zu einer isometrischen Immersion. \diamond

Mit Hilfe der kovarianten Ableitung definieren wir nun die zweite Fundamentalform. Damit werden wir schliesslich zum Begriff der Krümmung einer Mannigfaltigkeit gelangen.

Definition 1.1.23. Sei $f : M \rightarrow N$ eine Immersion. Unter dem **zweiten Fundamental-tensor** von M an $p \in M$ verstehen wir die Abbildung

$$\begin{aligned} A : T_pM \times T_pM &\rightarrow N_p f(M) \\ (X, Y) &\mapsto (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\perp(p). \end{aligned}$$

Hierbei sind $\bar{X}, \bar{Y} \in \Gamma(TN)$ beliebige glatte Fortsetzungen von $X, Y \in T_pM$ und $\bar{\nabla}$ ist ein linearer Zusammenhang auf N . Ferner bezeichnet $\Gamma(Nf(M))$ die Menge der glatten Normalenvektorfelder auf $f(M)$, d.h. Vektorfelder Z auf N , für die gilt $\langle Z(p), W(p) \rangle_N = 0 \quad \forall p \in f(M), \quad W(p) \in T_p f(M)$. Für $p \in f(M)$ wird $T_p N$ $\langle \cdot, \cdot \rangle_N$ -orthogonal zerlegt in $T_p N = T_p f(M) \oplus N_p f(M)$, und für $V \in T_p N$ bedeutet $V = V_\parallel \oplus V^\perp$, $V_\parallel \in T_p f(M)$ und $V^\perp \in N_p f(M)$ die entsprechende Zerlegung.

Ist $\nu \in \Gamma(Nf(M))$, so setzen wir

$$h_\nu(X, Y) = h(X, Y) := -\langle A(X, Y), \nu \rangle_N$$

und nennen diese bilineare Abbildung die **zweite Fundamentalform** von M bezüglich der Immersion f und dem Normalenfeld ν . \diamond

Einer der verschiedenen Krümmungsbegriffe, die wir brauchen, ist die mittlere Krümmung, welche wir nun mit Hilfe des zweiten Fundamentaltensors definieren können.

Definition 1.1.24. Die mittlere Krümmung H von M ist definiert durch

$$H = \text{spur } h. \quad \diamond$$

Um weiter unten die Tensorbündel einzuführen, führen wir noch den Begriff des Vektorbündels ein. Dieser erlaubt insbesondere, die Gesamtheit der Tangentialräume TM einer Mannigfaltigkeit M einheitlich als Tangentialbündel anzusprechen.

Definition 1.1.25. Ein **differenzierbares Vektorbündel** von Rang n besteht aus einem Totalraum E , einer Basis M und einer Projektion $\pi : E \rightarrow M$. Dabei sind E und M differenzierbare Mannigfaltigkeiten und π differenzierbar. Jede **Faser** $E_x := \pi^{-1}(x)$, $x \in M$, ist ein n -dimensionaler Vektorraum und die folgende lokale Trivialitätsbedingung muss erfüllt sein: Für jedes $x \in M$ existiert eine Umgebung $U \subset M$ und ein Diffeomorphismus

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$$

mit der Eigenschaft, dass für jedes $y \in U$

$$\varphi_y := \varphi|_{E_y} : E_y \rightarrow \{y\} \times \mathbb{R}^n$$

ein Vektorraumisomorphismus ist. Ein solches Paar (φ, U) heisst **Bündelkarte**. \diamond

Wir werden das Wort “differenzierbar” im Weiteren unterdrücken und einfach von Vektorbündel sprechen.

Der Begriff des Schnittes verallgemeinert nun den Begriff der Vektorfelder:

Definition 1.1.26. Sei (E, π, M) ein Vektorbündel. Ein **Schnitt** von E ist eine differenzierbare Abbildung $s : M \rightarrow E$ mit $\pi \circ s = \text{id}_M$. Der Raum der Schnitte von E wird mit $\Gamma(E)$ bezeichnet. \diamond

Bemerkung. Siehe die Definition 1.1.20 für das Beispiel $\Gamma(TM)$. \diamond

Bevor wir zum Begriff des Tensorbündels kommen, erinnern wir an den Begriff des Tensorproduktes von Vektorräumen.

Definition 1.1.27. Seien V und W zwei Vektorräume der Dimensionen n und m und seien (e_1, \dots, e_n) und (f_1, \dots, f_m) die Basen. Das **Tensorprodukt** $V \otimes W$ ist der Vektorraum der Dimension nm aufgespannt durch die Basis $(e_i \otimes f_j)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$.

Es existiert eine kanonische bilineare Abbildung

$$L : V \times W \rightarrow V \otimes W, \quad (a, b) \mapsto a \otimes b,$$

wobei für $a = a^i e_i \in V, b = b^j f_j \in W$ das Element $a \otimes b \in V \otimes W$ definiert ist durch $a \otimes b := a^i b^j e_i \otimes f_j$.

Analog kann man das Vektorprodukt mehrerer Vektorräume definieren.

Der Vektorraum der **r -fach kontravarianten** und **s -fach kovarianten Tensoren** über dem endlichdimensionalen Vektorraum V ist

$$T_s^r(V) := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{r\text{-fach}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{s\text{-fach}}.$$

Man setzt $T_0^0(V) := \mathbb{R}$. \diamond

Definition 1.1.28. Mit

$$T_s^r M = \bigcup_{p \in M} T_s^r(T_p M)$$

wird das Vektorbündel über M bezeichnet, dessen Fasern die Tensorräume $T_s^r(T_p M)$ sind. Insbesondere ist $T_1^0 M = T^* M$ das sogenannte **Kotangentialbündel** von M . Die Elemente von $T^* M$ heissen **Kotangentialvektoren**, die Schnitte von $T^* M$ sind **1-Formen**. Ein **r -fach kontravariantes** und **s -fach kovariantes Tensorfeld** auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist ein Schnitt von $T_s^r M$, also ein Element von $\Gamma(T_s^r M)$. $\Gamma(T_0^0 M)$ ist in diesem Sinne die Menge der reellen glatten Funktionen auf M . \diamond

Elementare Funktionen auf Tensorbündeln sind die Kontraktionen:

Definition 1.1.29. Eine Kontraktion

$$k : \Gamma(T_s^r M) \rightarrow \Gamma(T_{s-t}^{r-t} M)$$

ist eine t -fache Komposition von elementaren Kontraktionen k_{ij} , die auf zerlegbaren Elementen von $T_s^r(T_p M)$ durch

$$k_{ij}(x_1 \otimes \dots \otimes x_r \otimes y_1^* \otimes \dots \otimes y_s^*) := y_j^*(x_i) x_1 \otimes \dots \otimes \widehat{x_i} \otimes \dots \otimes x_r \otimes y_1^* \otimes \dots \otimes \widehat{y_j^*} \otimes \dots \otimes y_s^*$$

definiert sind. Auf nicht zerlegbare Elemente wird k_{ij} linear erweitert. \diamond

Nun erweitern wir den Koszul-Zusammenhang auf allgemeine Tensorfelder.

Definition 1.1.30. Sei ∇ ein linearer Zusammenhang auf TM . Dann existiert genau eine Familie bilinearer Operatoren

$$\overset{(r,s)}{\nabla} : \Gamma(TM) \times \Gamma(T_s^r M) \rightarrow \Gamma(T_s^r M)$$

für $r, s \in \mathbb{N}_0$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $\overset{(0,0)}{\nabla}_X f = X(f) = df(X)$
- (ii) $\overset{(1,0)}{\nabla}_X Y = \nabla_X Y$
- (iii) $\overset{(0,1)}{\nabla}_X \omega(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)$
- (iv) $\overset{(r+r',s+s')}{\nabla}_X (T \otimes T') = \overset{(r,s)}{\nabla}_X T \otimes T' + T \otimes \overset{(r',s')}{\nabla}_X T'$

Diese bilinearen Operatoren heissen **kovariante Ableitungen von Tensorfeldern**. \diamond

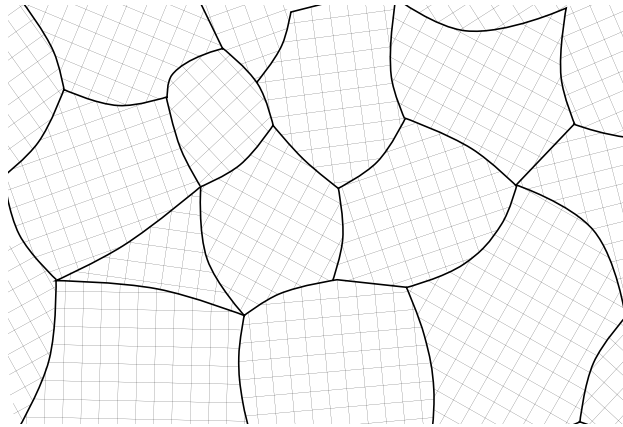
Bemerkung 1.1.31. Die Eigenschaft (iii) folgt aus den Eigenschaften (i), (iv) und (iii'):

(iii') Ist $k : \Gamma(T_s^r M) \rightarrow \Gamma(T_{s-t}^{r-t} M)$ eine Kontraktion, so gilt

$$k\left(\overset{(r,s)}{\nabla}_X T\right) = \overset{(r-t,s-t)}{\nabla}_X k(T). \quad \diamond$$

1.2 Der mittlere Krümmungsfluss

In den Fünfzigerjahren des Zwanzigsten Jahrhunderts machten Physiker die folgende Entdeckung: Im Labor wurde geschmolzenes Aluminium langsam abgekühlt und es wurde der Erstarrungsprozess genauer untersucht. Dabei stellte man fest, dass es zunächst in der Schmelze spontan an bestimmten Punkten zur Kristallisation kam. Dabei bauten sich aus Kristallisationskernen langsam homogene Aluminiumgitter auf. Das atomare Gitter des Aluminiums ist von der Art fcc (“face centered cubic”), die Gitterkonstante beträgt rund $4.05 \cdot 10^{-10} \text{m}$. Beim Erstarrungsprozess wachsen diese, zunächst isoliert in der Schmelze befindlichen homogenen Kristalle, bis sie schliesslich aneinander stossen. Wenn der Erstarrungsprozess abgeschlossen ist, setzt sich das Aluminium aus einzelnen Zellen oder Körnern (“grains”) zusammen, die aus homogenen Kristallgittern (Einkristallen) bestehen (siehe Figur 1.1).



Figur 1.1: Haufwerk von Einkristallen mit Korngrenzen

Eine typische Korngrösse ist etwa 10 Mikrometer. Atome, die am Rand einer Zelle (Korngrenze) sitzen, also nur einseitig in ein Atomgitter eingebunden sind und sich daher in einem leicht erhöhten Energiezustand befinden, können spontan ihre Zellenzugehörigkeit wechseln, das heisst, sie können sich dem Gitter der benachbarten Zelle anschliessen. Es stellt sich heraus, dass ein solcher Übertritt umso wahrscheinlicher ist, je konvexer der Zellrand an der betreffenden Stelle ist. Man kann sich das etwa so vorstellen, dass ein Atom an einer scharfen Spitze einer Zelle ja von mehr Atomen der Nachbarzelle umgeben ist als von eigenen, und es daher zur Nachbarzelle überspringt. Durch diesen Mechanismus bewegen sich die Zellränder. Man stellte experimentell fest, dass die Geschwindigkeit, mit der sich eine Zellwand bewegt, proportional zur mittleren Krümmung des Zellrandes am betreffenden Ort ist. Man kann diesen Sachverhalt auch wie folgt begründen: Der erhöhte Energiezustand der Randatome entspricht einer Oberflächenenergie, die im einfachsten Fall isotrop und proportional zur Fläche ist. Das System versucht nun, seine potentielle Energie zu verringern, also die Oberflächen der Zellen zu minimieren. Die erste Variation des Flächenfunktional ist nun aber gerade die mittlere Krümmung. Das heisst, das System wird versuchen seine Energie zu verringern, indem es die Oberflächen in jedem Punkt in Richtung und mit der Geschwindigkeit des negativen mittleren Krümmungsvek-

tors bewegt. Dies ist der *mittlere Krümmungsfluss*.

Der mittlere Krümmungsfluss wurde mathematisch zum ersten Mal 1978 von Brakke untersucht (siehe [3]), später von Huisken (siehe [12]). Brakke verfolgte dabei einen Ansatz aus der geometrischen Masstheorie, während Huisken einen klassischen differentialgeometrischen Zugang wählte. Um Singularitäten des mittleren Krümmungsflusses beschreiben zu können, führten Osher-Sethian eine “level-set” Beschreibung des mittleren Krümmungsflusses ein (siehe [17]), der später von Evans-Spruck (siehe [6], [7], [8], [9]) und Chen-Giga-Goto (siehe [4]) im Detail untersucht wurde. Ilmanen gelang es schliesslich in [15] einen Zusammenhang zwischen der level-set-Formulierung und dem Varifaltheitsansatz von Brakke herzustellen.

In dieser Arbeit benutzen wir das folgende Modell des mittleren Krümmungsflusses: Sei N eine n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit der Metrik \bar{g} , ausgerüstet mit einem Killingvektorfeld X . Weiter sei M eine differenzierbare, zusammenhängende m -dimensionale Mannigfaltigkeit, $m = n - 1$. Sei $F_t : M \rightarrow N, t \geq 0$, eine glatte Familie von Immersionen von M nach N .

Definition 1.2.1. Die Abbildung F_t ist eine **Lösung des mittleren Krümmungsflusses** auf $(0, T)$, $T > 0$, wenn:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_t &= -H\nu \quad \text{auf } M \times (0, T) \\ F_0 &= f \quad \text{auf } M, \end{aligned}$$

wobei $f : M \rightarrow N$ eine gegebene Anfangshyperfläche M_0 beschreibt. H ist die mittlere Krümmung von $F_t(M)$ bezüglich des Einheitsnormalenvektorfeldes ν auf $F_t(M)$. \diamond

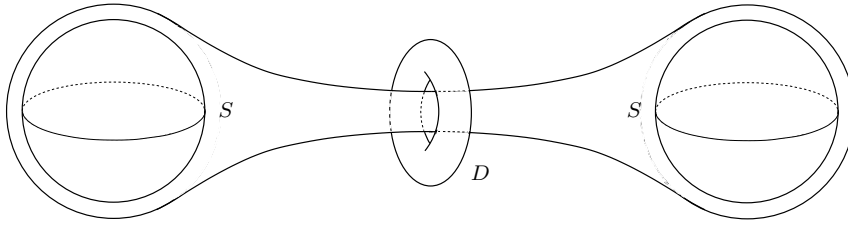
Geometrisch bedeutet dies, dass sich die Hyperfläche $F_t(M)$ in jedem Punkt in Normalenrichtung mit der Geschwindigkeit, die durch den negativen mittleren Krümmungsvektor gegeben ist, fortbewegt. Die Richtung ist also so, dass der Fluss die Fläche bzw. die Kurvenlänge verringert.

Wir bemerken noch, dass der Vektor $H\nu$ unabhängig von der Wahl der zwei möglichen Orientierungen von ν ist. Dieser Term $H\nu$ kann auch geschrieben werden als $\Delta_{F_t(M)} F_t$, wobei $\Delta_{F_t(M)}$ der Laplace-Beltrami Operator auf M ist, bezüglich der von N via F_t zurückgeholten Metrik. In dieser Form sieht die Gleichung des mittleren Krümmungsflusses aus, wie eine parabolische Gleichung. Diese Analogie ist aber nur vordergründig, der Operator evolviert ja zusammen mit der Lösung, und die Gleichung ist daher hochgradig nicht-linear.

Die (klassischen) Lösungen der Gleichung des mittleren Krümmungsflusses “erben” jedoch von der parabolischen Natur der Gleichung immerhin ein Vergleichsprinzip:

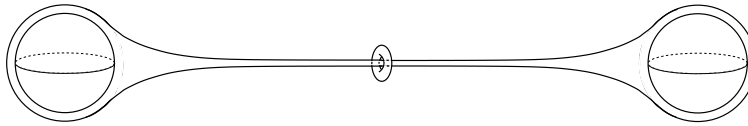
Vergleichsprinzip Sind die Initialflächen $F_0(M)$ und $G_0(M')$ disjunkt, so bleiben die Lösungsflächen $F_t(M)$ und $G_t(M')$ disjunkt, solange sie (als klassische Lösungen) existieren.

Dieses Vergleichsprinzip erlaubt bereits erste Aussagen über das Verhalten von Lösungen des mittleren Krümmungsflusses. Betrachten wir folgendes Beispiel im Euklidischen Raum:

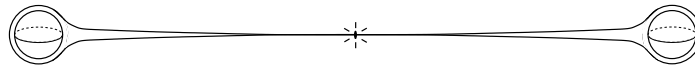


Figur 1.2: Ausgangskonfiguration

Die beiden Sphären S in der Abbildung 1.2 haben denselben Radius R . Wenn wir sie dem mittleren Krümmungsfluss unterwerfen, so werden sie schrumpfen. Da dabei der Betrag der mittleren Krümmung zunimmt, schrumpfen die Kugeln umso schneller, je kleiner sie werden. Das bedeutet, dass sie in endlicher Zeit T_S zu einem Punkt zusammenschrumpfen. Man berechnet ganz leicht, dass $T_S = \frac{R^2}{2 \dim S}$. Zwischen den beiden Sphären ist ein spezieller Torus platziert. Dieser hat die Eigenschaft, unter dem mittleren Krümmungsfluss selbstähnlich zu schrumpfen. Ein solcher Torus wurde 1992 von Angenent (siehe [1]) gefunden (dieser wird “Angenent’s doughnut” genannt). Sagen wir, der gegebene Torus D schrumpfe in der Zeit $T_D < T_S$ zu einem Punkt. Dies kann man etwa dadurch sicherstellen, dass D in einer Sphäre mit Radius $r < R$ enthalten ist. Zwischen den Torus und die zwei Sphären ist in der angegebenen Weise eine hantelförmige Fläche eingefädelt. Wir lassen diese Konfiguration von Initialflächen nun unter dem mittleren Krümmungsfluss evolvieren und beachten, dass wegen des Vergleichsprinzips die Lösungsflächen disjunkt bleiben. Nach einer gewissen Zeit stellt sich die Lösung etwa folgendermassen dar:

Figur 1.3: Wirkung des mittleren Krümmungsflusses auf die Ausgangskonfiguration nach einer gewissen Zeit $t < T_D$

Spätestens zur Zeit T_D (falls sich vorher noch keine Singularität gebildet hat) muss sich eine Singularität bilden:



Figur 1.4: Bildung einer Singularität

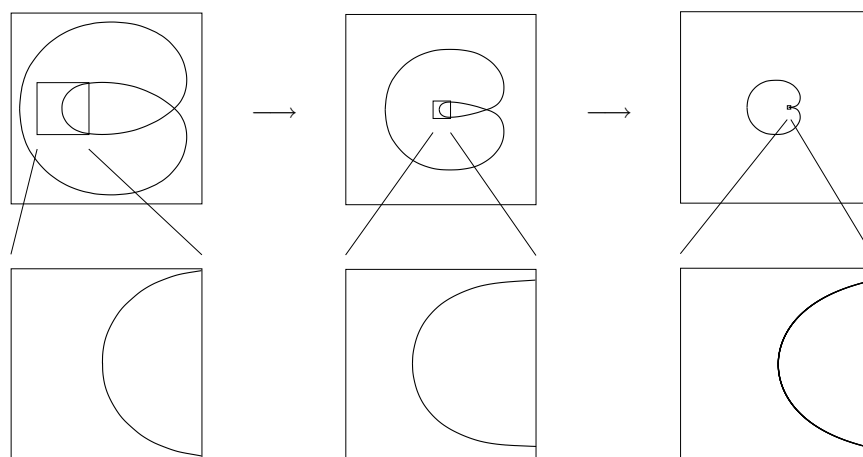
Da die Hantelfläche immer noch die Sphären enthalten muss, hat der schrumpfende Torus die Hantelfläche an der Taille eingeschnürt. Es ist also eine Singularität entstanden, und zwar eine, die keine Verschwindungssingularität ist wie etwa bei der schrumpfenden Sphäre. Will man den mittleren Krümmungsfluss über diese Singularität fortsetzen, benutzt man geeignete Lösungsbegriffe (siehe [3] und [4], respektive [6]–[9]).

Ist die Initialfläche konvex, ist die Situation insofern besser, als Huisken 1984 bewies, dass dann die Lösung konvex bleibt, und in endlicher Zeit zu einem “runden Punkt” schrumpft,

das heisst, es tritt nur eine Verschwindungssingularität auf. Damit meint man folgendes: Wird die Lösungsfläche derart skaliert, dass sie ein konstantes Volumen umschliesst, so konvergiert diese skalierte Lösung in endlicher Zeit gleichmässig gegen eine runde Sphäre.

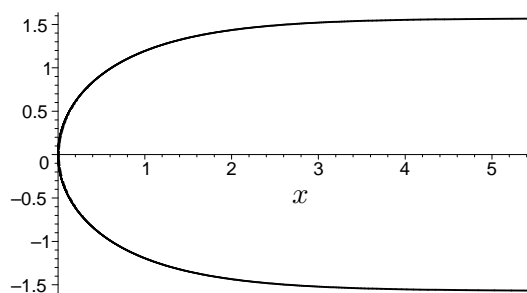
In \mathbb{R}^2 ist die Situation sogar noch besser: Startet man dort den “mittleren Krümmungsfluss” (also einfach den Krümmungsfluss, oder den “curve-shortening flow”) mit einer eingebetteten geschlossenen Kurve, so bleibt die Kurve während der Evolution eingebettet und konvergiert in endlicher Zeit zu einem runden Punkt. Dieses Resultat wurde 1987 von Grayson bewiesen (siehe [11]).

Nichtsdestotrotz kann auch der Krümmungsfluss für Kurven in der Ebene Singularitäten entwickeln, dann nämlich, wenn die Initialkurve nicht eingebettet ist. Das folgende Beispiel stammt von Angenent (siehe [2]):



Figur 1.5: Bildung einer Singularität

Hier leidet der innere Loop unter seiner grösseren Krümmung und schrumpft daher schneller als der äussere Loop. Es entwickelt sich in endlicher Zeit, sagen wir zum Zeitpunkt T^* , eine Singularität. Nun untersucht man die Entwicklung dieser Singularität indem man ein “blow-up” Verfahren anwendet: Um den Punkt maximaler Krümmung skaliert man die Lösung so, dass die reskalierte maximale Krümmung konstant bleibt. Es zeigt sich, dass die skalierte Lösung im Limes, wenn die Zeit gegen T^* strebt, eine wohldefinierte Grenzkurve ergibt, nämlich $x = -\log \cos y$:



Figur 1.6: Grim Reaper

Angenent hat gezeigt, dass jede sogenannte Typ II Singularität von konvexen ebenen Kurven im “blow-up”-Limes exakt diese Kurve erzeugt. Diese Kurve hat nun eine spezielle Eigenschaft: Wenn wir sie als Startkurve für den Krümmungsfluss wählen, so evolviert sie, indem sie mit konstanter Geschwindigkeit nach rechts wandert, dabei jedoch ihre Form beibehält. Hamilton nannte die Kurve aufgrund dieses Verhaltens “Grim Reaper”. Dieses Beispiel verallgemeinernd, nennt man jede Lösung des mittleren Krümmungsflusses, welche unter der Aktion einer Isometriegruppe der umgebenden Mannigfaltigkeit evolviert, ein Soliton². In [13] wurde gezeigt, dass noch weitere Solitonlösungen als parabolische Reskalierungen von Typ II Singularitäten auftreten. Der Grim Reaper (und seine höherdimensionalen Verwandten) war lange Zeit das einzige Beispiel eines Solitons.

Das Wort Soliton wurde von Kruskal und Zabusky geprägt, als sie 1965 in [19] die Korteweg-de Vries Gleichung untersuchten. Dabei stellten sie fest, dass die besagte nicht-lineare Gleichung sogenannte “traveling wave” Lösungen zulässt, welche sich “überlagern” können. Diese Lösungen heissen auch “solitary waves”. Da die Interaktion dieser Lösungen an das Verhalten von Elementarteilchen (die meist auf “...ton”, wie in “Proton”, enden) erinnert, kreierten sie daraus das Kunstwort “Soliton”. Diese Bezeichnung hat sich auch in der Geometrie für Lösungen, die sich unter Isometriegruppen bewegen, eingebürgert, obwohl dort die Eigenschaft der Interaktion im allgemeinen nicht gegeben ist.

Wie wir im Abschnitt 2.3 sehen werden, besitzen Solitonlösungen interessante geometrische Eigenschaften. Des weiteren wurde in gewissen Fällen gezeigt, dass Solitonlösungen Stabilitätseigenschaften aufweisen. Dies wurde erstmals in [14] im Fall der Yin-Yang-Kurve untersucht. Dort wurde gezeigt, dass eine lokale Störung der Yin-Yang-Kurve unter dem mittleren Krümmungsfluss gegen eben diese rotierende Lösung konvergiert. In [18] wurde die Stabilität des Grim Reapers untersucht. Kürzlich wurde in [5] gezeigt, dass auch rotationssymmetrische, strickt konvexe, translatierende Solitonen ebenfalls stabil sind.

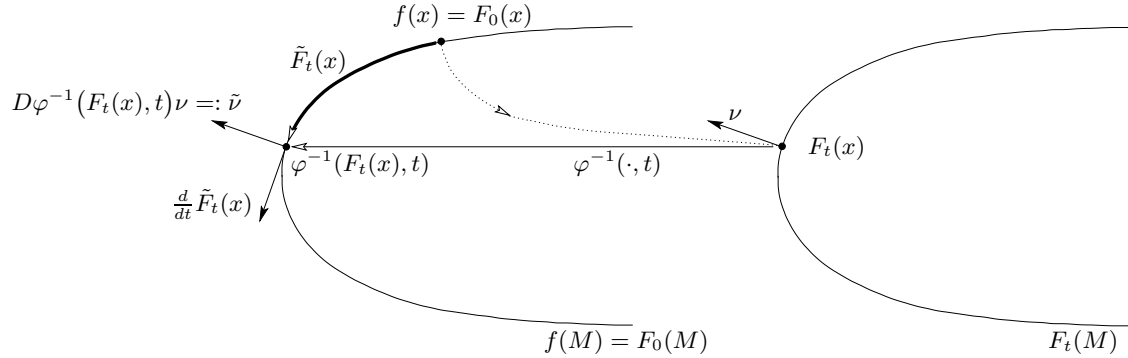
Solitonen sind im Falle des mittleren Krümmungsflusses noch aus einem weiteren Grund nützlich: Um das Vergleichsprinzip anwenden zu können, ist man oft froh, einen möglichst grossen Vorrat an Lösungen zu besitzen, von denen man exakt weiss, wie sie sich verhalten.

Sei nun N eine n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit der Metrik \bar{g} , ausgerüstet mit einem Killingvektorfeld X mit der Isometriegruppe $\varphi : N \times \mathbb{R} \rightarrow N$. Weiter sei M eine differenzierbare, zusammenhängende m -dimensionale Mannigfaltigkeit, $m = n - 1$. Sei $F_t : M \rightarrow N, t \geq 0$, eine Lösung des mittleren Krümmungsflusses auf $(0, T)$, $T > 0$. Die folgende allgemeine Definition einer Solitonlösung für den mittleren Krümmungsfluss geht auf [14] zurück:

Definition 1.2.2. Wir sagen nun, dass F_t eine **Solitonlösung** des mittleren Krümmungsflusses bezüglich dem Killingvektorfeld X ist, wenn $\tilde{F}_t := \varphi^{-1}(F_t, t)$ in Normalenrichtung stationär ist, das heisst, $\tilde{F}_t(M)$ ist für alle $t \in (0, T)$ die gegebene Untermannigfaltigkeit $M_0 = F_0(M)$. \diamond

²In [16] ist der Begriff der Solitonlösung des mittleren Krümmungsflusses leicht anders definiert. Dort heisst eine Lösung eine Solitonlösung, falls die Lösungsflächen zu verschiedenen Zeiten streckungsähnlich bezüglich des Ursprungs sind. Dort wird also nicht die Erhaltung der Form und Grösse verlangt, sondern nur die Erhaltung der Form.

Um diese Definition genauer zu erläutern, betrachten wir die folgende Figur:



Figur 1.7: Illustration zur Definition von Solitonlösungen.

Wir fixieren einen Punkt $x \in M$ und betrachten den Bildpunkt $f(x) \in f(M) = F_0(M)$. Dieser Punkt wird zur Zeit $t > 0$ vom mittleren Krümmungsfluss an den Ort $F_t(x) \in F_t(M)$ transportiert. Diesen Punkt bewegen wir nun mit $\varphi^{-1}(\cdot, t)$ weiter und erhalten den Punkt $\tilde{F}_t(x) := \varphi^{-1}(F_t(x), t)$. Die Definition verlangt nun, dass $\tilde{F}_t(x) \in F_0(M)$. Geometrisch heisst das gerade, dass $F_t(M) = \varphi(F_0(M), t)$, also dass sich die Initialfläche $F_0(M)$ unter dem mittleren Krümmungsfluss genauso bewegt, wie unter dem isometrischen Fluss $\varphi(\cdot, t)$. Das bedeutet, im allgemeinen, aber eben nicht, dass der Fluss $\tilde{F}_t(x)$ stationär ist, sondern nur, dass $\tilde{F}_t(x)$ ein Fluss auf der Initialfläche ist. Oder anders gesagt, $\tilde{F}_t(x)$ ist stationär in Richtung der Normalen zur Initialfläche.

Um Solitonlösungen zu untersuchen, benötigen wir nunmehr natürlich die sie beschreibende Gleichung. Dazu berechnen wir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{F}_t(x) &= \frac{\partial \varphi^{-1}(F_t(x), t)}{\partial t} + D\varphi^{-1}(F_t(x), t) \frac{\partial F_t(x)}{\partial t} \\ &= -X(\tilde{F}_t(x)) - D\varphi^{-1}(F_t(x), t) H\nu. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Da X ein Killingvektorfeld ist, ist $\tilde{\nu}(x, t) = D\varphi^{-1}(F_t(x), t)\nu$ ein Einheitsnormalenvektorfeld auf $\tilde{F}_t(M)$ (siehe Figur 1.7). Die Definition verlangt nun, wie oben gesagt, dass $\langle \frac{d}{dt} \tilde{F}_t(x), \tilde{\nu}(x, t) \rangle = 0$. Also erhalten wir aus (1.3)

$$-\langle X(\tilde{F}_t), \tilde{\nu} \rangle = H \langle D\varphi^{-1}\nu, \tilde{\nu} \rangle = H \langle \tilde{\nu}, \tilde{\nu} \rangle = H.$$

Dies gilt insbesondere für $t = 0$. So erfüllt eine Solitonlösung $f : M \rightarrow N$ des mittleren Krümmungsflusses die Gleichung

$$-\langle X(f), \nu(f) \rangle = H(f). \quad (1.4)$$

(Diese Gleichung erscheint erstmals in [14] und sie wurde in der betreffenden Arbeit auch erstmals untersucht.) Umgekehrt ist leicht zu sehen, dass eine Funktion f , welche (1.4) erfüllt, in der Tat Anlass zu einer Solitonlösung bezüglich X gibt.

Bemerkung 1.2.3. Durch Multiplikation mit ν sieht man ein, dass (1.4) äquivalent zu

$$-\langle X(f), \nu(f) \rangle \nu(f) = H(f) \nu(f).$$

Das heisst, eine Solitonfläche ist dadurch charakterisiert, dass in jedem ihrer Punkte der mittlere Krümmungsvektor $H\nu$ die Normalkomponente des Killingfeldes annihiliert. \diamond

Für konkrete Berechnungen, ist es notwendig, die Terme in (1.4) in lokalen Koordinaten auszudrücken.

Wir bezeichnen die Metrik auf der Mannigfaltigkeit N durch $\bar{g}_{\alpha\beta}$. Dann sind die Christoffelsymbole bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhangs gegeben durch $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{1}{2}\bar{g}^{\gamma\varepsilon}(\bar{g}_{\alpha\varepsilon,\beta} + \bar{g}_{\beta\varepsilon,\alpha} - \bar{g}_{\alpha\beta,\varepsilon})$. Die Griechischen Indizes α, β, γ laufen von 1 bis n . Die Metrik und die Christoffelsymbole auf der immersierten Mannigfaltigkeit M bezeichnen wir mit g_{ij} und $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}(g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l})$ mit Indizes laufend von 1 bis $m = n - 1$. Für die Berechnung der mittleren Krümmung ist die Gaussgleichung

$$\frac{\partial^2 f^{\alpha}}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f^{\alpha}}{\partial x^k} + \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha} \frac{\partial f^{\beta}}{\partial x^i} \frac{\partial f^{\gamma}}{\partial x^j} = -h_{ij}\nu^{\alpha} \quad (1.5)$$

nützlich. Dabei bezeichnet h_{ij} die zweite Fundamentalform. Diese kann berechnet werden, indem man (1.5) mit $\nu_{\alpha} = \bar{g}_{\alpha\beta}\nu^{\beta}$ multipliziert. Dann ist die mittlere Krümmung gegeben durch

$$H = g^{ij}h_{ij}. \quad (1.6)$$

Hierbei ist zu beachten, dass $\langle \frac{\partial f}{\partial x^k}, \nu \rangle_{\bar{g}} = 0$, das heisst, der mittlere Term in (1.5) fällt weg.

Kapitel 2

Solitonkurven

In diesem Abschnitt untersuchen wir den Fall von Solitonkurven auf Riemannschen Flächen.

2.1 Inverse Problemstellung

Üblicherweise ist man daran interessiert, bei gegebener Metrik Solitonlösungen zu finden. Hier drehen wir diese Problemstellung einmal um. Das heisst, wir geben uns eine Kurve vor und fragen uns nach einer Metrik, für die diese Kurve ein Soliton wird.

Sei

$$\left(\mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} \bar{g}_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), \quad \bar{g}_{11} = \bar{g}_{11}(x_1) > 0,$$

eine globale Karte der zweidimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit N . Offenbar ist durch

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

darauf ein Killingvektorfeld gegeben. Weiter sei $M = \mathbb{R}$. Wir geben uns nun die Kurve

$$\gamma : M \rightarrow N, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$$

vor und fragen uns, ob ein $\bar{g}_{11}(x_1)$ existiert, so dass die Kurve γ ein Soliton wird. Die induzierte Metrik auf M ist gegeben durch $g_{11} = \langle \gamma', \gamma' \rangle_{\bar{g}} = \bar{g}_{11} + (f')^2$. Um die (mittlere) Krümmung $H = g^{11} h_{11}$ in Abhängigkeit von \bar{g} aus der Gaussformel (1.5) zu erhalten, müssen wir zuerst ν und die Christoffelsymbole auf N berechnen.

1. *Berechnung von ν* : Es muss gelten, dass $\langle \gamma', \nu \rangle_{\bar{g}} = 0$ ist. Offenbar ist diese Bedingung für

$$\mu = \begin{pmatrix} -f' \\ \bar{g}_{11} \end{pmatrix}$$

erfüllt. Damit erhalten wir einen Einheitsnormalenvektor

$$\nu = \frac{\mu}{\|\mu\|_{\bar{g}}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{11}}\sqrt{\bar{g}_{11} + (f')^2}} \begin{pmatrix} -f' \\ \bar{g}_{11} \end{pmatrix}.$$

2. *Berechnung der Christoffelsymbole:* Mit der Formel für die Christoffelsymbole, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{g}_{11}} \bar{g}'_{11} \\ \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma &= 0, \quad \text{sonst} \end{aligned}$$

Multiplizieren wir nun (1.5) mit $\bar{g}_{\alpha\beta}\nu^\beta$, so erhalten wir für $H = g^{11}h_{11}$:

$$-H = \frac{1}{\bar{g}_{11} + (f')^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{11}}\sqrt{\bar{g}_{11} + (f')^2}} \left(f''\bar{g}_{11} - \frac{1}{2}f'\bar{g}'_{11} \right) = \frac{f''\bar{g}_{11} - \frac{1}{2}f'\bar{g}'_{11}}{(\bar{g}_{11} + (f')^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\bar{g}_{11}}}$$

Aus den früheren Berechnungen wissen wir, dass eine Solitonlösung die Gleichung (1.4), $\langle X, \nu \rangle = -H$, erfüllen muss. Setzen wir unsere Ausrechnungen ein, so erhalten wir die folgende Gleichung:

$$\frac{\sqrt{\bar{g}_{11}}}{\sqrt{\bar{g}_{11} + (f')^2}} = \frac{f''\bar{g}_{11} - \frac{1}{2}f'\bar{g}'_{11}}{(\bar{g}_{11} + (f')^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\bar{g}_{11}}}$$

Formen wir diese Gleichung etwas um, so erhalten wir für \bar{g}_{11} die folgende Differentialgleichung

$$\bar{g}'_{11} + 2 \left(f' - \frac{f''}{f'} \right) \bar{g}_{11} + \frac{2}{f'} \bar{g}_{11}^2 = 0. \quad (2.1)$$

Diese Bernoulli-Gleichung hat die Lösung

$$\bar{g}_{11}(x) = \frac{(f(x)')^2}{Ce^{2f(x)} - 1}. \quad (2.2)$$

Da $\bar{g}_{11} > 0$ gelten muss, erhalten wir die Bedingung

$$\frac{(f(x)')^2}{Ce^{2f(x)} - 1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Zur Diskussion dieser Bedingung betrachten wir zwei Fälle:

1. *Fall:* $f'(x) \neq 0 \forall x$. Dann muss gelten, dass $Ce^{2f(x)} - 1 > 0 \forall x \iff C > e^{-2f(x)} \forall x$. Damit die letzte Bedingung für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ erfüllt ist, muss f von unten beschränkt sein. Ist dies der Fall, so gilt für

$$C_0 := \inf\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

dass $f(x) > C_0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, da $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist für jedes C mit $C \geq e^{-2C_0}$ die Bedingung (2.3) und somit (2.2) erfüllt.

2. *Fall:* Es existiert ein x_0 , so dass $f'(x_0) = 0$ ist. Dann muss

(i) $Ce^{2f(x_0)} = 1$ (oder äquivalent $C = e^{-2f(x_0)}$) und

(ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f'(x))^2}{Ce^{2f(x)} - 1} > 0$

erfüllt sein, damit (2.3) in x_0 gilt. (ii) ist äquivalent zu $f''(x_0) > 0$, denn nach de l'Hôpital gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f'(x))^2}{C e^{2f(x)} - 1} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{C e^{2f(x)}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{e^{2(f(x)-f(x_0))}} = f''(x_0)$$

Mit anderen Worten, x_0 ist ein isoliertes lokales Minimum der Funktion f und $C = e^{-2f(x_0)}$ ist eindeutig bestimmt. Falls $f'(x_1) = 0$ für ein $x_1 \neq x_0$ wäre, so müsste in x_1 ebenfalls $C = e^{-2f(x_1)}$ gelten, das heisst $f(x_1) = f(x_0)$ und $f''(x_1) > 0$. Aus dem Satz von Rolle folgt dann, da f in x_0 und x_1 isolierte lokale Minima hat, dass es ein $x_2 \in]x_0, x_1[$ mit $f'(x_2) = 0$ gibt, aber $f(x_2) > f(x_0)$. Dies ist ein Widerspruch, da in x_2 ebenfalls $f(x_2) = f(x_0)$ gelten muss. Also darf f nur einen einzigen Punkt mit verschwindender Ableitung besitzen. Schliesslich folgt dann wegen $f(x) - f(x_0) > 0$, dass

$$\frac{(f'(x))^2}{e^{2(f(x)-f(x_0))} - 1} > 0 \quad \forall x \neq x_0.$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Theorem 2.1.1. *Die Kurve $x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ ist genau dann Solitonlösung des Krümmungsflusses zu einer Metrik $\begin{pmatrix} \bar{g}_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, falls eine der beiden Bedingungen erfüllt ist:*

- (a) $f'(x) \neq 0 \quad \forall x$ und f ist von unten beschränkt.
- (b) Es gibt genau ein x_0 , so dass $f'(x_0) = 0$ und dort gilt $f''(x_0) > 0$.

Im Fall (a) ist jede Metrik mit

$$\bar{g}_{11}(x) = \frac{(f'(x))^2}{C e^{2f(x)} - 1}$$

für ein $C > e^{-2C_0}$ möglich, wobei $C_0 = \inf f$. Im Fall (b) ist \bar{g}_{11} durch

$$\bar{g}_{11}(x) = \frac{(f'(x))^2}{e^{2(f(x)-f(x_0))} - 1}$$

eindeutig bestimmt.

2.2 Solitonkurven auf geodätisch vollständigen Riemannschen Flächen

Sei N eine 2-dimensionale differenzierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit mit der Metrik \bar{g} . Wir nehmen an, dass auf N ein glattes Killingvektorfeld $X : N \rightarrow TN$ existiert. Weiter sei M ein offenes Intervall von \mathbb{R} .

Um in lokalen Koordinaten rechnen zu können, benötigen wir Karten von N . Eine solche Karte sei durch $\phi : U \subset N \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$ gegeben. Die gesuchte Solitonlösung des Krümmungsflusses $\gamma : M \rightarrow N$ bezeichnen wir in lokalen Koordinaten mit $f = \phi \circ \gamma : \gamma^{-1}(U) \rightarrow V$, $s \mapsto (x(s), y(s))$. Umgekehrt ist γ dann in der betreffenden Karte durch $\gamma = \phi^{-1} \circ f$ gegeben.

Die Abbildung $\gamma : M \rightarrow N$ ist eine Solitonlösung des mittleren Krümmungsflusses, wenn ihre lokale Darstellung f die Gleichung

$$-\langle X(f), \nu(f) \rangle_{\bar{g}} = H(f) \quad (2.4)$$

erfüllt. Wir suchen nun eine explizite Formulierung dieser Gleichung, das heisst, wir benötigen Koordinatenausdrücke für $X(f)$, $\nu(f)$ und $H(f)$.

Zur Vereinfachung der Berechnungen setzen wir $\bar{g}_{\alpha\beta} = \bar{g}_{\alpha\beta}(x(s), y(s))$, wobei griechische Indizes die Werte 1 und 2 annehmen. Ferner schreiben wir kurz $f' = \frac{d}{ds}f(s) = (x'(s), y'(s)) = (x', y')$. Es stellt sich als günstig heraus, die Kurve γ nach ihrer Bogenlänge zu parametrisieren, das heisst

$$\langle f', f' \rangle_{\bar{g}} = (x')^2 \bar{g}_{11} + 2x'y' \bar{g}_{12} + (y')^2 \bar{g}_{22} = 1. \quad (2.5)$$

Als erstes berechnen wir die Einheitsnormale ν an die Kurve γ . Sie ist lokal in der gewählten Kartenumgebung beschrieben durch

$$\nu = \frac{\mu}{\|\mu\|_{\bar{g}}}$$

wobei μ die Bedingung

$$0 = \langle f', \mu \rangle_{\bar{g}} = (x', y') \begin{pmatrix} \bar{g}_{11} & \bar{g}_{12} \\ \bar{g}_{12} & \bar{g}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Daraus erhalten wir die Gleichung

$$\mu_1(\bar{g}_{11}x' + \bar{g}_{12}y') + \mu_2(\bar{g}_{12}x' + \bar{g}_{22}y') = 0,$$

die mit $\mu_1 := \bar{g}_{12}x' + \bar{g}_{22}y'$ und $\mu_2 := -(\bar{g}_{11}x' + \bar{g}_{12}y')$ erfüllt ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|\mu\|_{\bar{g}}^2 &= \langle \mu, \mu \rangle_{\bar{g}_{\alpha\beta}} = \bar{g}_{11}\mu_1^2 + 2\bar{g}_{12}\mu_1\mu_2 + \bar{g}_{22}\mu_2^2 \\ &= \det \bar{g}_{\alpha\beta} (\bar{g}_{11}(x')^2 + \bar{g}_{12}2x'y' + \bar{g}_{22}(y')^2) = \det \bar{g}_{\alpha\beta} \|f'\|_{\bar{g}}^2 \\ &\stackrel{(2.5)}{=} \det \bar{g}_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für die Normale ν

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{\det \bar{g}_{\alpha\beta}}} (\bar{g}_{12}x' + \bar{g}_{22}y', -(\bar{g}_{11}x' + \bar{g}_{12}y')). \quad (2.6)$$

Die (mittlere) Krümmung H ist nach (1.6) durch $H = g^{11}h_{11}$ gegeben. Wegen (2.5) ist die durch f auf M induzierte Metrik gerade die Standardmetrik, das heisst $H = h_{11}$, wobei h_{11} nach (1.5) durch die Gauss Gleichung

$$\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial s^2} - \Gamma_{11}^1 \frac{\partial f^\alpha}{\partial s} + \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \frac{df^\beta}{ds} \frac{df^\gamma}{ds} = -h_{11}\nu^\alpha \quad (2.7)$$

bestimmt ist.

Wie wir am Ende des Abschnitts 1.2 bemerkt haben, fällt der mittlere Term auf der linken Seite weg, wenn wir mit $\bar{g}_{\alpha\beta}\nu^\beta$ multiplizieren. So genügt es, nur die Christoffelsymbole von N zu berechnen. Mit der Formel für die Christoffelsymbole in lokalen Koordinaten, $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2}\bar{g}^{\gamma\varepsilon}(\bar{g}_{\alpha\varepsilon,\beta} + \bar{g}_{\beta\varepsilon,\alpha} - \bar{g}_{\alpha\beta,\varepsilon})$, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\det \bar{g}_{\alpha\beta}} (\bar{g}_{22}\bar{g}_{11,1} - 2\bar{g}_{12}\bar{g}_{12,1} + \bar{g}_{12}\bar{g}_{11,2}) \\
\bar{\Gamma}_{11}^2 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\det \bar{g}_{\alpha\beta}} (-\bar{g}_{12}\bar{g}_{11,1} + 2\bar{g}_{11}\bar{g}_{12,1} - \bar{g}_{11}\bar{g}_{11,2}) \\
\bar{\Gamma}_{12}^1 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\det \bar{g}_{\alpha\beta}} (\bar{g}_{22}\bar{g}_{11,2} - \bar{g}_{12}\bar{g}_{22,1}) \\
\bar{\Gamma}_{21}^1 &= \bar{\Gamma}_{12}^1 \\
\bar{\Gamma}_{12}^2 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\det \bar{g}_{\alpha\beta}} (-\bar{g}_{12}\bar{g}_{11,2} + \bar{g}_{11}\bar{g}_{22,1}) \\
\bar{\Gamma}_{21}^2 &= \bar{\Gamma}_{12}^2 \\
\bar{\Gamma}_{22}^1 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\det \bar{g}_{\alpha\beta}} (-2\bar{g}_{12}\bar{g}_{12,2} + \bar{g}_{12}\bar{g}_{22,1} + \bar{g}_{11}\bar{g}_{22,2}) \\
\bar{\Gamma}_{22}^2 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\det \bar{g}_{\alpha\beta}} (2\bar{g}_{22}\bar{g}_{12,2} - \bar{g}_{22}\bar{g}_{22,1} - \bar{g}_{12}\bar{g}_{22,2}).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Multiplizieren wir nun die Gleichung (2.7) mit $\bar{g}_{\alpha\beta}\nu^\beta$, dann erhalten wir

$$-h_{11} = \langle f'', \nu \rangle_{\bar{g}} + \bar{\Gamma}_{\varepsilon\gamma}^\alpha \frac{df^\varepsilon}{ds} \frac{df^\gamma}{ds} \bar{g}_{\alpha\beta} \nu^\beta =: D_1 + D_2.$$

Berechnung von D_1 :

$$\begin{aligned}
D_1 &= x''(\bar{g}_{11}\nu^1 + \bar{g}_{12}\nu^2) + y''(\bar{g}_{12}\nu^1 + \bar{g}_{22}\nu^2) \\
&\stackrel{(2.6)}{=} (x''y' + y''x')\sqrt{\det \bar{g}_{\alpha\beta}}
\end{aligned}$$

Berechnung von D_2 :

$$\begin{aligned}
D_2 &= \bar{\Gamma}_{\varepsilon\gamma}^\alpha \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial s} \frac{\partial f^\gamma}{\partial s} \bar{g}_{\alpha\beta} \nu^\beta \\
&= (x')^2(\bar{\Gamma}_{11}^1\bar{g}_{11}\nu^1 + \bar{\Gamma}_{11}^1\bar{g}_{12}\nu^2 + \bar{\Gamma}_{11}^2\bar{g}_{12}\nu^1 + \bar{\Gamma}_{11}^2\bar{g}_{22}\nu^2) \\
&\quad + 2x'y'(\bar{\Gamma}_{12}^1\bar{g}_{11}\nu^1 + \bar{\Gamma}_{12}^1\bar{g}_{12}\nu^2 + \bar{\Gamma}_{12}^2\bar{g}_{12}\nu^1 + \bar{\Gamma}_{12}^2\bar{g}_{22}\nu^2) \\
&\quad + (y')^2(\bar{\Gamma}_{22}^1\bar{g}_{11}\nu^1 + \bar{\Gamma}_{22}^1\bar{g}_{12}\nu^2 + \bar{\Gamma}_{22}^2\bar{g}_{12}\nu^1 + \bar{\Gamma}_{22}^2\bar{g}_{22}\nu^2) \\
&=: (x')^2 D_{21} + 2x'y' D_{22} + (y')^2 D_{23}
\end{aligned}$$

Berechnung der D_{21}, D_{22}, D_{23} :

$$\begin{aligned}
D_{21} &= \bar{\Gamma}_{11}^1(\bar{g}_{11}\nu^1 + \bar{g}_{12}\nu^2) + \bar{\Gamma}_{11}^2(\bar{g}_{12}\nu^1 + \bar{g}_{22}\nu^2) \\
&\stackrel{(2.8)}{=} \frac{1}{2} \frac{1}{\det \bar{g}_{\alpha\beta}} (\bar{g}_{22}g_{11,1} - 2\bar{g}_{12}\bar{g}_{12,1} + \bar{g}_{12}\bar{g}_{11,2}) \cdot \\
&\quad \left(\bar{g}_{11} \frac{1}{\sqrt{\det \bar{g}_{\alpha\beta}}} (\bar{g}_{12}x' + \bar{g}_{22}y') - \bar{g}_{12} \frac{1}{\sqrt{\det \bar{g}_{\alpha\beta}}} (\bar{g}_{11}x' + \bar{g}_{12}y') \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{\det \bar{g}_{\alpha\beta}} (-\bar{g}_{12}\bar{g}_{11,1} + 2\bar{g}_{11}\bar{g}_{12,1} - \bar{g}_{11}\bar{g}_{11,2}) \cdot \\
&\quad \left(\bar{g}_{12} \frac{1}{\sqrt{\det \bar{g}_{\alpha\beta}}} (\bar{g}_{12}x' + \bar{g}_{22}y') - \bar{g}_{22} \frac{1}{\sqrt{\det \bar{g}_{\alpha\beta}}} (\bar{g}_{11}x' + \bar{g}_{12}y') \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det \bar{g}_{\alpha\beta}}} ((\bar{g}_{12}\bar{g}_{11,1} - 2\bar{g}_{11}\bar{g}_{12,1} + \bar{g}_{11}\bar{g}_{11,2})x' + (\bar{g}_{22}\bar{g}_{11,1} - 2\bar{g}_{12}\bar{g}_{12,1} + \bar{g}_{12}\bar{g}_{11,2})y')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{22} &= \bar{\Gamma}_{12}^1(\bar{g}_{11}\nu^1 + \bar{g}_{12}\nu^2) + \bar{\Gamma}_{12}^2(\bar{g}_{12}\nu^1 + \bar{g}_{22}\nu^2) \\
&\stackrel{(2.8)}{=} \frac{1}{2} \frac{1}{\det \bar{g}_{\alpha\beta}} (\bar{g}_{22}g_{11,2} - \bar{g}_{12}\bar{g}_{22,1}) \cdot \\
&\quad \left(\bar{g}_{11} \frac{1}{\sqrt{\det \bar{g}_{\alpha\beta}}} (\bar{g}_{12}x' + \bar{g}_{22}y') - \bar{g}_{12} \frac{1}{\sqrt{\det \bar{g}_{\alpha\beta}}} (\bar{g}_{11}x' + \bar{g}_{12}y') \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{\det \bar{g}_{\alpha\beta}} (-\bar{g}_{12}\bar{g}_{11,2} + \bar{g}_{11}\bar{g}_{22,1}) \cdot \\
&\quad \left(\bar{g}_{12} \frac{1}{\sqrt{\det \bar{g}_{\alpha\beta}}} (\bar{g}_{12}x' + \bar{g}_{22}y') - \bar{g}_{22} \frac{1}{\sqrt{\det \bar{g}_{\alpha\beta}}} (\bar{g}_{11}x' + \bar{g}_{12}y') \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det \bar{g}_{\alpha\beta}}} ((\bar{g}_{12}\bar{g}_{11,2} - \bar{g}_{11}\bar{g}_{22,1})x' + (\bar{g}_{22}\bar{g}_{11,2} - \bar{g}_{12}\bar{g}_{22,1})y')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{23} &= \bar{\Gamma}_{22}^1(\bar{g}_{11}\nu^1 + \bar{g}_{12}\nu^2) + \bar{\Gamma}_{22}^2(\bar{g}_{12}\nu^1 + \bar{g}_{22}\nu^2) \\
&\stackrel{(2.8)}{=} \frac{1}{2} \frac{1}{\det \bar{g}_{\alpha\beta}} (2\bar{g}_{22}g_{12,2} - \bar{g}_{22}\bar{g}_{22,1} - \bar{g}_{12}\bar{g}_{22,2}) \cdot \\
&\quad \left(\bar{g}_{11} \frac{1}{\sqrt{\det \bar{g}_{\alpha\beta}}} (\bar{g}_{12}x' + \bar{g}_{22}y') - \bar{g}_{12} \frac{1}{\sqrt{\det \bar{g}_{\alpha\beta}}} (\bar{g}_{11}x' + \bar{g}_{12}y') \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{\det \bar{g}_{\alpha\beta}} (-2\bar{g}_{12}\bar{g}_{12,2} + \bar{g}_{12}\bar{g}_{22,1} + \bar{g}_{11}\bar{g}_{22,2}) \cdot \\
&\quad \left(\bar{g}_{12} \frac{1}{\sqrt{\det \bar{g}_{\alpha\beta}}} (\bar{g}_{12}x' + \bar{g}_{22}y') - \bar{g}_{22} \frac{1}{\sqrt{\det \bar{g}_{\alpha\beta}}} (\bar{g}_{11}x' + \bar{g}_{12}y') \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det \bar{g}_{\alpha\beta}}} ((2\bar{g}_{12}\bar{g}_{12,2} - \bar{g}_{12}\bar{g}_{22,1} - \bar{g}_{11}\bar{g}_{22,2})x' + (2\bar{g}_{22}\bar{g}_{12,2} - \bar{g}_{22}\bar{g}_{22,1} - \bar{g}_{12}\bar{g}_{22,2})y')
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für D_2 :

$$\begin{aligned}
D_2 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det \bar{g}_{\alpha\beta}}} \times \\
&\quad \times \left((x')^2 ((\bar{g}_{12}\bar{g}_{11,1} - 2\bar{g}_{11}\bar{g}_{12,1} + \bar{g}_{11}\bar{g}_{11,2})x' + (\bar{g}_{22}\bar{g}_{11,1} - 2\bar{g}_{12}\bar{g}_{12,1} + \bar{g}_{12}\bar{g}_{11,2})y') \right. \\
&\quad + 2x'y'((\bar{g}_{12}\bar{g}_{11,2} - \bar{g}_{11}\bar{g}_{22,1})x' + (\bar{g}_{22}\bar{g}_{11,2} - \bar{g}_{12}\bar{g}_{22,1})y') \\
&\quad \left. + (y')^2((2\bar{g}_{12}\bar{g}_{12,2} - \bar{g}_{12}\bar{g}_{22,1} - \bar{g}_{11}\bar{g}_{22,2})x' + (2\bar{g}_{22}\bar{g}_{12,2} - \bar{g}_{22}\bar{g}_{22,1} - \bar{g}_{12}\bar{g}_{22,2})y') \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det \bar{g}_{\alpha\beta}}} \left((x')^3 (\bar{g}_{12}\bar{g}_{11,1} + \bar{g}_{11}(-2\bar{g}_{12,1} + \bar{g}_{11,2})) \right. \\
&\quad + (x')^2 y' (\bar{g}_{22}\bar{g}_{11,1} + \bar{g}_{12}(-2\bar{g}_{12,1} + 3\bar{g}_{11,2}) - 2\bar{g}_{11}\bar{g}_{22,1}) \\
&\quad + x'(y')^2 (2\bar{g}_{22}\bar{g}_{11,2} + \bar{g}_{12}(2\bar{g}_{12,2} - 3\bar{g}_{22,1}) - \bar{g}_{11}\bar{g}_{22,2}) \\
&\quad \left. + (y')^3 (\bar{g}_{22}(2\bar{g}_{12,2} - \bar{g}_{22,1}) - \bar{g}_{12}\bar{g}_{22,2}) \right)
\end{aligned}$$

Für $-H = -h_{11} = D_1 + D_2$ erhalten wir schlussendlich

$$\begin{aligned}
-H &= (x''y' + y''x')\sqrt{\det \bar{g}_{\alpha\beta}} \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det \bar{g}_{\alpha\beta}}} \left((x')^3 (\bar{g}_{12}\bar{g}_{11,1} + \bar{g}_{11}(-2\bar{g}_{12,1} + \bar{g}_{11,2})) \right. \\
&\quad + (x')^2 y' (\bar{g}_{22}\bar{g}_{11,1} + \bar{g}_{12}(-2\bar{g}_{12,1} + 3\bar{g}_{11,2}) - 2\bar{g}_{11}\bar{g}_{22,1}) \\
&\quad + x'(y')^2 (2\bar{g}_{22}\bar{g}_{11,2} + \bar{g}_{12}(2\bar{g}_{12,2} - 3\bar{g}_{22,1}) - \bar{g}_{11}\bar{g}_{22,2}) \\
&\quad \left. + (y')^3 (\bar{g}_{22}(2\bar{g}_{12,2} - \bar{g}_{22,1}) - \bar{g}_{12}\bar{g}_{22,2}) \right).
\end{aligned}$$

Nun müssen wir noch $\langle X, \nu \rangle_{\bar{g}}$ berechnen. Das Killing Vektorfeld X sei in den verwendeten Koordinaten durch $X = (\eta, \xi)$ gegeben. An Regularität setzen wir voraus, dass X mindestens lokal Lipschitz-stetig ist. Dann ist

$$\langle X, \nu \rangle_{\bar{g}} = \sqrt{\det \bar{g}_{\alpha\beta}}(\eta y' - \xi x').$$

Somit erhalten wir für $\langle X, \nu \rangle_{\bar{g}} = -H$ explizit in Koordinaten die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
\sqrt{\det \bar{g}_{\alpha\beta}}(\eta y' - \xi x') &= (x''y' + y''x')\sqrt{\det \bar{g}_{\alpha\beta}} \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det \bar{g}_{\alpha\beta}}} \left((x')^3 (\bar{g}_{12}\bar{g}_{11,1} + \bar{g}_{11}(-2\bar{g}_{12,1} + \bar{g}_{11,2})) \right. \\
&\quad + (x')^2 y' (\bar{g}_{22}\bar{g}_{11,1} + \bar{g}_{12}(-2\bar{g}_{12,1} + 3\bar{g}_{11,2}) - 2\bar{g}_{11}\bar{g}_{22,1}) \\
&\quad + x'(y')^2 (2\bar{g}_{22}\bar{g}_{11,2} + \bar{g}_{12}(2\bar{g}_{12,2} - 3\bar{g}_{22,1}) - \bar{g}_{11}\bar{g}_{22,2}) \\
&\quad \left. + (y')^3 (\bar{g}_{22}(2\bar{g}_{12,2} - \bar{g}_{22,1}) - \bar{g}_{12}\bar{g}_{22,2}) \right).
\end{aligned}$$

Mit der Bedingung der Bogenlänge (2.5) und der Gleichung $\langle X, \nu \rangle_{\bar{g}} = -H$ erhalten wir

das folgende Gleichungssystem:

$$\bar{g}_{11}(x')^2 + 2\bar{g}_{12}x'y' + \bar{g}_{22}(y')^2 = 1 \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} x''y' - x'y'' &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\det \bar{g}_{\alpha\beta}} \left((x')^3 (\bar{g}_{12}\bar{g}_{11,1} + \bar{g}_{11}(\bar{g}_{11,2} - 2\bar{g}_{12,1})) \right. \\ &\quad + (x')^2 y' (\bar{g}_{22}\bar{g}_{11,1} + \bar{g}_{12}(3\bar{g}_{11,2} - 2\bar{g}_{12,1}) - 2\bar{g}_{11}\bar{g}_{22,1}) \\ &\quad + x'(y')^2 (2\bar{g}_{22}\bar{g}_{11,2} + \bar{g}_{12}(2\bar{g}_{12,2} - 3\bar{g}_{22,1}) - \bar{g}_{11}\bar{g}_{22,2}) \\ &\quad \left. + (y')^3 (\bar{g}_{22}(2\bar{g}_{12,2} - \bar{g}_{22,1}) - \bar{g}_{12}\bar{g}_{22,2}) \right) \\ &\quad - x'\xi + y'\eta \\ &=: \theta(x, y, x', y', \xi, \eta) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Wir geben uns die folgenden Anfangsbedingungen in der gewählten Karte vor

$$\begin{aligned} x(s_0) &= x_0 \\ y(s_0) &= y_0 \\ x'(s_0) &= u_0 \\ y'(s_0) &= v_0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

und es soll gelten, dass

$$\|(u_0, v_0)\|_{\bar{g}} = 1. \quad (2.12)$$

Damit wir ein Gleichungssystem zweiter Ordnung erhalten, das wir nach x'' und y'' auflösen können, leiten wir die Gleichung (2.9) nach s ab. Damit erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x''2(\bar{g}_{11}x' + \bar{g}_{12}y') + y''2(\bar{g}_{12}x' + \bar{g}_{22}y') &= -(x')^3\bar{g}_{11,1} \\ &\quad - (x')^2y'(\bar{g}_{11,2} + 2\bar{g}_{12,1}) \\ &\quad - x'(y')^2(2\bar{g}_{12,2} + \bar{g}_{22,1}) \\ &\quad - (y')^3\bar{g}_{22,2} \\ x''y' - x'y'' &= \theta(x, y, x', y', \xi, \eta) \end{aligned} \quad (2.13)$$

mit den Anfangsbedingungen (2.11) und (2.12).

Die linke Seite dieses Systems können wir schreiben als $A \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2(\bar{g}_{11}x' + \bar{g}_{12}y') & 2(\bar{g}_{12}x' + \bar{g}_{22}y') \\ y' & -x' \end{pmatrix}$$

Dann ist $\det A \neq 0$, denn

$$\begin{aligned} \det A &= -2(\bar{g}_{11}x' + \bar{g}_{12}y')x' - 2(\bar{g}_{12}x' + \bar{g}_{22}y')y' \\ &= -2((x')^2\bar{g}_{11} + 2x'y'(\bar{g}_{12}) + (y')^2\bar{g}_{22}) \\ &= -2. \end{aligned}$$

Damit können wir (2.13) nach x'' und nach y'' auflösen und das System als ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung schreiben

$$\begin{aligned}
x' &= u \\
y' &= v \\
u' &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\det \bar{g}_{\alpha\beta}} \left(u^2 (\bar{g}_{22} \bar{g}_{11,1} + \bar{g}_{12} (\bar{g}_{11,2} - 2\bar{g}_{12,1})) \right. \\
&\quad + uv (2\bar{g}_{22} \bar{g}_{11,2} - 2\bar{g}_{12} \bar{g}_{22,1}) \\
&\quad + v^2 (\bar{g}_{22} (2\bar{g}_{12,2} - \bar{g}_{22,1}) - \bar{g}_{12} \bar{g}_{22,2}) \Big) \\
&\quad - u^2 \bar{g}_{12} \xi - uv (\bar{g}_{22} \xi - \bar{g}_{12} \eta) + v^2 \bar{g}_{22} \eta \\
v' &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\det \bar{g}_{\alpha\beta}} \left(u^2 (\bar{g}_{12} \bar{g}_{11,1} + \bar{g}_{11} (\bar{g}_{11,2} - 2\bar{g}_{12,1})) \right. \\
&\quad + uv (2\bar{g}_{12} \bar{g}_{11,2} - 2\bar{g}_{11} \bar{g}_{22,1}) \\
&\quad + v^2 (\bar{g}_{12} (2\bar{g}_{12,2} - \bar{g}_{22,1}) - \bar{g}_{11} \bar{g}_{22,2}) \Big) \\
&\quad + u^2 \bar{g}_{11} \xi - uv (\bar{g}_{12} \xi - \bar{g}_{11} \eta) - v^2 \bar{g}_{12} \eta
\end{aligned} \tag{2.14}$$

mit den Anfangsbedingungen (2.11) und (2.12).

Zur Abkürzung schreiben wir für (2.14) einfach $(x, y, u, v)' =: \Theta(x, y, u, v)$.

Wir haben also gesehen, dass aus (2.9)–(2.12) das System (2.14) mit (2.11), (2.12) folgt. Umgekehrt ist sehr leicht zu sehen, dass jede Lösung (x, y) von (2.14) mit (2.11), (2.12) eine Lösung von (2.9)–(2.12) ist.

Nun zeigen wir, dass (2.14) in der gegebenen Karte eine maximale Lösung (x, y, u, v) besitzt und dass diese, durch Anhängen weiterer Karten fortgesetzt werden kann. Ist N geodätisch vollständig, kann die Lösung sogar global fortgesetzt werden.

Definition 2.2.1. Eine C^1 Abbildung $\gamma :]a, b[\rightarrow N$ heisst **Lösung** von

$$\langle X, \nu \rangle_{\bar{g}} = -H \tag{2.15}$$

falls folgende Bedingung erfüllt ist:

Für jedes $s_0 \in]a, b[$ existiert eine Karte $\phi : U \subset N \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(s_0) \in U$ so, dass

(i) $\gamma|_{U_\varepsilon(s_0)} = \phi^{-1} \circ f$ für eine C^1 Kurve

$$\begin{aligned}
f : U_\varepsilon(s_0) \subset]a, b[&\rightarrow V \\
s &\mapsto \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(ii) $(x(s), y(s), u(s), v(s))$ mit $u(s) := x'(s)$ und $v(s) := y'(s)$ ist eine Lösung von (2.14).

◇

Sei nun

$$\begin{aligned}
I &:= \{ s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid \exists \gamma \in C^1([-|s|, |s|], N) \text{ so, dass } \gamma \text{ auf }]-|s|, |s|[\text{ eine Lösung im} \\
&\quad \text{Sinne der Definition 2.2.1 ist und } \gamma(0) = P \in N \text{ und } \gamma'(0) = Q \in T_P N, \|Q\|_{\bar{g}} = 1 \} \\
&\cup \{0\}
\end{aligned}$$

Lemma 2.2.2. *I ist nicht leer.*

Beweis: 0 ist in I enthalten und somit ist I nicht leer. \square

Lemma 2.2.3. *I ist offen.*

Beweis: Wir zeigen, dass mit jedem $\tilde{s} \in I$ eine Umgebung von \tilde{s} in I enthalten ist.

1. *Fall:* $0 = \tilde{s} \in I$: Die rechte Seite $\Theta(x, y, u, v)$ in (2.14) ist lokal Lipschitz-stetig bezüglich x, y, u und v . Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert daher eine eindeutige lokale C^1 -Lösung $(x(s), y(s), u(s), v(s))$ von (2.14) auf einem Intervall $] -\varepsilon, \varepsilon[$ zu den gegebenen Anfangsbedingungen. Dann gehören alle s mit $|s| < \varepsilon$ zu I .

2. *Fall:* $0 \neq \tilde{s} \in I$: Wegen der Definition von I gibt es $\gamma \in C^1([-|\tilde{s}|, |\tilde{s}|], N)$ so, dass γ auf $] -|\tilde{s}|, |\tilde{s}|[$ eine Lösung im Sinne der Definition 2.2.1 ist und $\gamma(0) = P \in N$ und $\gamma'(0) = Q \in T_P N$, $\|Q\|_{\tilde{g}} = 1$. Wähle eine Karte $\phi : U \subset N \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(|\tilde{s}|) \in U$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ so, dass $\gamma(|\tilde{s}| - \delta, |\tilde{s}|) \subset U$ respektive $\phi \circ \gamma(|\tilde{s}| - \delta, |\tilde{s}|) \subset V$. Nach der Definition 2.2.1 ist die Abbildung $f :]|\tilde{s}| - \delta, |\tilde{s}|[\rightarrow V$, $s \mapsto \phi \circ \gamma(s)$ eine Lösung von (2.14). Da $\gamma \in C^1([-|\tilde{s}|, |\tilde{s}|], N)$ sind $\gamma(|\tilde{s}|)$ und $\gamma'(|\tilde{s}|)$ wohldefiniert. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert für ein $\tilde{\delta} \in]0, \delta[$ eine eindeutige Abbildung $\tilde{f} :]|\tilde{s}| - \tilde{\delta}, |\tilde{s}| + \tilde{\delta}[\rightarrow V$ so, dass \tilde{f} eine Lösung von (2.14) ist und so, dass $\tilde{f}(|\tilde{s}|) = \phi \circ \gamma(|\tilde{s}|)$ und $\tilde{f}'(|\tilde{s}|) = \frac{d}{ds} \phi \circ \gamma(|\tilde{s}|)$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung folgt, dass $\tilde{f}|_{]|\tilde{s}| - \tilde{\delta}, |\tilde{s}|[} = f|_{]|\tilde{s}| - \tilde{\delta}, |\tilde{s}|[}$ ist. In einer Umgebung von $-|\tilde{s}|$ gibt es eine analoge Fortsetzung.

Damit gehören alle $s \in \mathbb{R}$ mit $|s| < |\tilde{s}| + \tilde{\delta}$ zu I , und somit ist I offen. \square

Schliesslich beweisen wir noch:

Lemma 2.2.4. *Falls N geodätisch vollständig ist, so ist I abgeschlossen.*

Beweis: Sei $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge in I . Wir zeigen, dass, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ ist, dann gilt $s \in I$. Es genügt dies für den Fall $0 < s_n \nearrow s$ zu zeigen. Es gilt:

$$0 \leq d(\gamma(s_m), \gamma(s_n)) \leq \text{Länge der Kurve } \gamma([s_n, s_m]) = |s_m - s_n| \quad (2.16)$$

wobei d die in der Definition 1.1.14 definierte geodätische Distanz auf N ist. Daraus folgt, dass $\gamma(s_k)$ eine Cauchy-Folge auf N ist. Nach dem Satz von Hopf-Rinow ist somit $\gamma(s_n)$ in N konvergent: $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(s_n) =: A \in N$.

Falls $s \notin I$ ist, so setzen wir $\gamma(s) := A$.

Stetigkeit: Wir zeigen zunächst, dass dann γ in s stetig ist, das heisst, dass $\gamma(\tau_i) \rightarrow A$ ($i \rightarrow \infty$) für jede reelle Folge $\tau_i \nearrow s$: Offensichtlich ist $(s_1, \tau_1, s_2, \tau_2, \dots)$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} . Mit dem selben Argument, welches wir in (2.16) verwendet haben, folgt dann, dass $(\gamma(s_1), \gamma(\tau_1), \gamma(s_2), \gamma(\tau_2), \dots)$ eine Cauchy-Folge in N ist. Wir wissen, dass die Teilfolge $\gamma(s_n)$ gegen A konvergiert. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes konvergiert die ganze Folge gegen A , insbesondere gilt auch $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma(\tau_i) = A$. Das heisst, dass $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma(\tau_i) = \gamma(s)$ für jede Folge $\tau_i \nearrow s$. Somit ist γ in s stetig. Nun wissen wir, dass γ auf $[0, s]$ stetig ist.

stetig differenzierbar: Wir zeigen nun, dass $\gamma \in C^1([0, s], N)$. Zunächst ist klar, dass $\gamma \in C^1([0, s_n], N)$ für jedes n und somit $\gamma \in C^1([0, s], N)$. Wir betrachten weiter eine Karte $\phi : U \subset N \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$, wobei $\gamma(s) \in U$. Dann ist $f := \phi \circ \gamma$ auf $]s - \varepsilon, s]$ für genügend kleines $\varepsilon > 0$ wohldefiniert und auf $]s - \varepsilon, s[$ eine Lösung von (2.14) im Sinne von Definition 2.2.1. Das bedeutet insbesondere, dass $f \in C^1(]s - \varepsilon, s[, V)$, und nun müssen wir noch zeigen, dass $f \in C^1([s - \varepsilon, s], V)$. Dazu betrachten wir die Funktion $\Theta(x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ aus der Gleichung (2.14) auf $]s - \varepsilon, s[$. Die Funktionen $x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot)$ und $v(\cdot)$ sind stetig und beschränkt auf diesem offenen Intervall. Für $x(\cdot)$ und $y(\cdot)$ ist dies klar: Beide Funktionen sind ja sogar differenzierbar, und $(x(\cdot), y(\cdot))$ liegt in der (ohne Einschränkung) beschränkten Menge V . Die Funktionen $u(\cdot)$ und $v(\cdot)$ sind wegen (2.14) ebenfalls differenzierbar, also stetig. Aufgrund der Äquivalenz von (2.14) und (2.9)–(2.10) folgt aus (2.9) wegen $u = x'$ und $v = y'$, dass $\|(u(\cdot), v(\cdot))\|_{\bar{g}} = 1$. Also sind in der Tat $u(\cdot)$ und $v(\cdot)$ beschränkt (woraus noch einmal die Beschränktheit von $x(\cdot)$ und $y(\cdot)$ folgt).

Dann ist $\Theta(x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ ebenfalls stetig auf dem Intervall $]s - \varepsilon, s[$. Da Θ Lipschitz-stetig ist, ist $\Theta(x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ ausserdem beschränkt auf $]s - \varepsilon, s[$. Somit sind, wegen Gleichung (2.14), die Funktionen $x'(\cdot), y'(\cdot), u'(\cdot)$ und $v'(\cdot)$ auf $]s - \varepsilon, s[$ stetig und beschränkt. Insbesondere sind also $u(\cdot)$ und $v(\cdot)$ Lipschitz-stetig auf $]s - \varepsilon, s[$. Somit lassen sich $u = x'$ und $v = y'$ (und somit f' und schliesslich γ') stetig in den Punkt s fortsetzen. Analog zeigt man dies für $s < 0$. Somit ist gezeigt, dass s eben doch zu I gehört. \square

Als Korollar der drei letzten Lemmas erhalten wir folgenden Satz:

Theorem 2.2.5. *Sei N eine zweidimensionale, differenzierbare, geodätisch vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, welche ein glattes Killingvektorfeld $X : N \rightarrow TN$ trägt. Dann existiert für jeden Punkt $P \in N$ und jedes $Q \in T_P N$ mit $Q \neq 0$ eine eindeutige und beidseits beliebig weit fortsetzbare Solitonkurve γ bezüglich X durch P und tangential an Q .*

Aus dem Beweis von Lemma 2.2.3 folgt insbesondere, dass durch jeden festen Punkt von N in jede Richtung genau eine lokale Lösung der Solitongleichung geht. Diesen Sachverhalt wollen wir noch weiter präzisieren. Dazu führen wir einige Bezeichnungen ein.

Sei $v \in T_P N$. Dann bezeichnet γ_v die eindeutige Lösung der Solitongleichung mit $\gamma_v(0) = p$ und $\dot{\gamma}_v(0) = v$. Weiter betrachten wir die Menge $\Omega := \{v \in TN \mid \gamma_v \text{ ist auf } [0, 1] \text{ definiert}\}$. Wir bemerken, dass $\Omega \cap T_P N$ sternförmig ist. Nun definieren wir noch die Abbildung solexp :

Definition 2.2.6. Die **Soliton-Exponentialabbildung** ist definiert durch

$$\begin{aligned} \text{solexp} : \Omega &\rightarrow N \\ v &\mapsto \gamma_v(1). \end{aligned}$$

Der Kürze halber schreiben wir $\text{solexp}_p := \text{solexp}|_{T_P N}$ \diamond

Proposition 2.2.7. (i) $\text{solexp} : \Omega \rightarrow N$ ist differenzierbar

(ii) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \Omega &\rightarrow N \times N \\ v &\mapsto (\pi(v), \text{solexp}_{\pi(v)} v) \end{aligned}$$

ist ein lokaler Diffeomorphismus in einer Umgebung von $(p_0, 0) \in \Omega$ auf eine Umgebung von $\Phi(p_0, 0) = (p_0, p_0) \in N \times N$.

Beweis:

- (i) Folgt aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen (differenzierbare Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen).
- (ii) Lokal ist $TN|_U \cong U \times \mathbb{R}^n$, wobei U eine genügend kleine Umgebung von p_0 in N ist. Im weiteren betrachten wir die Einschränkung von Φ auf $(U \times \mathbb{R}^n) \cap \Omega$ und bezeichnen sie immer noch mit Φ . Wir betrachten nun eine lokale Kartenabbildung von einer Teilmenge von $(U \times \mathbb{R}^n) \cap \Omega$ nach $V \times V$, $V \subset \mathbb{R}^n$. Weiter betrachten wir eine Kartenabbildung von einer Umgebung von $\Phi(p_0, 0) = (p_0, p_0) \in N \times N$ auf $V' \times V'$, $V' \subset \mathbb{R}^n$. Dann kann Φ als eine Abbildung $V \times V \rightarrow V' \times V'$ aufgefasst werden. Zu zeigen ist nun, dass $D\Phi(p_0, 0)$ invertierbar ist. Dazu berechnen wir die Matrix, welche $D\Phi(p_0, 0)$ in den gegebenen Koordinaten darstellt. Zu diesem Zweck sei α eine differenzierbare Kurve in N mit $\alpha(0) = p_0$. Dann gilt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(\alpha(t), 0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\alpha(t), \alpha(t)) = (\dot{\alpha}(0), \dot{\alpha}(0)).$$

Andererseits gilt für ein beliebiges $v \in T_{p_0}N$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(p_0, tv) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (p_0, \gamma_{tv}(1)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (p_0, \gamma_v(t)) \\ &= (0, \dot{\gamma}_v(0)) = (0, v). \end{aligned}$$

Wir lesen ab

$$D\Phi(p_0, 0) = \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix},$$

und damit ist das Gewünschte gezeigt. \square

Korollar 2.2.8. (i) Für jedes $p_0 \in N$ existiert eine Umgebung U und ein $\varepsilon > 0$, so dass jedes Punktepaar $p, q \in U$ durch eine eindeutige Solitonkurve der Länge kleiner ε miteinander verbunden werden kann.

- (ii) Für $\varepsilon > 0$ klein genug ist solexp_{p_0} ein Diffeomorphismus von $B_\varepsilon(0) \subset T_{p_0}N$ auf sein Bild.

Beweis:

- (i) Sei $\Phi : U' \rightarrow V' \subset N \times N$ der Diffeomorphismus aus Proposition 2.2.7, mit $(p_0, 0) \in U'$. Wir wählen eine offene Menge $V \subset N$ mit $p_0 \in V$ und $\varepsilon > 0$ so, dass

$$U'' := \bigcup_{p \in V} B_\varepsilon(p) \subset U'.$$

Dabei ist $B_\varepsilon(p)$ der ε -Ball in TN . Wir betrachten nun die Restriktion $\Phi|_{U''} : U'' \rightarrow V'' := \Phi(U'')$. Insbesondere ist $\Phi(p_0, 0) = (p_0, p_0) \in V''$. Nun wählen wir eine offene Umgebung U von p_0 in N so, dass $U \times U \subset V''$. Seien nun $p, q \in U$, also $(p, q) \in U \times U$. Sei $\Phi^{-1}(p, q) =: (p, v) \in U''$, das heisst $\Phi(p, v) = (p, q)$. Das heisst, p und q sind durch eine Solitonkurve verbunden, deren Länge gleich $\|v\| < \varepsilon$ ist. Nehmen wir an, es gäbe eine weitere Solitonkurve, die p mit q verbindet und deren Länge kleiner als ε ist. Dann würde ein $v' \in T_p N$, $v' \neq v$, mit $\|v'\| < \varepsilon$ existieren, so dass $\Phi(p, v') = (p, q) = \Phi(p, v)$, was der Injektivität der Abbildung Φ widersprechen würde.

(ii) Folgt direkt aus Proposition 2.2.7. □

Bemerkung 2.2.9. (i) Das Theorem 2.2.5 verallgemeinert die Resultate in [14, Section 2.1–2.4].

(ii) Das Theorem 2.2.5 zeigt insbesondere die globale Existenz von Lösungen der Gleichung für Solitonkurven. Korollar 2.2.8 beschreibt deren lokale Eindeutigkeit. Wir behandeln weiter unten im Korollar 2.3.18 die Frage der globalen Eindeutigkeit, das heisst die Frage, ob zu zwei gegebenen Punkten auf einer Fläche höchstens eine verbindende Solitonkurve existiert. Bereits das Beispiel des Grim Reapers zeigt im Übrigen, dass zu zwei beliebigen Punkten nicht zwingend eine verbindende Solitonkurve existieren muss.

2.3 Geometrie von Solitonkurven

In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass Solitonkurven auf Riemannschen Flächen interessante geometrische Eigenschaften aufweisen. Diese Tatsache ist insofern erstaunlich, als dass es sich bei diesen Solitonkurven um Lösungen einer hochgradig nicht linearen Differentialgleichung handelt. Andererseits sind Solitonkurven geometrisch motiviert, so dass aus diesem Blickwinkel geometrische Eigenschaften eben doch zu erwarten sind (siehe [14, Proposition 1, Corollary 1]). Auf Grund der Nichtlinearität der Gleichung ist es jedoch nicht so offensichtlich, wie man diese Eigenschaften herausarbeiten kann. Zentraler Punkt wird das Theorem 2.3.9 sein, welches im Spezialfall $N = \mathbb{R}^2$ die Invariante aus [14, Lemma 1] liefert. Alles Weitere folgt dann durch Anwendung des Satzes von Gauss-Bonnet.

Beginnen wir mit dem Bereitstellen einiger technischer Hilfsmittel.

Lemma 2.3.1. *In einer gegebenen Karte $x : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist der Gradient $\nabla_g F$ einer differenzierbaren Funktion $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich der in (1.1) eingeführten Basis B_i von $T_p M$ gegeben durch*

$$\nabla_g F = g^{-1} \partial F.$$

Dabei ist $\partial F := (\frac{\partial F \circ x^{-1}}{\partial \xi^1}, \dots, \frac{\partial F \circ x^{-1}}{\partial \xi^m})^T$, und g^{-1} ist die Inverse zur Matrix der Metrik g .

Beweis: Sei $v \in T_p M$ gegeben durch $v = (v^1, \dots, v^m)^T = v^i B_i$ ¹. Nach der Definition 1.1.7

¹Wir verwenden für einen Vektor und seine Darstellung als Koordinatentupel in einer Basis dieselbe Bezeichnung, wenn aus dem Kontext ersichtlich ist, was gemeint ist.

und (1.1) gilt:

$$\begin{aligned} dF_p : T_p M &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto v^i \frac{\partial F \circ x^{-1}}{\partial \xi^i} = v^T \partial F. \end{aligned}$$

Nach der Definition 1.1.11 des Gradienten folgt, dass $v^T \partial F = v^T g \nabla_g F$ für alle $v \in T_p M$ gilt. Daraus schliessen wir, dass $\partial F = g \nabla_g F$, und wir erhalten damit die Behauptung durch Multiplikation mit der inversen Matrix g^{-1} . \square

Als Korollar erhalten wir eine differentielle Bedingung, wann ein Vektorfeld lokal ein Gradientenfeld ist.

Korollar 2.3.2. *Sei $Y : M \rightarrow TM$ ein Vektorfeld. In einer gegebenen Karte sei Y gegeben durch $Y = Y^j B_j$. Dann ist Y in einer einfach zusammenhängenden Teilmenge U des Kartengebiets ein Gradientenfeld, falls auf $x(U)$*

$$\frac{\partial}{\partial \xi^k} (g_{ij} Y^j) = \frac{\partial}{\partial \xi^i} (g_{kj} Y^j) \quad ^2$$

für alle i, k gilt. Dies lässt sich äquivalent ausdrücken durch die Formel

$$Y_{i,k} = Y_{k,i}$$

wobei wir ab jetzt die partiellen Ableitungen durch ein Komma abkürzen, d. h. $\frac{\partial}{\partial \xi^i} Y_\ell =: Y_{\ell,i}$.

Seien (M, g) und (N, h) Riemannsche Mannigfaltigkeiten der Dimension m respektive n und sei $\psi : M \rightarrow N$ differenzierbar. Weiter sei $x : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Karte von M und $y : V := \psi(U) \subset N \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Karte von N . Nun sei $\varphi : \tilde{U} := x(U) \rightarrow \tilde{V} := y(V)$ definiert durch $\varphi := y \circ \psi \circ x^{-1}$. Eine einfache Rechnung zeigt dann, dass $\psi : U \rightarrow \psi(U)$ genau dann eine Isometrie ist, wenn

$$\frac{\partial \varphi^r}{\partial \xi^i} \frac{\partial \varphi^s}{\partial \xi^j} h_{rs} = g_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, m \quad (2.17)$$

gilt.

Mit Hilfe von (2.17) möchten wir nun eine differentielle Bedingung für ein Killingvektorfeld Y auf N herleiten. Gemäss Definition 1.1.19 ist Y ein Killingfeld, falls eine einparametrische Gruppe $\psi : \mathbb{R} \times N \rightarrow N$ von Isometrien existiert, so dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, p) &= Y(\psi(t, p)) && \text{auf } \mathbb{R} \times N \\ \psi(0, p) &= p && \text{auf } N. \end{aligned}$$

Sei $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Karte auf N . Wir betrachten dann

$$\begin{aligned} \varphi :]-\varepsilon, \varepsilon[\times x(\tilde{U}) &\rightarrow x(U) \\ (t, \xi) &\mapsto x(\psi(t, x^{-1}(\xi))), \end{aligned}$$

²Betrachtet man die Koordinaten als Funktionen $Y^j : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$, so benützen wir dieselbe Bezeichnung für $Y^j : V := x(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $(\xi^1, \dots, \xi^m) \mapsto Y^j \circ x^{-1}(\xi^1, \dots, \xi^m)$.

wobei $\tilde{U} \subset U$ eine offene und beschränkte Teilmenge von U ist, deren Abschluss auch noch in U enthalten ist, und wobei $\varepsilon > 0$ so klein gewählt ist, dass $\text{Im } \varphi \subset x(U)$.

Falls nun Y ein Killingfeld auf N ist, so gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, \xi) &= X(\varphi(t, \xi)) && \text{auf }]-\varepsilon, \varepsilon[\times x(\tilde{U}) \\ \varphi(0, \xi) &= \xi && \text{auf } x(U), \end{aligned} \quad (2.18)$$

wobei X der push forward von Y ist, das heisst $X = x_* Y$.

Nun können wir mit Hilfe der Gleichung (2.17) und der Bedingung (2.18) folgende differentielle Bedingung an das Killingfeld X auf $x(U)$ herleiten:

Lemma 2.3.3. *Seien Y und X wie oben. Falls Y ein Killingfeld auf N ist, dann gilt:*

$$\frac{\partial X^k}{\partial \xi^i} g_{kj} + \frac{\partial X^k}{\partial \xi^j} g_{ik} + g_{ij,k} X^k = 0 \quad \forall i, j \quad (2.19)$$

Beweis: Mit (2.17) erhalten wir

$$\frac{\partial \varphi^r(t, \xi)}{\partial \xi^i} \frac{\partial \varphi^s(t, \xi)}{\partial \xi^j} g_{rs}(\varphi(t, \xi)) = g_{ij}(\xi).$$

Leiten wir diese Bedingung nach t ab und werten sie anschliessend in $t = 0$ aus, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \frac{\partial \varphi^r(t, \xi)}{\partial t} \frac{\partial \varphi^s(t, \xi)}{\partial \xi^j} g_{rs}(\xi) + \frac{\partial \varphi^r(t, \xi)}{\partial \xi^i} \frac{\partial}{\partial \xi^j} \frac{\partial \varphi^s(t, \xi)}{\partial t} g_{rs}(\xi) \\ + \frac{\partial \varphi^r(t, \xi)}{\partial \xi^i} \frac{\partial \varphi^s(t, \xi)}{\partial \xi^j} g_{rs,k}(\xi) \frac{\partial \varphi^k(t, \xi)}{\partial t} = 0. \end{aligned}$$

Benützen wir $\frac{\partial \varphi^i(t, \xi)}{\partial \xi^j} \big|_{t=0} = \delta_j^i$ und dass nach (2.18) $\frac{\partial \varphi^i(t, \xi)}{\partial t} \big|_{t=0} = X^i(\xi)$ gilt, so erhalten wir daraus die Behauptung. \square

Bemerkung 2.3.4. Natürlich ist die linke Seite von (2.19) nichts anderes als die Lie-Ableitung der Metrik g in Richtung X :

$$(L_X g)_{ij} = X^k_{,i} g_{kj} + X^k_{,j} g_{ik} + g_{ij,k} X^k \quad \diamond$$

Sei ω ein Schnitt von T^*M , also eine 1-Form, d.h. $\omega \in \Gamma(T_1^0 M)$. Somit lässt sich ω schreiben als $\omega = \omega_j dx^j$. Wir möchten nun die Koeffizienten a_ℓ der kovarianten Ableitung

$$\nabla_{B_i}^{(0,1)} \omega = a_\ell dx^\ell \in \Gamma(T_1^0 M)$$

berechnen. Sei $Y = Y^j B_j \in \Gamma(T_0^1 M)$. Dann gilt nach Definition 1.1.30 (iii):

$$\begin{aligned}
 \left(\overset{(0,1)}{\nabla_{B_i} \omega} \right) (Y) &= B_i(\omega(Y)) - \omega(\nabla_{B_i} Y) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \xi^i} \omega(Y) - \omega(B_i(Y^j) B_j + Y^j \underbrace{\nabla_{B_i} B_j}_{= \Gamma_{ij}^k B_k}) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \xi^i} \omega(Y) - \omega\left(\left(\frac{\partial}{\partial \xi^i} Y^j\right) B_j\right) - \omega(Y^j \Gamma_{ij}^k B_k) \\
 &=: I - II - III
 \end{aligned}$$

Für die einzelnen Terme erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\omega_\ell dx^\ell(Y^j B_j)) = \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\omega_\ell Y^\ell) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi^i} \omega_\ell\right) Y^\ell + \omega_\ell \left(\frac{\partial}{\partial \xi^i} Y^\ell\right) \\
 II &= \omega_\ell dx^\ell\left(\left(\frac{\partial}{\partial \xi^i} Y^j\right) B_j\right) = \omega_\ell \left(\frac{\partial}{\partial \xi^i} Y^\ell\right) \\
 III &= \omega_\ell dx^\ell(Y^j \Gamma_{ij}^k B_k) = \omega_\ell Y^j \Gamma_{ij}^\ell
 \end{aligned}$$

Zusammen erhalten wir

$$\left(\overset{(0,1)}{\nabla_{B_i} \omega} \right) (Y) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi^i} \omega_j - \omega_\ell \Gamma_{ij}^\ell \right) Y^j = a_j Y^j.$$

Damit sind die gesuchten Koeffizienten a_j gefunden. Eine analoge Rechnung ergibt eine entsprechende Formel für die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes. Diese Resultate halten wir im folgenden Lemma fest.

Lemma 2.3.5. *Die Komponenten der kovarianten Ableitung von $\omega \in \Gamma(T_1^0 M)$*

$$\overset{(0,1)}{\nabla_{B_i} \omega} =: \omega_{\ell;i} dx^\ell$$

berechnen sich mit der Formel

$$\omega_{\ell;i} = \omega_{\ell,i} - \omega_k \Gamma_{\ell i}^k.$$

Die Komponenten der kovarianten Ableitung von $X \in \Gamma(T_0^1 M)$

$$\overset{(1,0)}{\nabla_{B_i} X} =: X_{;i}^\ell B_\ell$$

berechnen sich mit der Formel

$$X_{;i}^\ell = X_{,i}^\ell + X^k \Gamma_{ki}^\ell.$$

Bemerkung 2.3.6. In ähnlicher Weise lassen sich die Komponenten der kovarianten Ableitung von beliebigen Tensorfeldern berechnen. Es gelten auch für die kovariante Ableitung die üblichen Rechenregeln wie Additivität und Produktregel. \diamond

Mit Hilfe der kovarianten Ableitung können wir nun die Bedingung (2.19) in der bekannten Art und Weise umformulieren: Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} X_{j,i} &= \frac{\partial}{\partial \xi^i} (X^r g_{rj}) = X^r_{,i} g_{rj} + X^r g_{rj,i} \\ X_{i,j} &= X^r_{,j} g_{ri} + X^r g_{ri,j}. \end{aligned}$$

Somit können wir die ersten zwei Terme in (2.19) ersetzen und erhalten so die Killing-Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= X_{j,i} - X^k g_{kj,i} + X_{i,j} - X^k g_{ki,j} + X^k g_{ij,k} \\ &= X_{i,j} + X_{j,i} - \underbrace{X^k}_{=X_\ell g^{\ell k}} (g_{kj,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k}) \\ &= X_{i,j} + X_{j,i} - 2X_\ell \Gamma_{ij}^\ell \\ &= X_{i,j} - X_\ell \Gamma_{ij}^\ell + X_{j,i} - X_\ell \Gamma_{ij}^\ell \\ &= X_{i;j} + X_{j;i} \end{aligned} \tag{2.20}$$

Definition 2.3.7. Sei X ein glattes Vektorfeld auf einer zweidimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) . Wir sagen, X habe lokal ein **konjugiertes Potential**, wenn folgendes der Fall ist: Auf jeder einfach zusammenhängenden Kartenumgebung U existiert eine Funktion $\chi : U \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $X = J\nabla_g \chi$ auf U . Dabei ist ∇_g der Gradient bezüglich der Metrik g , und J ist eine mit g verträgliche komplexe Struktur auf U , d. h. $J \in \Gamma(T_1^1 U)$, so dass

$$\begin{aligned} J_p^2 &= -\text{Id}_{T_p U} && \text{für alle } p \in U \text{ und} \\ g(X, Y) &= g(JX, JY) && \text{für alle } X, Y \in \Gamma(TU), \end{aligned}$$

wobei $J_p : T_p U \rightarrow T_p U$ der induzierte Endomorphismus auf $T_p U$ ist. \diamond

Im nächsten Lemma geben wir eine differentielle Bedingung für die Existenz eines konjugierten Potentials an.

Lemma 2.3.8. Sei $Y : M \rightarrow TM$ ein Vektorfeld. In einer gegebenen Karte sei Y gegeben durch $Y = Y^j B_j$. Dann ist Y in einer einfach zusammenhängenden Teilmenge U des Kartengebiets ein konjugiertes Gradientenfeld, falls auf $x(U)$ eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (i) $(Y^i \sqrt{g})_{,i} = 0$
- (ii) $Y^i_{;i} = 0$

Beweis: Y hat nach Definition genau dann lokal ein konjugiertes Potential, wenn $Y = J\nabla_g \chi$ für eine Funktion χ . Nach Multiplikation mit $-J$ erhalten wir die Bedingung $-JY = \nabla_g \chi$. Nach Korollar 2.3.2 ist dies äquivalent zur Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial \xi^1} (g_{2j} (JY)^j) = \frac{\partial}{\partial \xi^2} (g_{1j} (JY)^j). \tag{2.21}$$

Es gilt

$$JY = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{pmatrix} -g_{12} & -g_{22} \\ g_{11} & g_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in (2.21) und ausrechnen liefert:

$$\left(Y^1 \sqrt{g}\right)_{,1} = -\left(Y^2 \sqrt{g}\right)_{,2}. \quad (2.22)$$

Dies ist (i).

Ausdifferenzieren der linken Seite in (2.22) liefert

$$\begin{aligned} \left(Y^1 \sqrt{g}\right)_{,1} &= Y^1_{,1} \sqrt{g} + Y^1 \frac{1}{2\sqrt{g}} (g_{22}g_{11,1} + g_{11}g_{22,1} - 2g_{12}g_{12,1}) \\ &= Y^1_{,1} \sqrt{g} + Y^1 \sqrt{g} (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) \\ &= \sqrt{g}(Y^1_{,1} + Y^1 \Gamma_{1\ell}^\ell) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Entsprechend erhalten wir

$$\left(Y^2 \sqrt{g}\right)_{,2} = \sqrt{g}(Y^2_{,2} + Y^2 \Gamma_{2\ell}^\ell) \quad (2.24)$$

Die Summe von (2.23) und (2.24) ist Null. Dies ergibt, wenn wir noch durch \sqrt{g} teilen:

$$0 = Y^\ell_{,\ell} + Y^k \Gamma_{k\ell}^\ell = Y^\ell_{;\ell}.$$

Dies ist (ii). □

Wir kommen jetzt zum hauptsächlichen technischen Resultat dieses Abschnitts:

Theorem 2.3.9. *Jedes Killingvektorfeld auf einer zweidimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit besitzt lokal ein konjugiertes Potential.*

Beweis: Sei X das Killingvektorfeld und $K_{ij} := X_{i;j} + X_{j;i}$. Da X die Killinggleichung (2.20) erfüllt, gilt:

$$0 = K_{ij} g^{ij} = X_{i;j} g^{ij} + X_{j;i} \underbrace{g^{ij}}_{=g^{ji}} = 2X_{i;j} g^{ij} = 2X^j_{;j} \quad (2.25)$$

Somit hat nach Lemma 2.3.8(ii) X lokal ein konjugiertes Potential.

Im letzten Schritt in Gleichung (2.25) haben wir die Produktregel für die kovariante Ableitung (siehe Bemerkung 2.3.6) und das Lemma von Ricci ($g^{ij}_{;k} = 0$) benutzt:

$$X^j_{;k} = (X_i g^{ij})_{;k} = X_{i;k} g^{ij} + X_i \underbrace{g^{ij}_{;k}}_{=0} = X_{i;k} g^{ij}$$

Ein alternativer Beweis besteht darin, die Spur von $0 = L_X g$ zu bilden (siehe Lemma 2.3.3 und Bemerkung 2.3.4). Eine Rechnung zeigt nämlich, dass:

$$0 = (L_X g)^i_i = \frac{2}{\sqrt{g}} (X^i \sqrt{g})_{,i}$$

Somit hat X nach Lemma 2.3.8(i) wieder lokal ein konjugiertes Potential. □

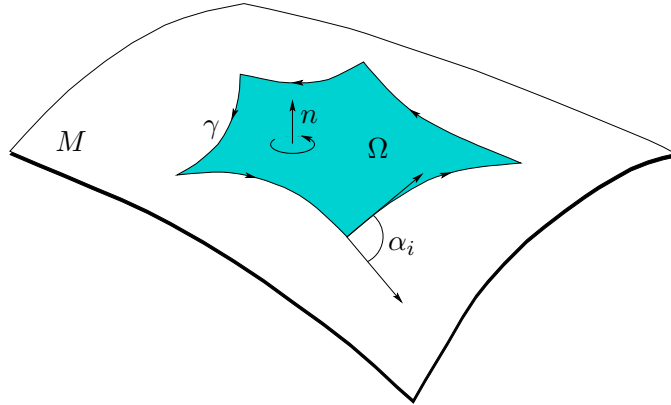
Bemerkung 2.3.10. Die Umkehrung in Theorem 2.3.9 ist im allgemeinen falsch. Nicht jedes konjugierte Potentialfeld ist ein Killingfeld. \diamond

Bevor wir nun mit Hilfe des Theorems 2.3.9 die Gleichung für Solitonkurven geeignet umschreiben und dadurch Informationen über deren Geometrie finden können, rufen wir den Satz von Gauss-Bonnet in Erinnerung, der bei den genannten Überlegungen eine entscheidende Rolle spielen wird.

Theorem 2.3.11 (Gauss-Bonnet). *Sei M eine orientierte Fläche, Ω ein Polygon in M , $\gamma(s)$ sei die stückweise glatte und nach der Bogenlänge parametrisierte Randkurve $\partial\Omega$ von Ω . Die Randkurve $\gamma(s)$ sei positiv durchlaufen. Die Aussenwinkel des Polygons seien gegeben durch $\alpha_1, \dots, \alpha_q$. Dann gilt:*

$$\iint_{\Omega} K d\mu + \int_{\gamma} k_g ds + \sum_{i=1}^q \alpha_i = 2\pi.$$

In der Formel bedeutet K die Gaußsche Krümmung der Fläche M , und k_g ist die geodätische Krümmung der Kurve γ bezüglich der gegebenen Orientierung von Fläche und Kurve. Die Messung der Aussenwinkel entnimmt man der unten stehenden Abbildung (Figur 2.1).



Figur 2.1: Polygon Ω mit Randkurve γ in einer orientierten Fläche M

Wir beweisen nun mit Hilfe der Sätze 2.3.11 und 2.3.9 folgende Tatsache über Polygone mit Soliton Randstücken:

Theorem 2.3.12. *Sei $U \subset M$ einfach zusammenhängend und Ω ein Polygon in U . Weiter sei γ die stückweise glatte und nach der Bogenlänge parametrisierte Randkurve $\partial\Omega$ von Ω . Die Kurve γ sei positiv durchlaufen und bestehe aus Solitonkurven. Die Aussenwinkel des Polygons seien gegeben durch $\alpha_1, \dots, \alpha_q$. Dann gilt:*

$$\iint_{\Omega} K d\mu + \sum_{i=1}^q \alpha_i = 2\pi. \quad (2.26)$$

Beweis: Da U einfach zusammenhängend ist, ist U orientierbar. Nach dem Satz von Gauss-Bonnet müssen wir demnach beweisen, dass

$$\int_{\gamma} k_g ds = 0.$$

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ nach der Bogenlänge parametrisiert, so dass für eine Zerlegung $\{a = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_q = b\}$ die Einschränkungen $\gamma|_{[s_{i-1}, s_i]}$ differenzierbar sind für $i = 1, \dots, q$. Dann gilt:

$$\int_{\gamma} k_g ds = \sum_{i=1}^q \int_{s_{i-1}}^{s_i} H(\gamma(t)) \cdot \underbrace{|\dot{\gamma}(t)|}_{=1} dt = \sum_{i=1}^q \int_{s_{i-1}}^{s_i} -\langle X(\gamma(t)), \nu(\gamma(t)) \rangle dt$$

Dabei haben wir die Solitongleichung (1.4) verwendet. Die äussere Normale ν erhalten wir aus $\dot{\gamma}$ durch Drehung um $-\frac{\pi}{2}$. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} k_g ds &= \sum_{i=1}^q \int_{s_{i-1}}^{s_i} -\langle X(\gamma(t)), \nu(\gamma(t)) \rangle dt \\ &= \sum_{i=1}^q \int_{s_{i-1}}^{s_i} -\langle X(\gamma(t)), -J\dot{\gamma}(t) \rangle dt \\ &= \sum_{i=1}^q \int_{s_{i-1}}^{s_i} -\langle JX(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt \end{aligned}$$

Nun benutzen wir das Theorem 2.3.9 respektive die Definition 2.3.7 eines konjugierten Potentials:

$$\int_{\gamma} k_g ds = \sum_{i=1}^q \int_{s_{i-1}}^{s_i} -\langle JX(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt = \sum_{i=1}^q \int_{s_{i-1}}^{s_i} \langle \nabla_g \chi(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt$$

Dies schreiben wir schliesslich um mit Hilfe der Formel (1.2):

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} k_g ds &= \sum_{i=1}^q \int_{s_{i-1}}^{s_i} \langle \nabla_g \chi(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt \\ &= \sum_{i=1}^q \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{d}{dt} \chi(\gamma(t)) dt \\ &= \sum_{i=1}^q \left(\chi(\gamma(s_i)) - \chi(\gamma(s_{i-1})) \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Wir merken noch an, dass die Formel (2.26) auch gilt, wenn der Rand von Ω aus Stücken von geodätischen Kurven besteht. In jenem Fall verschwindet nämlich das Integral $\int_{\gamma} k_g ds$, weil für geodätische Kurven $k_g \equiv 0$ gilt.

Wir wenden nun das soeben gezeigte Theorem auf eine geschlossene Solitonkurve an.

Korollar 2.3.13. *Sei γ eine geschlossene glatte Solitonkurve auf M , die ein einfach zusammenhängendes Gebiet Ω berandet. Dann gilt:*

$$\iint_{\Omega} K d\mu = 2\pi. \quad (2.27)$$

Insbesondere gibt es keine geschlossene Solitonkurve, die ein einfach zusammenhängendes Gebiet berandet, wenn eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (i) $\iint_M K^+ d\mu < 2\pi$ (dabei ist $K^+ := \max\{K, 0\}$)
- (ii) $K \geq 0$ auf M und $\iint_M K d\mu < 2\pi$
- (iii) $K \leq 0$ auf M

Beweis: Die Formel (2.27) folgt aus Theorem 2.3.12. Falls wir nun annehmen γ sei eine geschlossene Solitonkurve, die ein einfach zusammenhängendes Gebiet Ω berandet, so würde aus (i) folgen, dass

$$\iint_{\Omega} K d\mu \leq \iint_{\Omega} K^+ d\mu \leq \iint_M K^+ d\mu < 2\pi,$$

was (2.27) widerspricht. Wir beenden den Beweis mit der Bemerkung, dass die Bedingung (i) sowohl aus (ii) als auch aus (iii) folgt. \square

Bemerkung 2.3.14. (i) Aus dem Korollar folgt insbesondere, dass im euklidischen \mathbb{R}^2 keine geschlossenen Solitonkurven existieren, egal für welches Killingfeld.

- (ii) Betrachten wir die euklidische Einheitssphäre in \mathbb{R}^3 mit der aus den Rotationen um die Nord-Süd-Achse erzeugten Symmetriegruppen, so ist der Äquator eine geschlossene Solitonkurve. Die von dieser Solitonkurve berandete Fläche hat tatsächlich den Inhalt 2π , in Übereinstimmung mit der Formel (2.27).
- (iii) Auf einem einschaligen Rotationshyperboloid mit der natürlichen Isometriegruppe versehen, ist der Kehlkreis eine geschlossene Solitonkurve. Man darf also im vorangegangenen Korollar 2.3.13 nicht darauf verzichten, dass Ω einfach zusammenhängend ist. \diamond

Eine geschlossene Solitonkurve kann als “Nulleck” aufgefasst werden. Nun betrachten wir den Fall eines “Einecks”. Dies entspricht der Situation eines Selbstschnittes, das heisst einer nicht eingebetteten Solitonkurve.

Korollar 2.3.15 (“Einecke”). *Die Randkurve eines einfach zusammenhängenden Gebietes $\Omega \subset M$ sei eine ausser allenfalls in einem Punkt glatte Solitonkurve. Dann gilt:*

$$\iint_{\Omega} K d\mu \in]\pi, 3\pi[. \quad (2.28)$$

Insbesondere gilt für ein einfach zusammenhängendes M : Falls eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt ist, so ist jede Solitonkurve in M eingebettet.

$$(i) \iint_M K^+ d\mu \leq \pi$$

$$(ii) K \geq 0 \text{ auf } M \text{ und } \iint_M K d\mu \leq \pi$$

$$(iii) K \leq 0 \text{ auf } M$$

Beweis: Die Formel (2.28) folgt aus dem Theorem 2.3.12 für $q = 1$. Beachte, dass für den Aussenwinkel im Eckpunkt $\alpha_1 \in]-\pi, \pi[$ gilt. Die Winkel $-\pi$ und π sind ausgeschlossen wegen der Eindeutigkeit der Lösung der Solitongleichung für Kurven (siehe Korollar 2.2.8).

Sei nun M einfach zusammenhängend und $\tilde{\gamma}$ eine nicht eingebettete Solitonkurve auf M . Dann berandet eine geeignete Einschränkung γ von $\tilde{\gamma}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet Ω (siehe Appendix, Abschnitt 4.1). Dann würde aus (i) folgen, dass

$$\iint_{\Omega} K d\mu \leq \iint_{\Omega} K^+ d\mu \leq \iint_M K^+ d\mu \leq \pi,$$

was (2.28) widerspricht. Wir beenden den Beweis mit der Bemerkung, dass die Bedingung (i) sowohl aus (ii) als auch aus (iii) folgt. \square

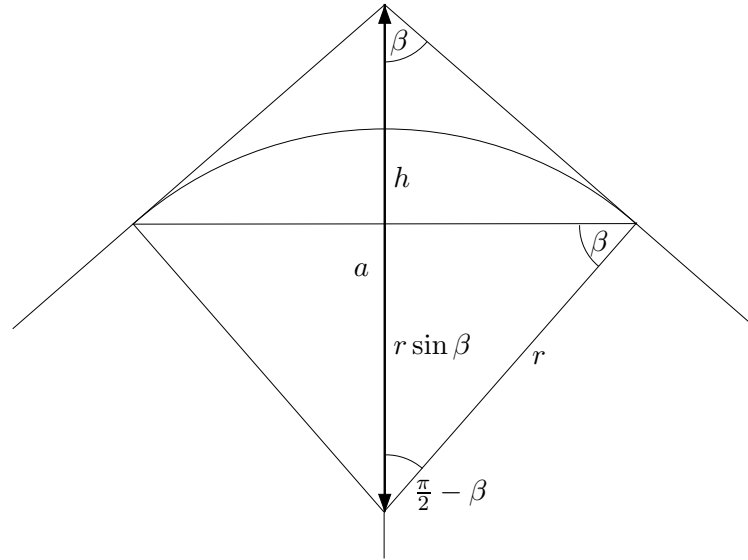
Bemerkung 2.3.16. Aus dem Korollar folgt insbesondere, dass die Yin-Yang-Kurve eingebettet ist. Dies wurde erstmals in [14, Proposition 1 (a)] bewiesen. \diamond

Beispiel 2.3.17. Im Folgenden betrachten wir einen Rotationskegel mit halbem Öffnungswinkel β . Als Symmetriegruppe nehmen wir die Rotationsgruppe um die Kegelachse. Wir interessieren uns dafür, ob eine globale Solitonkurve auf diesem Kegel eingebettet ist oder nicht. Eine solche Solitonkurve meidet die Kegelspitze. Um Korollar 2.3.15 anwenden zu können, runden wir die Kegelspitze mit einer Kugelkappe ab, welche so klein gewählt ist, dass sie mit der betrachteten Solitonkurve einen leeren Schnitt aufweist (siehe Figur 2.2).

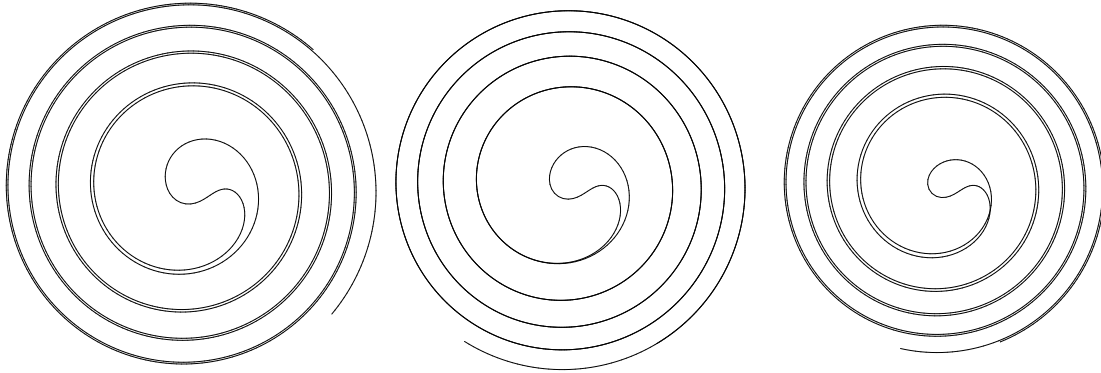
Nehmen wir also an, die Solitonkurve weise einen Selbstschnitt auf. Eine geeignete Einschränkung γ dieser Kurve berandet dann ein einfach zusammenhängendes Gebiet Ω . Falls Ω die Kugelkappe nicht enthält, folgt sofort ein Widerspruch aus der Formel (2.28) im Korollar 2.3.15, da dann $K = 0$ in Ω gilt. Falls Ω die Kugelkappe enthält, folgt

$$\iint_{\Omega} K d\mu = 2\pi(1 - \sin \beta)$$

(siehe Figur 2.2). Die rechte Seite ist kleiner gleich π genau dann wenn $\beta \geq \frac{\pi}{6}$ ist. Mit

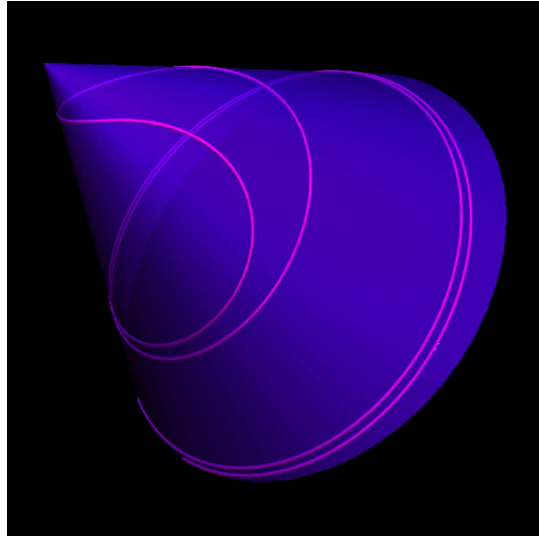


Figur 2.2: Die Fläche A der Kugelkappe ist $A = 2\pi rh$. Wegen $r = a \sin \beta$ und $h = r(1 - \sin \beta)$ erhalten wir für die Kugelkrümmung $K = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2 \sin^2 \beta}$ und $A = 2\pi a^2(1 - \sin \beta) \sin^2 \beta$. Somit ergibt sich $K \cdot A = 2\pi(1 - \sin \beta)$.



Figur 2.3: Diese drei Kurven sind die Projektionen von Solitonkurven in Richtung der Kegelachse. Die erste Projektion ist eine Solitonkurve bei halbem Öffnungswinkel $\frac{\pi}{6} + 0.05$ des Kegels. Die zweite Solitonkurve liegt auf dem Kegel mit dem kritischen Wert des halben Öffnungswinkels $\frac{\pi}{6}$. Die dritte Solitonkurve liegt auf einem Kegel mit halbem Öffnungswinkel $\frac{\pi}{6} - 0.05$. Die ersten zwei Solitonen sind gemäss Beispiel 2.3.17 eingebettete Kurven. Die numerische Rechnung zeigt bei der dritten Kurve einen Selbstschnitt.

anderen Worten, wenn der halbe Öffnungswinkel des Kegels grösser oder gleich $\frac{\pi}{6}$ ist, so ist jede globale Solitonkurve auf dem Kegel eingebettet. Die drei Bilder in der Figur 2.3 zeigen die Projektion der Lösungen für verschiedene Öffnungswinkel. Die Figur 2.4 zeigt einen Kegel mit halbem Öffnungswinkel $\frac{\pi}{6} + 0.05$ mit einer darauf befindlichen (eingebetteten) Solitonkurve. Damit der Verlauf der Kurve auf der Fläche besser sichtbar ist, wird der Kegel transparent dargestellt. Die Bilder wurden mit Hilfe eines Mathematica-Programms erzeugt. Die konkreten Formeln sind im Appendix, Abschnitt 4.3 respektive Abschnitt 4.3.1, hergeleitet. \diamond



Figur 2.4: Solitonkurve auf einem Kegel mit halben Öffnungswinkel $\frac{\pi}{6} + 0.05$.

Nach dem “Eineck” betrachten wir nun den Fall eines “Zweiecks” aus Solitonkurven. In Situationen, in welchen wir die Existenz von “Zweiecken” ausschliessen können, folgt insbesondere die globale Eindeutigkeit der Solitonkurven. Das heisst, durch zwei verschiedene Punkte auf der Fläche geht höchstens eine Solitonkurve.

Korollar 2.3.18 (“Zweieck”). *Sei Ω ein einfach zusammenhängendes “Soliton-Zweieck” auf M . Dies bedeutet, dass seine Randkurve γ aus zwei Teilkurven besteht, welche Einschränkungen von Solitonkurven auf Intervalle sind. Dann gilt:*

$$\iint_{\Omega} K \, d\mu \in]0, 4\pi[\quad (2.29)$$

Insbesondere gilt für ein einfach zusammenhängendes M : Falls $K \leq 0$ auf M ist und P und Q zwei verschiedene Punkte auf M sind, so existiert höchstens eine Solitonkurve auf M , welche P mit Q verbindet.

Beweis: Die Formel (2.29) folgt aus dem Theorem 2.3.12 für $q = 2$. Beachte, dass für die Aussenwinkel in den Eckpunkten $\alpha_i \in]-\pi, \pi[$, $i = 1, 2$, gilt. Die Winkel $-\pi$ und π sind

ausgeschlossen wegen der Eindeutigkeit der Lösung der Solitongleichung für Kurven (siehe Korollar 2.2.8).

Sei nun M einfach zusammenhängend mit $K \leq 0$ und seien P und Q zwei verschiedene Punkte auf M . Weiter nehmen wir an, γ_1 und γ_2 seien zwei verschiedene Solitonkurven, welche P und Q verbinden. Wegen Korollar 2.3.15 sind γ_1 und γ_2 eingebettet. Dann beranden zwei geeignete Einschränkungen von γ_1 und γ_2 ein Solitonzweieck (siehe Appendix, Abschnitt 4.2). Die Anwendung von Formel (2.29) auf dieses Solitonzweieck liefert den gewünschten Widerspruch. \square

Bemerkung 2.3.19. Aus dem Korollar folgt insbesondere, dass sich zwei verschiedene Yin-Yang-Kurven (zum selben Killingfeld) in höchstens einem Punkt schneiden. Dies wurde erstmals in [14, Proposition 1 (b)] bewiesen. \diamond

Beispiel 2.3.20. Als Anwendung des obigen Korollars betrachten wir die Situation auf dem einschaligen Rotationshyperboloid $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$, versehen mit der Rotationsgruppe als Isometriegruppe. Wir möchten zeigen, dass der Kehlkreis des Hyperboloids von jedem anderen Soliton in höchstens einem Punkt geschnitten werden kann. Um dies einzusehen, betrachten wir die universelle Überlagerung des Hyperboloids:

$$(\mathbb{R}^2, g(t, \varphi)) \rightarrow M, \quad (t, \varphi) \mapsto (\cosh t \cos \varphi, \cosh t \sin \varphi, \sinh t)$$

mit

$$g(t, \varphi) = \begin{pmatrix} \cosh^2 t + \sinh^2 t & 0 \\ 0 & \cosh^2 t \end{pmatrix}.$$

Für die konkreten Berechnungen verweisen wir den Leser auf den Abschnitt 4.3. Das Killingfeld $X = (0, 1)$ erzeugt die Drehgruppe des Hyperboloids. Seien nun P und Q zwei Punkte auf der φ -Achse (deren Bilder liegen also auf dem Kehlkreis). Die φ -Achse selber ist dann ein P mit Q verbindender Soliton. Da $K < 0$ und \mathbb{R}^2 einfach zusammenhängend ist, kann laut Korollar 2.3.18 keine andere Solitonkurve P mit Q verbinden.

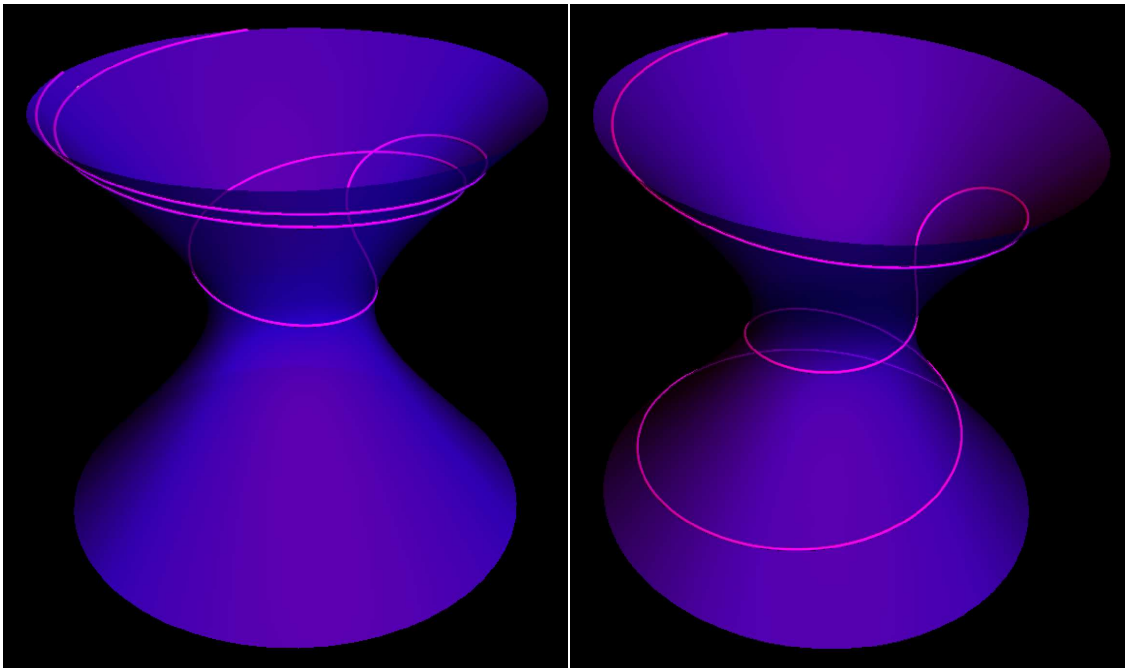
In der Figur 2.5 ist auf der rechten Seite eine eingebettete Solitonkurve zu sehen, welche den Kehlkreis genau einmal schneidet. Links ist eine Solitonkurve abgebildet, die den Kehlkreis meidet. Wir merken noch an, dass dieser Soliton auf dem Hyperboloid einen Selbstschnitt aufweist, in der universellen Überlagerung jedoch wegen Korollar 2.3.15 nicht.

\diamond

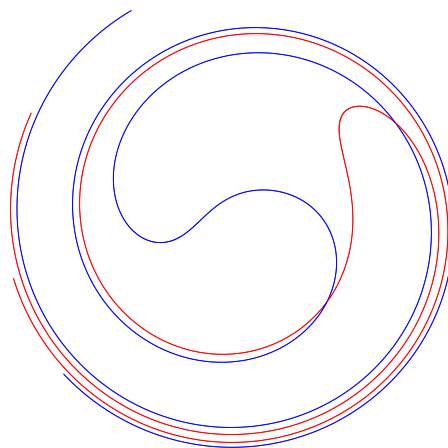
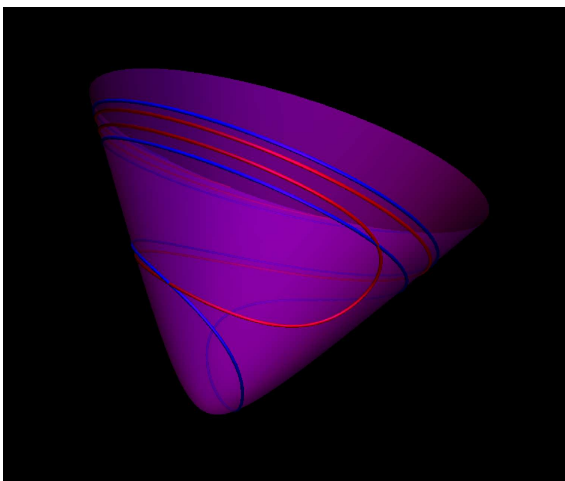
Beispiel 2.3.21. Als weiteres Beispiel betrachten wir eine Schale M eines zweischaligen Rotationshyperboloids. Für den halben Öffnungswinkel des asymptotischen Kegels wählen wir einen Wert zwischen $\frac{\pi}{6}$ und $\frac{\pi}{2}$. Dann gilt für die Gesamtkrümmung

$$0 < \iint_M K \, d\mu < \pi.$$

Somit sind Solitonen bezüglich der Drehgruppe nach Korollar 2.3.15 eingebettet, Zweiecke sind jedoch nicht ausgeschlossen. Die nachfolgenden Bilder in der Figur 2.6 zeigen, dass Zweiecke in diesem Fall in der Tat vorkommen. \diamond

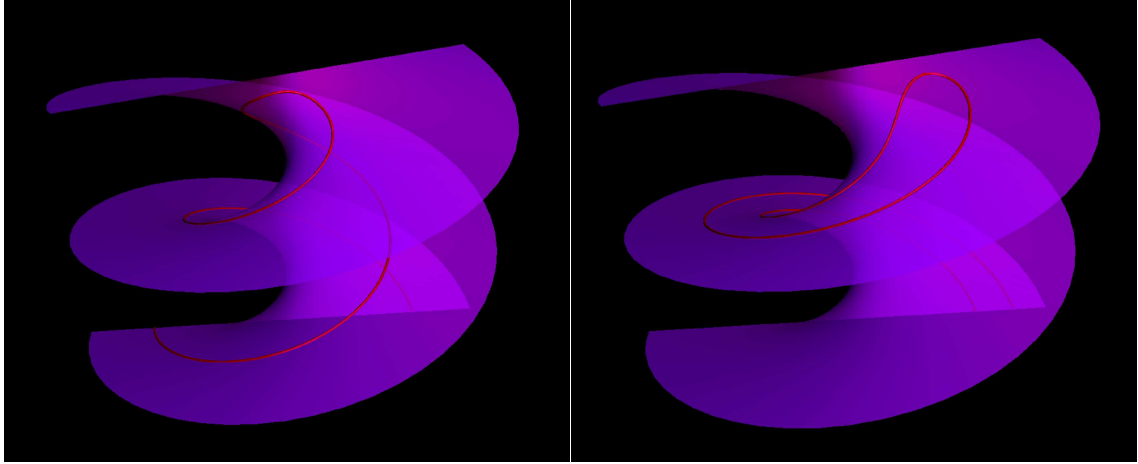


Figur 2.5: Zwei Solitonkurven auf einem Rotationshyperboloid



Figur 2.6: Zweieck auf einer Schale eines zweischaligen Rotationshyperboloids (rechts in der Projektion)

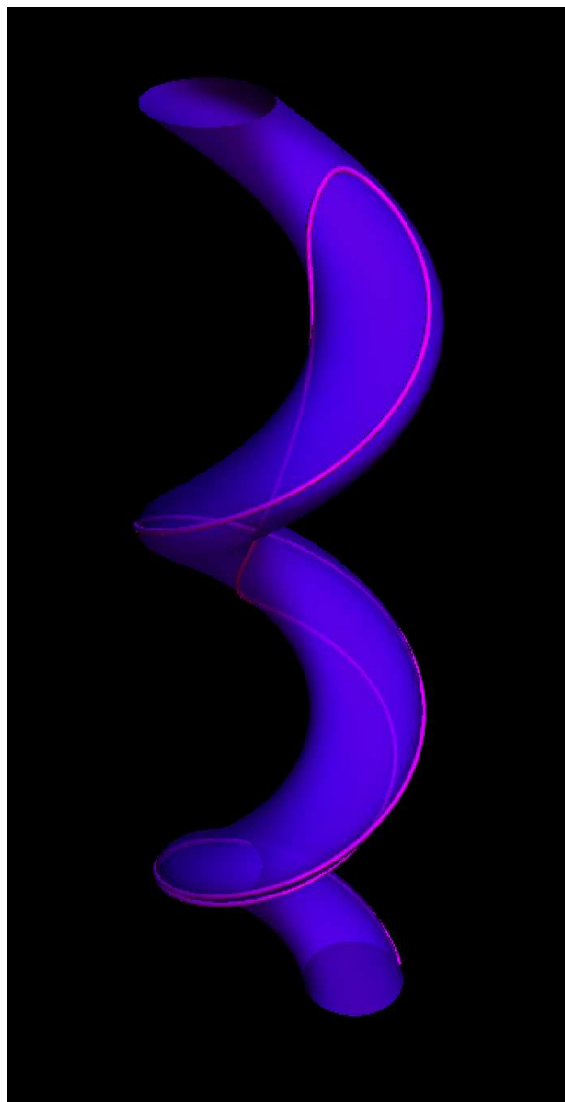
Als weiteres Beispiel betrachten wir noch Solitonkurven auf Schraubenflächen. Die entsprechenden Rechnungen sind im Appendix 4.4 ausgeführt. Als erstes betrachten wir eine Standardschraubenfläche. Mit den selben Argumenten wie oben lässt sich zeigen, dass Solitonkurven darauf eingebettet sind und die Achse höchstens einmal schneiden. So zeigt das linke Bild in Figur 2.7 einen Soliton, welcher die Achse einmal schneidet und das rechte Bild, welcher die Achse meidet.



Figur 2.7: Zwei Solitonkurven auf einer Schraubenfläche

Bemerkung 2.3.22. Bei den vorangegangenen Beispielen wie auch bei dem unten abgebildeten Soliton wird die Isometriegruppe auf den Flächen jeweils von der entsprechenden Isometriegruppe des umgebenden euklidischen Raums induziert (Translation, Rotation, Schraubung). Natürlich lassen sich auch Beispiele konstruieren, wo die Isometriegruppe der Fläche inhärent ist. Zum Beispiel besitzt die Enneper-Minimalfläche eine Isometriegruppe, welche von einer Rotation in der Parameterebene erzeugt wird. \diamond

Wir schliessen mit dem folgenden Bild, Figur 2.8, einer Solitonkurve auf einem Maccaroni ab.



Figur 2.8: Eine Solitonkurve auf einem Maccaroni

Kapitel 3

Mehrdimensionale Solitonen

3.1 Problemstellung

In diesem Kapitel untersuchen wir das Problem der lokalen Lösbarkeit der Solitongleichung

$$\langle X(f), \nu(f) \rangle = -H(f) \quad (3.1)$$

des mittleren Krümmungsflusses. Dazu bietet sich sowohl die Untersuchung des entsprechenden Cauchy-Problems wie auch eines Randwertproblems an. Wir beschränken uns jedoch auf das Randwertproblem. Damit meinen wir, grob gesagt, folgendes: Wir geben, beispielsweise im Falle $\dim N = 3$, eine geschlossene Kurve in N vor, welche sich unter dem Einfluss der gegebenen einparametrigen Gruppe von Isometrien auf N fortbewegt. Dann stellt sich die Frage, ob in die gegebene Kurve eine Fläche eingespannt werden kann, welche der Solitongleichung (3.1) genügt. Diese Fläche würde sich dann unter dem mittleren Krümmungsfluss zusammen mit der gegebenen Randkurve gerade unter der Isometriegruppe bewegen.

Sei also N die umgebende Riemannsche Mannigfaltigkeit von der Dimension $n \geq 3$. Auf N sei ein Killing-Vektorfeld X gegeben. Wir betrachten eine Kartenabbildung $\psi : V \subset N \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$, so dass für eine nichtleere offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ gilt, dass $\bar{\Omega} \times \{0\} \subset U$ ist. Wir betrachten Ω als unsere Mannigfaltigkeit M und beschreiben die gesuchte Solitonfläche durch die Abbildung

$$\phi : \Omega \rightarrow (U, \bar{g}), \quad x \mapsto (x, u(x)). \quad (3.2)$$

Wir werden im Folgenden sehen, unter welchen Bedingungen sich die Solitonfläche tatsächlich in dieser Weise lokal als Graph einer Funktion u darstellen lässt.

Zur Unterscheidung bezeichnen wir die Indizes aus der Menge $\{1, \dots, n-1\}$ mit lateinischen Buchstaben und die Indizes aus $\{1, \dots, n\}$ mit griechischen Buchstaben. Über repetierte unten und oben stehende Indizes wird dann entsprechend stillschweigend summiert. Die Standardbasis in \mathbb{R}^{n-1} bezeichnen wir mit e_i und die Standardbasis in \mathbb{R}^n mit e_α . Im weiteren benützen wir die Kurzschreibweise $u_i := \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

In diesen lokalen Koordinaten lautet die Gleichung (3.1), welche die Solitonlösung erfüllen muss,

$$\langle X(x, u(x)), \nu(x, u(x)) \rangle = -H(x, u(x)). \quad (3.3)$$

Dies ist eine Gleichung für die Funktion u .

Nun müssen wir die Gleichung (3.3) noch explizit ausschreiben. Dazu betrachten wir zuerst die linke Seite, welche lokal durch

$$-X^\alpha(x, u(x)) \nu^\beta(x, u(x)) \bar{g}_{\alpha\beta}(x, u(x))$$

beschrieben ist. Für die Berechnung von ν betrachten wir die Funktion $F : \Omega \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$F(x_1, \dots, x_n) := u(x_1, \dots, x_{n-1}) - x_n.$$

Dann ist die Solitonfläche die Niveaufäche zu dieser Funktion F zum Niveau 0. Für Tangentialvektoren $\xi \in T_{\phi(x)}\phi(\Omega)$ gilt dann

$$\langle \nabla_{\bar{g}} F, \xi \rangle_{\bar{g}} = 0$$

wobei der Gradient von F gegeben ist durch

$$\nabla_{\bar{g}} F = \bar{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} e_\beta.$$

Damit bekommen wir als (nach unten zeigende) Normale ν

$$\nu = \frac{\nabla_{\bar{g}} F}{\|\nabla_{\bar{g}} F\|_{\bar{g}}}.$$

Dabei ergeben sich die Komponenten von $\nabla_{\bar{g}} F$ und die Norm $\|\nabla_{\bar{g}} F\|_{\bar{g}}$ als

$$\begin{aligned} (\nabla_{\bar{g}} F)^\alpha &= u_i \bar{g}^{i\alpha} - \bar{g}^{n\alpha} \\ \|\nabla_{\bar{g}} F\|_{\bar{g}}^2 &= u_i u_j \bar{g}^{ij} - 2u_i \bar{g}^{in} + \bar{g}^{nn}. \end{aligned}$$

Nach kurzer Rechnung erhält man daraus für die linke Seite der Gleichung (3.3)

$$X^\alpha \nu^\beta \bar{g}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\|\nabla_{\bar{g}} F\|_{\bar{g}}} (X^k u_k - X^n). \quad (3.4)$$

Nun berechnen wir die rechte Seite der Gleichung (3.3), also H . Wie wir im Abschnitt 1.2 gesehen haben, gilt die Formel $H = g^{ij} h_{ij}$. Dabei ist g_{ij} die auf Ω induzierte Metrik

$$g_{ij} = \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^j} \bar{g}_{\alpha\beta} = \bar{g}_{ij} + u_j \bar{g}_{in} + u_i \bar{g}_{jn} + u_i u_j \bar{g}_{nn},$$

und h_{ij} ist nach (1.5) durch die Gaussgleichung

$$\frac{\partial^2 \phi^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^k} + \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial x^j} = -h_{ij} \nu^\alpha \quad (3.5)$$

gegeben. Wie wir am Ende des Abschnitts 1.2 bemerkt haben, fällt der mittlere Term auf der linken Seite weg, wenn wir mit $\bar{g}_{\alpha\beta}\nu^\beta$ multiplizieren. Nach multiplizieren der Gleichung (3.5) mit $\bar{g}_{\alpha\delta}\nu^\delta$ bekommen wir

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j} \bar{g}_{\alpha\delta} \nu^\delta + \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial x^j} \bar{g}_{\alpha\delta} \nu^\delta = -h_{ij}. \quad (3.6)$$

Expandieren wir die Terme auf der linken Seite von (3.6), erhalten wir

$$\begin{aligned} -h_{ij} = \frac{1}{\|\nabla_{\bar{g}} F\|_{\bar{g}}} & \left(-u_{ij} + \bar{\Gamma}_{ij}^k u_k - \bar{\Gamma}_{ij}^n + \bar{\Gamma}_{in}^k u_j u_k - \bar{\Gamma}_{in}^n u_j + \right. \\ & \left. + \bar{\Gamma}_{nj}^k u_i u_k - \bar{\Gamma}_{nj}^n u_i + \bar{\Gamma}_{nn}^k u_i u_j u_k - \bar{\Gamma}_{nn}^n u_i u_j \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dann lautet die zu lösende Solitongleichung (3.3)

$$\begin{aligned} X^k u_k - X^n &= -g^{ij} u_{ij} + g^{ij} \left(\bar{\Gamma}_{ij}^k u_k - \bar{\Gamma}_{ij}^n \right) + 2g^{ij} \left(\bar{\Gamma}_{in}^k u_j u_k - \bar{\Gamma}_{in}^n u_j \right) \\ &+ g^{ij} \left(\bar{\Gamma}_{nn}^k u_i u_j u_k - \bar{\Gamma}_{nn}^n u_i u_j \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dabei sind die auftretenden Funktionen an den Stellen $X^i = X^i(x, u(x))$, $u_j = u_j(x)$ und $\bar{\Gamma}_{ij}^k = \bar{\Gamma}_{ij}^k(x, u(x))$ auszuwerten, und die Metrik g^{ij} hängt von $x, u(x)$ und von $\nabla u(x)$ ab, wobei $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ist.

An dieser Stelle geben wir Randbedingungen vor, indem wir verlangen, dass

$$u = \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (3.9)$$

wobei wir im Moment nur den Fall $\varphi \equiv 0$ betrachten. Wir bemerken jedoch schon hier, dass das Problem (3.8)–(3.9) im Allgemeinen keine Lösung zu haben braucht. Dies sieht man bereits am Beispiel der Yin-Yang-Kurve. Gibt man sich dort zwei Punkte vor, so ist die Yin-Yang-Kurve durch die zwei Punkte im Allgemeinen nicht als Graph über der punkteverbindenden Geraden darstellbar. Wir werden daher im Folgenden nach und nach weitere Bedingungen implementieren.

3.2 Lösung mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, das gegebene Dirichlet-Problem zu lösen. In [14] wird der Banachsche Fixpunktsatz verwendet, da diese Methode gerade auch einen Algorithmus zur numerischen Lösung liefert. Es wird jedoch erwähnt, dass auch der Schaudersche Fixpunktsatz angewendet werden kann. In der genannten Arbeit wird jedoch nur der Fall $N = \mathbb{R}^n$ mit Rotationsisometriegruppen betrachtet. Es zeigt sich, dass bei uns im Allgemeinen Fall der Satz über implizite Funktionen einen geeigneteren Ansatz liefert. Rufen wir uns diesen kurz in Erinnerung.

Theorem 3.2.1. *Seien X, Y und Z Banachräume. Weiter sei $W \subset X \times Y$ offen und nicht leer und $f \in C^1(W, Z)$. Für $(x_0, y_0) \in W$ gelte*

$$(i) \quad f(x_0, y_0) = 0$$

$$(ii) \quad D_y f(x_0, y_0) \in L(Y, Z) \text{ ist ein Isomorphismus.}$$

Dann existieren offene Umgebungen $U(x_0), V(y_0)$ mit $U(x_0) \times V(y_0) \subset W$ und für alle $x \in U(x_0)$ gibt es genau ein $y \in V(y_0)$ mit $f(x, y) = 0$.

Somit ist die Abbildung

$$g : U(x_0) \rightarrow V(y_0), \quad x \mapsto y$$

durch $f(x, g(x)) = 0$ wohldefiniert und es gilt

$$(i) \quad g \in C^1(U(x_0), V(y_0)) \text{ und}$$

$$(ii) \quad Dg(x_0) = -(D_y f(x_0, y_0))^{-1} D_x f(x_0, y_0)$$

Wir wollen nun

$$\begin{aligned} & -g^{ij}u_{ij} + g^{ij} \left(\bar{\Gamma}_{ij}^k u_k - \bar{\Gamma}_{ij}^n \right) \\ & + 2g^{ij} \left(\bar{\Gamma}_{in}^k u_j u_k - \bar{\Gamma}_{in}^n u_j \right) \\ & + g^{ij} \left(\bar{\Gamma}_{nn}^k u_i u_j u_k - \bar{\Gamma}_{nn}^n u_i u_j \right) = \lambda \left(X^k u_k - X^n \right) \end{aligned} \quad \text{auf } \Omega \quad (3.10)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (3.11)$$

mit Hilfe von Theorem 3.2.1 lösen. Dabei haben wir das Originalkillingfeld X in (3.8) durch das Killingfeld λX ersetzt, mit dem Hintergedanken, das Problem für genügend kleines λ zu lösen.

Bemerkung 3.2.2. Man beachte, dass für $\lambda = 0$ die Gleichung (3.10) gerade eine Minimalfläche darstellt, welche in der gegebenen Randkurve eingespannt ist. Es ist daher eine natürliche Forderung zu verlangen, dass die Koordinaten so gewählt sind, dass der Graph der Funktion $u \equiv 0$ eine Minimalfläche darstellt. Dies entspricht der in [14] betrachteten Situation einer Ebene im Euklidischen Fall. \diamond

Als Banachräume im Theorem 3.2.1 wählen wir nun $X := \mathbb{R}$, $Y := C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \cap C_0(\bar{\Omega})$, $Z := C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ und $W = X \times Y$. Mit $C_0(\bar{\Omega})$ meinen wir die Menge der stetigen Funktionen auf $\bar{\Omega}$, die auf $\partial\Omega$ verschwinden. Der Raum Y wird dabei mit der Norm von $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ ausgestattet. Im Übrigen benützen wir die Notation und Definition der Hölder-Räume aus [10].

Weiter sei

$$\begin{aligned} f : W & \rightarrow Z \\ (\lambda, u) & \mapsto -g^{ij}u_{ij} + g^{ij} \left(\bar{\Gamma}_{ij}^k u_k - \bar{\Gamma}_{ij}^n \right) + 2g^{ij} \left(\bar{\Gamma}_{in}^k u_j u_k - \bar{\Gamma}_{in}^n u_j \right) \\ & + g^{ij} \left(\bar{\Gamma}_{nn}^k u_i u_j u_k - \bar{\Gamma}_{nn}^n u_i u_j \right) - \lambda \left(X^k u_k - X^n \right) \end{aligned}$$

und $(\lambda_0, u_0) = (0, 0)$.

Wir müssen nun überprüfen, dass $f \in C^1(\mathbb{R} \times (C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \cap C_0(\bar{\Omega})), C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}))$ und dass die Eigenschaften (i) und (ii) aus dem Theorem 3.2.1 erfüllt sind.

Dass f tatsächlich stetig differenzierbar ist, wird im Appendix 4.5 verifiziert.

Wegen der Bemerkung 3.2.2 gilt wie gewünscht $f(0, 0) = 0$, und somit ist die Eigenschaft (i) erfüllt.

Um (ii) zu überprüfen, müssen wir die partielle Ableitung von f nach u berechnen, und diese im Punkt $(\lambda, u) = (0, 0)$ auswerten.

$$\begin{aligned} D_u f(0, 0) : C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \cap C_0(\bar{\Omega}) &\rightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \\ v &\mapsto -g^{ij}(x, 0, 0)v_{ij} \\ &\quad + g^{ij}(x, 0, 0)\bar{\Gamma}_{ij}^k(x, 0)v_k \\ &\quad - D_u(g^{ij}(x, 0, 0)\bar{\Gamma}_{ij}^n(x, 0))v \\ &\quad - D_{u_k}(g^{ij}(x, 0, 0)\bar{\Gamma}_{ij}^n(x, 0))v_k \\ &\quad - 2g^{ij}(x, 0, 0)\bar{\Gamma}_{in}^n(x, 0)v_j \end{aligned}$$

Setzen wir voraus, dass Ω ein $C^{2,\alpha}$ Gebiet ist, so folgt aus der Bedingung

$$D_u(g^{ij}(x, 0, 0)\bar{\Gamma}_{ij}^n(x, 0)) \leq 0 \quad (3.12)$$

und dem Satz 6.14 aus [10], dass $D_u f(0, 0)$ ein Isomorphismus ist. Unter dieser Voraussetzung hat somit die Gleichung (3.10), (3.11) für kleine λ eine Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Um den entsprechenden Satz formulieren zu können, führen wir noch folgende Sprechweisen ein.

Sei N eine n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einem Killingvektorfeld X . Weiter sei $N' \subset N$ eine eingebettete orientierbare minimale Hyperfläche, sowie $\psi : V \subset N \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ eine Kartenabbildung so, dass $\psi^{-1}((\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \cap U) = N'$. Eine solche Kartenabbildung respektive solche Koordinaten nennen wir dann kurz **minimal**. Falls dann auf $(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \cap U$ die Bedingung (3.12) gilt, nennen wir die Koordinaten zugelassen. Falls für N' zugelassene minimale Koordinaten existieren, nennen wir N' **zugelassen**.

Theorem 3.2.3. *Sei N eine n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einem Killingvektorfeld X . Weiter sei $N' \subset N$ eine zugelassene minimale Hyperfläche. Ist dann γ der Rand eines $C^{2,\alpha}$ Gebietes $\Sigma \subset N'$, so existiert für genügend kleines λ eine Soliton-hyperfläche bezüglich des Killingvektorfeldes λX mit dem Rand γ .*

Bemerkung 3.2.4. Wir schliessen die Diskussion an dieser Stelle mit einer hinreichenden Bedingung für die Zulässigkeit einer minimalen Hyperfläche ab. Dazu machen wir folgende Überlegung. Gemäss (3.10) ist $g^{ij}(x, u, 0)\bar{\Gamma}_{ij}^n(x, u)$ gerade die mittlere Krümmung der Niveaufäche $u \equiv \text{konstant}$. Gelingt es also N' in eine Blätterung bestehend aus Minimalflächen von N einzubetten, so ist sogar $D_u(g^{ij}(x, 0, 0)\bar{\Gamma}_{ij}^n(x, 0)) = 0$ erfüllbar durch entsprechende Wahl des Koordinatensystems. Dies wiederum ist insbesondere dann möglich, wenn X oder ein anderes Killingfeld N' transversal schneidet. \diamond

Im Spezialfall, wenn X eine Rotation auf $N = \mathbb{R}^n$ erzeugt und N' eine Hyperebene ist, wurde der Satz 3.2.3 bereits in [14] bewiesen, dort allerdings mit etwas flexibleren Randbedingungen.

Beispiel 3.2.5. Als Illustration zum Satz 3.2.3 betrachten wir die Situation einer Schraubung in \mathbb{R}^3 . Als Killing-Feld, welches die Schraubung entlang der x_3 -Achse erzeugt, betrachten wir

$$X(x) = \begin{pmatrix} -x_2\omega \\ x_1\omega \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Wir möchten lokal die Solitongleichung $\langle X, \nu \rangle = -H$ lösen, wobei wir die Lösung als Graph einer zu bestimmenden Funktion u über dem in der (x_1, x_2) -Ebene liegenden Einheitskreis darstellen wollen. Der Satz 3.2.3 garantiert die Existenz einer Lösung für kleine Werte der Winkelgeschwindigkeit ω und der Translationsgeschwindigkeit λ . (Eine genauere Analyse in diesem Fall liefert, dass es in der Tat nur auf den transversalen Anteil λ ankommt.) Als Metrik bekommt man $g_{ij} = \delta_{ij} + u_i u_j$ respektive $g^{ij} = \delta^{ij} - \frac{1}{w^2} \delta^{ik} u_k \delta^{jl} u_l$ mit $w^2 = 1 + \delta^{ij} u_i u_j$. Als Einheitsnormale auf die Fläche findet man leicht

$$\nu = -\frac{1}{w} (\delta^{kl} u_l \frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial u}).$$

Die Christoffel-Symbole ergeben sich als

$$\Gamma_{ij}^k = u_{ij} g^{kr} u_r.$$

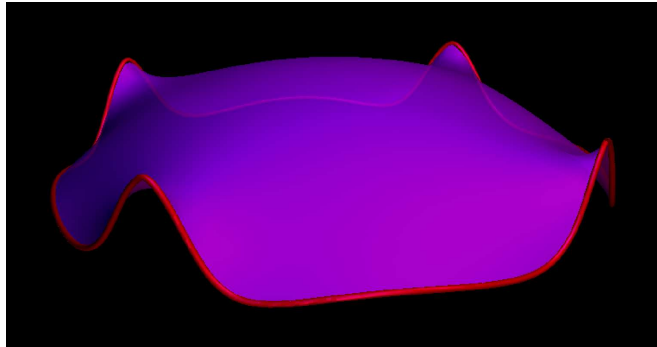
Aus der Gauss-Gleichung erhält man daraus die mittlere Krümmung

$$-H = \frac{1}{w} g^{ij} u_{ij}.$$

Damit wird die Solitongleichung schliesslich explizit:

$$w^2(\omega(u_1 x_2 - u_2 x_1) + \lambda) = u_{11}(1 + u_2^2) + u_{22}(1 + u_1^2) - 2u_1 u_2 u_{12}.$$

Diese Gleichung lässt sich relativ einfach in ein numerisches Verfahren übersetzen. Die Idee dabei ist wie in [14], die Gleichung als Fixpunktgleichung einer kontrahierenden Abbildung zu betrachten. In jedem Iterationsschritt muss dann eine lineare elliptische Gleichung gelöst werden, was mit Hilfe des Gauss-Seidel-Verfahrens geschieht. Die Kombination mit einer sukzessiven Gitterverfeinerung liefert schliesslich einen recht schnell konvergierenden Algorithmus. Die Lösung ist für eine spezielle Wahl von Randwerten unten abgebildet. Man beachte dabei, wie der “Bauch” in der Mitte den Translationsanteil liefert und die vier asymmetrischen “Nasen” am Rand für die Drehung sorgen.



◇

Kapitel 4

Appendix

4.1 Einfache Schleifen

Wir beweisen hier das folgende technische Lemma:

Lemma 4.1.1. *Sei M eine glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma : [0, \ell] \rightarrow M$ eine reguläre C^1 -Kurve, welche nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Falls γ nicht injektiv ist, so bildet γ mindestens eine einfache Schleife.*

Unter einer einfachen Schleife verstehen wir dabei folgendes: Es gibt ein offenes Teilintervall $]x, y[\subset [0, \ell]$, so dass $\gamma|_{]x, y[}$ injektiv ist und $\gamma(x) = \gamma(y)$.

Beweis: Zum Beweis des Lemmas betrachten wir die abgeschlossene Menge

$$A := \{(x, y) \in [0, \ell] \times [0, \ell] \mid \gamma(x) = \gamma(y)\}.$$

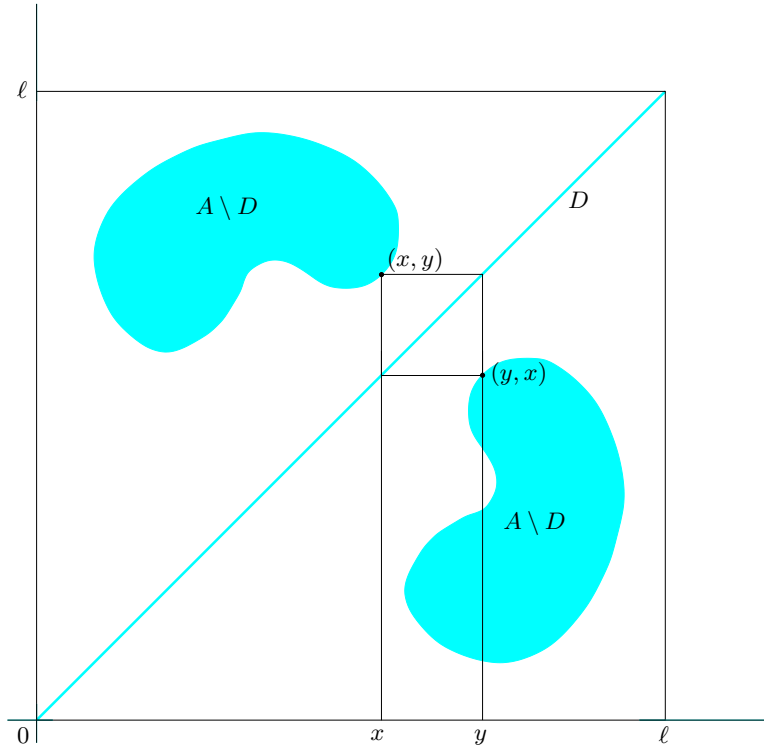
Ferner sei

$$D := \{(x, x) \in [0, \ell] \times [0, \ell] \mid x \in [0, \ell]\} \subset A$$

die Diagonale von A . Wir betrachten dann zwei Fälle.

1.Fall: Sei $\text{dist}(A \setminus D, D) > 0$. Dann gibt es einen Punkt $(x, y) \in A \setminus D$ mit $\text{dist}(A \setminus D, D) = \text{dist}((x, y), D)$. Da im Quadrat $[x, y] \times [x, y]$ ausser (x, y) und (y, x) kein weiterer Punkt der Menge $A \setminus D$ liegt, muss $\gamma|_{[x, y]}$ eine einfache Schleife sein (siehe Figur 4.1).

2.Fall: Sei nun $\text{dist}(D, A \setminus D) = 0$. Dann gibt es eine Folge $(x_n, y_n) \in A \setminus D$, so dass $(x_n, y_n) \rightarrow (\bar{x}, \bar{x}) \in D$ für $n \rightarrow \infty$. Im folgenden dürfen wir wegen Nashs Einbettungssatz davon ausgehen, dass M respektive ein relevanter kompakter Teil von M isometrisch in einem euklidischen Raum \mathbb{R}^k eingebettet ist. Mit dem Mittelwertsatz und der Eigenschaft, dass γ eine C^1 -Funktion ist, folgt dann, dass $0 = \frac{\gamma(x_n) - \gamma(y_n)}{x_n - y_n} \rightarrow \dot{\gamma}(\bar{x}) \neq 0$, was einen Widerspruch liefert. \square



Figur 4.1: Illustration zum 1. Fall

4.2 Einfache Zweiecke

Wir beweisen hier ein weiteres technisches Lemma:

Lemma 4.2.1. *Für $i = 1, 2$ seien $\gamma_i : [0, \ell_i] \rightarrow M$ zwei nach der Bogenlänge parametrisierte Solitonenkurven, so dass $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(\ell_1) = \gamma_2(\ell_2)$. Dann bilden γ_1 und γ_2 mindestens ein einfaches Zweieck. Das heisst, es gibt $]a_i, b_i[\subset [0, \ell_i]$ mit $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$ und $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$, so dass sich die Einschränkungen $\gamma_1|_{]a_1, b_1[}$ und $\gamma_2|_{]a_2, b_2[}$ nicht schneiden.*

Beweis: Wir betrachten die abgeschlossene Menge

$$A := \{ (x, y) \in [0, \ell_1] \times [0, \ell_2] \mid \gamma_1(x) = \gamma_2(y) \}.$$

Sei $P = (\bar{x}, \bar{y})$ ein Häufungspunkt von A , dann ist insbesondere $P \in A$. Somit existiert eine Folge $P_i = (x_i, y_i)$ von lauter verschiedenen Punkten aus A mit $P_i \rightarrow P$ für $i \rightarrow \infty$. Das heisst, es gilt $\gamma_1(x_i) = \gamma_2(y_i)$. Wir nehmen im Weiteren wieder an, M oder ein relevanter Teil von M sei isometrisch in einem euklidischen Raum \mathbb{R}^k eingebettet. Dann gilt

$$\frac{\gamma_1(x_i) - \gamma_1(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{\gamma_2(y_i) - \gamma_2(y_{i-1})}{y_i - y_{i-1}} \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$

Die linke Seite konvergiert für $i \rightarrow \infty$ gegen $\dot{\gamma}_1(\bar{x})$, der erste Faktor auf der rechten Seite gegen $\dot{\gamma}_2(\bar{y})$. Da diese beiden Limites Einheitsvektoren sind, folgt, dass

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \pm 1$$

und

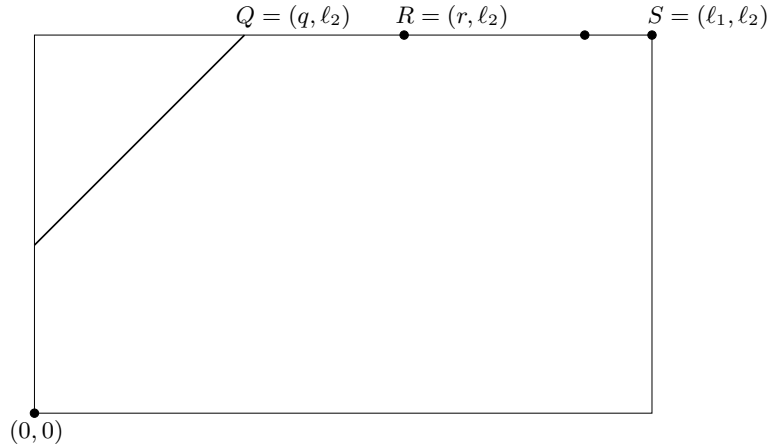
$$\dot{\gamma}_1(\bar{x}) = \pm \dot{\gamma}_2(\bar{y}).$$

Aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit der Solitongleichung folgt nun, dass das Ganze in $[0, l_1] \times [0, l_2]$ liegende Stück der Gerade durch den Häufungspunkt P mit Steigung $+1$ respektive -1 zu A gehört. Man sieht nun leicht, dass A nur endlich viele solche Geradenstücke enthalten kann. Würde nämlich A unendlich viele Geraden, sagen wir der Steigung 1 , enthalten, dann fände man eine Folge $(x_i, y) \in A$ welche sich in einem Punkt von A häufen würden. Dann hätte man

$$0 = \frac{\gamma_2(y) - \gamma_2(y)}{x_i - x_{i-1}} = \frac{\gamma_1(x_i) - \gamma_1(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}},$$

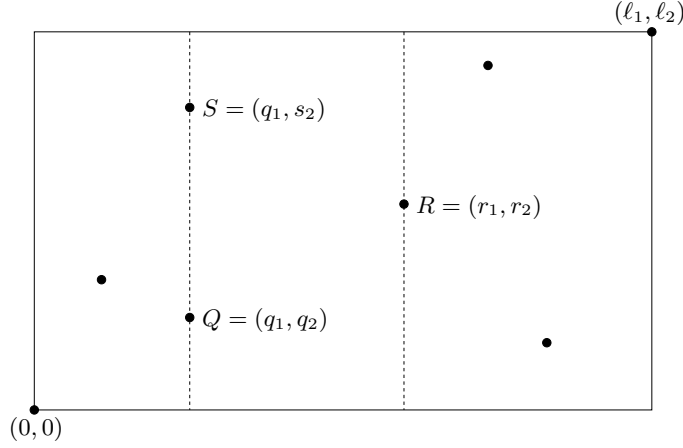
was nicht sein kann, da die rechte Seite gegen einen Einheitsvektor konvergiert. Wir machen nun eine Fallunterscheidung, um endlich das einfache Zweieck zu finden.

1. Fall: A enthält mindestens eine Gerade (aber eben höchstens endlich viele). Wir betrachten nur einen Fall einer möglichen Lage dieser Geraden (siehe Figur 4.2). Zwischen den Punkten Q und S liegen höchstens endlich viele weitere Punkte aus A (unendlich viele Punkte kann man mit demselben Argument wie oben ausschliessen). Der dem Punkt $Q = (q, \ell_2)$ nächstliegende Punkt sei $R = (r, \ell_2)$. Dann ist $\gamma_1|_{[q,r]}$ zusammen mit $\gamma_2|_{[\ell_2, \ell_2]}$ ein einfaches Zweieck.



Figur 4.2: Illustration zum 1. Fall

2. Fall: A enthält keine Gerade (also nur endlich viele Punkte). In diesem Falle wählt man zwei Punkte $Q = (q_1, q - 2)$ und $R = (r_1, r_2)$ aus A , so dass keine weiteren Punkte aus A im Streifen $]q_1, r_1[\times \mathbb{R}$ liegen (siehe Figur 4.3). Je nach Lage der Punkte ist dann $\gamma_1|_{[q_1, r_1]}$ und $\gamma_2|_{[q_2, r_2]}$ oder (falls weitere Punkte von A auf dem Rand des Streifens liegen) $\gamma_1|_{[q_1, q_1]}$ und $\gamma_2|_{[q_2, s_2]}$ ein einfaches Zweieck. \square



Figur 4.3: Illustration zum 2. Fall

4.3 Solitonkurven auf Rotationsflächen

Die Abbildung $t \mapsto (R(t), z(t))$, $R(t) > 0$, sei eine reguläre Kurve in der (R, z) -Ebene. Diese Kurve wird nun um die z -Achse rotiert und erzeugt so eine Rotationsfläche im \mathbb{R}^3 . Damit ist eine Parametrisierung dieser Fläche gegeben durch $(t, \varphi) \mapsto (R(t) \cos \varphi, R(t) \sin \varphi, z(t))$. Die Metrik $g(t, \varphi)$ auf dieser Rotationsfläche ist dann gegeben durch

$$\begin{pmatrix} R'(t)^2 + z'(t)^2 & 0 \\ 0 & R(t)^2 \end{pmatrix}.$$

Die Christoffelsymbole $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ zur Metrik g errechnen sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{R'(t)R''(t) + z'(t)z''(t)}{R'(t)^2 + z'(t)^2} \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = 0 \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{R(t)R'(t)}{R'(t)^2 + z'(t)^2} \\ \Gamma_{11}^2 &= 0 \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{R'(t)}{R(t)} \\ \Gamma_{22}^2 &= 0 \end{aligned}$$

Das Killingfeld $X = (0, 1)$ erzeugt die Drehgruppe der Rotationsfläche. Wir suchen nun in der (t, φ) -Ebene eine Solitonkurve bezüglich X in der Form

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad s \mapsto (\rho(s), \phi(s))$$

wobei I ein Intervall ist.

Eine Einheitsnormale an die Solitonkurve im Punkt $(\rho(s), \phi(s))$ ist

$$\nu(s) := \frac{1}{\sqrt{R^2 (R'^2 + z'^2) ((R'^2 + z'^2)\rho'^2 + R^2\phi'^2)}} \begin{pmatrix} R^2\phi' \\ -(R'^2 + z'^2)\rho' \end{pmatrix}.$$

Dabei sind R , R' und z' im Punkt $\rho(s)$ und ρ' und ϕ' in s auszuwerten.

Als Krümmung H der Solitonkurve im Punkt $(\rho(s), \phi(s))$ bezüglich der Normalen ν erhält man

$$H = \frac{-2R'^3\rho'^2\phi' + R'\phi'(-2z'^2\rho'^2 + R(-R\phi'^2 + \rho'^2 R'')) + RR'^2(\phi'\rho'' - \rho'\phi'') + Rz'(\rho'^2\phi'z'' + z'\phi'\rho'' - z'\rho'\phi'')}{(R'^2\rho'^2 + z'^2\rho'^2 + R^2\phi'^2)\sqrt{(R'^2 + z'^2)((R'^2 + z'^2)\rho'^2 + R^2\phi'^2)}}.$$

Auch hier sind die Funktionen ρ und ϕ sowie deren Ableitungen in s und R und z sowie deren Ableitungen in $\rho(s)$ auszuwerten.

Für die linke Seite der Solitongleichung $\langle X, \nu \rangle = -H$ bekommt man schliesslich

$$\langle X, \nu \rangle = -\frac{R\rho'(R'^2 + z'^2)}{\sqrt{(R'^2 + z'^2)((R'^2 + z'^2)\rho'^2 + R^2\phi'^2)}}.$$

Wir legen nun fest, dass die gesuchte Solitonkurve nach der Bogenlänge parametrisiert sein soll, das heisst $\|f'\|_g = 1$, also insbesondere

$$0 = \frac{d}{ds} \langle \dot{f}, \dot{f} \rangle_g = 2\dot{f}^i(\ddot{f}^j g_{ij} + \dot{f}^j \dot{f}_k \Gamma_{ij}^k). \quad (4.1)$$

Das Gleichungssystem zweiter Ordnung bestehend aus der Gleichung $\langle X, \nu \rangle = -H$ und der Gleichung (4.1) wird dann wie in Abschnitt 2.2 umgeschrieben in ein Gleichungssystem erster Ordnung. Man erhält auf diese Weise die Gleichung für Solitonkurven auf Rotationsflächen:

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{Rv^2 R' + R^2 uv(R'^2 + z'^2) - u^2(R'R'' + z'z'')}{R'^2 + z'^2} \\ -\frac{u(2vR' + Ru(R'^2 + z'^2))}{R} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Der Forderung, dass die Kurve nach der Bogenlänge parametrisiert ist, kommen wir nach, indem wir bei den Anfangsbedingungen festlegen, dass $\|f'(0)\|_g = 1$.

Wie wir in Abschnitt 2.2 gezeigt haben, besitzt dieses Differentialgleichungssystem (4.2) lokal für beliebige Anfangsdaten eine eindeutige Lösung respektive eine globale Lösung, falls die Rotationsfläche geodätisch vollständig ist.

4.3.1 Kegel

Als Beispiel einer Rotationsfläche betrachten wir einen Kegel mit halbem Öffnungswinkel β . In diesem Fall erzeugt

$$R(t) = t \sin \beta, \quad z(t) = -t \cos \beta$$

den Kegel. Setzt man dies in (4.2) ein, so erhält man

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ v\rho(v+u\rho)\sin^2\beta \\ -\frac{u(2v+u\rho)}{\rho} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

4.3.2 Hyperboloid

Als weiteres Beispiel einer Rotationsfläche betrachten wir ein einschaliges Rotationshyperboloid. Als erzeugende Kurve nehmen wir dafür

$$R(t) = \lambda \cosh t, \quad z(t) = \sinh t$$

Der asymptotischen Kegel weist somit einen halbem Öffnungswinkel $\beta = \arctan \lambda$ auf. Setzt man diese Parametrisierung der erzeugenden Kurve in (4.2) ein, so erhält man

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{\cosh \rho (v^2 \lambda^2 \sinh \rho - u^2 (1 + \lambda^2) \sinh \rho + uv \lambda^2 \cosh \rho (\cosh^2 \rho + \lambda^2 \sinh^2 \rho))}{\cosh^2 \rho + \lambda^2 \sinh^2 \rho} \\ -\frac{u(2v \sinh \rho + u(\cosh^3 \rho + \lambda^2 \cosh \rho \sinh^2 \rho))}{\cosh \rho} \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

4.4 Solitonkurven auf Schraubenflächen

Die Abbildung $t \mapsto (x(t), y(t))$ sei eine reguläre Kurve in der (x, y) -Ebene. Diese Kurve wird nun in Richtung der z -Achse geschraubt und erzeugt auf diese Weise eine Schraubenfläche im \mathbb{R}^3 . Damit ist eine Parametrisierung dieser Fläche gegeben durch

$$\psi : (t, \varphi) \mapsto (x(t) \cos \varphi - y(t) \sin \varphi, x(t) \sin \varphi + y(t) \cos \varphi, \lambda \varphi).$$

Dabei ist $2\pi\lambda > 0$ die Ganghöhe der Schraubenfläche. Sei im weiteren die erzeugende Kurve nach der Bogenlänge parametrisiert, das heisst, es gilt $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$. Somit ist die Krümmung der Kurve gegeben durch $\kappa(t) = x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)$. Ferner setzen wir $R(t)^2 := x(t)^2 + y(t)^2 + \lambda^2$. Die Metrik $g(t, \varphi)$ auf dieser Schraubenfläche ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & -y(t)x'(t) + x(t)y'(t) \\ -y(t)x'(t) + x(t)y'(t) & R(t)^2 \end{pmatrix}.$$

Wir merken noch an, dass diese Matrix automatisch positiv definit ist: Nach dem Hurwitz-Kriterium ist dies genau dann der Fall, wenn $g_{11} = x'^2 + y'^2 > 0$ und $\det g_{ij} = \lambda^2(x'^2 + y'^2) + (\frac{1}{2}(R^2)')^2 > 0$.

Die Christoffelsymbole $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ zur Metrik g_{ij} errechnen sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{(R^2)'(x x'' + y y'')}{2g} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{(R^2)'(y x' - x y')}{2g} \\ \Gamma_{21}^1 &= \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{R^2 (R^2)'}{2g} \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{\kappa(R^2)'}{2g} \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{(R^2)'}{2g} \\ \Gamma_{21}^2 &= \Gamma_{12}^2 \\ \Gamma_{22}^2 &= -\frac{(R^2)'(y x' - x y')}{2g}\end{aligned}$$

wobei $g = \det g_{ij}$.

Das Killingfeld $X = (0, 1)$ erzeugt die Schraubengruppe der Fläche. Wir suchen nun in der (t, φ) -Ebene eine Solitonkurve bezüglich in der Form

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad s \mapsto (\rho(s), \phi(s))$$

wobei I ein Intervall ist.

Eine Einheitsnormale an die Solitonkurve im Punkt $(\rho(s), \phi(s))$ ist

$$\nu(s) := \frac{1}{\sqrt{\omega}} \begin{pmatrix} \rho'(x y' - x' y) + \phi' R^2 \\ -(\rho' + \phi'(x y' + x' y)) \end{pmatrix}$$

wobei $\omega := g(\rho'^2 + 2\rho'\phi'(x y' - x' y) + \phi'^2 R^2)$. Dabei sind x, x', y und y' im Punkt $\rho(s)$ und ρ' und ϕ' in s auszuwerten.

Als Krümmung H der Solitonkurve im Punkt $(\rho(s), \phi(s))$ bezüglich der Normalen ν erhält man

$$H = \frac{g(\phi' \rho'' - \rho' \phi'') + \frac{1}{2}(R^2)'(\rho'^2 \phi'(x x'' + y y'') - 2) + 3\rho' \phi'^2 (y x' - x y') - \kappa \rho'^3 - \phi'^3 R^2}{\sqrt{g}(\rho'^2 + 2\rho' \phi'(x y' - y x') + \phi'^2 R^2)^{\frac{3}{2}}},$$

wobei wir, um die Formel etwas zu vereinfachen, hier nun vorausgesetzt haben, dass die erzeugende Kurve $(x(t), y(t))$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Diese Annahme werden wir im weiteren beibehalten.

Für die linke Seite der Solitongleichung $\langle X, \nu \rangle = -H$ bekommt man schliesslich

$$\langle X, \nu \rangle = -\frac{\sqrt{g} \rho'}{\sqrt{\rho'^2 + 2\rho' \phi'(x y' - y x') + \phi'^2 R^2}}.$$

Wir legen nun fest, dass die gesuchte Solitonkurve nach der Bogenlänge parametrisiert sein soll, das heisst $\|f'\|_g = 1$, also insbesondere

$$0 = \frac{d}{ds} \langle \dot{f}, \dot{f} \rangle_g = 2\dot{f}^i (\ddot{f}^j g_{ij} + \dot{f}^j \dot{f}_k \Gamma_{ij}^k). \quad (4.5)$$

Das Gleichungssystem zweiter Ordnung bestehend aus der Gleichung $\langle X, \nu \rangle = -H$ und der Gleichung (4.5) wird dann wie in Abschnitt 2.2 umgeschrieben in ein Gleichungssystem erster Ordnung. Man erhält auf diese Weise die Gleichung für Solitonkurven auf Schraubenflächen:

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ uvR^2 + u^2(x y' - y x') + \frac{(R^2)'(v^2 R^2 - u^2(x x'' + y y'') + 2uv(x y' - y x'))}{2g} \\ uv(y x' - x y') - u^2 + \frac{(R^2)'(v^2(y x' - x y') - 2uv - \kappa u^2)}{2g} \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Der Forderung, dass die Kurve nach der Bogenlänge parametrisiert ist, kommen wir nach, indem wir bei den Anfangsbedingungen festlegen, dass $\|f'(0)\|_g = 1$.

Wie wir in Abschnitt 2.2 gezeigt haben, besitzt dieses Differentialgleichungssystem (4.6) lokal für beliebige Anfangsdaten eine eindeutige Lösung respektive eine globale Lösung, falls die Schraubenfläche geodätisch vollständig ist.

4.5 Differenzierbare Funktionen auf Banachräumen

In diesem Abschnitt fassen wir kurz die Theorie der differenzierbaren Funktionen zwischen Banachräumen zusammen.

Definition 4.5.1. Seien X, Y zwei Banachräume, $\emptyset \neq U \subset X$ offen und $f : U \rightarrow Y$. Die Abbildung f heisst **Fréchet-differenzierbar**, kurz differenzierbar, in $x \in U$, falls ein stetiger linearer Operator $T : X \rightarrow Y$ mit

$$\|f(x+y) - f(x) - Ty\| = o(\|y\|)$$

existiert. Wir schreiben

$$Df(x) = f'(x) = T.$$

Wir definieren die Menge der **stetig differenzierbaren Funktionen**

$$C^1(U, Y) := \{ f : U \rightarrow Y \mid f \text{ ist stetig und differenzierbar in jedem Punkt } x \in U \\ \text{und } Df \in C^0(U, L(X, Y)) \}. \quad \diamond$$

Nun kommen wir zu einigen Rechenregeln. Die einfachste ist die Linearität.

Lemma 4.5.2. Seien X, Y zwei Banachräume, $\emptyset \neq U \subset X$ offen und $f, g \in C^1(U, Y)$. Dann gilt $\lambda f + \mu g \in C^1(U, Y)$ und $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Ferner gilt eine Produktregel, wenn der Zielraum eine Banachalgebra ist.

Lemma 4.5.3. *Sei X ein Banachraum und Y eine Banachalgebra, $\emptyset \neq U \subset X$ offen und $f, g \in C^1(U, Y)$. Dann gilt $fg \in C^1(U, Y)$ und $D(fg) = g Df + f Dg$.*

Der Beweis ist einfach. Ebenso einfach ist die folgende Bemerkung.

Lemma 4.5.4. *Seien X und Y zwei Banachräume und $f : X \rightarrow Y$ linear und stetig. Dann ist $f \in C^1(X, Y)$ und*

$$Df : X \rightarrow L(X, Y), \quad x \mapsto f$$

Das folgende Lemma enthält die Kettenregel.

Lemma 4.5.5. *Seien X, Y und Z Banachräume und seien $\emptyset \neq U \subset X$, $\emptyset \neq V \subset Y$ offen. Weiter sei $f \in C^1(U, Y)$ mit $f(U) \subset V$ und $g \in C^1(V, Z)$. Dann ist $g \circ f \in C^1(U, Z)$ und es gilt*

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x).$$

Auch die Kettenregel ist einfach zu beweisen.

Nachdem wir nun einige Ableitungsregeln für allgemeine Banachräume behandelt haben, gehen wir nun speziell über zu Hölder-Räumen. Dazu benötigen wir vorerst die folgende technische Aussage.

Lemma 4.5.6. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und beschränkt. Sei $g \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^\ell)$ und $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so dass folgendes gilt:*

- (i) *Für jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^\ell$ existiert $C > 0$, so dass für jedes $\xi \in K$ $[f(\cdot, \xi)]_{\alpha; \Omega} \leq C$.*
- (ii) *Für jedes $x \in \bar{\Omega}$ ist $f(x, \xi)$ stetig partiell nach ξ differenzierbar.*

Dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} \Phi : \bar{\Omega} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x, g(x)) \end{aligned}$$

in $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ und es gilt

$$\begin{aligned} [f(\cdot, g(\cdot))]_{\alpha; \Omega} &\leq \sup_{\xi \in g(\bar{\Omega})} [f(\cdot, \xi)]_{\alpha; \Omega} \\ &\quad + [g]_{\alpha; \Omega} \sum_{k=1}^{\ell} \sup \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial \xi_k}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_\ell) \right| \mid \xi_0 \in \bar{\Omega}, \xi_j \in g_j(\bar{\Omega}), j = 1, \dots, \ell \right\}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Beweis. Zunächst gilt:

$$\|f(\cdot, g(\cdot))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \sup_{\substack{x \in \bar{\Omega} \\ \xi \in g(\bar{\Omega})}} |f(x, \xi)| < \infty.$$

Für die Abschätzung der Hölder-Halbnorm gehen wir wie folgt vor:

$$\begin{aligned} [f(\cdot, g(\cdot))]_{\alpha; \Omega} &= \sup_{x \neq y \in \bar{\Omega}} \frac{|f(x, g(x)) - f(y, g(y))|}{|x - y|^\alpha} \\ &\leq \sup_{x \neq y \in \bar{\Omega}} \frac{|f(x, g(x)) - f(y, g(x))|}{|x - y|^\alpha} + \sup_{x \neq y \in \bar{\Omega}} \frac{|f(y, g(x)) - f(y, g(y))|}{|x - y|^\alpha} \\ &=: I + II. \end{aligned}$$

Die Terme I und II schätzen wir separat ab.

Mit der Konvention $\frac{1}{0} := 0$ können wir schreiben

$$\begin{aligned} I &= \sup \left\{ \frac{|f(x, g(x)) - f(y, g(x))|}{|x - y|^\alpha} \mid x, y \in \bar{\Omega} \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \frac{|f(x, \xi) - f(y, \xi)|}{|x - y|^\alpha} \mid x, y \in \bar{\Omega}, \xi \in g(\bar{\Omega}) \right\} \\ &= \sup_{\xi \in g(\bar{\Omega})} [f(\cdot, \xi)]_{\alpha; \Omega} < \infty. \end{aligned}$$

Beim Term II gehen wir so vor:

$$\begin{aligned} II &= \sup_{x \neq y \in \bar{\Omega}} \frac{1}{|x - y|^\alpha} \left| \int_{g_1(y)}^{g_1(x)} \frac{\partial f}{\partial \xi}(y, \xi, g_2(x), \dots, g_\ell(x)) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \int_{g_2(y)}^{g_2(x)} \frac{\partial f}{\partial \xi}(y, g_1(y), \xi, g_3(x), \dots, g_\ell(x)) d\xi + \dots \right. \\ &\quad \left. + \int_{g_\ell(y)}^{g_\ell(x)} \frac{\partial f}{\partial \xi}(y, g_1(y), \dots, g_{\ell-1}(y), \xi) d\xi \right| \end{aligned}$$

Den Betrag des k -ten Integrals schätzen wir nun noch folgendermassen ab:

$$\begin{aligned} &\int_{g_k(y)}^{g_k(x)} \left| \frac{\partial f}{\partial \xi}(y, g_1(y), \dots, g_{k-1}(y), \xi, g_{k+1}(x), \dots, g_\ell(x)) \right| d\xi \leq \\ &\leq |g(x) - g(y)| \sup \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial \xi_k}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_\ell) \right| \mid \xi_0 \in \bar{\Omega}, \xi_j \in g_j(\bar{\Omega}), j = 1, \dots, \ell \right\} \end{aligned}$$

Dabei haben wir benützt, dass Ω zusammenhängend ist. Daraus folgt nun die im Lemma behauptete Abschätzung für die Hölder-Halbnorm. \square

Die Hauptschwierigkeit für unsere Anwendung liegt im folgenden Lemma.

Lemma 4.5.7. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und beschränkt mit $C^{2,\alpha}$ -Rand. Weiter sei $\varphi \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^\ell, \mathbb{R}) \cap C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^\ell, \mathbb{R})$ und

$$\begin{aligned} \psi : C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^\ell) &\rightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) \\ u &\mapsto \varphi(\cdot, u(\cdot)). \end{aligned}$$

Dann ist $\psi \in C^1(C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^\ell), C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}))$ und es gilt

$$\begin{aligned} D\psi(u) : C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^\ell) &\rightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) \\ v &\mapsto D_2\varphi(\cdot, u(\cdot))v(\cdot), \end{aligned}$$

wobei $D_2\varphi$ die Ableitung der Funktion φ nach ihrer zweiten Variablen bedeutet.

Bemerkung 4.5.8. Bevor wir zum Beweis schreiten, bemerken wir, dass man bei der Verknüpfung von Hölder-stetigen Funktionen vorsichtig sein muss. Wir betrachten dazu das folgende Beispiel.

Sei $\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, \xi) \mapsto \varphi(x, \xi)$ beschränkt und sei $\delta_1, \delta_2 \in (0, 1]$ mit $\delta_1\delta_2 < 1$. Weiter seien die folgenden zwei Ungleichungen erfüllt:

$$\begin{aligned} [\varphi(\cdot, \xi)]_{\delta_1\delta_2; \mathbb{R}^m} &\leq 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \\ [\varphi(x, \cdot)]_{\delta_2; \mathbb{R}^n} &\leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Dann ist einfach zu überprüfen, dass $\varphi(\cdot, u(\cdot)) \in C^{0, \delta_1\delta_2}(\mathbb{R}^m)$, falls $u \in C^{0, \delta_1}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Andererseits ist die Abbildung

$$\begin{aligned} C^{0, \delta_1}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) &\rightarrow C^{0, \delta_1\delta_2}(\mathbb{R}^m) \\ u &\mapsto \varphi(\cdot, u(\cdot)) \end{aligned}$$

im allgemeinen nicht einmal stetig, geschweige denn differenzierbar. Hierzu betrachtet man zum Beispiel $\varphi(x, \xi) := \sqrt{|\xi|}$ und die Folge $u_\varepsilon(x) := |x| + \varepsilon$ für $\varepsilon \searrow 0$. Dann gilt für $\delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, dass

$$u_\varepsilon \rightarrow u_0 \quad \text{in } C^{0, \delta_1}$$

aber

$$\varphi(\cdot, u_\varepsilon(\cdot)) \not\rightarrow \varphi(\cdot, u_0(\cdot)) \quad \text{in } C^{0, \delta_1\delta_2}.$$

◇

Nun kommen wir zum Beweis von Lemma 4.5.7:

Beweis. Zunächst folgt aus dem Lemma 4.5.6, dass $\varphi(\cdot, u(\cdot)) \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$. Beachte, dass $u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^\ell) \subset C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^\ell) \subset C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^\ell)$, wobei die zweite Inklusion aus der Randregularität von Ω folgt. Damit ist die Abbildung ψ wohldefiniert.

Wir betrachten nun den Operator $T : C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^\ell) \rightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^\ell)$, $v \mapsto D_2\varphi(\cdot, u(\cdot))v(\cdot)$. Dieser ist offenbar linear und beschränkt.

Wir zeigen nun, dass

$$\frac{\|\psi(u+v) - \psi(u) - Tv\|_{C^{0,\alpha}}}{\|v\|_{C^{1,\alpha}}} \rightarrow 0 \quad \text{für } \|v\|_{C^{1,\alpha}} \rightarrow 0.$$

Dies beweisen wir in zwei Schritten.

Im ersten Schritt zeigen wir, dass

$$\frac{\|\psi(u+v) - \psi(u) - Tv\|_{L^\infty}}{\|v\|_{C^{1,\alpha}}} \rightarrow 0 \quad \text{für } \|v\|_{C^{1,\alpha}} \rightarrow 0.$$

Dazu betrachten wir den Zähler $\|\psi(u+v) - \psi(u) - Tv\|_{L^\infty}$. Mit der Definition der L^∞ -Norm und den Funktionen ψ und T erhalten wir:

$$\begin{aligned} \|\psi(u+v) - \psi(u) - Tv\|_{L^\infty} &= \sup_{x \in \Omega} |\psi(u(x) + v(x)) - \psi(u(x)) - Tv(x)| \\ &= \sup_{x \in \Omega} |\varphi(x, u(x) + v(x)) - \varphi(x, u(x)) - D_2\varphi(x, u(x))v(x)| \end{aligned} \quad (4.8)$$

Um diese L^∞ -Norm abschätzen zu können, machen wir eine kleine Zwischenrechnung. Wir möchten φ durch die Taylorformel mit Lagrange-Restglied darstellen.

Sei dazu $\Theta : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion. Für zwei Punkte $p, q \in \mathbb{R}^\ell$ definieren wir $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\theta(t) := \Theta(p + t(q - p))$.

Nach der Taylorformel mit Lagrange-Restglied gilt dann für ein $\xi \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned} \Theta(q) &= \theta(1) = \theta(0) + \theta'(0) + \frac{1}{2}\theta''(\xi) \\ &= \Theta(p) + \nabla\Theta(p) \cdot (q - p) + \frac{1}{2}(q - p)^T \text{Hess}_\Theta(p + \xi(q - p))(q - p). \end{aligned}$$

Wir wenden diese Formel nun an auf die Funktion $\Theta(\eta) = \varphi(x, \eta)$ und erhalten für ein (von x abhängiges) $\xi \in]0, 1[$:

$$\varphi(x, q) = \varphi(x, p) + D_2\varphi(x, p) \cdot (q - p) + \frac{1}{2}(q - p)^T \text{Hess}_{\varphi(x, \cdot)}(p + \xi(q - p))(q - p).$$

Setzen wir in dieser Gleichung $q := u(x) + v(x)$ und $p := u(x)$ ein, so erhalten wir für $\xi \in]0, 1[$:

$$\varphi(x, u(x) + v(x)) = \varphi(x, u(x)) + D_2\varphi(x, u(x)) \cdot v(x) + \frac{1}{2}v(x)^T \text{Hess}_{\varphi(x, \cdot)}(u(x) + \xi v(x))v(x).$$

Diese Formel verwenden wir nun, um in (4.8) weiter zu rechnen.

$$\begin{aligned}
|\varphi(x, u(x) + v(x)) - \varphi(x, u(x)) - D_2\varphi(x, u(x))v(x)| &= \\
&= \left| \frac{1}{2}v(x)^T \text{Hess}_{\varphi(x, \cdot)}(u(x) + \xi v(x))v(x) \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \|v(x)\|_{\mathbb{R}^n}^2 \|\text{Hess}_{\varphi(x, \cdot)}(u(x) + \xi v(x))\|_{\mathbb{R}^n \times n} \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \|v\|_{L^\infty}^2 \sup_{\substack{x \in \bar{\Omega} \\ \xi \in [0,1]}} \|\text{Hess}_{\varphi(x, \cdot)}(u(x) + \xi v(x))\|_{\mathbb{R}^n \times n}
\end{aligned}$$

Wir schätzen nun den letzten Faktor der obigen Ungleichung ab. Dazu dürfen wir annehmen, dass $\|v\|_{C^{1,\alpha}} \leq 1$ ist. Da $\bar{\Omega} \times [0, 1]$ kompakt und $\|v\|_{C^{1,\alpha}} \leq 1$ ist, ist $u(x) + \xi v(x) \in \overline{B_{R+1}(0)}$, wobei $R = \|u\|_{L^\infty}$. Wegen der Stetigkeit der Abbildung $(x, \zeta) \mapsto \text{Hess}_{\varphi(x, \cdot)}(\zeta)$ und der Kompaktheit von $\bar{\Omega} \times \overline{B_{R+1}(0)}$ gilt:

$$|\text{Hess}_{\varphi(x, \cdot)}(\zeta)| \leq C \quad \forall x \in \bar{\Omega}, |\zeta|_{\mathbb{R}^n} \leq R + 1.$$

Somit bekommen wir für die letzte Zeile in der obigen Abschätzung:

$$\frac{1}{2} \|v\|_{L^\infty}^2 \sup_{(x, \xi) \in \bar{\Omega} \times [0, 1]} \|\text{Hess}_{\varphi(x, \cdot)}(u(x) + \xi v(x))\|_{\mathbb{R}^n \times n} \leq \frac{1}{2} \|v\|_{L^\infty}^2 \cdot C$$

Nun erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{\|\psi(u + v) - \psi(u) - Tv\|_{L^\infty}}{\|v\|_{C^{1,\alpha}}} &\leq C \frac{\|v\|_{L^\infty}^2}{\|v\|_{C^{1,\alpha}}} \\
&= C \|v\|_{L^\infty} \rightarrow 0 \quad \text{für } \|v\|_{C^{1,\alpha}} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Im zweiten Schritt zeigen wir, dass

$$\frac{[\psi(u + v) - \psi(u) - Tv]_{\alpha; \Omega}}{\|v\|_{C^{1,\alpha}}} \rightarrow 0 \quad \text{für } \|v\|_{C^{1,\alpha}} \rightarrow 0.$$

Dazu betrachten wir den Zähler und erhalten mit den Definitionen der Funktionen ψ und T :

$$[\psi(u + v) - \psi(u) - Tv]_{\alpha; \Omega} = [\varphi(\cdot, u(\cdot) + v(\cdot)) - \varphi(\cdot, u(\cdot)) - D_2\varphi(\cdot, u(\cdot))v(\cdot)]_{\alpha; \Omega} \quad (4.9)$$

Um diesen Ausdruck abschätzen zu können, machen wir eine kleine Zwischenrechnung. Wir möchten für die Differenz $\varphi(x, u(x) + v(x)) - \varphi(x, u(x))$ durch ein Integral ausdrücken. Wir betrachten eine einmal stetig differenzierbare Funktion $\Theta : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi \mapsto \Theta(\xi)$. Für zwei beliebige Punkte $p, q \in \mathbb{R}^\ell$ betrachten wir die einmal stetig differenzierbare Funktion $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \theta(t) := \Theta(p + t(q - p))$. Wir sehen, dass dann

$$\begin{aligned}
\theta'(t) &= \frac{d}{dt} \Theta(p + t(q - p)) = \nabla \Theta(p + t(q - p)) (q - p) \\
\theta(1) &= \Theta(q) \\
\theta(0) &= \Theta(p).
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass

$$\begin{aligned}\Theta(q) - \Theta(p) &= \theta(1) - \theta(0) \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \theta(t) dt \\ &= \int_0^1 \nabla \Theta(p + t(q - p)) (q - p) dt.\end{aligned}$$

Für festes $x \in \bar{\Omega}$ wenden wir diese Formel für $q := u(x) + v(x)$ und $p := u(x)$ auf die Funktion $\Theta(\xi) = \varphi(x, \xi)$ an und erhalten

$$\varphi(x, u(x) + v(x)) - \varphi(x, u(x)) = \int_0^1 D_2 \varphi(x, u(x) + tv(x)) v(x) dt.$$

Somit lässt sich (4.9) in folgende Form bringen:

$$\begin{aligned}[\varphi(\cdot, u(\cdot) + v(\cdot)) - \varphi(\cdot, u(\cdot)) - D_2 \varphi(\cdot, u(\cdot)) v(\cdot)]_{\alpha; \Omega} &= \\ &= \left[\int_0^1 D_2 \varphi(\cdot, u(\cdot) + tv(\cdot)) v(\cdot) dt - D_2 \varphi(\cdot, u(\cdot)) v(\cdot) \right]_{\alpha; \Omega} \\ &= [g(\cdot, v(\cdot))]_{\alpha; \Omega},\end{aligned}$$

wobei die Funktion $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g(x, \xi) := \int_0^1 D_2 \varphi(x, u(x) + t\xi) \xi dt - D_2 \varphi(x, u(x)) \xi$ definiert ist.

Man verifiziert nun leicht, dass die Funktion g die Voraussetzungen für die Funktion f im Lemma 4.5.6 erfüllt. Somit folgt aus der Abschätzung (4.7):

$$\begin{aligned}[g(\cdot, v(\cdot))]_{\alpha; \Omega} &\leq \sup_{\xi \in v(\bar{\Omega})} [g(\cdot, \xi)]_{\alpha; \Omega} \\ &+ [v]_{\alpha; \Omega} \sum_{k=1}^{\ell} \sup \left\{ \left| \frac{\partial g}{\partial \xi_k}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_\ell) \right| \mid \xi_0 \in \bar{\Omega}, \xi_j \in v_j(\bar{\Omega}), j = 1, \dots, \ell \right\}\end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass

$$\frac{[g(\cdot, v(\cdot))]_{\alpha; \Omega}}{\|v\|_{C^{1, \alpha}}} \rightarrow 0 \quad \text{für } \|v\|_{C^{1, \alpha}} \rightarrow 0$$

gilt, betrachten wir die beiden Terme auf der rechten Seite der obigen Ungleichung getrennt. Wir werden zeigen, dass

$$\begin{aligned}(i) \quad &\frac{\sup \{ [g(\cdot, \xi)]_{\alpha; \Omega} \mid \xi \in v(\bar{\Omega}) \}}{\|v\|_{C^{1, \alpha}}} \rightarrow 0 \quad \text{für } \|v\|_{C^{1, \alpha}} \rightarrow 0 \\ (ii) \quad &\sup \left\{ \left| \frac{\partial g}{\partial \xi_k}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_\ell) \right| \mid \xi_0 \in \bar{\Omega}, \xi_j \in v_j(\bar{\Omega}), j = 1, \dots, \ell \right\} \rightarrow 0 \quad \text{für } \|v\|_{C^{1, \alpha}} \rightarrow 0 \\ &\text{für alle } k \in \{1, \dots, \ell\}.\end{aligned}$$

Also betrachten wir zunächst den Teil (i).

Wir müssen zeigen, dass

$$\frac{\sup \{ [g(\cdot, \xi)]_{\alpha; \Omega} \mid \xi \in v(\bar{\Omega}) \}}{\|v\|_{C^{1, \alpha}}} \rightarrow 0 \quad \text{für } \|v\|_{C^{1, \alpha}} \rightarrow 0. \quad (4.10)$$

Den Vektor $\xi \in v(\bar{\Omega})$ notieren wir im Folgenden als $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_\ell) \in v(\bar{\Omega}) \subset \mathbb{R}^\ell$. Um die Aussage (4.10) zu beweisen, genügt es

$$\frac{\sup \{ [g(\cdot, \xi)]_{\alpha; \Omega} \mid |\xi_i| < \eta \}}{\eta} \rightarrow 0 \quad \text{für } \eta \searrow 0 \quad (4.11)$$

zu zeigen. Das heisst:

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0 : 0 < \eta < \delta_1 \implies \frac{\sup \{ [g(\cdot, \xi)]_{\alpha; \Omega} \mid |\xi_i| < \eta \}}{\eta} < \varepsilon_1. \quad (4.12)$$

Sei also $\varepsilon_1 > 0$. Nun suchen wir ein geeignetes δ_1 . Zunächst berechnen wir $[g(\cdot, \xi)]_{\alpha; \Omega}$. Mit der Konvention $\frac{1}{0} := 0$ und der Definition der Funktion g erhalten wir:

$$\begin{aligned} [g(\cdot, \xi)]_{\alpha; \Omega} &= \sup_{x, y \in \bar{\Omega}} \frac{|g(x, \xi) - g(y, \xi)|}{|x - y|^\alpha} \\ &= \sup_{x, y \in \bar{\Omega}} \frac{1}{|x - y|^\alpha} \left| \int_0^1 D_2 \varphi(x, u(x) + t\xi) \xi \, dt - D_2 \varphi(x, u(x)) \xi - \right. \\ &\quad \left. \int_0^1 D_2 \varphi(y, u(y) + t\xi) \xi \, dt + D_2 \varphi(y, u(y)) \xi \right| \end{aligned}$$

Vorerst betrachten wir nun nur den Zähler $\int_0^1 D_2 \varphi(x, u(x) + t\xi) \xi \, dt - D_2 \varphi(x, u(x)) \xi -$
 $(\int_0^1 D_2 \varphi(y, u(y) + t\xi) \xi \, dt - D_2 \varphi(y, u(y)) \xi) =: I - II$ und verwenden die Notation

$$\varphi_{,i}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_\ell) := \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_\ell), \quad i = 1, \dots, \ell$$

(und entsprechend für höhere Ableitungen).

In einem ersten Schritt schreiben wir die Terme I und II etwas um:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{\ell} \left(\varphi_{,i}(x, u_1(x) + t\xi_1, \dots, u_{\ell}(x) + t\xi_{\ell}) - \varphi_{,i}(x, u_1(x), \dots, u_{\ell}(x)) \right) \xi_i dt \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^{\ell} \left(\int_{u_1(x)}^{u_1(x)+t\xi_1} \varphi_{,i1}(x, s, u_2(x) + t\xi_2, \dots, u_{\ell}(x) + t\xi_{\ell}) ds \right. \\
&\quad + \int_{u_2(x)}^{u_2(x)+t\xi_2} \varphi_{,i2}(x, u_1(x), s, u_3(x) + t\xi_3, \dots, u_{\ell}(x) + t\xi_{\ell}) ds \\
&\quad + \dots + \\
&\quad + \int_{u_{\ell-1}(x)}^{u_{\ell-1}(x)+t\xi_{\ell-1}} \varphi_{,i\ell-1}(x, u_1(x), \dots, u_{\ell-2}(x), s, u_{\ell}(x) + t\xi_{\ell}) ds \\
&\quad \left. + \int_{u_{\ell}(x)}^{u_{\ell}(x)+t\xi_{\ell}} \varphi_{,i\ell}(x, u_1(x), \dots, u_{\ell-1}(x), s) ds \right) \xi_i dt \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^{\ell} \int_{u_1(x)}^{u_1(x)+t\xi_1} \varphi_{,i1}(x, s, u_2(x) + t\xi_2, \dots, u_{\ell}(x) + t\xi_{\ell}) \xi_i ds dt \\
&\quad + \int_0^1 \sum_{i=1}^{\ell} \int_{u_2(x)}^{u_2(x)+t\xi_2} \varphi_{,i2}(x, u_1(x), s, u_3(x) + t\xi_3, \dots, u_{\ell}(x) + t\xi_{\ell}) ds \\
&\quad + \dots + \\
&\quad + \int_0^1 \sum_{i=1}^{\ell} \int_{u_{\ell}(x)}^{u_{\ell}(x)+t\xi_{\ell}} \varphi_{,i\ell}(x, u_1(x), \dots, u_{\ell-1}(x), s) \xi_i ds dt
\end{aligned}$$

Für den Term II erhalten wir analog:

$$\begin{aligned}
II &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{\ell} \int_{u_1(y)}^{u_1(y)+t\xi_1} \varphi_{,i1}(y, s, u_2(y) + t\xi_2, \dots, u_{\ell}(y) + t\xi_{\ell}) \xi_i ds dt \\
&\quad + \int_0^1 \sum_{i=1}^{\ell} \int_{u_2(y)}^{u_2(y)+t\xi_2} \varphi_{,i2}(y, u_1(y), s, u_3(y) + t\xi_3, \dots, u_{\ell}(y) + t\xi_{\ell}) ds \\
&\quad + \dots + \\
&\quad + \int_0^1 \sum_{i=1}^{\ell} \int_{u_{\ell}(y)}^{u_{\ell}(y)+t\xi_{\ell}} \varphi_{,i\ell}(y, u_1(y), \dots, u_{\ell-1}(y), s) \xi_i ds dt
\end{aligned}$$

Somit bekommen wir für den Zähler:

$$\begin{aligned}
I - II &= \sum_{i=1}^{\ell} \left(\int_0^1 \int_{u_1(x)}^{u_1(x)+t\xi_1} \varphi_{,i1}(x, s, u_2(x) + t\xi_2, \dots, u_{\ell}(x) + t\xi_{\ell}) \xi_i ds dt - \right. \\
&\quad \left. \int_0^1 \int_{u_1(y)}^{u_1(y)+t\xi_1} \varphi_{,i1}(y, s, u_2(y) + t\xi_2, \dots, u_{\ell}(y) + t\xi_{\ell}) \xi_i ds dt \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\ell} \left(\int_0^1 \int_{u_2(x)}^{u_2(x)+t\xi_2} \varphi_{,i2}(x, u_1(x), s, u_3(x) + t\xi_3, \dots, u_{\ell}(x) + t\xi_{\ell}) \xi_i ds dt - \right. \\
&\quad \left. \int_0^1 \int_{u_2(y)}^{u_2(y)+t\xi_2} \varphi_{,i2}(y, u_1(y), u_3(y) + t\xi_3, \dots, u_{\ell-1}(y) + t\xi_{\ell}) \xi_i ds dt \right) \\
&\quad + \dots + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\ell} \left(\int_0^1 \int_{u_{\ell}(x)}^{u_{\ell}(x)+t\xi_{\ell}} \varphi_{,i\ell}(x, u_1(x), \dots, u_{\ell-1}(x), s) \xi_i ds dt - \right. \\
&\quad \left. \int_0^1 \int_{u_{\ell}(y)}^{u_{\ell}(y)+t\xi_{\ell}} \varphi_{,i\ell}(y, u_1(y), \dots, u_{\ell-1}(y), s) \xi_i ds dt \right)
\end{aligned}$$

Mit der Variablensubstitution $s := \sigma + u_j(x) - u_j(y)$, $j = 1, \dots, \ell$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\int_{u_j(x)}^{u_j(x)+t\xi_j} \varphi_{,ij}(x, u_1(x), \dots, u_{j-1}(x), s, u_{j+1}(x) + t\xi_{j+1}, \dots, u_{\ell}(x) + t\xi_{\ell}) \xi_i ds = \\
&\int_{u_j(y)}^{u_j(y)+t\xi_j} \varphi_{,ij}(x, u_1(x), \dots, u_{j-1}(x), \sigma + u_j(x) - u_j(y), u_{j+1}(x) + t\xi_{j+1}, \dots, u_{\ell}(x) + t\xi_{\ell}) \xi_i d\sigma
\end{aligned}$$

Somit ist die Differenz $I - II$:

$$\begin{aligned}
I - II &= \sum_{i=1}^{\ell} \left(\int_0^1 \int_{u_1(y)}^{u_1(y)+t\xi_1} \left(\varphi_{,i1}(x, s + u_1(x) - u_1(y), u_2(x) + t\xi_2, \dots, u_{\ell}(x) + t\xi_{\ell}) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \varphi_{,i1}(y, s, u_2(y) + t\xi_2, \dots, u_{\ell}(y) + t\xi_{\ell}) \right) \xi_i ds dt \right) \\
&\quad + \dots + \\
&\quad \sum_{i=1}^{\ell} \left(\int_0^1 \int_{u_{\ell}(y)}^{u_{\ell}(y)+t\xi_{\ell}} \left(\varphi_{,i\ell}(x, u_1(x), \dots, u_{\ell-1}(x), s + u_{\ell}(x) - u_{\ell}(y)) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \varphi_{,i\ell}(y, u_1(y), \dots, u_{\ell-1}(y), s) \right) \xi_i ds dt \right).
\end{aligned}$$

Wir betrachten den ersten Differenzterm $\varphi_{,i1}(x, s + u_1(x) - u_1(y), u_2(x) + t\xi_2, \dots, u_{\ell}(x) +$

$t\xi_\ell) - \varphi_{,i1}(y, s, u_2(y) + t\xi_2, \dots, u_\ell(y) + t\xi_\ell)$ und schätzen diesen ab:

$$\begin{aligned}
& |\varphi_{,ij}(x, s + u_1(x) - u_1(y), u_2(x) + t\xi_2, \dots) - \varphi_{,ij}(y, s, u_2(y) + t\xi_2, \dots)| \\
& \leq C |(x - y, u_1(x) - u_1(y), u_2(x) - u_2(y), \dots, u_\ell(x) - u_\ell(y))| \\
& \leq C \left(|x - y|_{\mathbb{R}^n} + |u(x) - u(y)|_{\mathbb{R}^\ell} \right) \\
& \leq C \left(|x - y|_{\mathbb{R}^n} + [u]_{\alpha; \Omega} |x - y|_{\mathbb{R}^n}^\alpha \right) \\
& = C \left(|x - y|_{\mathbb{R}^n}^\alpha (|x - y|_{\mathbb{R}^n}^{1-\alpha} + [u]_{\alpha; \Omega}) \right).
\end{aligned}$$

Dabei hängt die Konstante C von Ω und von den dritten Ableitungen von φ auf einer kompakten Menge ab. Mit den anderen Differenztermen geht man analog vor und erhält dann durch Ausintegrieren und Abschätzen

$$|I - II| \leq C\eta^2 |x - y|^\alpha.$$

Somit haben wir für $[g(\cdot, \xi)]_{\alpha; \Omega}$ folgende Abschätzung:

$$[g(\cdot, \xi)]_{\alpha; \Omega} \leq \frac{C\eta^2 |x - y|^\alpha}{|x - y|^\alpha} = C\eta^2.$$

Mit der Wahl $\delta_1 = \frac{\varepsilon_1}{C}$ erhalten wir unsere gewünschte Abschätzung von (4.12)

$$\frac{\sup \{ [g(\cdot, \xi)]_{\alpha; \Omega} \mid |\xi_i| < \eta \}}{\eta} \leq C\eta < \varepsilon_1.$$

Nun betrachten wir noch den Teil (ii). Sei $k \in \{1, \dots, \ell\}$ fest. Wir werden zeigen, dass für jedes $\varepsilon_1 \in]0, 1]$ ein $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$ gibt, so dass

$$\|v\|_{C^{1,\alpha}} < \delta_1 \implies \sup \left\{ \left| \frac{\partial g}{\partial \xi_k}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_\ell) \right| \mid \xi_0 \in \bar{\Omega}, \xi_j \in v_j(\bar{\Omega}), j = 1, \dots, \ell \right\} < \varepsilon_1. \quad (4.13)$$

Sei also $\varepsilon_1 \in]0, 1]$ gegeben. Als nächstes definieren wir

$$C := \max_{i \in \{1, \dots, \ell\}} \{ |\varphi_{,ik}(\xi_0, u(\xi_0) + t(\xi_1, \dots, \xi_\ell))| \mid \xi_0 \in \bar{\Omega}, u(\xi_0) \in u(\bar{\Omega}), \xi_j \in [-1, 1], j = 1, \dots, \ell \}$$

und $M := \bar{\Omega} \times (u(\bar{\Omega}) + [-1, 1]^\ell)$. Dann ist $\varphi_{,i}$ gleichmässig stetig auf dem Kompaktum M , das heisst $\forall \varepsilon_0 > 0 \exists \delta_0 = \delta_0(\varepsilon_0) > 0 \forall \sigma, \eta \in M$ so dass $|\sigma - \eta| < \delta_0 \implies |\varphi_{,k}(\sigma) - \varphi_{,k}(\eta)| < \varepsilon_0$.

Sei nun $\varepsilon_0 := \frac{\varepsilon_1}{2}$ und $\delta_1 := \min\{\delta_0(\varepsilon_0), \frac{\varepsilon_1}{2C}, 1\}$. Wir nehmen nun an, dass $\|v\|_{C^{1,\alpha}} < \delta_1$ und zeigen, dass dann die Abschätzung auf der rechten Seite von (4.13) gilt. Für die partielle

Ableitung bekommen wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial \xi_k}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_\ell) &= \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\int_0^1 \sum_{i=1}^{\ell} \varphi_{,i}(\xi_0, u(\xi_0) + t(\xi_1, \dots, \xi_\ell)) \xi_i dt \right) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\sum_{i=1}^{\ell} \varphi_{,i}(\xi_0, u(\xi_0)) \xi_i \right) \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^{\ell} \varphi_{,ik}(\xi_0, u(\xi_0) + t(\xi_1, \dots, \xi_\ell)) t \xi_i dt \\
&\quad + \int_0^1 \varphi_{,k}(\xi_0, u(\xi_0) + t(\xi_1, \dots, \xi_\ell)) dt \\
&\quad - \varphi_{,k}(\xi_0, u(\xi_0)).
\end{aligned}$$

Nun müssen wir den Betrag der einzelnen Integrale abschätzen. Da $\delta_1 \leq 1$ folgt, dass $\|v\|_{C^{1,\alpha}} < \delta_1 \leq 1$. Dann ist auch $\|v\|_{L^\infty} < \delta_1 \leq 1$ und somit ist für die Supremumsbildung in (4.13) $\xi_i \in]-\delta_1, \delta_1[\subset [-1, 1]$ für alle $i = 1, \dots, \ell$. Dann erhalten wir für $i = 1, \dots, \ell$

$$\int_0^1 |\varphi_{,ik}(\xi_0, u(\xi_0) + t(\xi_1, \dots, \xi_\ell)) t \xi_i| dt \leq C \int_0^1 |\xi_i| dt \leq C \delta_1.$$

Für die anderen zwei Terme erhalten wir wegen der gleichmässigen Stetigkeit von $\varphi_{,i}$ auf dem Kompaktum M :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 \varphi_{,k}(\xi_0, u(\xi_0) + t(\xi_1, \dots, \xi_\ell)) dt - \varphi_{,k}(\xi_0, u(\xi_0)) \right| &= \\
&= \left| \int_0^1 \varphi_{,k}(\xi_0, u(\xi_0) + t(\xi_1, \dots, \xi_\ell)) - \varphi_{,k}(\xi_0, u(\xi_0)) dt \right| \\
&\leq \int_0^1 \left| \varphi_{,k}(\xi_0, u(\xi_0) + t(\xi_1, \dots, \xi_\ell)) - \varphi_{,k}(\xi_0, u(\xi_0)) \right| dt \\
&\leq \int_0^1 \varepsilon_0 dt = \varepsilon_0.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir nun für unsere Wahl von ε_0 und δ_1 :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial g}{\partial \xi_k}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_\ell) \right| &\leq \delta_1 C \ell + \varepsilon_0 \\
&\leq \frac{\varepsilon_1}{2C\ell} C\ell + \frac{\varepsilon_1}{2} \\
&= \varepsilon_1.
\end{aligned}$$

Damit ist (ii) gezeigt.

Die Stetigkeit von $D\psi(\cdot)$ verifiziert man durch direktes Nachrechnen. □

Literaturverzeichnis

- [1] S. B. Angenent: *Shrinking doughnuts* in Nonlinear diffusion equations and their equilibrium states, 3 (Gregynog, 1989), 21–38, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. **7** Birkhäuser Boston, Boston, MA, (1992)
- [2] S. B. Angenent: *On the formation of singularities in the curve shortening flow* J. Differential Geom. **33** (1991) 601–633
- [3] K. Brakke: *The motion of a surface by its mean curvature*, Princeton University Press, (1978)
- [4] Y.-G. Chen, Y Giga, S. Goto: *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations*, J. Differential Geom. **33** (1991), 749–786 (announcement in Proc. Japan. Acad. Ser. A **65** (1985) 207–210)
- [5] J. Clutterbuck, O. Schnürer, F. Schulze: *Stability of Translating Solutions to Mean Curvature Flow*, arXiv:math.DG/0509372 (2005)
- [6] L. C. Evans, J. Spruck: *Motion of level sets by mean curvature I.*, J. Differential Geom. **33** (1991) 635–681
- [7] L. C. Evans, J. Spruck: *Motion of level sets by mean curvature II.*, Trans. Amer. Math. Soc., **330** (1992) 321–332
- [8] L. C. Evans, J. Spruck: *Motion of level sets by mean curvature III.*, J. Geom. Anal. **2** (1992) 121–150
- [9] L. C. Evans, J. Spruck: *Motion of level sets by mean curvature IV.*, J. Geom. Anal. **5** (1995) 77–114
- [10] D. Gilbarg, N. S. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Berlin: Springer 1998
- [11] M. A. Grayson: *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points.* J. Differential Geom. **26** (1987), no. 2, 285–314
- [12] G. Huisken: *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*, J. Differential Geom. **20** (1984) 237–266

- [13] G. Huisken, C. Sinestrari: *Mean curvature flow singularities for mean convex surfaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations **8** (1999) 1–14
- [14] N. Hungerbühler, K. Smoczyk: *Soliton solutions for the mean curvature flow*, Differ. Integral Equ. **13**, No.10–12, (2000) 1321–1345
- [15] T. Ilmanen: *Convergence of the Allen-Cahn equation to Brakke’s motion by mean curvature*, J. Differential Geom. **38** (1993) 417–461
- [16] L. Ma, Y. Yang: *A Remark on Soliton Equation of Mean Curvature Flow*, An. Acad. Bras. Ciênc. **76\3** (2004) 467–473
- [17] S. Osher, J. A. Sethian: *Fronts propagating with curvaturedependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations*. J. Comput. Phys. **79** (1988) 12–49
- [18] K. Smoczyk: *A relation between mean curvature flow solitons and minimal submanifolds*, Math. Nachr. **229** (2001) 175–186.
- [19] N. J. Zabusky, M. D. Kruskal: *Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states*, Phys. Rev. Lett. **15** (1965), 240–243

Dank

Diese Doktorarbeit ist unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. Norbert Hungerbühler entstanden. Während dieser Zeit haben mich viele Leute auf verschiedene Arten unterstützt.

Ein ganz besonderer Dank geht an Prof. Dr. Norbert Hungerbühler. Ich konnte durch seine lockere und natürliche Art sehr viel lernen. Wenn ich mit mir und der Mathematik im Zweifel war, konnte er mich mit seiner humorvollen Art und seiner ausserordentlichen Geduld wieder motivieren und Mut machen. Er brachte mir äusserst viel Verständnis entgegen und hatte so viel Geduld, wenn es nicht so rund lief. Vielen herzlichen Dank für diese wunderbare Betreuung und Unterstützung.

In dieser nicht immer einfachen Zeit, lernte ich nicht nur Mathematik, es war auch eine Lebensschule.

Meine Stimmungsschwankungen, bekamen neben meinem Doktorvater auch meine Eltern und Kollegen zu spüren. Vielen Dank an alle, die bis zum Schluss an mich glaubten und mir Mut machten. Auch Assistenten der ETH Zürich und der Universität Fribourg haben mich unterstützt und hatten zwischendurch auch Zeit für nichtmathematische Gespräche zur Auflockerung.

Ich danke auch Prof. Dr. Knut Smoczyk und PD Dr. Patrick Ghanaat, die sich bereit erklärt haben als Korreferenten zu fungieren.

Ebenfalls ein besonderer Dank geht an meine Eltern, besonders sie haben meine Stimmungsschwankungen ertragen müssen und haben mich stark unterstützt und mir so gut es ging geholfen.

Curriculum vitae

Am 1. März 1973 bin ich als dritte und jüngste Tochter von Silvia und Erwin Roost-Angermeyer in Zürich Leimbach geboren worden. In diesem Quartier besuchte ich die Primar- und zwei Jahre die Sekundarschule, bevor ich von 1988 bis 1992 das Mathematisch-Naturwissenschaftliche Gymnasium (MNG) Rämibühl in Zürich absolvierte. Nach der Matura arbeitete ich neun Monate bei einer Lebensversicherungsgesellschaft.

Von 1993 bis 1999 studierte ich an der ETH Zürich an der Abteilung IX A Mathematik. In dieser Zeit absolvierte ich ein Jahr (1995/1996) in Irland an der UCD (University College Dublin).

Nach dem Abschluss meines Studiums begann ich mit der Ausbildung zum Höheren Lehramt an der ETHZ und arbeitete gleichzeitig als Assistentin am Mathematikdepartement.

Im Jahre 2001 unterbrach ich das Höhere Lehramt und begann ein Doktorat an die Universität Fribourg bei Prof. Norbert Hungerbühler. Während dieser Zeit blieb ich weiterhin als Assistentin an der ETH in Zürich in der Gruppe 5 tätig. Später übernahm ich auch an der Universität Fribourg eine Assistentenstelle. Im Laufe der Doktorandenzeit baute ich mit viel Freude und Energie das Konzept zur Mathe-Woche mit dem Assistenten Yves Roisin auf und unterrichtete sie insgesamt vier Mal. Bei verschiedenen Gelegenheiten vertrat ich Prof. Hungerbühler bei Vorlesungen. Letztes Jahr arbeitete ich bei der Einsteinwoche von Schweizer Jugend forscht mit viel Freude mit.