

Institut de Mathématiques
Université de Fribourg (Suisse)

Barycentre sur le bord de $SL(3, \mathbb{R})/SO(3, \mathbb{R})$

THESE

présentée à la Faculté des Sciences
de l'Université de Fribourg (Suisse)
pour l'obtention du grade de
Doctor scientiarum mathematicarum

par
RODOLPHE DEWARRAT
de Attalens (Fribourg).

Thèse n° 1313
Mécanographie, Université de Fribourg
2000

Acceptée par la Faculté des Sciences de l'Université de Fribourg (Suisse) sur la proposition du jury :

Prof. Ralph Strebel, Université de Fribourg, président du jury,

Prof. Ernst Ruh, Université de Fribourg, directeur de thèse,

Prof. Viktor Schroeder, Universität Zürich, corapporteur,

Dr. Claude Auderset, Université de Fribourg, corapporteur.

Fribourg, le 28 septembre 2000.

Prof. Ernst Ruh

Prof. Alexander von Zelewsky

Directeur de thèse,

Doyen.

Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier mon directeur de thèse, le Prof. E. Ruh pour m'avoir guidé pendant toute la durée de ce travail. De même je suis très reconnaissant envers mes corapporteurs Dr. C. Auderset et Prof. V. Schroeder qui ont non seulement lu mon travail final, mais avec lesquels j'ai eu plusieurs discussions constructives.

Deux collaborateurs de l'Université de Karlsruhe, Prof. P. Ghanaat et Prof. E. Leuzinger m'ont aussi souvent consacré du temps pour quelques entretiens. Je leur en suis particulièrement gré. Par la même occasion je remercie l'Institut Max-Planck de Mathématiques appliquées aux Sciences Naturelles à Leipzig pour m'avoir accueilli quelques semaines pendant ma première année de recherche.

Un grand merci également à tous les membres de l'Institut de Mathématiques, qui ont contribué à y faire régner une bonne ambiance de travail, sans oublier les anciens assistants qui ont déjà quitté l'université.

Merci aussi à ma famille qui a toujours été à l'écoute, partageant mes joies et mes doutes.

Et encore un tout grand merci à quelques amies qui ont balisé la voie souvent escarpée que j'ai choisie. Car parfois juste un mot, ou un petit sourire, a suffi à me redonner la force qu'il fallait pour ne pas lâcher la prise.

Rodolphe Dewarrat

Zusammenfassung

In 1995 Besson, Courtois und Gallot [BCG] wiederholten den Beweis eines bekannten Satzes, nämlich, dass jedes positive Mass μ auf dem Rand $M(\infty)$ eines lokal symmetrischen Raumes M vom Rang 1 einen Schwerpunkt p innerhalb des Raumes besitzt, der als Lösung p der Gleichung :

$$\int_{M(\infty)} dB_\theta(p)(e_i) d\mu(\theta) = 0$$

beschrieben werden kann, wobei B_θ die Busemann Funktion für $\theta \in M(\infty)$ ist.

Wenn der Rang höher ist, ist es klar, dass der Schwerpunkt nicht immer existieren kann, weil er zum Beispiel auf euklidischen Untermannigfaltigkeiten, der sogenannten Flachs, nicht existiert.

Nach der präzisen Definition des Schwerpunktes im Kapitel 3 folgt im Kapitel 4 die Definition des Cauchy Randes \mathcal{C} , als einen Teil des üblichen Randes von $SL(3, \mathbb{R})/SO(3, \mathbb{R})$, auf dem wir einen Schwerpunkt erwarten können :

$$\mathcal{C} = \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\begin{array}{c|c} e^{-t} \mathbf{I} & e^{2t} b \\ \hline 0 & e^{2t} \end{array} \right) ; b \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Im Kapitel 4 wird die Existenz und Eindeutigkeit des Schwerpunktes für ein diskretes Mass, das heisst für eine endliche Menge von Punkten auf dem Cauchy Rand von $SL(3, \mathbb{R})/SO(3, \mathbb{R})$ bewiesen. Dazu muss noch eine schwache zusätzliche Bedingung hinzugefügt werden : Wenn im Fall von Rang 1 symmetrischen Räumen einen diskreten Mass betrachtet wird, so muss verlangt werden, dass mindestens drei Punkte vorhanden sind. Diese Bedingung ist auf dem Fall höheren Ranges zu verallgemeinern. Punkte die diese Bedingung erfüllen werden dann gut verteilte Punkte genannt.

Im Kapitel 6 wird ein Algorithmus beschrieben, um diesen Schwerpunkt zu rechnen. Ein Programm wird in den Fällen $M = H^2$ und $M = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ gegeben, und ein Paar Beispiele vorgestellt.

Eine mögliche Beziehung zur Statistik wird im Kapitel 7 vorgeschlagen; es wird eine Beziehung zwischen dem Schwerpunkt einer Familie von Punkten in \mathbb{R} bzw. \mathbb{R}^2 und ihrem Schätzer in der Familie der Cauchy Verteilungen aufgezeigt.

Abstract

In 1995 Besson, Courtois and Gallot [BCG] repeated the proof of a theorem that stated that any positive measure μ on the boundary $M(\infty)$ of a locally symmetric space M with rank 1 admits a unique center of mass as the solution of the equation :

$$\int_{M(\infty)} dB_\theta(p)(e_i) d\mu(\theta) = 0,$$

where B_θ is the Busemann function for $\theta \in M(\infty)$.

In the higher rank case it is obvious that the center of mass does not exist anymore. As an example we know that the center of mass on an Euclidean manifold, called a flat, does not exist.

After the precise definition of the center of mass in chapter 3 the Cauchy boundary \mathcal{C} is defined in chapter 4. The Cauchy boundary is a part of the usual boundary of $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ on which we can try to prove the existence of a center of mass :

$$\mathcal{C} = \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\begin{array}{c|c} e^{-t}\mathbf{I} & e^{2t}b \\ \hline 0 & e^{2t} \end{array} \right) ; b \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

The existence and uniqueness of the center of mass for a discrete measure, that means for points, on the Cauchy boundary of $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ is given in chapter 5. We must add a slight restriction : If we consider a discrete measure on a rank 1 symmetric space we must have at least three points. In the higher rank case we generalize somewhat this condition. Points that satisfy this condition are called well-spread points.

In chapter 6 there is an algorithm to compute that center of mass. The code is given for the cases where $M = H^2$ and $M = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$, as well as a list of examples.

Some possible relation to statistics is given in chapter 7. More precisely we relate the center of mass of a family of points in \mathbb{R} resp. \mathbb{R}^2 to an estimator in the family of Cauchy densities.

Table des matières

1	Préface	5
1.1	Au lecteur curieux	5
2	Introduction	7
2.1	Les variétés Hadamard	7
2.2	L'ensemble $M(\infty)$	9
2.3	Les espaces symétriques	10
2.3.1	Définition	10
2.3.2	La décomposition de Cartan et la forme de Killing	11
2.3.3	Le rang, les plats et les chambres de Weyl	12
2.4	$SL(n, \mathbb{R})/SO(n, \mathbb{R})$	14
2.5	Les fonctions convexes	16
3	Fonctions de Busemann et barycentre	19
3.1	Définition	20
3.2	Définition et propriétés du barycentre	22
3.3	Un exemple : l'espace hyperbolique	23
4	Bord de Cauchy sur $SL(n+1)/SO(n+1)$	25
4.1	Barycentre sur un plat	25
4.2	Le bord de Cauchy	26

4.2.1	Propriétés du bord de Cauchy sur $SL(n+1)/SO(n+1)$	26
4.2.2	Propriétés du bord de Cauchy sur $SL(3, \mathbb{R})/SO(3, \mathbb{R})$	28
4.3	Preuve de la forme des vecteurs asymptotiques	31
5	Existence et unicité du barycentre	37
5.1	Introduction	37
5.2	Bonne répartition des points	39
5.3	Théorème principal	39
5.4	Preuve de l'existence du barycentre	39
5.5	Preuve de l'unicité du barycentre	46
6	Exemples numériques	49
6.1	Algorithme dans l'espace hyperbolique	49
6.2	Algorithme sur $SL(3)/SO(3)$	54
7	Relation avec la statistique	57
7.1	Motivation issue de l'espace hyperbolique	57
7.2	Analogie en dimension supérieure	58
7.2.1	Une famille de points répartie selon une densité de Cauchy standard	59
7.2.2	Un deuxième exemple	60
8	Conclusion et perspectives	61

Table des figures

2.1	Le comportement local selon la courbure sectionnelle.	8
3.1	Dans le plan euclidien $B_\gamma(p) = \tilde{d}(\gamma(0), \pi(p))$	21
3.2	Une géodésique γ de H^2 et quelques horosphères.	22
3.3	Le barycentre de 4 points dans H^2	23
4.1	Les géodésiques qui forment le bord de Cauchy sont issues du même point Y	28
4.2	$\mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}^2(\infty)$ comme paramétrisation de $\mathbb{R}P^2$	30
5.1	Au point e on calcule d , on avance dans cette direction et on recalcule la somme.	38
5.2	Le barycentre ne peut pas être sur le bord.	45
5.3	En avançant l'angle ϕ ne diminue pas.	47
6.1	Dans H^2 on trouve x en fonction de θ	49
6.2	Le barycentre de la famille $\{1,2,3\}$	52
6.3	Le barycentre avec des points pondérés.	53
6.4	Le barycentre d'une famille avec un point éloigné.	53
7.1	Le bord de Cauchy dans H^2	57

Chapitre 1

Préface

1.1 Au lecteur curieux

Imagine une surface lisse, par exemple un plan, une sphère, un hyperboloïde ou une variété quelconque. Là-dessus place un géomètre muni d'une règle et d'un miroir. Avec la première il peut mesurer des distances et avec le miroir il peut faire des symétries.

En utilisant des symétries il est possible de faire des translations. La recette est la suivante :

Pour faire une translation de deux pas il faut

- avancer d'un pas
- faire une symétrie
- avancer d'un pas
- faire une symétrie

Ainsi, avec des longueurs et des symétries on peut faire des translations, puis des triangles. Alors le géomètre commence à mesurer des angles. D'un cercle il calcule le centre, et d'un triangle ou d'un nuage de points, il cherche le centre de gravité. Une question qu'il se pose alors est la suivante :

*Et que se passe-t-il si les points s'éloignent jusqu'à l'infini,
existe-t-il toujours un centre de gravité ?*

C'est la question à laquelle je me suis confronté. Selon les cas, la réponse est oui, non ou parfois. Le but de ce travail est de mieux comprendre une des situations où la réponse sera parfois.

Les pages qui suivent développent de manière beaucoup plus précise ce paragraphe, présentant, chapitre après chapitre, le cadre mathématique de la question, les fondements nécessaires, puis un cas particulier où, à défaut de pouvoir encore voir sur un dessin ce qui se passe, on peut calculer, à la main ou avec un ordinateur, le centre de gravité.

Chapitre 2

Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter les objets avec lesquels nous allons travailler. Ainsi cela nous permettra de définir les notations utilisées, d'expliquer certaines notions de base et d'indiquer les ouvrages à consulter pour mieux comprendre certains éléments ou pour trouver les preuves.

2.1 Les variétés Hadamard

Dans ce travail, nous considérerons toujours M comme une variété riemannienne connexe et simplement connexe. Pour $p \in M$ nous appellerons $T_p M$ son espace tangent, TM son fibré tangent et écrirons $U_p M$, respectivement UM lorsqu'on se restreindra aux vecteurs unitaires.

Pour $u, v \in T_p M$ appelons $R(u, v) : T_p M \rightarrow T_p M$ le tenseur de courbure et $\kappa(u, v) \in \mathbb{R}$ la courbure sectionnelle en p du plan engendré par les deux vecteurs u et v [Jo]. Dans ce cas nous avons

$$\kappa(u, v) = \frac{R(u, v)}{\|u \wedge v\|^2}$$

où $\|u \wedge v\|^2 = \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2$.

Localement, c'est-à-dire dans le voisinage immédiat d'un point, on étudie généralement trois situations particulières (cf. fig. 2.1). :

- soit la courbure sectionnelle κ est positive,
- soit elle est nulle,
- soit elle est négative.

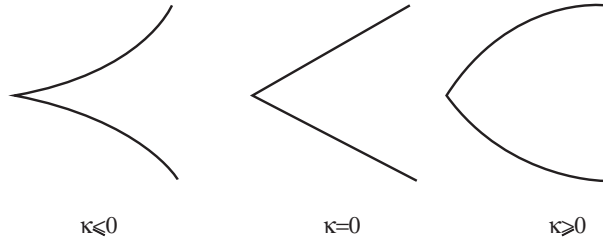


FIG. 2.1: Le comportement local des géodésiques selon la courbure sectionnelle.

Notre intérêt portera sur des variétés où, en chaque point, la courbure sectionnelle est non positive, c'est-à-dire négative ou nulle.

Dans ce contexte particulier le théorème de Hadamard-Cartan [BGS] nous assure que M est difféomorphe à \mathbb{R}^n . Seule la métrique diffère :

Théorème 2.1

Soit M une variété riemannienne complète de courbure sectionnelle non positive. Alors pour tout $p \in M$ l'application $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ est un revêtement.

L'application \exp_p est l'application exponentielle en p qui associe à tout vecteur tangent $u \in T_p M$ le point $\gamma(1)$ pour la géodésique γ qui satisfait les équations $\gamma(0) = p$ et $\dot{\gamma}(0) = u$.

Etant donné le théorème de Hadamard-Cartan nous désignerons par *variété Hadamard* une variété riemannienne connexe, simplement connexe, complète et de courbure sectionnelle non positive.

Une variété riemannienne est dite *complète* si toutes les géodésiques $\gamma(t)$ existent pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Nous désignerons par $I(M)$ le groupe des isométries de M et par $I_0(M)$ la composante connexe de $I(M)$ qui contient l'identité. Munis de la topologie compacte-ouverte les groupes $I(M)$ et $I_0(M)$ sont des groupes de Lie [KN].

2.2 L'ensemble $M(\infty)$

Définition 1

Deux géodésiques γ et σ dont la vitesse est un vecteur unitaire sont dites asymptotiques s'il existe une constante $C < \infty$ telle que

$$d(\gamma(t), \sigma(t)) \leq C$$

pour tout $t \geq 0$

De même deux vecteurs unitaires $u, v \in UM$ sont dits asymptotiques si les géodésiques γ_u et γ_v qui satisfont $\dot{\gamma}_u(0) = u$ et $\dot{\gamma}_v(0) = v$ sont asymptotiques.

Le fait d'être asymptotique est une relation d'équivalence sur les géodésiques de M ou sur UM .

Définition 2

Un point à l'infini de M est alors une classe d'équivalence de géodésiques asymptotiques sur M . On désignera par $M(\infty)$ l'ensemble des points à l'infini.

En général, on peut identifier $M(\infty)$ de dimension n avec la sphère S^{n-1} , par exemple avec $U_p M$ pour tout point $p \in M$ ([EO]) :

Théorème 2.2

Soit M une variété complète, simplement connexe et γ une géodésique de M . Alors pour tout point $p \in M$ il existe une unique géodésique σ de M qui satisfait $\sigma(0) = p$ et qui est asymptotique à γ .

L'ensemble $M \cup M(\infty)$ est parfois appelé *compactification conique* pour la distinguer des nombreuses autres compactifications possibles des espaces symétriques. Pour plus de détails sur ces compactifications on peut consulter [GJT].

Remarque concernant les topologies

- On peut compactifier au moyen de la topologie du cône, voir [EO], l'ensemble $M \cup M(\infty)$.
- Au moyen cette topologie toute isométrie $\Phi \in I(M)$ peut être prolongée en un homéomorphisme sur $M \cup M(\infty)$ en définissant, pour $x \in M(\infty)$, $\Phi(x)$ comme la classe d'équivalence de $\Phi \circ \gamma$ avec γ une géodésique asymptotique à x .

2.3 Les espaces symétriques

2.3.1 Définition

En tout point $p \in M$ on définit la symétrie

$$\begin{aligned} S_p : M &\rightarrow M \\ \gamma(t) &\mapsto \gamma(-t) \end{aligned}$$

pour chaque géodésique γ telle que $\gamma(0) = p$. D'où la définition suivante :

Définition 3

Une variété riemannienne simplement connexe M est dite symétrique si, pour chaque $p \in M$, la symétrie géodésique S_p est une isométrie.

La famille des espaces symétriques est très grande, englobant notamment les espaces euclidiens, les espaces hyperboliques, les espaces homogènes ainsi que leurs quotients.

On trouvera dans [Jo] et [Hel] les propriétés suivantes :

1. Un espace symétrique est géodésiquement complet, c'est-à-dire si toute géodésique est définie sur \mathbb{R} .
2. Dans un espace symétrique tout couple de points peut être relié par une géodésique.
3. La symétrie S_p est unique.
4. $I_0(M)$ opère transitivement sur M .
5. Le tenseur de courbure R de M est parallèle, ou, de manière équivalente, $\nabla R \equiv 0$.
6. Soit M un espace symétrique, $p \in M$, $G = I_0(M)$ et K le sous-groupe de G qui fixe p . Alors le quotient G/K est difféomorphe à M et devient une isométrie en relevant la métrique de M .

7. Réciproquement on peut effectuer la construction inverse :
 soit G un groupe de Lie connexe, K un sous-groupe fermé pour lequel le groupe $Ad_G(H)$ est compact. $Ad_G(H)$ étant défini comme l'image de H par l'application

$$Ad_G(\sigma) := dI(\sigma)_e, \quad \sigma \in G,$$

où $I(\sigma)$ applique $g \in G$ sur $\sigma g \sigma^{-1}$.

Alors le quotient G/H est un espace symétrique pour toute structure riemannienne G invariante.

Remarque : On appelle *espace localement symétrique* une variété riemannienne pour laquelle la propriété locale 5 est vérifiée.

2.3.2 La décomposition de Cartan et la forme de Killing

Appelons \mathfrak{g} l'algèbre de Lie du groupe $G = I_0(M)$, algèbre que nous identifions avec l'espace tangent $T_e G$. Pour $p \in M$ nous définissons

$$\begin{aligned} \sigma_p : G &\rightarrow G \\ g &\mapsto S_p \circ g \circ S_p \end{aligned}$$

et

$$\theta_p = d\sigma_p : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}.$$

On peut calculer que $\theta^2 = I$ et donc décomposer

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p},$$

où

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g}, \theta_p X = X\}$$

et

$$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g}, \theta_p X = -X\}.$$

Cette décomposition est appelée *décomposition de Cartan*.

Voici trois propriétés importantes de la décomposition de Cartan :

1. $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$
2. \mathfrak{k} est l'algèbre de Lie de $K = \{g \in G, gp = p\}$
3. L'espace vectoriel \mathfrak{p} peut être identifié avec $T_e(G/K)$.

Cette décomposition de Cartan nous permet d'écrire une métrique canonique sur une famille particulière d'espaces symétriques, les espaces symétriques de type non compact :

pour $X \in \mathfrak{g}$ une algèbre de Lie on définit une transformation linéaire

$$\begin{array}{ccc} \text{ad}X : & \mathfrak{g} & \rightarrow \mathfrak{g} \\ & Y & \mapsto [X, Y] \end{array}$$

et une forme bilinéaire symétrique, appelée *forme de Killing*

$$B(X, Y) := \text{Trace}(\text{ad}X \circ \text{ad}Y).$$

Définition 4

Un espace symétrique M est dit semisimple si le groupe G l'est.

M semisimple est dit de type compact si B est définie négative sur \mathfrak{p} .

M semisimple est dit de type non compact si B est définie positive sur \mathfrak{p} .

Sur les espaces symétriques de type non compact la forme de Killing est alors un produit scalaire.

Pour deux vecteurs orthonormés X et Y de \mathfrak{p} la courbure sectionnelle vaut :

$$\kappa(X, Y) = - \langle [[X, Y], Y], X \rangle = -B([X, Y][X, Y]) = -\|X, Y\|^2 \leq 0.$$

Preuve dans [Jo].

2.3.3 Le rang, les plats et les chambres de Weyl

Définition 5

Une variété riemannienne est dite plate si son tenseur de courbure R est identiquement nul.

Définition 6

Soit M un espace symétrique. Le rang de M est alors la dimension maximale d'une sous-variété totalement géodésique et plate de M . On désignera par la suite par un plat une telle sous-variété.

Dans le cas des espaces symétriques de type non compact la métrique est définie en fonction de crochets de vecteurs. Ainsi on peut aussi définir le rang au niveau de l'algèbre de Lie comme la dimension d'un sous-espace abélien maximal de l'espace tangent $T_e M = \mathfrak{p}$.

De même un espace symétrique de type non compact admet une courbure sectionnelle strictement négative si et seulement si son rang est 1 puisque chaque sous-variété de dimension 2 doit avoir une courbure négative et donc des vecteurs tangents qui ne commutent pas.

Pour $X \in \mathfrak{g}$ on appelle $Z(X)$ le centralisateur de X :

$$Z(X) = \{Y \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0\}.$$

Alors les éléments de $\mathfrak{p} = T_e(M)$ se divisent en deux classes :

Définition 7

$X \in \mathfrak{p}$ est dit régulier si l'ensemble $Z(X) \cap \mathfrak{p}$ est un sous-espace abélien de \mathfrak{p} (et donc nécessairement maximal). Sinon X est dit singulier

Dire que X est singulier signifie donc que X se trouve à l'intersection de plusieurs sous-espaces abéliens maximaux.

Si l'on fixe maintenant un sous-espace abélien maximal \mathfrak{a} alors l'ensemble des vecteurs réguliers de \mathfrak{a} est le complément d'une famille finie d'hyperplans. Chaque zone ainsi délimitée par des hyperplans est appelée une *chambre de Weyl*.

Une description plus détaillée sort largement du cadre de cet exposé. Pour plus de détails géométriques et algébriques sur les chambres de Weyl on pourra consulter [I].

Dès le prochain paragraphe nous allons nous restreindre à un cas particulier très représentatif du comportement général des espaces symétriques de type non compact : $SL(n, \mathbb{R})/SO(n, \mathbb{R})$.

2.4 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ comme exemple d'espace symétrique de type non compact

Commençons par les définitions des espaces concernés :

M^n est l'ensemble des matrices réelles $(n \times n)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}(n) &= \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M^n; \det A \neq 0\}, \\ \mathrm{SL}(n) &= \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M^n; \det A = 1\}, \\ \mathrm{SO}(n) &= \mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M^n; A^t = A^{-1}\}.\end{aligned}$$

Avant de nous plonger dans les détails de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ rappelons le théorème du plongement (voir [Eb2], Annexe) qui dit que tout espace symétrique de type non compact peut se décomposer en composantes, appelées facteurs de de Rham irréductibles, chacune d'entre elles étant difféomorphe et isométrique à une sous-variété de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ munie de la métrique issue de la forme de Killing.

Théorème 2.3

Soit M un espace symétrique de type non compact, g_0 sa métrique, $p \in M$, $G = I_0(M)$ et $n = \dim(G)$. Alors

- L'application $Ad : G \rightarrow \mathrm{GL}(n)$ est une représentation fidèle et $Ad(G)$ est un sous-groupe auto-adjoint de $\mathrm{SL}(n)$
- L'application $F_p : M \rightarrow \mathrm{SL}(n)$ donnée par $F_p(g(p)) = Ad(g)\mathrm{SO}(n)$ est un difféomorphisme sur une sous-variété complète, totalement géodésique de $\mathrm{SL}(n)/\mathrm{SO}(n)$. Si g^* est la métrique obtenue par relèvement par F_p de la métrique issue de la forme de Killing, alors, sur chaque facteur de de Rham irréductible de M , elle est identique à g_0 , éventuellement après multiplication par une constante.

Les algèbres de Lie des trois groupes de Lie $\mathrm{GL}(n)$, $\mathrm{SL}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$ sont respectivement :

$$\begin{aligned}\mathfrak{gl}(n) &= M^n, \\ \mathfrak{sl}(n) &= \{X \in M^n; \mathrm{Trace}(X) = 0\}, \\ \mathfrak{so}(n) &= \{X \in \mathfrak{sl}(n); X = -X^t\}.\end{aligned}$$

De cette manière nous obtenons immédiatement la décomposition de Cartan de $G = \mathrm{SL}(n)$:

$$\mathfrak{sl}(n) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p},$$

où

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n), \quad \text{et}$$

$$\mathfrak{p} = T_I(\mathrm{SL}(n)/\mathrm{SO}(n)) = \{X \in \mathfrak{sl}; X = X^t\}.$$

La métrique invariante à gauche issue de la forme de Killing sur $\mathfrak{sl}(n)$ est

$$B_n(X, Y) = 2n \operatorname{Trace}(XY),$$

qui n'est autre que $2n$ fois le produit scalaire euclidien sur \mathbb{R}^{n^2} .

Si n est pair nous avons

$$G = I_0(\mathrm{SL}(n)/\mathrm{SO}(n)) = \mathrm{SL}(n)/\{\pm I\},$$

alors que si n est impair nous avons

$$G = I_0(\mathrm{SL}(n)/\mathrm{SO}(n)) = \mathrm{SL}(n).$$

Sur $\mathrm{GL}(n)$ l'exponentielle est la fonction exponentielle habituelle sur les matrices. Les géodésiques issues de $p = I \cdot \mathrm{SO}(n)$ sont donc de la forme

$$t \mapsto e^{tX} \cdot \mathrm{SO}(n).$$

L'ensemble \mathfrak{a} des matrices diagonales forme un sous-espace maximal abélien de \mathfrak{p} donc le rang de $\mathrm{SL}(n)/\mathrm{SO}(n)$ est $n - 1$.

On peut vérifier (voir [Eb1]) que les éléments réguliers de \mathfrak{p} sont les matrices dont toutes les valeurs propres sont distinctes.

Nous avons maintenant décrit les propriétés des espaces symétriques dont nous aurons besoin. On trouvera beaucoup plus de détails et de références dans [Eb1]. Une introduction complète aux espaces symétriques se trouve dans [Jo] alors que [Hel] présente une description plus approfondie, y compris la classification des espaces symétriques, sujet que nous n'avons pas abordé dans ce travail.

2.5 Les fonctions convexes

Dans cet exposé, les fonctions convexes joueront un rôle majeur. Ces fonctions ont l'avantage d'avoir des propriétés intéressantes mais également d'aider à connaître la structure d'une variété.

Définition 8

Une fonction continue f de $I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

pour tout $x < y \in I$ et $t \in [0, 1]$.

Elle est dite strictement convexe si l'inégalité est stricte.

Soit maintenant M une variété Riemannienne complète et connexe. On dira alors qu'une fonction continue est convexe si la composition $f \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe pour toute géodésique non triviale.

Quelques propriétés des fonctions convexes :

- Une fonction convexe qui admet une borne supérieure globale est constante.
- Tout point critique d'une fonction convexe est un minimum global.
- Les surfaces de niveau $S_c = \{x \in M, f(x) \leq c\}, c \in \mathbb{R}$ d'une fonction convexe f sont convexes, c'est-à-dire pour chaque couple de points (x, y) de S_c une géodésique $\gamma(t)$ satisfaisant $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$ se trouve dans S_c pour tout $t \in [0, 1]$.

Toute géodésique γ reliant deux points sur une telle surface est dans cette surface entre les deux points.

Voici encore deux théorèmes concernant les fonctions convexes sur des variétés de courbure sectionnelle non positive.

Théorème 2.4

Soit M une variété riemannienne de courbure non positive. Alors la fonction distance

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$$

est une fonction convexe sur la variété produit $M \times M$.

On trouvera la preuve dans [BGS].

Théorème 2.5

Soit f une fonction convexe sans minimum sur une variété riemannienne M de courbure sectionnelle non positive. Alors M est difféomorphe à $L \times \mathbb{R}$ où $L = f^{-1}(b)$ est une surface de niveau quelconque de f .

La preuve de cette affirmation se trouve dans [BO].

Cet article explique également que si f est une fonction convexe sur une variété riemannienne M de courbure sectionnelle non positive alors les courbes intégrales du champ vectoriel

$$-\frac{\text{grad} f}{\|\text{grad} f\|}$$

s'étendent à l'infini ou se terminent sur l'ensemble minimal.

Cette propriété est utilisée pour la conception de l'algorithme qui sera décrit dans le chapitre 5 puisque nous allons suivre ces courbes intégrales.

Nous verrons également dans le prochain chapitre que les fonctions de Busemann sont des fonctions convexes.

Chapitre 3

Fonctions de Busemann et barycentre

Supposons que l'on ait un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ et une mesure de probabilité μ sur A . Le barycentre de (A, μ) est alors défini comme la solution x de l'équation

$$\int_A (x - a) d\mu(a) = 0.$$

Les conditions d'existence du barycentre, lorsque A est une variété, sont décrites dans [Ch] qui se base sur un article de [Ka].

Cependant, comme indiqué dans l'introduction nous nous intéressons ici à une mesure de probabilité ou, plus précisément, à une famille finie de points sur le bord d'une variété. Les distances entre un point $x \in M$ et $a \in M(\infty)$ seront donc infinies. Il est alors nécessaire de remplacer la notion habituelle de distance par une nouvelle fonction. C'est le rôle de la fonction de Busemann pour le point a qui sera définie ci-dessous.

Ensuite nous pourrons définir le barycentre à partir des fonctions de Busemann.

3.1 Définition et propriétés de la fonction de Busemann

Définition 9

Soit M une variété connexe de courbure sectionnelle non positive et γ une géodésique. La fonction de Busemann pour γ est définie par

$$\begin{aligned} B_\gamma(p) : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \lim_{t \rightarrow \infty} d(p, \gamma(t)) - t \end{aligned}$$

Cette fonction possède les propriétés suivantes :

1. B_γ est une fonction C^2 convexe sur M .
2. $\text{grad} B_\gamma(p) = -v(p)$ où $v(p)$ est le vecteur unitaire de $T_p M$ asymptotique à $\dot{\gamma}(0)$.
3. si $\tilde{\gamma}$ est une géodésique asymptotique à γ alors $B_\gamma - B_{\tilde{\gamma}}$ est une fonction constante sur M .
4. $|B_\gamma(p) - B_\gamma(q)| \leq d(p, q)$.

Ces propriétés sont citées et prouvées dans [BGS] et [Eb1].

Par la propriété 4 nous savons que B est une fonction uniformément continue, ce qui est une caractéristique très importante qui sera utilisée dans la preuve de l'existence du barycentre.

Définition 10

Les horosphères déterminées par un point $p \in M(\infty)$ sont les ensembles de niveau de la fonction B_γ pour γ une géodésique satisfaisant $\gamma(\infty) = p$. Par la propriété 3 nous savons que ces ensembles de niveau ne dépendent pas de la géodésique choisie.

Avant de définir le barycentre, calculons la fonction de Busemann dans deux cas particuliers que nous utiliserons plus tard : l'espace euclidien et l'espace hyperbolique.

Cas 1 : l'espace euclidien.

Pour une géodésique γ dont le vecteur vitesse est unitaire on a

$$B_\gamma(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(p, \gamma(t)) - t = \lim_{t \rightarrow \infty} d(p, \gamma(t)) - d(\gamma(0), \gamma(t)).$$

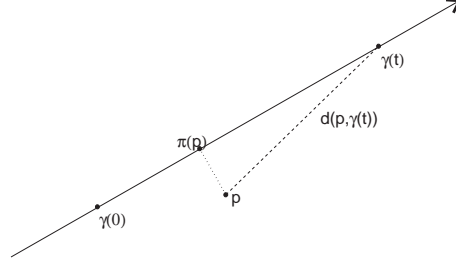


FIG. 3.1: Dans le plan euclidien
 $B_\gamma(p) = \tilde{d}(\gamma(0), \pi(p))$.

Ainsi à l'aide d'un dessin (cf. fig. 3.1) on voit que, dans l'espace euclidien, la fonction de Busemann vaut

$$B_\gamma(p) = \tilde{d}(\gamma(0), \pi(p))$$

où \tilde{d} désigne une distance signée le long de $\gamma(t)$:

$$\tilde{d}(\gamma(0), \gamma(t)) := t$$

et où π est la projection orthogonale de p sur la géodésique γ .

Les horosphères sont alors les droites orthogonales à γ .

Cas 2 : l'espace hyperbolique.

Sur l'espace hyperbolique de dimension 2, H^2 , le groupe des transformations de Möbius agit transitivement sur le fibré tangent. Il nous suffit donc d'étudier la fonction de Busemann pour une seule géodésique, par exemple celle de la forme $\gamma(t) = (0, e^t)$, dans la représentation du demi-plan de Poincaré. Dans mon travail de diplôme [Dew] on peut voir que la fonction de Busemann vaut, pour $(u, v) \in H^2$:

$$B_\gamma(u, v) = -\log(v).$$

Dans ce cas, les horosphères sont toutes les lignes horizontales. Pour toute autre géodésique γ les horosphères sont représentées dans le demi-plan de

Poincaré par des cercles tangents au point $\gamma(\infty)$ du bord de H^2 , comme on le voit sur la figure 3.2.

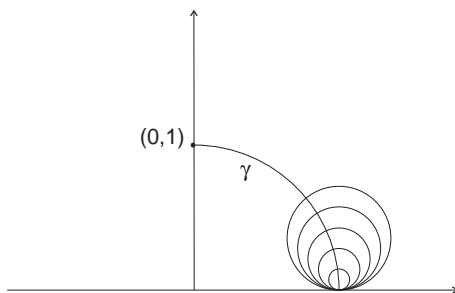


FIG. 3.2: Une géodésique γ de H^2 et quelques horosphères.

3.2 Définition et propriétés du barycentre

Passons maintenant à la définition du barycentre. Pour cette définition, nous suivons la description de [BCG] qui prouve également en appendice l'existence et l'unicité du barycentre sur les variétés de courbure strictement négative.

Définition 11

Soit M une variété connexe, simplement connexe, complète et de courbure sectionnelle strictement négative. Soit μ une mesure positive et sans atome sur $M(\infty)$. Désignons par θ simultanément un point de $M(\infty)$ et une géodésique qui va vers ce point. Le barycentre de μ est défini comme la solution $p \in M$ des équations implicites

$$\int_{M(\infty)} dB_\theta(p)(e_i) d\mu(\theta) = 0$$

où $\{e_i\}$ est une base de $T_p M$.

Dans ([BCG]) il est demandé que la mesure soit sans atomes, les atomes étant des points dont la mesure est non nulle. On verra par la preuve du théorème

principal qu'il suffit d'exiger qu'aucun point de $M(\infty)$ ne porte plus d'un tiers de $\mu(M(\infty))$.

Dans la suite de ce travail nous allons nous restreindre à considérer une famille finie de points $\Theta = \{\theta_j\}_{j=1,\dots,k}$ sur $M(\infty)$, tous les points ayant le même poids. On peut cependant toujours pondérer la famille Θ en choisissant plusieurs fois le même point.

Dans ce cas le barycentre devient la solution des équations

$$\sum_{j=1}^k dB_{\theta_j}(p)(e_i) = 0,$$

équations que l'on peut encore simplifier en utilisant la propriété 2 des fonctions de Busemann, à savoir que son gradient est donné par les vecteurs asymptotiques.

Nous devons alors résoudre l'équation vectorielle suivante :

$$\sum_{j=1}^k v_{\theta_j}(p) = 0,$$

où $v_{\theta_j}(p)$ désigne le vecteur unitaire de $T_p M$ asymptotique à θ_j .

3.3 Un exemple : l'espace hyperbolique

L'espace hyperbolique H^2 est de courbure sectionnelle strictement négative. L'existence et l'unicité du barycentre est alors assurée. La figure 3.3 permet de mieux comprendre la situation :

Sur le bord de H^2 nous plaçons quelques points. A l'identité nous calculons la somme des vecteurs asymptotiques puis nous suivons le champ vectoriel

$$-\frac{\text{grad} \sum_{j=1}^k B_{\theta_j}(p)}{\|\text{grad} \sum_{j=1}^k B_{\theta_j}(p)\|}$$

pour trouver la solution. L'algorithme de calcul sera décrit dans le chapitre 6.2.

Comme il existe une isométrie entre $\text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2, \mathbb{R})$ et l'espace hyperbolique H^2 le cas $\text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2, \mathbb{R})$ peut être considéré comme réglé.

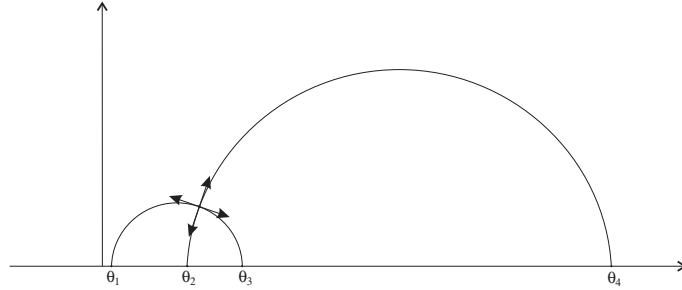


FIG. 3.3: Le barycentre de 4 points dans H^2 .

Le passage de $n = 2$ à $n = 3$ est source de nouveaux problèmes. Le but du chapitre suivant est de les discuter.

Chapitre 4

Bord de Cauchy sur $\mathrm{SL}(n+1)/\mathrm{SO}(n+1)$

4.1 Barycentre sur un plat

L'espace symétrique $\mathrm{SL}(3)/\mathrm{SO}(3)$ admet des plats de dimension 2, c'est-à-dire des sous-variétés de dimension 2 isométriques à l'espace euclidien E^2 . Essayons de voir à quoi ressemblerait le barycentre d'une famille de points $\Theta = \{\theta_j\}_{j=1,\dots,k}$ si tous les éléments θ_j se trouvaient sur le bord d'un même plat Π .

Sur un espace Euclidien, et donc sur un plat, un vecteur asymptotique à un autre est donné par transport parallèle, ce qui signifie que la somme

$$\sum_{j=1}^k v_{\theta_j}(p)$$

sera une fonction constante sur le plat, c'est-à-dire soit identiquement nulle, soit jamais nulle.

Cette constatation restreint donc fortement le choix d'une partie du bord de $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ sur laquelle toute famille de points admet un centre de gravité dans la variété.

4.2 Définition et propriétés du bord de Cauchy

Soit M l'espace symétrique $\mathrm{SL}(n+1, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(n+1, \mathbb{R})$ et b un élément de \mathbb{R}^n . On va désigner par $c_b(t)$ la géodésique

$$c_b(t) = \left(\begin{array}{c|c} e^{-t}I(k) & e^{nt}b \\ \hline 0 & e^{nt} \end{array} \right),$$

où $I(k)$ désigne la matrice unité de dimension k .

Par c_b nous appellerons le point de $M(\infty)$ défini par

$$c_b = \lim_{t \rightarrow \infty} c_b(t).$$

Définition 12

Avec les notations ci-dessus, on appelle bord de Cauchy et on note \mathcal{C} le sous-ensemble de $M(\infty)$ de la forme

$$\mathcal{C} = \{c_b; b \in \mathbb{R}^n\}$$

4.2.1 Propriétés du bord de Cauchy sur $\mathrm{SL}(n+1)/\mathrm{SO}(n+1)$

1. Etudions plus précisément la géodésique $c_b(t)$ pour $b = 0$. Elle joint le point

$$Y = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\begin{array}{c|c} e^t & \\ \cdot & \\ \hline & e^t \\ \hline & e^{-nt} \end{array} \right)$$

au point

$$c_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\begin{array}{c|c} e^{-t} & \\ \cdot & \\ \hline & e^{-t} \\ \hline & e^{nt} \end{array} \right).$$

La géodésique $c_0(t)$ est entièrement contenue dans le plat formé par les matrices diagonales. Elle est singulière puisque ses vecteurs $\dot{c}_0(t)$

possèdent tous au moins deux valeurs propres égales. En fait, toutes les valeurs propres sont égales sauf une, ce qui justifie la dénomination de géodésique ou de vecteur tangent extrêmement singulier. Géométriquement cela signifie que les vecteurs tangents sont dans les intersections de dimension 1 de n parois de chambres de Weyl. Le point Y à l'infini est également appelé singulier. Et toutes les géodésiques qui partent de Y le sont [Eb1]. Or nous remarquons que Y est le point opposé (dans le sens géodésique [Eb1]) à c_b pour tout $b \in \mathbb{R}^n$, ce qui signifie, on le verra également en calculant explicitement les vecteurs asymptotiques, que le bord de Cauchy est formé d'une famille d'extrémités de géodésiques extrêmement singulières, toutes issues d'un même point (cf. fig. 4.1).

2. Il est possible de décrire encore plus précisément cette famille de géodésiques.

Définition 13

Un sous-groupe G^* du groupe des isométries G de M est dit parabolique s'il existe $x \in M(\infty)$ tel que $G^* = G_x = \{g \in G : gx = x\}$.

Pour l'espace symétrique $SL(n+1)/SO(n+1)$ et pour une géodésique c_0 on peut calculer ce groupe parabolique (voir [Eb1], 2.17.27) et on obtient

$$G_Y = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & c \end{array} \right) ; \det(A)c = 1 \right\}.$$

Soit $g \in G_Y$ avec $\det(A) = 1$. L'action de g sur $c_0(t)$ nous donne, lorsque $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g c_0(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} e^{-t}I & 0 \\ \hline 0 & e^{nt} \end{array} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\begin{array}{c|c} e^{-t}A & e^{nt}b \\ \hline 0 & e^{nt} \end{array} \right)$$

qui est une nouvelle géodésique. Cependant cette géodésique est asymptotique à $c_b(t)$ puisque

$$\begin{aligned} & d \left(\left(\begin{array}{c|c} e^{-t}A & e^{nt}b \\ \hline 0 & e^{nt} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c} e^{-t}Id & e^{nt}b \\ \hline 0 & e^{nt} \end{array} \right) \right) \\ = & d \left(\left(\begin{array}{c|c} e^t Id & -e^t b \\ \hline 0 & e^{-nt} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} e^{-t}A & e^{nt}b \\ \hline 0 & e^{nt} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c} Id & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \right) \\ = & d \left(\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c} Id & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \right) \end{aligned}$$

qui est donc une fonction bornée en t .

Cela signifie que le bord de Cauchy peut être identifié avec l'action des éléments du sous-groupe parabolique G_Y pour lesquels $\det(A) = 1$.

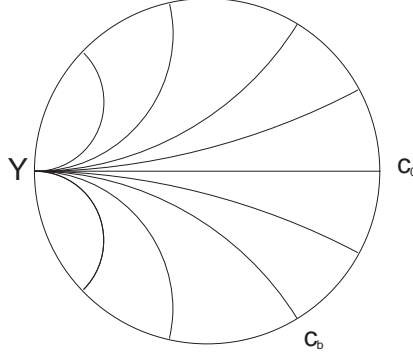


FIG. 4.1: Les géodésiques qui forment le bord de Cauchy sont issues du même point Y .

4.2.2 Propriétés du bord de Cauchy sur $SL(3, \mathbb{R})/SO(3, \mathbb{R})$

En plus des propriétés 1 et 2 de la section 4.2.1 nous avons une description plus précise du bord de Cauchy lorsque $n = 2$. Dans cette section M désigne l'espace symétrique $SL(3, \mathbb{R})/SO(3, \mathbb{R})$ et $M(\infty)$ son bord à l'infini.

3. On peut par exemple calculer explicitement la forme du vecteur tangent :

Lemme 4.1

A l'identité le vecteur asymptotique vers c_b est de la forme

$$\begin{pmatrix} \frac{-1+2b_1^2-b_2^2}{\sqrt{6}(1+b_1^2+b_2^2)} & \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}b_1b_2}{1+b_1^2+b_2^2} & \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}b_1}{1+b_1^2+b_2^2} \\ \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}b_1b_2}{1+b_1^2+b_2^2} & -\frac{1+b_1^2-2b_2^2}{\sqrt{6}(1+b_1^2+b_2^2)} & \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}b_2}{1+b_1^2+b_2^2} \\ \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}b_1}{1+b_1^2+b_2^2} & \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}b_2}{1+b_1^2+b_2^2} & -\frac{-2+b_1^2+b_2^2}{\sqrt{6}(1+b_1^2+b_2^2)} \end{pmatrix},$$

si

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

De même, au point A , appelons

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et

$$R = \begin{pmatrix} -\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} & \frac{ab}{\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} & \frac{bc}{\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{pmatrix}.$$

Le vecteur asymptotique $v_b(a)$ de $T_e M$ qui, une fois multiplié à gauche par A , devient le vecteur $\tilde{v}_b(A)$ de $T_A M$ asymptotique à c_b est alors de la forme

$$R \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} R^T.$$

Afin de faciliter la lecture de ce chapitre, la preuve est donnée en appendice à la fin du chapitre. Le besoin de connaître les vecteurs asymptotiques à l'identité est clair. Par contre, nous justifierons dans le prochain chapitre la nécessité de connaître ces vecteurs à l'identité, qui par une isométrie adéquate, deviennent asymptotiques en un point quelconque.

4. On peut reformuler le vecteur asymptotique décrit ci-dessus d'une façon telle qu'il soit beaucoup plus commode à manipuler dans les preuves.

Lemme 4.2

Soit $A \in M$ et $c_b, b \in \mathbb{R}^n$ un point du bord de Cauchy dans $M(\infty)$. Le vecteur $v_b(A) \in T_e M$ asymptotique à $A^{-1}c_b$ est de la forme

$$v_b(A) = 3 \frac{(A^{-1}x) \otimes (A^{-1}x)^*}{\|A^{-1}x\|^2} - I,$$

où

$$x := \frac{1}{\sqrt{1+\|b\|^2}} \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix},$$

et I est la matrice unité de dimension 3 et où $U \otimes V^*$ désigne le produit matriciel UV^T .

Remarque : On obtient x en considérant qu'il est le représentant dans S^2 de la classe d'équivalence dans $\mathbb{R}P^2$ du vecteur $\begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$. La figure 4.2 illustre cette transformation.

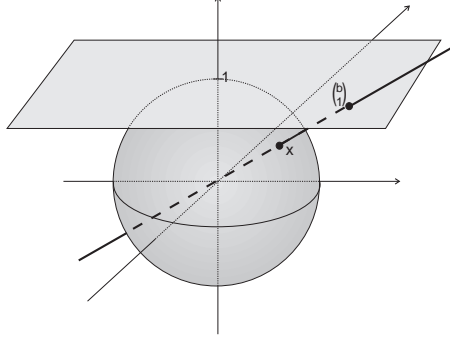


FIG. 4.2: $\mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}^2(\infty)$ comme paramétrisation de $\mathbb{R}P^2$.

Preuve

Il suffit d'effectuer le produit de matrices et de comparer les résultats avec ceux du lemme précédent. Si nous désignons l'inverse de A par la matrice

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix},$$

(nous pouvons toujours choisir un représentant symétrique par la décomposition polaire) nous obtenons, dans les deux cas, pour $v_b(A)$:

$$\begin{aligned} v_b(A) = & \{ \{ ((2m_{13}^2 + a^2((2m_{11}^2 - m_{12}^2 - m_{13}^2)) - m_{23}^2 + b^2((2m_{12}^2 - m_{22}^2 - m_{23}^2)) - m_{33}^2 + a((4m_{11}m_{13} - \\ & 2m_{12}m_{23} + b((4m_{11}m_{12} - 2m_{12}m_{22} - 2m_{13}m_{23})) - 2m_{13}m_{33})) + b((4m_{12}m_{13} - 2m_{23}((m_{22} + m_{33})))))) / ((m_{13}^2 + \\ & a^2((m_{11}^2 + m_{12}^2 + m_{13}^2)) + m_{23}^2 + b^2((m_{12}^2 + m_{22}^2 + m_{23}^2)) + m_{33}^2 + 2a((m_{11}m_{13} + m_{12}m_{23} + b((m_{11}m_{12} + \\ & m_{12}m_{22} + m_{13}m_{23})) + m_{13}m_{33})) + 2b((m_{12}m_{13} + m_{23}((m_{22} + m_{33}))))), ((3((am_{11} + bm_{12} + m_{13}))(am_{12} + \\ & bm_{22} + m_{23}))) / ((m_{13}^2 + a^2((m_{11}^2 + m_{12}^2 + m_{13}^2)) + m_{23}^2 + b^2((m_{12}^2 + m_{22}^2 + m_{23}^2)) + m_{33}^2 + 2a((m_{11}m_{13} + \\ & m_{12}m_{23} + b((m_{11}m_{12} + m_{12}m_{22} + m_{13}m_{23})) + m_{13}m_{33})) + 2b((m_{12}m_{13} + m_{23}((m_{22} + m_{33}))))), ((3((am_{11} + \\ & bm_{12} + m_{13}))(am_{13} + bm_{23} + m_{33}))) / ((m_{13}^2 + a^2((m_{11}^2 + m_{12}^2 + m_{13}^2)) + m_{23}^2 + b^2((m_{12}^2 + m_{22}^2 + m_{23}^2)) + \\ & m_{33}^2 + 2a((m_{11}m_{13} + m_{12}m_{23} + b((m_{11}m_{12} + m_{12}m_{22} + m_{13}m_{23})) + m_{13}m_{33})) + 2b((m_{12}m_{13} + m_{23}((m_{22} + \\ & m_{33}))))), \{ ((3((am_{11} + bm_{12} + m_{13}))(am_{12} + bm_{22} + m_{23}))) / ((m_{13}^2 + a^2((m_{11}^2 + m_{12}^2 + m_{13}^2)) + m_{23}^2 + \\ & b^2((m_{12}^2 + m_{22}^2 + m_{23}^2)) + m_{33}^2 + 2a((m_{11}m_{13} + m_{12}m_{23} + b((m_{11}m_{12} + m_{12}m_{22} + m_{13}m_{23})) + m_{13}m_{33})) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2b((m_{12}m_{13} + m_{23}((m_{22} + m_{33}))))), (-(((m_{13}^2 + a^2((m_{11}^2 - 2m_{12}^2 + m_{13}^2)) - 2m_{23}^2 + b^2((m_{12}^2 - 2m_{22}^2 + \\ & m_{23}^2)) + m_{33}^2 + 2a((m_{11}m_{13} - 2m_{12}m_{23} + b((m_{11}m_{12} - 2m_{12}m_{22} + m_{13}m_{23})) + m_{13}m_{33})) + 2b((m_{12}m_{13} - \\ & 2m_{22}m_{23} + m_{23}m_{33})))))/((m_{13}^2 + a^2((m_{11}^2 + m_{12}^2 + m_{13}^2)) + m_{23}^2 + b^2((m_{12}^2 + m_{22}^2 + m_{23}^2)) + m_{33}^2 + 2a((m_{11}m_{13} + \\ & m_{12}m_{23} + b((m_{11}m_{12} + m_{12}m_{22} + m_{13}m_{23})) + m_{13}m_{33})) + 2b((m_{12}m_{13} + m_{23}((m_{22} + m_{33})))))), ((3((am_{12} + \\ & bm_{22} + m_{23}))((am_{13} + bm_{23} + m_{33}))))/((m_{13}^2 + a^2((m_{11}^2 + m_{12}^2 + m_{13}^2)) + m_{23}^2 + b^2((m_{12}^2 + m_{22}^2 + m_{23}^2)) + \\ & m_{33}^2 + 2a((m_{11}m_{13} + m_{12}m_{23} + b((m_{11}m_{12} + m_{12}m_{22} + m_{13}m_{23})) + m_{13}m_{33})) + 2b((m_{12}m_{13} + m_{23}((m_{22} + \\ & m_{33})))))), \{((3((am_{11} + bm_{12} + m_{13}))((am_{13} + bm_{23} + m_{33}))))/((m_{13}^2 + a^2((m_{11}^2 + m_{12}^2 + m_{13}^2)) + m_{23}^2 + \\ & b^2((m_{12}^2 + m_{22}^2 + m_{23}^2)) + m_{33}^2 + 2a((m_{11}m_{13} + m_{12}m_{23} + b((m_{11}m_{12} + m_{12}m_{22} + m_{13}m_{23})) + m_{13}m_{33})) + \\ & 2b((m_{12}m_{13} + m_{23}((m_{22} + m_{33}))))), ((3((am_{12} + bm_{22} + m_{23}))((am_{13} + bm_{23} + m_{33}))))/((m_{13}^2 + a^2((m_{11}^2 + \\ & m_{12}^2 + m_{13}^2)) + m_{23}^2 + b^2((m_{12}^2 + m_{22}^2 + m_{23}^2)) + m_{33}^2 + 2a((m_{11}m_{13} + m_{12}m_{23} + b((m_{11}m_{12} + m_{12}m_{22} + m_{13}m_{23})) + \\ & m_{13}m_{33})) + 2b((m_{12}m_{13} + m_{23}((m_{22} + m_{33}))))), (-(((m_{13}^2 + a^2((m_{11}^2 + m_{12}^2 - 2m_{13}^2)) + m_{23}^2 + b^2((m_{12}^2 + m_{22}^2 - \\ & 2m_{23}^2)) - 2m_{33}^2 + 2a((m_{11}m_{13} + m_{12}m_{23} + b((m_{11}m_{12} + m_{12}m_{22} - 2m_{13}m_{23})) - 2m_{13}m_{33})) + 2b((m_{12}m_{13} + \\ & m_{22}m_{23} - 2m_{23}m_{33})))))/((m_{13}^2 + a^2((m_{11}^2 + m_{12}^2 + m_{13}^2)) + m_{23}^2 + b^2((m_{12}^2 + m_{22}^2 + m_{23}^2)) + m_{33}^2 + 2a((m_{11}m_{13} + \\ & m_{12}m_{23} + b((m_{11}m_{12} + m_{12}m_{22} + m_{13}m_{23})) + m_{13}m_{33})) + 2b((m_{12}m_{13} + m_{23}((m_{22} + m_{33}))))))\}. \end{aligned}$$

5. La dernière propriété des vecteurs asymptotiques que nous allons citer concerne leurs vecteurs propres, propriété qui sera utilisée dans la preuve de l'unicité du centre de masse. Les notations sont celles des lignes qui précèdent.

Lemme 4.3

Le vecteur $v_b(A)$ admet $A^{-1}x$ comme vecteur propre pour la valeur propre 2, valeur propre de multiplicité 1.

Preuve

$$\begin{aligned}
& \left(3 \frac{(A^{-1}x) \otimes (A^{-1}x)^*}{\|A^{-1}x\|^2} - I \right) (A^{-1}x) \\
= & \frac{3}{\|A^{-1}x\|^2} (A^{-1}x)(A^{-1}x)^T (A^{-1}x) - (A^{-1}x) \\
= & \frac{3}{\|A^{-1}x\|^2} (A^{-1}x) \|A^{-1}x\|^2 - (A^{-1}x) \\
= & 2(A^{-1}x)
\end{aligned}$$

4.3 Preuve de la forme des vecteurs asymptotiques

Nous prouvons la forme du vecteur asymptotique en commençant par citer quatre propriétés sur les matrices qui sont elles-mêmes prouvées à la fin de la section.

1. Un chemin $M(t)$ de la forme

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} \left(\begin{array}{ccc|c} g_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & g_n & \\ \hline & & & 0 \end{array} \right) + e^{nt} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ \hline & & & g_{n+1} \end{array} \right),$$

avec $g_1 \cdots g_{n+1} = 1$ admet pour vecteur asymptotique à l'identité le vecteur

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ \hline & & & k \end{array} \right).$$

2. Par la suite nous aurons besoin de connaître la décomposition polaire de certaines matrices régulières. En effet, toute matrice M peut être décomposée en $M = QR$ où Q est une matrice symétrique et définie positive et R une matrice orthogonale. Dans le cas particulier où $n = 2$, on peut parfois calculer explicitement ces décompositions :

La décomposition polaire de

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

est $M = QR$ où

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{ac}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{ac}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{pmatrix},$$

et

$$R = \begin{pmatrix} -\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} & \frac{ab}{\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} & \frac{bc}{\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{pmatrix}.$$

De plus la matrice symétrique Q peut être diagonalisée en

$$Q = R \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix} R^T,$$

avec la même matrice R .

4.3. PREUVE DE LA FORME DES VECTEURS ASYMPTOTIQUES 33

3. Deux matrices $A, B \in \text{SL}(n+1)$ et $S \in \text{SO}(n+1)$ satisfont

$$A \sim B \rightarrow S^{-1}AS \sim S^{-1}BS,$$

où le symbole \sim indique que les matrices de $\text{SL}(n+1)$ sont dans la même classe d'équivalence dans $\text{SL}(n+1)/\text{SO}(n+1)$.

Cette propriété indique que la conjugaison est une opération bien définie sur le quotient $\text{SL}(n+1)/\text{SO}(n+1)$

4. La courbe

$$M(t) = e^{-t} \left(\frac{A}{b} \middle| \frac{0}{0} \right) + e^{nt} \left(\frac{0}{0} \middle| \frac{0}{1} \right),$$

est asymptotique, lorsque t tend vers l'infini, à la courbe

$$\tilde{M}(t) = e^{-t} \left(\frac{A}{0} \middle| \frac{0}{0} \right) + e^{nt} \left(\frac{0}{0} \middle| \frac{0}{1} \right).$$

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour calculer les vecteurs asymptotiques. Nous nous rappelons qu'en chaque point

$$A \in \text{SL}(n+1)/\text{SO}(n+1)$$

nous recherchons un vecteur asymptotique à c_b mais que pour les calculs dans les chapitres suivants, il nous suffit de connaître la forme d'un vecteur tangent à l'identité qui soit asymptotique à $A^{-1}c_b$ puisque $\text{SL}(n+1)$ est le groupe des isométries sur l'espace symétrique $\text{SL}(n+1)/\text{SO}(n+1)$.

Nous voulons donc calculer, pour un point quelconque

$$A \in \text{SL}(n+1)/\text{SO}(n+1)$$

un vecteur tangent de $T_e(\text{SL}(n+1)/\text{SO}(n+1))$ qui soit asymptotique à $A^{-1}c_b$.

Ecrivons d'abord

$$M_1 = A^{-1} \left(\frac{I}{0} \middle| \frac{0}{0} \right), \quad \text{et} \quad M_2 = A^{-1} \left(\frac{0}{0} \middle| \frac{b}{1} \right).$$

Ainsi $A^{-1}(t)c_b = e^{-t}M_1 + e^{nt}M_2$.

Nous commençons par calculer la décomposition polaire de M_2 en $M_2 = Q \cdot R$ et nous écrivons Q sous sa forme diagonale (voir propriété 2) où D sera une matrice diagonale

$$D = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} & \\ \hline & \|A^{-1} \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}\| \end{array} \right).$$

Nous obtenons alors

$$A^{-1}c_b(t) = e^{-t}M_1 + e^{nt}QR = e^{-t}M_1 + e^{nt}RD,$$

qui est dans la même classe d'équivalence que

$$A^{-1}c_b(t) \sim e^{-t}M_1R^T + e^{nt}RDR^T.$$

Utilisant la propriété 3 nous obtenons

$$R^T A^{-1}c_b(t)R \sim e^{-t}R^T M_1 + e^{nt}D \sim e^{-t} \left(\begin{array}{c|c} N & 0 \\ \hline n & 0 \end{array} \right) + e^{nt}D,$$

puisque la dernière colonne de $R^T M_1$ est nulle par la forme spécifique de M_1 .

Nous utilisons la propriété 4 pour simplifier l'expression en

$$R^T A^{-1}c_b(t)R \approx e^{-t} \left(\begin{array}{c|c} N & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) + e^{nt}D,$$

où \approx désigne que les deux géodésiques sont asymptotiques.

Remplaçons maintenant la matrice N par sa décomposition polaire $N = PdP^T\tilde{P}$ où les matrices P et \tilde{P} sont orthogonales dans $SO(n)$ et d est diagonale.

$$R^T A^{-1}c_b(t)R \approx e^{-t} \left(\begin{array}{c|c} PdP^T\tilde{P} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) + e^{nt}D.$$

Remarquons que

$$\left(\begin{array}{c|c} PdP^T\tilde{P} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} d & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} P^T & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \tilde{P} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right),$$

et que les matrices agrandies de la sorte restent soit diagonales soit dans $SO(n+1)$. De plus l'action à gauche ou à droite des matrices contenant

4.3. PREUVE DE LA FORME DES VECTEURS ASYMPTOTIQUES 35

P, P^T ou \tilde{P} ne modifie pas la matrice diagonale D puisque ses deux premières valeurs diagonales sont identiques.

Ainsi

$$\begin{aligned} & R^T A^{-1} c_b(t) R \\ \approx & e^{-t} \left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} d & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} P^T & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \tilde{P} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) + e^{nt} D \\ \approx & \left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left(e^{-t} \left(\begin{array}{c|c} d & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) + e^{nt} D \right) \left(\begin{array}{c|c} P^T & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right), \end{aligned}$$

car

$$\left(\begin{array}{c|c} \tilde{P} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \in \text{SO}(n).$$

Utilisons maintenant la propriété 1 qui nous permet de remplacer le terme central lorsque $t \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} R^T A^{-1} c_b(t) R \\ \approx & \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left(\exp t \left(\begin{array}{c|c} -1 & \\ \hline \ddots & \\ -1 & \end{array} \right) \right) \left(\begin{array}{c|c} P^T & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Les matrices contenant P ne modifient plus la limite et nous obtenons donc

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} A^{-1} c_b(t) \\ \approx & \lim_{t \rightarrow \infty} R \left(\exp t \left(\begin{array}{c|c} -1 & \\ \hline \ddots & \\ -1 & \end{array} \right) \right) R^T, \end{aligned}$$

avec

$$R = \left(\begin{array}{ccc} -\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} & \frac{ab}{\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} & \frac{bc}{\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{array} \right),$$

(voir propriété 2) ce qui prouve la forme générale du vecteur asymptotique recherché.

A l'identité les valeurs a, b et c dans R sont respectivement les composantes de b et 1. Ce qui nous permet de calculer explicitement R et le vecteur asymptotique vers c_b dans le cas où $n = 2$.

Prouvons encore les 4 propriétés citées au début de la section :

1. **Preuve**

$$\begin{aligned}
& d \left(\exp \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ \hline & & & nt \end{array} \right), \begin{array}{ccc|c} e^{-t}g_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & e^{-t}g_n & \\ \hline & & & e^{nt} \end{array} \right) \\
&= d \left(I, \begin{array}{ccc|c} e^t & & & \\ & \ddots & & \\ & & e^t & \\ \hline & & & e^{-nt} \end{array} \begin{array}{ccc|c} e^{-t}g_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & e^{-t}g_n & \\ \hline & & & e^{nt} \end{array} \right) \\
&= d \left(I, \begin{array}{ccc|c} g_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & g_n & \\ \hline & & & 1 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

qui est une fonction constante.

2. **Preuve**

Il suffit de multiplier les matrices.

3. **Preuve**

Clair

4. **Preuve**

$$\begin{aligned}
& d(\tilde{M}(t), M(t)) \\
&= d(\tilde{M}(t)^{-1}\tilde{M}(t), \tilde{M}(t)^{-1}M(t)) \\
&= d(I, \tilde{M}(t)^{-1}M(t)) \\
&= d \left(I, \begin{array}{c|c} \frac{e^t A^{-1}}{0} & 0 \\ \hline 0 & e^{-nt} \end{array} \begin{array}{c|c} \frac{e^{-t} A}{e^{-t} b} & 0 \\ \hline e^{-t} b & e^{nt} \end{array} \right) \\
&= d \left(I, \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline \frac{I}{e^{-(n+1)t} b} & 1 \end{array} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

lorsque $t \rightarrow \infty$.

Chapitre 5

Existence et unicité du barycentre

5.1 Introduction

Nous avons maintenant détaillé tous les éléments nécessaires pour prouver le théorème principal sur l'existence et l'unicité du barycentre. Rappelons le concept utilisé avant de préciser les détails, concept qui sera également à la base de l'algorithme décrit dans le chapitre 6. Dans ce chapitre, la variété M considérée sera toujours $SL(3)/SO(3)$.

La donnée du problème est une famille de points $(b_i)_{i=1\dots k}$ de \mathbb{R}^2 , vu comme paramétrisation de $\mathbb{R}P^2$. Le but est alors de trouver le barycentre dans M de la famille de points $(c_{b_i})_{i=1\dots k}$, $c_{b_i} \in M(\infty)$.

Nous supposons que chaque point a le même poids. Cela allège la notation mais ne restreint pas la preuve. De même les illustrations seront celles du comportement dans le modèle du disque de H^2 . Ces illustrations servent uniquement à la compréhension du déroulement de la preuve puisqu'elles ne reflètent pas tous les aspects.

Nous désignons par $\tilde{v}_{b_i}(A)$ le vecteur de $T_A M$ asymptotique à c_{b_i} . Pourtant ce n'est qu'à l'identité que nous avons une bonne description des vecteurs tangents sous la forme de matrices symétriques dont la trace est nulle. Pour cette raison au lieu de chercher dans $T_A M$ un vecteur $\tilde{v}_{b_i}(A)$ asymptotique à c_{b_i} nous chercherons dans $T_e M$ celui qui pointe vers $A^{-1}c_{b_i}$, vecteur que nous désignerons par $v_{b_i}(A)$.

L'algorithme de recherche du barycentre consiste à calculer (voir fig. 5.1), à

l'identité, la somme

$$d = \sum_{i=1}^k v_{b_i}(A),$$

de se déplacer dans la direction d puisque (voir chapitre 2.2 sur les fonctions convexes) les courbes intégrales dans le sens opposé au gradient mènent au minimum. Alors nous recalculons cette somme afin de suivre ces courbes.

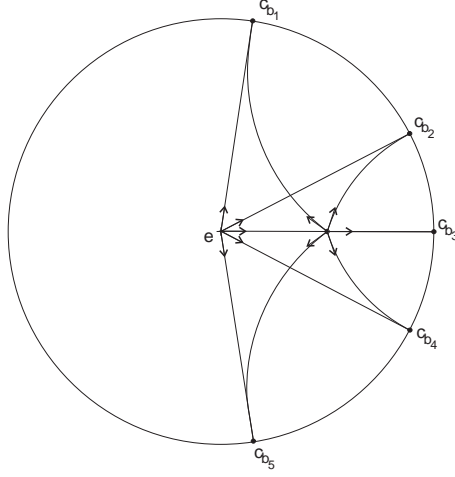


FIG. 5.1: Au point e on calcule d , on avance dans cette direction et on recalcule la somme.

Dans ce chapitre nous allons d'abord énoncer une restriction faible sur le choix de la famille $(b_i)_{i=1\dots k}$. En effet dans H^2 par exemple, le barycentre est mal défini si la famille contient moins de trois points. Cette restriction peut être généralisée à une famille de points sur le bord de $SL(n+1)/SO(n+1)$.

Ensuite nous prouverons l'existence du barycentre en étudiant le comportement de la fonction

$$d(A) = \sum_{i=1}^k \tilde{v}_{b_i}(A),$$

lorsque A se rapproche du bord, puis l'unicité par une considération locale sur la courbure sectionnelle de M .

5.2 Bonne répartition des points

Définition 14

Soit la famille $(b_i)_{i=1\dots k}$, $b_i \in \mathbb{R}^2$ et x_i défini par

$$x_i := \frac{1}{\sqrt{1 + \|b_i\|^2}} \begin{pmatrix} b_i \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Nous dirons que la famille est bien répartie si n'importe quel plan de dimension 2 dans \mathbb{R}^3 contient au plus $1/4$ des points de la famille $(x_i)_{i=1\dots k}$. Si l'on désire mettre des poids sur les points choisis, il faut alors exiger que le poids total des points se trouvant dans un plan quelconque n'excède pas $1/4$.

En comparant avec le cas de dimension inférieure, H^2 , on remarque alors que c'est le poids de n'importe quelle droite projective qui ne doit pas excéder $1/3$, cela signifie donc qu'il faut avoir au moins trois points.

5.3 Théorème principal

Nous utilisons les notations et définitions des chapitres précédents.

Théorème 5.1

Toute famille de points du bord de Cauchy de $\mathrm{SL}(3)/\mathrm{SO}(3)$ bien répartie admet un barycentre unique à l'intérieur de la variété.

5.4 Preuve de l'existence du barycentre

Commençons par montrer que la somme d des vecteurs asymptotiques est non nulle et pointe vers l'intérieur de M lorsque l'on suit une géodésique qui part à l'infini.

Soit $a \in T_e M$ une matrice symétrique de trace nulle avec $\|a\| = 1$ et

$$\gamma(t) := \exp(t a)$$

une géodésique dans la direction de a . Nous choisissons toujours des vecteurs tangents unitaires, raison pour laquelle il faudra multiplier les vecteurs asymptotiques par une constante adéquate.

Comme pour $u, v \in T_e M$ on a

$$\langle u, v \rangle = 6 \operatorname{Trace}(uv)$$

le vecteur asymptotique $v_{b_i}(A)$ doit être multiplié par $\frac{1}{6}$.

Le cosinus de l'angle entre le vecteur vitesse de γ et la somme d est alors

$$\langle \dot{\gamma}(t), \sum_{i=1}^k \tilde{v}_{b_i}(\gamma(t)) \rangle.$$

Il faut donc étudier la limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \dot{\gamma}(t), \sum_{i=1}^k \tilde{v}_{b_i}(\gamma(t)) \rangle,$$

et montrer que cette limite est strictement négative.

Afin de calculer cette limite nous devons distinguer 2 cas, selon la forme de a .

Cas 1 : a est régulière ou admet les valeurs propres $\frac{1}{6}\{-2, 1, 1\}$

Dans ce cas $a = RdR^T$ avec

$$d = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3.$$

Comme la somme des valeurs propres est nulle λ_1 doit être négative.

Les conditions

$$\begin{aligned} \|a\| &= 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0, \\ \lambda_1 < \lambda_2 &\leq \lambda_3, \end{aligned}$$

nous assurent que

$$\lambda_1 < \frac{-1}{6}.$$

Avec cette décomposition nous pouvons écrire

$$\gamma(t) = R \exp(td) R^T,$$

et

$$\gamma(t)^{-1} = R \exp(-td) R^T.$$

Appelons

$$v_i := R e_i, \quad i = 1 \dots 3$$

les vecteurs propres de $\gamma(t)$ et également de $(\gamma(t))^{-1}$ car

$$R \exp(td) R^T R e_i = \exp(t\lambda_i) R e_i,$$

et

$$R \exp(-td) R^T R e_i = \exp(-t\lambda_i) R e_i.$$

Tout $x \in \mathbb{R}^3$ peut être écrit sous la forme

$$x = \alpha v_1 + \beta v_2 + \delta v_3,$$

et ainsi nous avons

$$\frac{\gamma(t)^{-1}x}{\|\gamma(t)^{-1}x\|} = \frac{\alpha v_1 e^{-t\lambda_1} + \beta v_2 e^{-t\lambda_2} + \delta v_3 e^{-t\lambda_3}}{\|\alpha v_1 e^{-t\lambda_1} + \beta v_2 e^{-t\lambda_2} + \delta v_3 e^{-t\lambda_3}\|}.$$

Lorsque $t \rightarrow \infty$ cette expression tend vers v_1 si $\alpha \neq 0$. Or si la famille est bien répartie il y a au plus $1/4$ des points pour lesquels $\alpha = 0$ puisque tous ces points se trouveraient dans un plan orthogonal à v_1 .

Nous pouvons maintenant étudier la limite du cosinus de l'angle entre la fonction d et le vecteur vitesse.

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \dot{\gamma}(t), \sum_{i=1}^k \tilde{v}_{b_i}(\gamma(t)) \rangle \\ = & \lim_{t \rightarrow \infty} \langle a, \sum_{i=1}^k v_{b_i}(\gamma(t)) \rangle \\ = & \lim_{t \rightarrow \infty} \langle a, \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{6}} \left(3 \frac{(\gamma(t)^{-1}x_i) \otimes (\gamma(t)^{-1}x_i)^*}{\|\gamma(t)^{-1}x_i\|^2} - Id \right) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle a, \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{6}} \left(3 \frac{(\gamma(t)^{-1}x_i)}{\|\gamma(t)^{-1}x_i\|} \otimes \frac{(\gamma(t)^{-1}x_i)^*}{\|\gamma(t)^{-1}x_i\|} - Id \right) \right\rangle \\
&= \left\langle a, \sum_{i=1}^k \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{6}} \left(3 \frac{(\gamma(t)^{-1}x_i)}{\|\gamma(t)^{-1}x_i\|} \otimes \frac{(\gamma(t)^{-1}x_i)^*}{\|\gamma(t)^{-1}x_i\|} - Id \right) \right\rangle \\
&\leq \frac{3k}{4} \left\langle a, \frac{1}{6} (3v_1 \otimes v_1^* - Id) \right\rangle + \frac{k}{4} \\
&= \frac{k}{8} \left\langle RdR^T, 3Re_1e_1^TR^T - Id \right\rangle + \frac{k}{4} \\
&= \frac{k}{8} \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{k}{4} \\
&= \frac{k}{8} 6(2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) + \frac{k}{4} \\
&= \frac{3k}{4} (3\lambda_1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) + \frac{k}{4} \\
&< \frac{3k}{4} \left(\frac{3}{6} \right) \\
&= -\frac{5k}{8} =: c_1
\end{aligned}$$

qui est une valeur strictement négative.

Quelques explications sur les égalités et inégalités ci-dessus. La première est due au fait que $\gamma(t) \in \text{SL}(3)$ agit sur le produit scalaire comme une isométrie, la seconde est la définition de v_{b_i} . On sait qu'au moins $3/4$ des points x_i ne sont pas orthogonaux à v_1 d'où la première inégalité. Et on estime les autres par 1, la plus grande valeur possible du produit scalaire de deux vecteurs unitaires. Ensuite on effectue un changement de base et on utilise l'estimation faite pour λ_1 .

Cas 2 : a est singulière et admet les valeurs propres $\frac{1}{\sqrt{6}}\{-1, -1, 2\}$.

A nouveau nous décomposons a en $a = RdR^T$ avec

$$d = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Avec les mêmes notations que dans le cas 1 nous obtenons :

$$\frac{\gamma(t)^{-1}x}{\|\gamma(t)^{-1}x\|} = \frac{\alpha v_1 e^{-t\lambda_1} + \beta v_2 e^{-t\lambda_2} + \delta v_3 e^{-t\lambda_3}}{\|\alpha v_1 e^{-t\lambda_1} + \beta v_2 e^{-t\lambda_2} + \delta v_3 e^{-t\lambda_3}\|}.$$

Cependant, lorsque $t \rightarrow \infty$ cette expression tend vers une combinaison linéaire unitaire de v_1 et v_2 si $\alpha\beta \neq 0$ vers v_3 sinon. Cependant la famille de points choisis étant bien répartie, peu de points, c'est-à-dire au plus 1/4 des points, se trouveront sur la droite engendrée par v_3 .

Nous pouvons donc écrire, si $\alpha\beta \neq 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma(t)^{-1}x}{\|\gamma(t)^{-1}x\|} = \cos(\phi)v_1 + \sin(\phi)v_2$$

pour un angle ϕ satisfaisant

$$\tan(\phi) = \frac{\alpha}{\beta}.$$

De façon analogue au cas 1 on calcule la limite

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \dot{\gamma}(t), \sum_{i=1}^k \tilde{v}_{b_i}(\gamma(t)) \rangle \\ \leq & \frac{3k}{4} < \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{6} \left(3 \begin{pmatrix} \cos(\phi)^2 & * & 0 \\ * & \sin(\phi)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) > \\ & + \frac{k}{4} \\ = & \frac{3k}{4} \frac{1}{6} \text{Trace} \begin{pmatrix} -3\cos(\phi)^2 + 1 & * & 0 \\ * & -3\sin(\phi)^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \frac{k}{4} \\ = & \frac{k}{8}(-3) + \frac{k}{4} \\ = & -\frac{k}{8} =: c_2, \end{aligned}$$

qui est également une valeur strictement négative.

Remarque : l'angle ϕ diffère pour chaque b_i mais pour simplifier l'écriture nous n'écrivons que ϕ puisque ces angles se simplifient dès la ligne suivante.

Etudions maintenant la fonction définie sur M par

$$\mathcal{B}(x) := \sum_{i=1}^k B_{c_{b_i}}(x).$$

Sur la géodésique $\gamma(t) = \exp(ta)$ la fonction $\mathcal{B}(x)$ est convexe et, lorsque $t \rightarrow \infty$, sa dérivée vaut :

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} d\mathcal{B}(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) \\ = & \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \dot{\gamma}(t), \text{grad}\mathcal{B}(\gamma(t)) \rangle > \\ = & - \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \dot{\gamma}(t), \sum_{i=1}^k v_{c_{b_i}}(\gamma(t)) \rangle > \\ \geq & c \\ > & 0, \end{aligned}$$

ce qui signifie que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{B}(\gamma(t)) = +\infty$.

Il faut maintenant prouver que cela implique que \mathcal{B} admet un minimum à l'intérieur de M .

Soit $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $\mathcal{B}(z_i)$ tend vers

$$\inf\{\mathcal{B}(x), x \in M\} \leq \mathcal{B}(e).$$

Si l'infimum est à l'intérieur de M , il est nécessairement un minimum puisque \mathcal{B} est une fonction continue. Nous avons alors trouvé un minimum global puisque \mathcal{B} est convexe.

Il nous reste à montrer que cet infimum ne peut pas être sur $M(\infty)$. Supposons donc que $d(e, z_i) \rightarrow \infty$.

Considérons la suite $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in U_e M$, l'espace tangent formé des vecteurs unitaires de $T_e M$, où a_i est le vecteur vitesse d'une géodésique liant e à z_i .

Cette suite, définie sur l'espace compact $U_e M$, admet un point d'accumulation $a \in U_e M$.

Montrons que nous pouvons en déduire une contradiction.

D'une part nous savons que, dans la direction a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{B}(\exp(ta)) = +\infty$$

Il existe donc t_0 tel que $\mathcal{B}(\exp(t_0a)) > 2\mathcal{B}(e)$.

Par la propriété 4 du paragraphe 3.1 nous avons, dans une boule β de rayon $\frac{\mathcal{B}(e)}{k}$,

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{B}(x) - \mathcal{B}(\exp(t_0a))\| \\ & \leq \sum_{i=1}^k \|B_{c_{b_i}}(x) - B_{c_{b_i}}(\exp(t_0a))\| \\ & \leq k \, d(x, \exp(t_0a)) \\ & \leq \mathcal{B}(e). \end{aligned}$$

Donc sur la boule β la fonction \mathcal{B} est plus grande que $\mathcal{B}(e)$.

D'autre part, de la suite $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ nous tirons une sous-suite $(a_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$ telle que chaque géodésique $\exp(t a_{i_j})$ coupe la boule β .

Comme $d(e, z_i) \rightarrow \infty$ il existe $z_{i_{j_0}}$ tel que

$$d(e, z_{i_{j_0}}) > d(e, \exp(t_0a)) + \mathcal{B}(e).$$

Ainsi, sur la droite $\exp(t a_{i_{j_0}})$ la fonction \mathcal{B} vaut

$\mathcal{B}(e)$ en $t = 0$,

$\mathcal{B}(\exp(t a_{i_{j_0}})) > \mathcal{B}(e)$ si $\exp(t a_{i_{j_0}}) \in \beta$,

$\mathcal{B}(\exp(t a_{i_{j_0}})) < \mathcal{B}(e)$ si $\exp(t a_{i_{j_0}}) = z_{i_{j_0}}$,

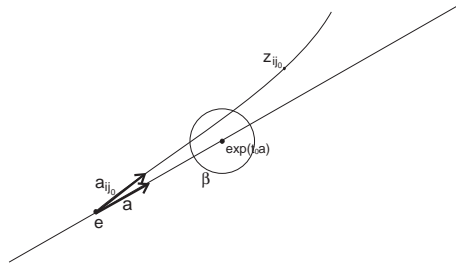


FIG. 5.2: Le barycentre ne peut pas être sur le bord.

ce qui est une contradiction avec la convexité de \mathcal{B} .

Ainsi nous savons qu'une famille de points bien répartie sur le bord de Cauchy admet un barycentre à l'intérieur de M . La prochaine section complète la preuve en expliquant pourquoi ce barycentre est unique.

5.5 Preuve de l'unicité du barycentre

La première partie de cette section consiste à montrer que les solutions de l'équation qui définit le barycentre d'une famille bien répartie forment un ensemble connexe alors que la seconde partie précisera que cet ensemble est limité à un unique point.

Supposons donc pour commencer qu'il existe deux points a_1 et a_2 dans M qui satisfont

$$\sum_{i=1}^k \tilde{v}_{b_i}(a_j) = 0, \quad \text{pour } j = 1, 2.$$

Comme les fonctions de Busemann sont convexes, la fonction

$$\mathcal{B}(x) := \sum_{i=1}^k B_{c_{b_i}}(x)$$

est convexe sur la géodésique liant a_1 à a_2 . Donc la somme

$$\sum_{i=1}^k \tilde{v}_{b_i}(x)$$

est nulle sur tout le segment géodésique liant a_1 à a_2 , ce qui prouve que l'ensemble des minima de \mathcal{B} est connexe.

Montrons maintenant que cet ensemble est forcément limité à un seul point :

Soit $a \in M$ où

$$\sum_{i=1}^k \tilde{v}_{b_i}(a) = 0,$$

et $c(t)$ une géodésique avec $c(0) = a$.

Nous savons que $v_{b_i}(a)$ admet $a^{-1}x_i$ comme vecteur propre avec x_i défini comme dans le paragraphe 4.2.2. La valeur propre correspondant à ce vecteur propre est de multiplicité 1.

Nous recherchons une estimation sur la courbure sectionnelle du plan engendré par $\tilde{v}_{b_i}(a)$ et $\dot{c}(0)$. Cette courbure est nulle uniquement si

$$[\tilde{v}_{b_i}(a), \dot{c}(0)] = [v_{b_i}(a), L_{a^{-1}}\dot{c}(0)] = 0,$$

où L_a^{-1} désigne la dérivée en a de l'isométrie $x \mapsto a^{-1}x$, c'est-à-dire si les matrices correspondantes commutent.

Or deux matrices symétriques commutent si et seulement si il existe une base dans laquelle les deux sont diagonales, donc une base formée de vecteurs propres communs aux deux matrices.

Pour que $v_{b_i}(a)$ et $L_{a^{-1}}\dot{c}(0)$ commutent il faut donc que $L_{a^{-1}}\dot{c}(0)$ admette $a^{-1}x$ comme vecteur propre.

Si $L_{a^{-1}}\dot{c}(0)$ est une matrice régulière elle admet 3 sous-espaces propres de dimension 1 mais, la famille de points choisis étant bien répartie, au plus 1/4 de ces points peut se trouver dans chacun de ces trois sous-espaces. Il reste donc toujours au moins 1/4 des points $(b_i)_{i=1,\dots,k}$ pour lesquels $a^{-1}x_i$ ne se trouve dans aucun de ces sous-espaces et donc pour lesquels $\tilde{v}_{b_i}(a)$ ne commute pas avec $\dot{c}(0)$.

Si $L_{a^{-1}}\dot{c}(0)$ est une matrice singulière elle admet un sous-espace propre de dimension 1 qui peut contenir au plus 1/4 des vecteurs asymptotiques et un sous-espace propre de dimension 2 qui peut également contenir au plus 1/4 des vecteurs asymptotiques. Ainsi il reste toujours au moins la moitié des points $(b_i)_{i=1,\dots,k}$ pour lesquels $\tilde{v}_{b_i}(a)$ ne commute pas avec $\dot{c}(0)$.

Étudions le comportement d'un vecteur asymptotique le long de $c(t)$, et plus précisément l'angle aigu $\phi_i(t)$ que forme ce vecteur avec $\dot{c}(t)$ (voir fig 5.3).



FIG. 5.3: En avançant l'angle entre le vecteur asymptotique et le vecteur vitesse ne diminue pas.

Si localement la courbure sectionnelle du plan engendrée par $\tilde{v}_{b_i}(a)$ et $\dot{c}(0)$ est strictement négative alors elle le reste pour une petite variation de ces deux vecteurs et ainsi la fonction de Busemann associée est localement strictement convexe, ce qui signifie que la fonction

$$\cos(\phi_i(t)) = \langle \tilde{v}_{b_i}(c(t)), \dot{c}(t) \rangle = \langle \text{grad} B_{c_{b_i}}(c(t)), \dot{c}(t) \rangle = -dB_{c_{b_i}}(c(t))(\dot{c}(t))$$

est strictement décroissante et donc que $\phi_i(t)$ est localement une fonction strictement croissante si $\phi_i(t) > 0$.

Comme localement au moins $1/4$ des points choisis engendrent un plan de courbure sectionnelle strictement négative avec $\dot{c}(0)$, au moins $1/4$ des fonctions $\phi_i(t)$ sont localement strictement croissantes tandis que les autres sont non décroissantes.

Ainsi, en avançant dans la direction $\dot{c}(0)$ la somme

$$\sum_{i=1}^k \tilde{v}_{b_i}(c(t))$$

ne peut rester nulle puisque certains vecteurs asymptotiques se déplacent dans la direction $-\dot{c}(0)$, ceux pour lesquels $\phi_i(t)$ est croissante, alors qu'aucun ne se déplace dans la direction $\dot{c}(0)$.

Chapitre 6

Exemples numériques

Dans ce chapitre nous allons exposer quelques résultats numériques trouvés à l'aide de l'algorithme développé dans la preuve de l'existence du barycentre.

6.1 Algorithme dans l'espace hyperbolique

Dans le demi-plan de Poincaré nous connaissons les géodésiques comme étant des arcs de cercle dont le centre est situé sur l'axe des x , axe qui est en même temps le bord de Cauchy de la variété. Ainsi nous pouvons décrire les vecteurs asymptotiques ainsi que tout l'algorithme avec des outils élémentaires de trigonométrie, ce qui ne sera plus possible en dimension supérieure.

Au point $i = (0, 1)$ nous avons la situation suivante.

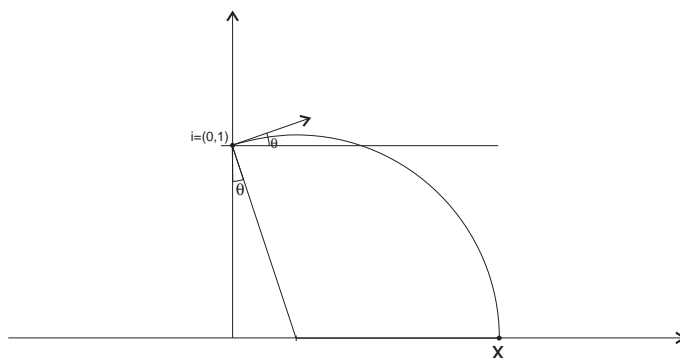


FIG. 6.1: Dans H^2 on trouve x en fonction de θ .

Supposons que l'on nous donne $\theta \in]-\pi, \pi[$. Alors le centre de l'arc géodésique $c(t)$ pour lequel $\dot{c}(0)$ forme un angle θ avec l'horizontale se trouve en $(\tan \theta, 0)$ et le vecteur $\dot{c}(0)$ pointe vers le point

$$\mu = \left(\tan \theta + \frac{1}{\cos \theta}, 0 \right) = \left(\tan \theta + \sqrt{1 + \tan^2 \theta}, 0 \right).$$

Bien sûr que la métrique considérée est la métrique hyperbolique.

Réciproquement, connaissant $\mu = (x, 0)$ sur le bord, on en déduit que

$$\theta = 2 \arctan(x) - \frac{\pi}{2}.$$

Dans le cas général, nous cherchons l'angle θ au point (x_0, y_0) formé par la géodésique qui relie (x_0, y_0) à μ et l'horizontale. Nous obtenons alors

$$\theta = 2 \arctan\left(\frac{x - x_0}{y_0}\right) - \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, pour chaque point μ du bord, nous connaissons l'orientation du vecteur asymptotique \tilde{v}_μ en tout point (x_0, y_0) . La somme de ces vecteurs nous donne alors le champ vectoriel

$$d = \sum_{i=1}^k \tilde{v}_{\mu_i}(x_0, y_0)$$

pour une famille de points $(\mu_i)_{i=1, \dots, k}$ avec les notations des chapitres précédents.

En suivant le flot de ce champ nous nous rapprochons alors du barycentre de la famille $(\mu_i)_{i=1, \dots, k}$.

Voici l'algorithme écrit à l'aide du programme MATLAB ainsi que quelques résultats. Le chemin parcouru n'est pas exactement celui du flot puisque l'algorithme est un algorithme discret. Ce chemin est dessiné avec chaque résultat. Une étoile représente chaque point choisi sur le bord et un cercle la solution obtenue. La croix correspond au point $(moyenne(\mu_i), variance(\mu_i))$ indiqué également puisque le chapitre suivant traitera des relations entre le barycentre et la statistique.

Code MATLAB

```

x=[0];
y=[1];
coef = 0.01;
epsilon=1;
mu=input('Entrez une liste de points avec des [ ] :');
MaxLikeMean=mean(mu);
MaxLikeSdev=std(mu);
maxit=300;
k=1;

while ( epsilon >1e-10 | k<100 );
k=k+1;
theta=2*atan((mu-x(k-1))/y(k-1))-pi/2;
x = [x,x(k-1)+sum(cos(theta)) * coef];
y = [y,y(k-1)+sum(sin(theta))* coef];

epsilon=abs( x(k)-x(k-1))+abs(y(k)-y(k-1));
end
muu=[];

for l=1:1:length(mu);
muu=[muu,0];
end

plot(x,y,'-',x,y,'.',x(k),y(k),'o',...
mu,muu,'*',MaxLikeMean,MaxLikeSdev,'+')
[' barycentre x','barycentre y','moyenne ',' variance ']
[x(k),y(k),MaxLikeMean,MaxLikeSdev]

```

Voyons, dans quelques cas particuliers, à quoi ressemble le centre de masse

- Soient les éléments $(1, 2, 3)$ sur le bord. Le barycentre est alors

Entrez une liste de points avec des `[]` : `[1,2,3]`

ans =

barycentre x barycentre y moyenne variance

2.0000 0.5774 2.0000 1.0000

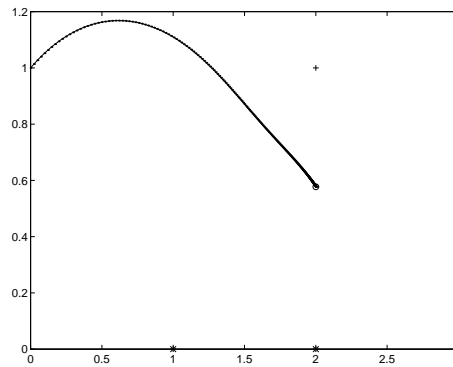


FIG. 6.2: Le barycentre de la famille $\{1, 2, 3\}$.

Les * désignent les points choisis sur le bord,

Le cercle o désignent le barycentre calculé et

la croix + désigne l'espérance et la variance.

- Soient les éléments $(1, 2, 2, 3, 3, 4)$ sur le bord. Le barycentre est alors

Entrez une liste de points avec des `[]` : `[1,2,2,3,3,4]`

ans =

barycentre x barycentre y moyenne variance

2.2768 0.7516 2.5000 1.0488

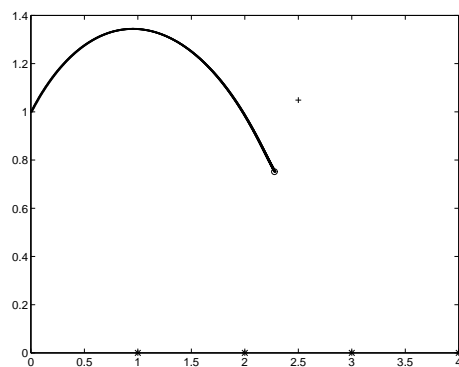


FIG. 6.3: Le barycentre avec des points pondérés.

- Et voici encore un exemple avec un nuage de points centré en 0 et un élément éloigné

Entrez une liste de points avec des [] :
 [-0.1274, 0.5542, -1.0973, -0.7313, 1.4047, -0.6202,
 0.2371, -1.5868, -0.4015, -0.7707, 30]

ans =
 barycentre x barycentre y moyenne variance
 -0.4469 0.5982 2.4419 9.1769

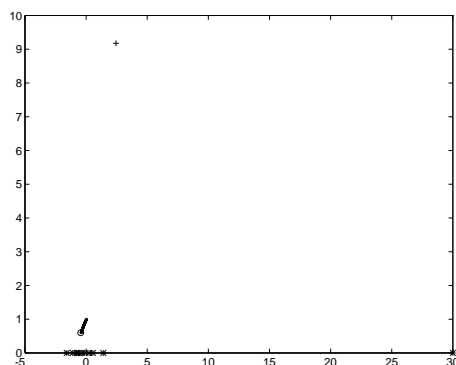


FIG. 6.4: Le barycentre d'une famille avec un point éloigné.

Nous remarquons alors que le barycentre est beaucoup moins sensible à une valeur très éloignée du nuage de points que la moyenne géométrique.

6.2 Algorithme sur $\mathrm{SL}(3)/\mathrm{SO}(3)$

En dimension 2 l'isométrie entre $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ et H^2 nous permettait de simplifier considérablement les calculs. Dans ce paragraphe nous sommes forcés de travailler avec les matrices de $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ elles-mêmes.

Voici tout d'abord une description de l'algorithme de calcul qui permet de trouver le barycentre d'une famille de points bien répartie $(c_{b_i})_{i=1, \dots, k}$ sur le bord de Cauchy.

1. A l'identité I on calcule la somme des vecteurs asymptotiques

$$d = \sum_{i=1}^k v_{b_i}(I).$$

2. On détermine alors $A := \exp(sd)$ pour une valeur fixée s que l'on peut désigner par le pas de l'itération.
3. Au lieu de calculer la somme

$$\sum_{i=1}^k \tilde{v}_{b_i}(A)$$

en A on déplace tous les points par multiplication à gauche par A^{-1} pour revenir à l'identité.

4. On calcule alors à nouveau

$$d = \sum_{i=1}^k v_{b_i}(A).$$

5. On reprend en 2. avec la nouvelle valeur de d tant que d n'a pas atteint une norme très petite.

Finalement, si on appelle A_1, \dots, A_j toutes les matrices calculées en tant qu'exponentielles, alors le barycentre se trouve en

$$A_1 \cdot \dots \cdot A_j$$

Remarque : Le but de cet algorithme est de montrer qu'on arrive à trouver une bonne approximation du barycentre. La question de l'optimisation, que ce soit des constantes telles que le pas s , la condition d'arrêt ou que ce soit du déroulement de l'algorithme n'a pas été discutée. Elle devrait être considérée si l'on voulait, comme le chapitre prochain l'annonce, l'utiliser en statistique.

Voici les différentes fonctions écrites à l'aide du logiciel MATHEMATICA qui permettent de calculer le barycentre :

Premièrement, il s'agit de pouvoir calculer l'exponentielle d'une matrice :

Code MATHEMATICA

```
expo[M_] := N[Sum[MatrixPower[M, i]/(i!), {i, 0, 50}]];
```

Puis il faut connaître le vecteur tangent $v_B(A)$ donné par le lemme 4.1 :

Code MATHEMATICA

```
TanVect[A_, B_] := Module[{AM2, a, b, c, Q, Dia,
                               M2, M1},
  M1 = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 0}};
  M2 = {{0, 0, B[[1]]}, {0, 0, B[[2]]}, {0, 0, 1}};
  AM2 = A . M2;
  {a, b, c} = Transpose[AM2][[3]];
  Q = {{-(c/Sqrt[a^2 + c^2]),
        (a*b)/(Sqrt[a^2 + c^2]*Sqrt[a^2 + b^2 + c^2]),
        a/Sqrt[a^2 + b^2 + c^2]},
        {0,
         -(Sqrt[a^2 + c^2]/Sqrt[a^2 + b^2 + c^2]),
         b/Sqrt[a^2 + b^2 + c^2]},
        {a/Sqrt[a^2 + c^2],
         (b*c)/(Sqrt[a^2 + c^2]*Sqrt[a^2 + b^2 + c^2]),
         c/Sqrt[a^2 + b^2 + c^2]}};
  Dia = {0, 0, a^2 + b^2 + c^2};
  Q .
  DiagonalMatrix[{-1/Sqrt[6]}, -1/Sqrt[6]], Sqrt[2/3]] .
  Transpose[Q]];
```

Et maintenant la fonction principale calcule le barycentre :

Code MATHEMATICA

```
barycentre[S_] :=
Module[
{ls, IA, Grand, NA, A},
Grand = 1;
A = N[IdentityMatrix[3]];
ls = Length[S];
IA = Sum[TanVect[A, N[S[[j]]]], {j, 1, ls}];
For[i = 1, Grand > 1/10^4, i++,
  Grand = (IA . IA)[[1,1]] + (IA . IA)[[2,2]] +
  (IA . IA)[[3,3]];
NA = Inverse[expo[IA/ls]];
A = NA . A;
  IA = Sum[TanVect[A, S[[j]]], {j, 1, ls}]];
Inverse[A]]
```

Nous pouvons alors calculer le barycentre d'une famille de points :

```
[In]
barycentre[{{1, 0}, {1, 1}, {1, 2}, {2, 2}, {0, 1}}]
```

```
[Out]
{{1.40394, 0.890405, 0.704152},
 {0.959358, 1.80117, 0.656686},
 {0.922505, 0.891743, 1.105}}
```


Chapitre 7

Relation avec la statistique

7.1 Motivation issue de l'espace hyperbolique

Dans le demi-plan de Poincaré le point $(0, 1)$ est le barycentre d'une densité de probabilité uniforme sur $U_{(0,1)}H^2$. Observons aussi qu'une géodésique $\gamma(t)$ pour laquelle $\dot{\gamma}(0)$ fait un angle $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ avec l'horizontale arrive sur le bord en la valeur

$$x_\theta = \tan(\theta) + \sqrt{1 + \tan^2(\theta)}.$$

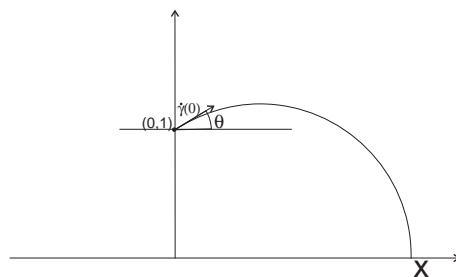


FIG. 7.1: Le bord de Cauchy dans H^2 .

Inversément, $x \in \partial H^2$ donné, l'angle θ vaut

$$\theta = 2 \arctan(x) - \frac{1}{2} =: i(x).$$

La densité de probabilité uniforme sur $U_{(0,1)}H^2$. induit donc une densité μ sur le bord ∂H^2 qui vaut

$$\begin{aligned} \mu([a, b]) &= \int_{i(a)}^{i(b)} \frac{1}{2\pi} dt = \frac{1}{2\pi} \left(2 \arctan(b) - \frac{1}{2} \right) - \left(2 \arctan(a) - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_a^b (2 \arctan(x))' dx = \int_a^b \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx, \end{aligned}$$

qui est une densité de Cauchy de paramètre $(0, 1)$.

De même nous pouvons calculer qu'une densité uniforme sur $U_{(u,v)}H^2$ induit sur ∂H^2 une densité de Cauchy de paramètre (u, v) , c'est à dire de la forme

$$\frac{1}{\pi} \frac{v}{(x-u)^2 + v^2}.$$

Il est donc raisonnable de considérer le barycentre comme un estimateur d'une densité de Cauchy qui approximerait bien, ce terme restant encore à définir précisément, une série de mesures ponctuelles faites, c'est-à-dire une famille de points sur le bord de H^2 .

Dans la section suivante nous allons évoquer comment cette idée est généralisable en dimension supérieure.

7.2 Analogie en dimension supérieure

L'ensemble des distributions de Cauchy multivariées peut être identifié avec l'espace symétrique $SL(n+1)/SO(n+1)$ et la métrique de Killing correspond alors à la métrique de Fisher sur ces densités (voir [Sto] et [LMR]).

On peut donc considérer chaque point du bord de Cauchy comme une densité de Cauchy de type Dirac, c'est-à-dire qui met tout le poids sur un seul point.

Dans ce cas le barycentre d'une famille de points du bord devient un estimateur de la loi de Cauchy à laquelle correspondrait la famille considérée,

raison pour laquelle nous avons appelé le bord de $SL(n+1)/SO(n+1)$ pris en compte dans ce travail le bord de Cauchy.

Voici encore deux exemples calculés, pour $n = 2$, à l'aide de MATHEMATICA qui servent de motivation à la poursuite des investigations dans cette direction :

7.2.1 Une famille de points répartie selon une densité de Cauchy standard

Choisissons donc une famille $(b_i)_{i=1,\dots,50}$ de points répartis selon une densité de Cauchy, c'est-à-dire de la forme (voir [Fe]) :

$$\frac{a}{2\pi(a^2 + x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

```
c2dist = MultivariateTDistribution[{{1., 0.}, {0., 1.}}, 1]
T = Table[Random[c2dist], {i, 1, 50}];
```

Calculons maintenant le barycentre de cette famille

```
IN
B = barycentre[T];
OUT
{{1.08045, 0.0799642, 0.0345159},
 {0.0812853, 1.09452, -0.0170204},
 {0.0411953, -0.0171693, 0.851963}}
```

Le résultat est une matrice de la forme

$$L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}.$$

Comme nous savons, voir [Sto], que les transformations affines de \mathbb{R}^2 sont de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & \frac{1}{\det(A)} \end{array} \right),$$

nous pouvons choisir un représentant de L tel que la dernière ligne soit de la forme $(0, 0, *)$, c'est-à-dire multiplier L à droite par une matrice de $\text{SO}(3)$ dont la dernière colonne est

$$\frac{l_3^T}{\|l_3\|}.$$

Dans ce cas le nouveau représentant de L est de la forme d'une transformation affine et la dernière colonne vaut alors

```
IN
b = B[[3]]/Sqrt[B[[3]].B[[3]]];
B.b/Sqrt[B[[3]].B[[3]]]
OUT
{0.0996696, -0.0411419, 1.}
```

Les deux premières valeurs peuvent alors être considérées comme un estimateur d'une moyenne de la famille de points.

7.2.2 Un deuxième exemple

Si la densité choisie est centrée en un point $b \in \mathbb{R}^2$ autre que l'origine, nous obtenons par calcul numérique un barycentre de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} * & \lambda b \\ \hline 0 & \lambda \end{array} \right),$$

comme le montre l'exemple suivant centré en $(-1, 2)$:

```
IN
c2dist = MultivariateTDistribution[{{1., 0.}, {0., 1.}}, 1];
T = Table[Random[c2dist] - {1, -2}, {i, 1, 100}];
B = barycentre[T];
b = B[[3]]/Sqrt[B[[3]].B[[3]]];
B.b/Sqrt[B[[3]].B[[3]]]
OUT
{-1.06352, 1.90117, 1.}
```

L'étude de la qualité statistique de cet estimateur est un projet qui doit encore être développé.

Chapitre 8

Conclusion et perspectives

Nous avons donc vu dans ce travail une possibilité de généraliser le théorème d'existence et d'unicité du barycentre aux espaces symétriques de rang supérieur à 1, dans le cas de $SL(3)/SO(3)$.

Bien que les notions et définitions soient présentées pour une dimension générale, les détails de la preuve de l'existence du barycentre sont développés uniquement sur $SL(3)/SO(3)$.

Une prochaine étape consistera donc à prouver l'existence et l'unicité du barycentre sur le bord de Cauchy de $SL(n)/SO(n)$ pour une valeur de n quelconque.

Le dernier chapitre concernant les relations avec la statistiques n'est encore qu'une présentation informelle des applications possibles du théorème démontré.

Comme cela n'était pas le but de notre travail nous nous sommes limités à présenter quelques résultats numériques qui encouragent à entreprendre une recherche plus avancée dans cette direction. Dans son travail de thèse, Mme Stotzer a abordé un autre aspect de la relation entre les densités de Cauchy et les espaces symétriques, voir [Sto] ainsi que [LMR].

Il serait donc intéressant d'approfondir ces deux approches afin d'arriver à une bonne compréhension statistique et géométriques du barycentre vu comme un estimateur en statistique.

Bibliographie

- [Ba] W.Ballman : *Lectures on Spaces of Nonpositive Curvature*,
DMV Seminar, Band 25, Birkhäuser, 1995
- [BCG] G. Besson, G.Courtois, S.Gallot : Entropies et rigidités des espaces
localement symétriques de courbure strictement négative,
GAF **5**,5 (1995), 731-799
- [BGS] W.Ballmann, M. Gromov, V.Schroeder :
Manifolds of Nonpositive Curvature, Birkhäuser, 1985
- [BO] R. L. Bishop, B. O'Neill : *Manifolds of negative curvature*,
Trans. of the AMS, **145**, (1969), 1-49
- [BP] R.Benedetti, C. Petronio : *Lectures on Hyperbolic Geometry*,
Springer, 1991
- [Ca] E.Cartan : Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann,
Bull. Soc. Math. France,**55**, 1926, 214-264
- [Ch] I.Chavel, *Riemannian geometry : a modern introduction*,
Cambridge Tracts in Mathematics 108, Cambridge University Press,
1993
- [Dem] J.W. Demmel : *Applied Numerical Linear Algebra*,
SIAM 1997
- [Dew] R.Dewarrat : Espaces symétriques et fonction de Busemann,
Travail de diplôme, Université de Fribourg, 1996

- [Eb1] P. B. Eberlein : *Geometry of Nonpositively Curved Manifolds*,
Chicago Lectures in Mathematics, 1996
- [Eb2] P. B. Eberlein : Structure of manifolds of nonpositive curvature,
Global geometry and global analysis,
Lecture Notes in Math., **1156**, Springer, 1984
- [EO] P. Eberlein, B. O'Neill : Visibility manifolds,
Pacific J. Math **46** (1973) 45-109
- [Fe] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*,
vol II, Wiley, 1971
- [GJT] Y. Guivarc'h, L. Ji, J.C. Taylor :
Compactifications of Symmetric Spaces,
Birkhäuser, 1997
- [Hel] S. Helgason : *Differential Geometry, Lie groups and Symmetric spaces*,
Academic Press, 1978
- [I] H.-C. Im Hof : Die Geometrie der Weylkammern in symmetrischen
Räumen vom nichtkompaktem Typ, Habilitationsschrift,
Bonn, 1979
- [Iv] B. Iversen : *Hyperbolic Geometry*,
Cambridge University Press, 1992
- [Jo] J. Jost : *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*,
second Edition, Springer, 1997
- [Ka] H. Karcher : *Riemannian center of mass and mollifier smoothing*,
Comm. Pure Appl. Math **30**(1977),509-541
- [KN] S. Kobayashi, K. Nomizu : *Foundations of differential geometry*, vol I
et II, Wiley, 1969
- [Leu] E. Leuzinger : On the trigonometry of symmetric spaces.
Comment. Math. Helv. **67,2**, (1992), 252-286

- [LMR] M. Lovrić, M. Min-Oo, E.A. Ruh, Multivariate Normal Distribution Parametrised as a Riemannian Symmetric Space, *Preprint*
- [Sto] M.-O.Stotzer : *Transformation Groups and Statistics*, Thesis, Université de Fribourg, 1999

Curriculum vitae

Education

- 1997 - 2000 Assistant at the Mathematics Institute of the University of Fribourg
- 1996 - 2000 Doctoral studies in mathematics supervised by Prof. Ernst A. Ruh
- 1992 - 1996 Diploma in mathematics with chemistry as minor branch.
Espaces symtriques et fonctions de Busemann
- 1991 - 1992 Studies in chemistry with successful first year examination.
- 1991 Maturité, type C, Collège St-Michel, Fribourg.

Skills

Good capacities in computer science, for example in programming in Fortran, SQL and Pascal. Participation in a summer school 'Geometry and computation 1997' at the Zurich Polytechnic.

Knowledge in molecular sciences acquired by taking part in many advanced courses in physical chemistry (Prof. W. Hug, Dr. E. Vauthey) and in surface sciences (Prof. L. Schlapbach).

Professional experience

Organisation of the Science Facultys October 1999 presentation day for new students.

Librarian of the Mathematics Institute since 1998 : reformed the paper-based lending system and installed an electronic system to regulate a collection of 15,000 volumes and 700 loans per year.

Industry experience as a trainee (July 1995 - October 1995) with Ciba-Geigy and programming tasks for the departments of data bank management and computational chemistry.

Trainee in the summers of 1989 and 1993 in a local chemical company, SOCHINAZ, Vionnaz (Switzerland).

Teaching in mathematics and physics in a school (10 - 28 Jan 2000).

Personal Data

- Date of birth 25th of September 1971
- Place of birth Biel, Switzerland.