

**Modellrisiko bei  
Value-at-Risk-Schätzungen:  
eine empirische Untersuchung  
für den schweizerischen Aktien-  
und Optionenmarkt**

Dissertation

zur Erlangung der Würde eines  
Doktors der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften,  
vorgelegt der Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät  
der Universität Freiburg in der Schweiz von

Frithjof Weber

aus Deutschland

Genehmigt von der Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät  
am 2. November 2000 auf Antrag von  
Herrn Prof. Dr. Hans Wolfgang Brachinger (erster Referent) und  
Herrn Prof. Dr. Christoph Kaserer (zweiter Referent)

Freiburg in der Schweiz 2001

Mit der Annahme einer Dissertation beabsichtigt die Wirtschafts- und Sozialwissenschaftliche Fakultät der Universität Freiburg nicht, zu den darin enthaltenen wissenschaftlichen Meinungen des Verfassers Stellung zu nehmen (Fakultätsbeschluss vom 23. Januar 1990).

Statt eines Vorwortes:

„In physics, you’re playing against God; in Finance  
you’re playing against people.“

E. Derman<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> zitiert in Stix [108]



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>I Teil I</b>	<b>5</b>
<b>1 Grundlegende Konzepte</b>	<b>7</b>
1.1 Beschreibung des Aktienkurses als Zufallsvariable . . . . .	8
1.2 Die Dynamik von Aktienkursen: stochastische Prozesse . . . . .	9
1.2.1 Zeitstetige versus zeitdiskrete Beschreibung . . . . .	9
1.2.2 Definition eines stochastischen Prozesses . . . . .	10
1.2.3 Spezielle stochastische Prozesse . . . . .	11
1.2.4 Der Wiener-Prozess . . . . .	12
1.2.5 Prozesse mit Poisson-Sprüngen . . . . .	14
1.2.6 Martingale im zeitkontinuierlichen Fall . . . . .	14
1.2.7 Charakteristische Funktion . . . . .	15
1.2.8 Stochastische Differentialgleichungen . . . . .	16
1.2.9 Itô's Lemma . . . . .	19
1.3 Renditen und Renditeverteilungen . . . . .	20
1.3.1 Einführung von Renditegrößen . . . . .	21
1.3.2 Unbedingte und bedingte Renditeverteilungen . . . . .	23
<b>2 Annahmen über Renditeverteilungen und empirische Befunde</b>	<b>25</b>
2.1 Annahmen über Renditeverteilungen . . . . .	25
2.1.1 Probleme bei Finanzmarktzeitreihen . . . . .	26
2.1.2 Hypothese unabhängig und identisch verteilter Renditen . . . . .	26
2.1.3 Tail-Verhalten von Renditeverteilungen . . . . .	27
2.1.4 Nichtlinearitäten und deterministisches Chaos . . . . .	28
2.2 Statistische Tests zur Überprüfung der Annahmen . . . . .	29
2.2.1 Brock-Dechert-Scheinkman-Test . . . . .	29
2.2.2 Recurrence Plot . . . . .	31
2.2.3 Autokorrelationen und Q-Statistiken . . . . .	32
2.2.4 Excessfunktion . . . . .	33
2.2.5 Compass Rose . . . . .	35

2.3	Empirische Überprüfung für den schweizerischen Aktienmarkt . . . . .	36
2.3.1	Datengrundlage . . . . .	37
2.3.2	Der schweizerische Aktienmarkt in den Jahren 1989 bis 1998 . . . . .	38
2.3.3	Überprüfung der i.i.d.-Annahme mittels BDS-Test . . . . .	41
2.3.4	Recurrence Plots . . . . .	42
2.3.5	Empirische Autokorrelationsfunktionen und Q-Statistiken . . . . .	45
2.3.6	Empirische Excessfunktionen . . . . .	48
2.3.7	Zusammenfassung der empirischen Resultate . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Überblick über verschiedene Finanzmarktmodelle</b>	<b>51</b>
3.1	Modelle unter der Annahme unabhängiger Renditen . . . . .	52
3.1.1	Renditeverteilungen mit endlicher Varianz . . . . .	52
3.1.2	Renditeverteilungen mit nicht endlicher Varianz . . . . .	54
3.2	Modelle unter der Annahme abhängiger Renditen . . . . .	55
3.2.1	Zeitstetige Modelle . . . . .	55
3.2.2	Zeitdiskrete Modelle . . . . .	57
3.3	Modellwahl . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Ausgewählte Finanzmarktmodelle</b>	<b>63</b>
4.1	Geometrische Brownsche Bewegung . . . . .	63
4.1.1	Die Stochastische Differentialgleichung und ihre Eigenschaften . . . . .	64
4.1.2	Optionspreismodell . . . . .	66
4.1.3	Parameterschätzung . . . . .	72
4.1.4	Simulationsmodell . . . . .	74
4.2	Sprung-Diffusions-Prozess nach Merton . . . . .	75
4.2.1	Die stochastische Differentialgleichung und ihre Eigenschaften . . . . .	76
4.2.2	Optionspreismodell . . . . .	78
4.2.3	Parameterschätzung . . . . .	82
4.2.4	Simulationsmodell . . . . .	84
4.3	Die hyperbolische Verteilung als Modell für Aktienrenditen . . . . .	86
4.3.1	Einleitung . . . . .	86
4.3.2	Die hyperbolische Verteilung . . . . .	87
4.3.3	Eigenschaften der hyperbolischen Verteilung und verwandte Verteilungen . . . . .	89
4.3.4	Stochastischer Prozess . . . . .	90
4.3.5	Optionspreismodell . . . . .	91
4.3.6	Parameterschätzung . . . . .	93
4.3.7	Verallgemeinerte Besselfunktionen 3. Art . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Empirische Überprüfung der ausgewählten Modelle</b>	<b>97</b>
5.1	Statistische Tests zur Validierung der Modelle . . . . .	98
5.1.1	Kolmogorov-Smirnov-Test . . . . .	98
5.1.2	$\chi^2$ -Anpassungstest . . . . .	99
5.1.3	Likelihood-Quotienten-Test . . . . .	100
5.1.4	Quantil-Quantil-Plot . . . . .	100

5.2	Empirische Untersuchung für den schweizerischen Aktienmarkt . . . .	101
5.2.1	Untersuchung von Tagesrenditen . . . . .	102
5.2.2	Untersuchung von Zehntagesrenditen . . . . .	107
5.3	Empirische Untersuchung für den schweizerischen Optionenmarkt . . .	107
5.3.1	Berücksichtigung von Dividendenzahlungen und Bewertung amerikanischer Optionen . . . . .	108
5.3.2	Datengrundlage . . . . .	110
5.3.3	Vorgehen bei der Berechnung der theoretischen Modellpreise und Filtern der Marktpreise . . . . .	111
5.3.4	Ein erster Überblick über das Jahr 1998 . . . . .	112
5.3.5	Detaillierte empirische Analysen . . . . .	115
5.4	Zusammenfassung . . . . .	124

## II Teil II 127

<b>6</b>	<b>Das Value-at-Risk-Konzept zur Messung von Marktrisiken</b>	<b>129</b>
6.1	Der Risikobegriff . . . . .	130
6.1.1	Was ist Risiko? . . . . .	130
6.1.2	Abgrenzung der Marktrisiken von anderen finanziellen Risiken	130
6.1.3	Modell-, Parameter- und Schätzrisiken . . . . .	132
6.2	Der Value-at-Risk als Risikomass . . . . .	136
6.2.1	Einleitung . . . . .	136
6.2.2	Definition des Value-at-Risk . . . . .	136
6.2.3	Diskussion des Value-at-Risk als Risikomass . . . . .	138
6.2.4	Regulatorische Rahmenbedingungen . . . . .	139
6.2.5	Verfahren zur Generierung von Renditeverteilungen . . . . .	143
6.3	Lower-Partial-Moments . . . . .	149
6.3.1	Definiton der Lower-Partial-Moments . . . . .	149
6.3.2	Ein verallgemeinerter Value-at-Risk-Ansatz . . . . .	150
6.3.3	Value-at-Risk und Lower-Partial-Moments als Spezialfall der Stoneschen Risikomasse . . . . .	150
6.3.4	Literaturüberblick über die Verwendung von Finanzmarktmo- dellen als Basis für Value-at-Risk-Schätzungen . . . . .	151
<b>7</b>	<b>Quantilschätzung und Schätzung von Lower-Partial-Moments</b>	<b>153</b>
7.1	Einleitung . . . . .	153
7.2	Nichtparametrische Schätzverfahren . . . . .	154
7.2.1	Quantilschätzung bei klassierten Daten . . . . .	154
7.2.2	Schätzung des Quantils aus einer geordneten Stichprobe . . . .	154
7.2.3	Schätzer für Lower-Partial-Moments . . . . .	156
7.3	Kerndichteschätzer . . . . .	157
7.3.1	Einleitung . . . . .	157
7.3.2	Kerndichteschätzer, Kernfunktion und Bandbreite . . . . .	157
7.3.3	Binning . . . . .	158

7.3.4	Faltung . . . . .	158
7.3.5	Schätzung von Quantilen und Lower-Partial-Moments . . . . .	159
7.4	Parametrische Schätzverfahren . . . . .	160
7.4.1	Treffen von Verteilungsannahmen . . . . .	160
7.4.2	Extremwertmodelle und Quantilschätzung . . . . .	161
7.5	Beispiel zu den vorgestellten Schätzverfahren . . . . .	162
<b>8</b>	<b>Abschätzung des Modellrisikos bei Value-at-Risk-Schätzungen</b>	<b>165</b>
8.1	Ex-ante-Vergleich verschiedener Modelle . . . . .	166
8.1.1	Mittlere relative Abweichung . . . . .	166
8.1.2	Mittlere quadratische relative Abweichung . . . . .	167
8.2	Ex-post-Überprüfung verschiedener Modelle durch Backtesting . . . . .	167
8.2.1	Grundidee des Backtesting . . . . .	167
8.2.2	Verlustfunktion . . . . .	168
8.2.3	Multiplikator zur Erreichung von genau $p$ Prozent Überschreitungen . . . . .	170
8.2.4	Mittlerer ungedeckter Verlust im Verhältnis zum Value-at-Risk . . . . .	171
8.2.5	Maximaler Verlust im Verhältnis zum Value-at-Risk . . . . .	171
8.2.6	Mittlere erwartete und mittlere tatsächliche Überschreitungshöhe . . . . .	172
8.2.7	Korrelation zwischen Verlusten oder Gewinnen und den Value-at-Risk-Schätzungen . . . . .	175
8.2.8	Eingesetzte Kriterien . . . . .	176
8.3	Das Ampelkonzept des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht . . . . .	176
<b>9</b>	<b>Langzeitstudie Swiss Market Index</b>	<b>181</b>
9.1	Ablauf der Langzeitstudie . . . . .	182
9.2	Historische Simulation . . . . .	183
9.2.1	Vergleich der Quantilschätzer . . . . .	183
9.2.2	Ex-post-Kriterien . . . . .	184
9.2.3	Vorgehen bei der Eigenkapitalunterlegung . . . . .	190
9.3	Monte-Carlo-Simulation . . . . .	192
9.3.1	Vorgehensweise . . . . .	192
9.3.2	Ex-post-Kriterien . . . . .	194
9.3.3	Zusammenfassung der Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulationen . . . . .	208
9.4	Vergleich von historischer Simulation und Monte-Carlo-Simulation . . . . .	210
9.4.1	Vergleich der Ex-post-Kriterien zur Überprüfung des Modellrisikos . . . . .	210
9.4.2	Vergleich der Rechenzeiten . . . . .	211
9.4.3	Zusammenfassung . . . . .	213
9.5	Konsequenzen aus der Langzeitstudie . . . . .	214



<b>10 Value-at-Risk-Schätzungen für verschiedene Aktien</b>	<b>217</b>
10.1 Vorgehensweise . . . . .	218
10.2 Ergebnisse für die Credit-Suisse Namenaktie . . . . .	219
10.2.1 Ex-ante-Überprüfung durch $\chi^2$ -Anpassungstests . . . . .	219
10.2.2 Graphische Darstellung der Value-at-Risk-Schätzungen . . . . .	220
10.2.3 Ergebnisse des Backtesting . . . . .	221
10.3 Ergebnisse für die Novartis Namenaktie . . . . .	225
10.3.1 Ex-ante-Überprüfung durch $\chi^2$ -Anpassungstests . . . . .	225
10.3.2 Graphische Darstellung der Value-at-Risk-Schätzungen . . . . .	225
10.3.3 Ergebnisse des Backtesting . . . . .	226
10.4 Zusammenfassung der Ergebnisse für alle untersuchten Titel . . . . .	230
<b>11 Value-at-Risk-Schätzungen bei Optionen</b>	<b>231</b>
11.1 Einleitung . . . . .	231
11.2 Vorgehensweise . . . . .	233
11.3 Diskussion der Ergebnisse . . . . .	234
11.4 Zusammenfassung . . . . .	238
<b>Zusammenfassung</b>	<b>243</b>
<b>A Generierung von Zufallszahlen</b>	<b>247</b>
A.1 Gleichverteilte Zufallszahlen . . . . .	247
A.2 Normalverteilte Zufallszahlen . . . . .	248
A.3 Verwerfungsmethode . . . . .	248
A.3.1 Poissonverteilte Zufallszahlen . . . . .	249
A.3.2 Hyperbolisch verteilte Zufallszahlen . . . . .	250
<b>B Annahmen über Renditeverteilungen und empirische Befunde</b>	<b>251</b>
B.1 BDS-Statistiken . . . . .	251
B.2 Q-Statistiken . . . . .	254
<b>C Parameterschätzungen und Testergebnisse für Aktienrenditen</b>	<b>257</b>
C.1 Tagesrenditen . . . . .	257
C.2 Zehntagesrenditen . . . . .	263
<b>D Ergebnisse der Überprüfung der Optionsmodelle</b>	<b>265</b>
<b>E Value-at-Risk-Schätzungen und Backtesting</b>	<b>275</b>
<b>F Beigelegte Software</b>	<b>279</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>283</b>



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Excessfunktion von normalverteilten Renditen. . . . .	34
2.2	Schematische Darstellung einer Compass Rose. . . . .	36
2.3	Tagesrenditen des SMI in den Jahren 1989–1993 und 1994–1998. . . . .	39
2.4	Recurrence Plot für die Renditen des SMI: Zeitraum 1989–1998, $m = 5$ , $\delta = 0.5$ . . . . .	44
2.5	Recurrence Plot für die Renditen der CSN: Zeitraum 1989–1998, $m = 5$ , $\delta = 0.5$ . . . . .	44
2.6	Empirische Autokorrelationsfunktion von $r_t$ , $r_t^2$ und $ r_t $ der CSN. Zeitraum 1989 bis 1998. . . . .	46
2.7	Empirische Autokorrelationsfunktion von $r_t$ , $r_t^2$ und $ r_t $ der CSN. Zeitraum 1989 bis 1993. . . . .	46
2.8	Empirische Autokorrelationsfunktion von $r_t$ , $r_t^2$ und $ r_t $ der CSN. Zeitraum 1994 bis 1998. . . . .	47
2.9	Empirische Excessfunktion für die Renditen des SMI. Zeitraum 1989 bis 1998. . . . .	50
2.10	Empirische Excessfunktion für die Renditen der CSN. Zeitraum 1989 bis 1998. . . . .	50
3.1	Klassifizierung verschiedener Finanzmarktmodelle. . . . .	51
4.1	Dichtefunktionen der Normalverteilung und hyperbolischen Verteilung. . . . .	87
4.2	Log-Dichtefunktionen der Normalverteilung und hyperbolischen Verteilung. . . . .	87
4.3	Dichtefunktionen der hyperbolischen Verteilung mit $\alpha = 130$ , $\delta = 0.007$ , $\mu = 0.0$ und $\beta = 0.0$ bzw. $\beta = 50$ . . . . .	88
4.4	Dichtefunktionen der hyperbolischen Verteilung mit $\delta = 0.007$ , $\mu = 0.0$ , $\beta = 0.0$ und $\alpha = 130$ bzw. $\alpha = 200$ . . . . .	88
5.1	Quantil–Quantil–Plot für die Renditen der Credit–Suisse Namenaktie für den Zeitraum 1989 bis 1998. . . . .	103
5.2	Vergleich der geschätzten Dichten für die Modelle GBB, SD und HYP mit der empirischen Dichte der Renditen der Credit–Suisse Namenaktie für den Zeitraum 1989–1998. . . . .	104
5.3	Kursverlauf des SMI im Jahr 1998. . . . .	113

5.4	Renditen des SMI im Jahr 1998. . . . .	113
5.5	Varianzschätzungen für die Renditen des SMI im Jahr 1998. . . . .	114
5.6	Differenz zwischen Black-Scholes-Preis und Sprung-Diffusions-Optionspreis in Abhängigkeit vom Ausübungsverhältnis $S/K$ . . . . .	117
5.7	Differenz zwischen Black-Scholes-Preis und Optionspreis im hyperbolischen Modell in Abhängigkeit vom Ausübungsverhältnis $S/K$ . . . . .	117
6.1	Definition des Value-at-Risk. . . . .	137
6.2	Zwei fiktive Portfolios mit unterschiedlichen Renditeverteilungen aber identischem Value-at-Risk. . . . .	140
6.3	Grundidee der historischen Simulation. . . . .	146
6.4	Grundidee der Monte-Carlo-Simulation. . . . .	148
8.1	Ablehnungsbereich beim LR-Test bei Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ , Konfidenzniveau 95% und $T = 250$ . . . . .	169
9.1	Tägliche VaR-Schätzungen bei eintägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 95%. Zeitraum 1994–1998. . . . .	185
9.2	Tägliche VaR-Schätzungen bei zehntägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 99%. Zeitraum 1994–1998. . . . .	185
9.3	Vorgehen bei der Bestimmung der Eigenkapitalunterlegung nach den Vorschriften der EBK bei Konfidenzniveau 99% und zehntägiger Halteperiode. . . . .	192
9.4	Tägliche VaR-Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen bei eintägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 99%. Zeitraum 1994–1998. . . . .	195
9.5	Tägliche VaR-Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen bei eintägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 95%. Zeitraum 1994–1998. . . . .	195
9.6	Tägliche VaR-Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen bei zehntägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 99%. Zeitraum 1994–1998. . . . .	196
9.7	Tägliche VaR-Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen bei zehntägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 95%. Zeitraum 1994–1998. . . . .	196
9.8	Vergleich der empirischen Dichte mit den Dichten der Modelle GBB, SD und HYP für den SMI im Zeitraum 1997 bis 1998. . . . .	198
9.9	Tägliche $LPM_2(0)$ -Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen bei eintägiger Halteperiode. Zeitraum 1994–1998. . . . .	207
9.10	Tägliche $LPM_2(0)$ -Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen bei zehntägiger Halteperiode. Zeitraum 1994–1998. . . . .	207
9.11	Relative Abweichung $(KOMB - EKOMB)/KOMB$ bei verschiedenen Konfidenzniveaus und eintägiger Halteperiode. . . . .	212
9.12	Relative Abweichung $(KOMB - EKOMB)/KOMB$ bei verschiedenen Konfidenzniveaus und zehntägiger Halteperiode. . . . .	212

10.1	Tägliche VaR-Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen für die Credit-Suisse Namenaktie bei eintägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 99%. Zeitraum 1998. . . . .	222
10.2	Tägliche VaR-Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen für die Credit-Suisse Namenaktie bei eintägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 95%. Zeitraum 1998. . . . .	222
10.3	Tägliche VaR-Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen für die Credit-Suisse Namenaktie bei zehntägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 99%. Zeitraum 1998. . . . .	223
10.4	Tägliche VaR-Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen für die Credit-Suisse Namenaktie bei zehntägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 95%. Zeitraum 1998. . . . .	223
10.5	Tägliche VaR-Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen für die Novartis Namenaktie bei eintägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 99%. Zeitraum 1998. . . . .	227
10.6	Tägliche VaR-Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen für die Novartis Namenaktie bei eintägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 95%. Zeitraum 1998. . . . .	227
10.7	Tägliche VaR-Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen für die Novartis Namenaktie bei zehntägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 99%. Zeitraum 1998. . . . .	228
10.8	Tägliche VaR-Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen für die Novartis Namenaktie bei zehntägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 95%. Zeitraum 1998. . . . .	228
11.1	Dichteschätzungen für Verteilungen der Optionsrenditen bei eintägiger Halteperiode und unterschiedlichen Modellannahmen. . . . .	235
11.2	Dichteschätzungen für Verteilungen der Optionsrenditen bei zehntägiger Halteperiode und unterschiedlichen Modellannahmen. . . . .	235
11.3	VaR-Schätzungen bei eintägiger Halteperiode und $p = 0.01$ . . . . .	239
11.4	VaR-Schätzungen bei eintägiger Halteperiode und $p = 0.05$ . . . . .	239
11.5	VaR-Schätzungen bei zehntägiger Halteperiode und $p = 0.01$ . . . . .	240
11.6	VaR-Schätzungen bei zehntägiger Halteperiode und $p = 0.05$ . . . . .	240
A.1	Grundidee der Verwerfungsmethode. . . . .	249
A.2	Erweiterung einer diskreten zu einer stetigen Funktion zur Anwendung der Verwerfungsmethode. . . . .	250



# Tabellenverzeichnis

2.1	BDS-Statistiken für verschiedene Werte von $m$ und $\delta$ und verschiedene Zeiträume der Credit-Suisse Namenaktie. . . . .	42
2.2	Häufigkeit der Nichtablehnung der Nullhypothese des BDS-Tests bei verschiedenen Signifikanzniveaus für alle fünf Aktientitel und den SMI. . . . .	43
2.3	Q-Statistiken von Box-Pierce und Box-Ljung für die CSN. Signifikanzniveaus $\alpha = 1\%$ und $\alpha = 5\%$ . Anzahl Time Lags $m = 15$ . . . . .	47
2.4	Relative Häufigkeiten der Nichtablehnung der Nullhypothese der Q-Statistiken nach Box-Pierce und Box-Ljung. . . . .	48
5.1	Ergebnisse für die Credit-Suisse Namenaktie. . . . .	105
5.2	Parameterschätzungen für die einzelnen Modelle am 18.12.98. . . . .	116
5.3	Mittlere absolute relative Abweichung zwischen Modell- und Marktpreisen für Optionen auf den SMI und die Credit-Suisse Namenaktie. . . . .	118
5.4	Mittlere relative Abweichungen zwischen Modell- und Marktpreisen bei Call-Optionen auf die Credit-Suisse Namenaktie im Zeitraum Januar bis Juli 1998. . . . .	120
5.5	Mittlere relative Abweichungen zwischen Modell- und Marktpreisen bei Call-Optionen auf die Credit-Suisse Namenaktie im Zeitraum August bis Dezember 1998. . . . .	121
5.6	Mittlere relative Abweichungen zwischen Modell- und Marktpreisen bei Call-Optionen auf den SMI im Zeitraum Januar bis Juli 1998. . . . .	122
5.7	Mittlere relative Abweichungen zwischen Modell- und Marktpreisen bei Call-Optionen auf den SMI im Zeitraum August bis Dezember 1998. . . . .	123
6.1	Einige spektakuläre Verluste im Zusammenhang mit Marktrisiken. . . . .	131
7.1	Konfidenzintervalle bei nichtparametrischer Quantilschätzung. . . . .	156
7.2	Beispiel zu Quantil- und LPM-Schätzungen. . . . .	163
8.1	Nichtablehnungsbereich bei Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ . . . . .	170
8.2	Nichtablehnungsbereich bei Signifikanzniveau $\alpha = 1\%$ . . . . .	170
8.3	Festlegung des Multiplikators nach dem Ampelkonzept. . . . .	177

8.4	Festlegung der Zonen anhand der Fehler 1. Art. Annahme eines genauen Modells mit $p = 1\%$ . Stichprobenumfang $T = 250$ . . . . .	178
8.5	Festlegung der Zonen anhand der Fehler 2. Art. Annahme eines ungenauen Modells mit $p = 2\%$ . Stichprobenumfang $T = 250$ . . . . .	179
9.1	MRB und RMSRB für VaR-Schätzungen auf Basis einer geordneten Stichprobe, klassierter Daten und Kerndichteschätzung bei verschiedenen $p$ -Werten und eintägiger Halteperiode. . . . .	183
9.2	MRB und RMSRB für VaR-Schätzungen auf Basis einer geordneten Stichprobe, klassierter Daten und Kerndichteschätzung bei verschiedenen $p$ -Werten und zehntägiger Halteperiode. . . . .	184
9.3	Schätzungen des Rang-Korrelationskoeffizienten bei verschiedenen $p$ -Werten der Value-at-Risk-Schätzung und Halteperioden. . . . .	186
9.4	Ergebnisse des Backtesting für die VaR-Schätzungen bei historischer Simulation des SMI vom 22.12.1993 bis 30.12.1998 bei unterschiedlichen Konfidenzniveaus und eintägiger Halteperiode. . . . .	188
9.5	Ergebnisse des Backtesting für die VaR-Schätzungen bei historischer Simulation des SMI vom 22.12.1993 bis 30.12.1998 bei unterschiedlichen Konfidenzniveaus und zehntägiger Halteperiode. . . . .	189
9.6	Relative Abweichung $(\overline{RUH} - \overline{REUH})/\overline{RUH}$ bei verschiedenen Konfidenzniveaus und eintägiger Halteperiode. . . . .	190
9.7	Relative Abweichung $(\overline{RUH} - \overline{REUH})/\overline{RUH}$ bei verschiedenen Konfidenzniveaus und zehntägiger Halteperiode. . . . .	190
9.8	Relative Abweichung $(\overline{KOMB} - \overline{EKOMB})/\overline{KOMB}$ bei verschiedenen Konfidenzniveaus und eintägiger Halteperiode. . . . .	191
9.9	Relative Abweichung $(\overline{KOMB} - \overline{EKOMB})/\overline{KOMB}$ bei verschiedenen Konfidenzniveaus und zehntägiger Halteperiode. . . . .	191
9.10	MRB und RMSRB für VaR-Schätzungen bei verschiedenen $p$ -Werten und eintägiger Halteperiode. . . . .	197
9.11	MRB und RMSRB für VaR-Schätzungen bei verschiedenen $p$ -Werten und zehntägiger Halteperiode. . . . .	197
9.12	Schätzungen des Rang-Korrelationskoeffizienten bei verschiedenen $p$ -Werten der Value-at-Risk-Schätzung und Halteperioden. . . . .	200
9.13	Ergebnisse des Backtesting für die VaR-Schätzungen bei Monte-Carlo-Simulationen des SMI vom 22.12.1993 bis 30.12.1998 bei unterschiedlichen Konfidenzniveaus und eintägiger Halteperiode. . . . .	201
9.14	Ergebnisse des Backtesting für die VaR-Schätzungen bei Monte-Carlo-Simulationen des SMI vom 22.12.1993 bis 30.12.1998 bei unterschiedlichen Konfidenzniveaus und zehntägiger Halteperiode. . . . .	202
9.15	Relative Abweichung $(\overline{RUH} - \overline{REUH})/\overline{RUH}$ bei verschiedenen Konfidenzniveaus und eintägiger Halteperiode. . . . .	204
9.16	Relative Abweichung $(\overline{RUH} - \overline{REUH})/\overline{RUH}$ bei verschiedenen Konfidenzniveaus und zehntägiger Halteperiode. . . . .	204
9.17	Relative Abweichung $(\overline{KOMB} - \overline{EKOMB})/\overline{KOMB}$ bei verschiedenen Konfidenzniveaus und eintägiger Halteperiode. . . . .	205



---

9.18	Relative Abweichung $(KOMB - EKOMB)/KOMB$ bei verschiedenen Konfidenzniveaus und zehntägiger Halteperiode. . . . .	206
9.19	Approximative Rechenzeiten für 1259 tägliche Value-at-Risk-Schätzungen bei Monte-Carlo-Simulationen und bei historischen Simulationen. . . . .	213
10.1	Rahmenbedingungen für die Monte-Carlo-Simulationen. . . . .	218
10.2	Rahmenbedingungen für die historische Simulationen. . . . .	219
10.3	Ergebnisse der $\chi^2$ -Anpassungstests für die Credit-Suisse Namenaktie. . . . .	220
10.4	Ergebnisse des Backtesting für die VaR-Schätzungen des Jahres 1998 für die Credit-Suisse Namenaktie bei unterschiedlichen Konfidenzniveaus und Halteperioden. . . . .	224
10.5	Ergebnisse der $\chi^2$ -Anpassungstests für die Novartis Namenaktie. . . . .	225
10.6	Ergebnisse des Backtesting für die VaR-Schätzungen des Jahres 1998 für die Novartis Namenaktie bei unterschiedlichen Konfidenzniveaus und Halteperioden. . . . .	229
11.1	Parameterschätzungen für die einzelnen Modelle am 18.12.98. . . . .	233
11.2	Approximative Rechenzeiten für eine Value-at-Risk-Schätzung in den unterschiedlichen Modellen. . . . .	234
11.3	Schätzungen für statistische Kenngrößen der Modellverteilungen von Optionsrenditen. . . . .	236
11.4	Quantilschätzungen der Modellverteilungen bei unterschiedlichen Konfidenzniveaus und Halteperioden. . . . .	236
11.5	LPM-Schätzungen für die Modellverteilungen von Optionsrenditen. . . . .	237



# Verzeichnis der Abkürzungen

ABBI	ABB Inhaber	37
AGARCH	Asymmetric GARCH	59
ARCH	Autoregressive Conditional Heteroskedasticity	57
BDS	Brock–Dechert–Scheinkman	29
BS	Black–Scholes	81
CAPM	Capital Asset Pricing Model	80
CSN	Credit–Suisse Namen	37
EBK	Eidgenössische Bankenkommision	136
EGARCH	Exponential GARCH	59
GARCH	Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity	57
GARCH–M	GARCH in Mean	59
GBB	Geometrische Brownsche Bewegung	63
GED	Generalized Error Distribution	58
HIS	Historische Simulation	221
HYP	Hyperbolisches Modell	63
IGARCH	Integrated GARCH	58
i.i.d.	identically and independently distributed	11
IOSCO	The International Organization of Securities Commissions	38
KS	Kolmogorov–Smirnov	98
LIBOR	London Interbank Offered Rate	110
LPM	Lower–Partial–Moment	129
LR	Likelihood–Ratio	169
MARA	Mittlere Absolute Relative Abweichung	118
MRA	Mittlere Relative Abweichung	118
MRB	Mean Relative Bias	166
NESN	Nestlé Namen	37
NOVN	Novartis Namen	37
n.v.	nicht verfügbar	103
o.V.	ohne Verfasser	
RMSRB	Root Mean Squared Relative Bias	167
ROG	Roche Genusschein	37
s.e.	Standard Error	154

SAS	SAS Institute	59
SD	Sprung-Diffusion	63
SMI	Swiss Market Index	38
VaR	Value-at-Risk	136

# Einleitung

## Problemstellung

Zur Quantifizierung von Marktrisiken ist ein geeignetes Risikomass zu bestimmen. Solche Masse stellen Kenngrößen einer Renditeverteilung oder einer Verteilung von Gewinnen und Verlusten dar. Empirisch ergeben sich Risikomasse als Schätzung dieser Kenngrößen einer Verteilung.

Bei der parametrischen Schätzung von Risikomassen zur Quantifizierung von Marktrisiken sind zunächst Hypothesen über Verteilungen von Renditen oder Gewinn- und Verlustfunktionen zu bilden. Solche Hypothesen über Verteilungsmodelle werden zum einen aufgrund von allgemeinen Annahmen über Finanzmarktdaten aufgestellt, zum anderen enthalten sie jeweils noch modellspezifische Annahmen. Einen Spezialfall stellen implizite Modelle dar, bei denen keine explizite Wahl eines Verteilungsmodells vorgenommen wird. Vielmehr werden in diesem Fall die Kenngrößen, welche das Marktrisiko quantifizieren sollen, direkt auf Grundlage einer Stichprobe historischer Daten geschätzt. Bei der Wahl eines expliziten Verteilungsmodells müssen dagegen zunächst die Verteilungsparameter auf Grundlage dieser Stichprobe geschätzt werden, bevor eine Kenngröße als Risikomass geschätzt werden kann. Aber auch eine implizite Modellbildung kommt nicht ohne Annahmen aus. So wird in der Regel unterstellt, dass die Elemente der Stichprobe unabhängig und identisch verteilt sind.

In einem Risikomanagementsystem lassen sich drei Risikoarten identifizieren: Modellrisiko, Parameterrisiko und Schätzrisiko. Beim Modellrisiko handelt es sich um mögliche Fehler bei der Modellierung des Untersuchungsgegenstandes, also zum Beispiel um „schlechte“ Modelle für die Verteilung von Aktienrenditen oder „falsche“ Annahmen über die zeitliche Entwicklung von Marktpreisen.

Das Parameterrisiko besteht darin, dass ein Mass für die Risikomessung verwendet wird, welches das in einer Verteilung enthaltene Risiko unter Umständen nicht erfasst. Es geht also zum Beispiel um die Frage, ob sich der Value-at-Risk als Risikomass eignet, insbesondere auch dann, wenn auf Grundlage dieses Masses Eigenkapitalallokationen vorzunehmen sind.

Die gewählte Risikokennzahl ist schliesslich auf Grundlage einer empirischen Renditeverteilung zu schätzen. Der Fehler zwischen der Schätzung und dem „wahren“ Wert des Risikomasses stellt dann das Schätzrisiko dar.

Im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit steht eine Analyse und Abschätzung von Modellrisiken. Für diese Wahl sind folgende Gründe ausschlaggebend. Das Modellrisiko stellt sozusagen die erste Unsicherheitsquelle bei der Umsetzung eines Risikomanagementsystems dar. Ohne eine möglichst gute Modellierung des Untersuchungsgegenstandes ist das beste Risikomass nur von beschränktem Nutzen. Im Zusammenhang mit der Diskussion um den Value-at-Risk als Konzept zur Messung von Marktrisiken wird dem Modellrisiko zu wenig Beachtung geschenkt. Es wird vor allem das Parameterrisiko akzentuiert. Es existiert zum Beispiel eine Reihe von Studien, in denen untersucht wird, inwieweit sich das Value-at-Risk-Konzept zur Messung von Marktrisiken eignet, aber gleichzeitig normalverteilte Renditen unterstellt werden. Dass die Normalverteilung nur als unzureichende Näherung für empirische Renditeverteilungen betrachtet werden kann, ist hinreichend bekannt. Aussagen über die Eignung eines Risikomasses auf dieser Grundlage sind daher kritisch zu beurteilen.

Die Höhe des Modellrisikos bleibt auch bei näherer Betrachtung letztlich unbekannt. Werden verschiedene Modelle bezüglich ihres Modellrisikos untersucht, so ist man zum einen auf indirekte Kriterien angewiesen, zum anderen sind nur Aussagen für einzelne Modelle relativ zueinander möglich.

Da sich der Value-at-Risk als Standardmass zur Quantifizierung von Marktrisiken etabliert hat, existiert in der Zwischenzeit umfangreiche Literatur zu diesem Konzept der Risikomessung. So werden Fragestellungen des Parameterrisikos und der praktischen Umsetzung des Value-at-Risk-Konzeptes ebenso diskutiert, wie statistische Konzepte zur Value-at-Risk-Schätzung. Auch über die Modellierung von Renditen und über die Modellierung der Dynamik von Kursen auf Kapitalmärkten lassen sich zahlreiche Publikationen finden. Viele der empirischen Untersuchungen dieser Modelle sind allerdings schon älter, teilweise fehlt eine Überprüfung für den schweizerischen Markt. Vor allem aber ist eine Vielzahl dieser Modelle nicht im Zusammenhang mit der Messung von Marktrisiken untersucht worden. Es fehlt daher eine Überprüfung der Modelle bezüglich ihres Modellrisikos, wenn sie als Grundlage zur Schätzung des Value-at-Risk verwendet werden.

Beim Literaturstudium fällt vor allem die Diskrepanz zwischen betriebswirtschaftlich und mathematisch orientierter Forschung auf. Bei der betriebswirtschaftlich orientierten Forschung steht die praktische Umsetzung des Value-at-Risk-Ansatzes im Vordergrund. So wird zum Beispiel der Frage nachgegangen, wie sich auf effiziente Weise der Value-at-Risk eines ganzen Portfolios bestimmen lässt oder wie Eigenkapitalunterlegungen von Marktrisiken vorzunehmen sind. Einer kritischen Hinterfragung der getroffenen Annahmen wird dabei oft nur wenig Beachtung geschenkt. Dies ist zum Beispiel besonders auffällig, wenn Simulationsstudien auf Basis der Hypothese normalverteilter Renditen durchgeführt werden. Auf der anderen Seite neigt die

mathematisch orientierte Forschung dazu, sich einer Sprache zu bedienen, die den Diffusionsprozess der gewonnenen Resultate in eine praktische Umsetzung erschwert.

## Zielsetzung und Vorgehen

In der vorliegenden Arbeit wird der Fragestellung nachgegangen, welches Modell einer Auswahl verschiedener Modelle zur Beschreibung von Renditeverteilungen und zur Bewertung von Optionen im Vergleich das geringste Modellrisiko aufweist. Im wesentlichen wird dabei der Value-at-Risk als Konzept zur Risikomessung verwendet. Diese Fragestellung wird anhand empirischer Daten für den schweizerischen Aktien- und Optionenmarkt analysiert.

Die Auswahl der Modelle beruht zunächst auf allgemeinen Annahmen über Finanzmarktdaten. Diese allgemeinen Annahmen gilt es empirisch zu überprüfen. Ebenso müssen modellspezifische Annahmen überprüft werden. Als Datenbasis für diese Analysen stehen Aktienkurse der Jahre 1989 bis 1998 und Optionsdaten des Jahres 1998 zur Verfügung.

Das Modellrisiko ist letztlich eine unbekannte Grösse. Bei einer detaillierten Untersuchung des Modellrisikos im Zusammenhang mit Value-at-Risk-Schätzungen sind daher zunächst geeignete Hilfskriterien zur Abschätzung dieses Risikos zu entwickeln. Diese Kriterien werden dann in empirischen Analysen eingesetzt, um aus den Resultaten Aussagen über die Höhe des Modellrisikos ableiten zu können.

## Aufbau der Arbeit

Die Arbeit gliedert sich in zwei Teile. Teil I stellt grundlegende Konzepte vor. Es erfolgt eine Diskussion allgemeiner und modellspezifischer Annahmen sowie deren empirische Überprüfung. Teil II beinhaltet Untersuchungen zum Modellrisiko ausgewählter Modelle. Als Konzept zur Risikomessung wird im wesentlichen der Value-at-Risk eingesetzt. Diese beiden Teile können nahezu unabhängig voneinander gelesen werden. Leser, die mit verschiedenen Finanzmarktmodellen vertraut sind, können den ersten Teil auch überspringen.

Die detaillierte Gliederung von Teil I gestaltet sich wie folgt. Kapitel 1 legt grundlegende mathematische Konzepte dar, die in der Arbeit immer wieder verwendet werden. Vor allem geht es um die Beschreibung der zeitlichen Entwicklung von Aktienkursen durch stochastische Prozesse. Im darauffolgenden Kapitel werden allgemeine Annahmen über Finanzmarktdaten wie die Hypothese unabhängig und identisch verteilter Renditen und das Tail-Verhalten von Renditeverteilungen vorgestellt. Statistische Tests zur Überprüfung dieser Hypothesen werden vorgestellt und in einer Untersuchung für den schweizerischen Aktienmarkt angewendet. Kapitel 3 stellt die wichtigsten Finanzmarktmodelle vor und begründet die Auswahl dreier spezieller Ansätze für

die weiteren Untersuchungen. Die ausgewählten Modelle werden in Kapitel 4 ausführlich erläutert und anhand von Daten des schweizerischen Aktien- und Optionenmarktes in Kapitel 5 überprüft.

Teil II befasst sich mit Value-at-Risk-Schätzungen auf Grundlage der ausgewählten Modelle. Dazu werden zunächst in Kapitel 6 Begriffe wie Risiko, Modell-, Parameter- und Schätzrisiko definiert. Der Value-at-Risk wird als Konzept zur Risikomessung eingeführt, Verfahren zur Generierung von Renditeverteilungen diskutiert. Eine Darstellung der regulatorischen Rahmenbedingungen erfolgt ebenfalls. Als alternatives Konzept zur Risikomessung werden die Lower-Partial-Moments vorgestellt. Diese Kennzahlen lassen sich zusammen mit dem Value-at-Risk in eine allgemeinere Klasse von Risikomassen einordnen. Statistische Verfahren zur Quantilschätzung als Grundlage für Value-at-Risk-Schätzungen und zur Schätzung von Lower-Partial-Moments werden in Kapitel 7 vorgestellt. Es schliesst sich in Kapitel 8 eine Diskussion und Auswahl verschiedener Kriterien zur Abschätzung von Modellrisiken an. Ein grundlegendes Konzept ist dabei das Backtestingverfahren. In empirischen Studien werden in Kapitel 9 bis 11 Value-at-Risk-Schätzungen für den Swiss Market Index, für ausgewählte schweizerische Aktien und Aktienoptionen diskutiert. Als Grundlage für diese Value-at-Risk-Schätzungen dienen die in Kapitel 4 diskutierten Modelle. Die Kriterien zur Abschätzung des Modellrisikos werden eingesetzt, woraus sich Aussagen über das Modellrisiko eines speziellen Modells im Vergleich mit den übrigen untersuchten Modellen ableiten lassen.

Eine Zusammenfassung der Ergebnisse schliesst die Untersuchung ab.

## Entwicklung geeigneter Software

Für die Untersuchungen in dieser Arbeit stand keine Standardsoftware bereit, das heisst auch statistische Softwarepakete wie zum Beispiel SAS bieten für die zu behandelnden Probleme nur in beschränktem Umfang Hilfestellung an. Aus diesem Grund wurde die entsprechende Software vom Autor entwickelt. Anhang F gibt einen Überblick über die der Arbeit beigelegten Programme. So wurden Routinen zur Überprüfung der allgemeinen Annahmen von Finanzmarktdaten entwickelt, ebenso wie für die Analyse der ausgewählten Modelle. Letztere umfassen Verfahren zur Parameterschätzung, statistische Tests zur Validierung der Modelle, Optionsbewertungsformeln und Routinen zur Monte-Carlo-Simulation. Programmiert wurde in der Sprache C, wobei auf Routinen aus der umfangreichen Programmbibliothek von Numerical Recipes zur Lösung mathematischer Teilprobleme zurückgegriffen werden konnte.



## Teil I

# Finanzmarktmodelle und deren empirische Überprüfung



# Kapitel 1

## Grundlegende Konzepte

Die Messung von Marktrisiken, das heisst die Messung von Kursrisiken von Aktien, Edelmetallen, Rohstoffen und deren Derivate, von Zinsänderungsrisiken und von Wechselkursrisiken, setzt zwei Dinge fundamental voraus. Erstens ist ein geeignetes Konzept zur Risikomessung zu entwickeln, konkret ein Konzept zur Berechnung einer oder mehrerer Risikomasszahlen. Dies setzt aber zweitens eine geeignete (mathematische) Beschreibung des Untersuchungsgegenstandes voraus.

Während der zweite Teil der vorliegenden Arbeit sich mit der Bestimmung von Risikomasszahlen beschäftigt, geht es im ersten Teil um eine adäquate Beschreibung des Untersuchungsgegenstandes. Dieser Untersuchungsgegenstand ist bei Marktrisiken einfach anzugeben. So werden Aktien, Waren, Währungen und Zinsinstrumente auf Märkten gehandelt, das heisst es sind Entwicklungen und Veränderungen auf diesen Märkten zu analysieren. Die beobachtbare Grösse und damit der Untersuchungsgegenstand ist dann der Kurs des jeweiligen Instruments oder der jeweiligen Anlage. Gegenstand dieser Arbeit werden ausschliesslich der Aktienmarkt und der zugehörige Optionsmarkt sein.

Wie kommt solch ein Kurs zustande? Sind es eher zufällige Einflüsse, die ihn bestimmen, oder lässt er sich etwa aus anderen Grössen und Fakten determinieren? Was ist sozusagen die Natur des Kurses? Je nachdem wie diese Frage beantwortet wird, ändert sich auch die Art der mathematischen Formulierung und Beschreibung des Untersuchungsgegenstandes. Dieser Fragestellung ist der erste Teil dieses Kapitels gewidmet.

Aus der am Markt beobachtbaren Grösse, also einer bestimmten Kurshöhe, lassen sich Renditen berechnen. Diese abgeleitete Grösse und weniger der Kurs einer Anlage wird in der Regel von Ökonomen betrachtet. Daher wird im zweiten Teil auf diese Grösse näher eingegangen.

Das erste Kapitel kann so als eine Einführung grundlegender Konzepte, seien sie ge-

danklicher oder methodischer Art, verstanden werden. Die notwendigen Definitionen und Notationen werden eingeführt. Für eine ausführliche Diskussion des notwendigen mathematischen Rüstzeuges ist naturgemäss in einer Arbeit wie der vorliegenden nur wenig Raum. Deshalb sei an dieser Stelle auf die Literatur verwiesen. Eine hervorragende Einführung in die Finanzmathematik bietet Neftci [87]. Das Werk von Campbell et al. [26], welches sich mit ökonometrischen Fragestellungen ausschliesslich von Finanzmärkten befasst, ist ebenfalls sehr empfehlenswert. Einen umfassenden Überblick über stochastische Methoden, wenn auch ohne ökonomische Anwendungen, gibt Gardiner [50]. Als Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie sei auf Mikosch [86] verwiesen.

## 1.1 Beschreibung des Aktienkurses als Zufallsvariable

In der Einführung zu diesem Kapitel wurde von der Natur des (Aktien-) Kurses gesprochen. Von der Natur des Aktienkurses ist abhängig, welche mathematische Theorie zur Beschreibung und Modellierung von Finanzmärkten eingesetzt wird. Selbstverständlich ist jeder solcher Ansatz mit Annahmen und Vereinfachungen verbunden.

Ein Ansatz besteht darin, den Kurs einer Aktie als deterministische Grösse anzunehmen. Der Kurs liesse sich dann etwa aus historischen Kursinformationen, aus unternehmensspezifischen Daten, aus makroökonomischen Variablen sowie aus einer Reihe anderer Faktoren berechnen. Dies bedeutet dann insbesondere auch, dass sich zukünftige Kurse prognostizieren lassen, vorausgesetzt alle für die Prognose notwendigen Informationen und deren Beziehungen untereinander sind bekannt. Mathematisch gesehen ist nur noch einfache Analysis notwendig. Diese Sichtweise ist Ausdruck eines rein mechanistischen Weltbildes, es wird aber wohl kaum jemand annehmen, dass die Realität auf den Finanzmärkten sich dadurch erklären und beschreiben liesse. Allein alle notwendigen Informationen zu beschaffen, erscheint aussichtslos.

Oder steht hinter der Kursentwicklung einer Aktie zwar ein deterministischer Prozess, der aber bei bestimmten Konstellationen völlig irreguläres und chaotisches Verhalten zeigen kann? Mit solchen Fragestellungen beschäftigt sich die Chaostheorie. Oft beschleicht einen das Gefühl, dass gerade für Börsen (deterministisches) Chaos eine zutreffende Beschreibung darstellt. So wird auch immer wieder und in einer Vielzahl von Publikationen versucht, die Theorie chaotischer Bewegungen auf das Verhalten von Finanzmärkten anzuwenden. Eine überzeugende empirische Bestätigung dafür, dass sich Aktienkurse durch deterministische chaotische Systeme beschreiben lassen, fehlt aber nach wie vor (vgl. Lorenz [77], S. 222 ff. und Chen et al. [27]). Zu einem späteren Zeitpunkt wird auf diese Theorien nochmals eingegangen.

Eine dritte Möglichkeit, die Natur von Aktienkursen zu beschreiben, besteht darin, einen Kurs als Realisierung einer Zufallsvariablen zu betrachten. Man kann sich etwa vorstellen, dass sich die Vielzahl von Faktoren, die auf die Preisbildung einwirken,

zwar in einer einzigen Variablen zusammenfassen lassen, sich jedoch über die Ausprägungen dieser Variablen nur noch Wahrscheinlichkeitsaussagen machen lassen. Zu einem bestimmten gegebenen Zeitpunkt können dann Aussagen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung getroffen werden. Bereits im Jahr 1900 wurde von Louis Bachelier (1870–1946) diese Sichtweise vertreten (zitiert in Gehrig und Zimmermann [51], S. 6):

*”Le Calcul des probabilités ne pourra sans doute jamais s’appliquer aux mouvements de la cote et la dynamique de la Bourse ne sera jamais une science exacte. Mais il est possible d’étudier mathématiquement l’état statique du marché à un instant donné, c’est-à-dire d’établir la loi de probabilité des variations de cours qu’admet à cet instant le marché. Si le marché, en effet, ne prévoit pas les mouvements, il les considère comme étant plus ou moins probables, et cette probabilité peut s’évaluer mathématiquement.”*

Für die Beschreibung der Dynamik der Aktienkurse, also deren zeitliche Entwicklung, können zeitabhängige Zufallsvariablen eingeführt werden. Es ist nun diese Art der Beschreibung von Kursen, welche die Grundlage der modernen Finanzmathematik bildet. Desweiteren lassen sich auf dieser Basis Modelle entwickeln, mit deren Hilfe versucht werden kann, das zeitliche Verhalten von Kursen abzubilden, ohne dabei einen exakten zukünftigen Kurs prognostizieren zu wollen.

Somit wurde bereits ein zentrales Konzept dieser Arbeit eingeführt, nämlich die Beschreibung von Aktienkursen als zeitabhängige Zufallsvariablen. Die nachfolgenden Abschnitte geben nun eine kurze Einführung in die für diese Art der Beschreibung notwendigen mathematischen Werkzeuge.

## 1.2 Die Dynamik von Aktienkursen: stochastische Prozesse

Die Beschreibung von Aktienkursen wird über zeitabhängige Zufallsvariablen oder sogenannte *stochastische Prozesse* erfolgen. Eine exakte Definition dieser Prozesse, spezielle stochastische Prozesse und deren Eigenschaften werden im folgenden vorgestellt und diskutiert.

### 1.2.1 Zeitstetige versus zeitdiskrete Beschreibung

Eine zeitdiskrete Beschreibung von Aktienkursbewegungen scheint zunächst einfacher und naheliegender als eine zeitstetige Beschreibung, insbesondere aus empirischer Sicht. So werden Stichproben von historischen Daten anhand diskreter Zeitpunkte erhoben. Modellparameter lassen sich nur auf der Basis solcher diskreter Daten schätzen, ebenso wie sich Hypothesen über Modellannahmen nur anhand diskreter Daten überprüfen lassen. Schliesslich werden Transaktionen an den Börsen nur an diskreten Zeitpunkten erfasst (wenn auch bis auf die Zehntelsekunde genau, aber eben doch diskret). Eine zeitdiskrete Beschreibung ist daher die eigentlich korrekte Beschreibungsweise. Deshalb existiert auch eine Reihe von Modellen über die Dynamik von Aktienkursen,

welche direkt auf zeitdiskreter Basis formuliert sind (vgl. Campbell et al. [26], S. 381 f.).

Gegen eine zeitdiskrete Beschreibung sprechen vor allem mathematische Gründe. Die Handhabung zeitstetiger stochastischer Prozesse ist oft wesentlich einfacher als diejenige zeitdiskreter Prozesse, insbesondere existieren teilweise nur Ergebnisse für den zeitkontinuierlichen Fall, für den zeitdiskreten Fall dagegen nicht. Beispielsweise existiert eine sehr wichtige Formel, die bei der Bewertung von Derivaten eine herausragende Rolle spielt, nur im zeitkontinuierlichen Fall. Oft kann in einer stetigen Formulierung der Einfluss von einzelnen Größen auf den Wert eines Derivates besser abgelesen werden als in einer zeitdiskreten Beschreibung (vgl. Campbell et al. [26], S. 381 f.).

Zudem können Arbitrageargumente, wie bei der Herleitung der Black–Scholes Formel, nur im zeitstetigen Fall angewandt werden. Die Zeit als stetige Variable erlaubt es, an beliebig kurz aufeinanderfolgenden Zeitpunkten Anpassungen in Portfoliogewichten vorzunehmen (vgl. Neftci [87], S. 35 f.). Bewertungsformeln für Optionen werden daher in der Regel für den zeitkontinuierlichen Fall abgeleitet<sup>1</sup>.

Aus diesen Gründen, vor allem aber wegen der mathematisch einfacheren Konzepte, werden in dieser Arbeit zeitstetige Formulierungen in der Regel vorgezogen. Es ist aber selbstverständlich, dass Modelle, die zeitkontinuierlich formuliert sind, für Parameterschätzungen, für die Überprüfung von Hypothesen und für numerische Simulationsalgorithmen in der Zeit diskretisiert werden müssen. Darauf wird jeweils eingegangen werden.

### 1.2.2 Definition eines stochastischen Prozesses

Der Kurs einer Aktie an einem gegebenen Zeitpunkt wird im folgenden als Zufallsvariable  $X = X(\omega)$  auf einem Ergebnisraum  $\Omega$  ( $\omega \in \Omega$ ) modelliert. Zur vollständigen Definition eines Wahrscheinlichkeitsraumes sei zusätzlich eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$  und ein Wahrscheinlichkeitsmass  $P$  gegeben.

Bei einer Aktie interessieren allerdings nicht nur die möglichen Kurse an einem bestimmten Zeitpunkt, sondern insbesondere auch die Entwicklung des Kurses über die Zeit. Ein mathematisches Modell für die Beschreibung der zeitlichen Entwicklung ist ein sogenannter *stochastischer Prozess*.

Ein stochastischer Prozess  $X$  ist eine Menge von Zufallsvariablen

$$(X_t, t \in T) = (X_t(\omega), t \in T, \omega \in \Omega), \quad (1.1)$$

definiert auf  $\Omega$  (vgl. Mikosch [86], S. 23). Ist  $T \subseteq \mathbb{R}^+$  wird  $X$  als *zeitkontinuierlicher* Prozess bezeichnet, ist  $T \subseteq \mathbb{N}$  wird  $X$  als *zeitdiskreter* Prozess bezeichnet. Ein

<sup>1</sup>Eine Ausnahme bildet das Binomial–Optionspreismodell nach Cox, Ross und Rubinstein (vgl. etwa Neftci [87], S. 27 ff.).

stochastischer Prozess  $X$  ist eine Funktion von zwei Variablen. Für einen gegebenen Zeitpunkt  $t \in T$  ist  $X$  eine Zufallsvariable, wie eingangs beschrieben:

$$X_t = X_t(\omega), \omega \in \Omega.$$

Für ein gegebenes zufälliges Ereignis  $\omega \in \Omega$  ist  $X$  eine Funktion der Zeit:

$$X_t = X_t(\omega), t \in T.$$

Diese letzte Funktion wird als *Realisierung*, *Trajektorie* oder *Pfad* des Prozesses bezeichnet.

### 1.2.3 Spezielle stochastische Prozesse

Ein stochastischer Prozess kann als Menge von endlichdimensionalen Zufallsvektoren interpretiert werden. Die endlichdimensionalen Verteilungen des stochastischen Prozesses  $X$  sind dann die Verteilungen der endlichdimensionalen Zufallsvektoren

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}), t_1, \dots, t_n \in T$$

für jede mögliche Wahl von  $t_1, \dots, t_n \in T$  und jedes  $n \geq 1$  (vgl. Mickosch [86], S. 27). Diese endlichdimensionalen Verteilungen bestimmen vollständig einen stochastischen Prozess. In diesem Sinn werden sie im folgenden als Verteilung des stochastischen Prozesses bezeichnet.

Stochastische Prozesse können nun nach Art der endlichdimensionalen Verteilungen klassifiziert werden. Dazu bezeichnet  $f_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(x_1, \dots, x_n)$  die Dichtefunktion oder Wahrscheinlichkeitsfunktion der endlichdimensionalen Verteilung von  $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$ , wobei  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$  angenommen sei und  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  oder  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ .

Im einfachsten Fall fehlt jede Dynamik, das heisst, es gilt

$$f_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_{t_1}}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{X_{t_n}}(x_n).$$

Die Zufallsvariablen zu verschiedenen Zeitpunkten sind in diesem Fall unabhängig voneinander. Eine Realisierung eines solchen Prozesses zu einem bestimmten Zeitpunkt hängt nicht von denjenigen zu anderen Zeitpunkten ab. Der Prozess besitzt kein „Gedächtnis“. Gilt zusätzlich, dass  $f_{X_{t_i}}(x_i) = f_{X_t}(x)$  für alle  $i = 1, \dots, n$ , so handelt es sich um einen sogenannten *i.i.d. Prozess* (*i.i.d.* = identically and independently distributed). Handelt es sich darüber hinaus bei der eindimensionalen Verteilung um eine Normalverteilung mit Erwartungswert Null und Varianz  $\sigma^2$ , nennt man solch einen Prozess *weisses Rauschen*:

$$X_t \sim i.i.d. N(0, \sigma^2).$$

Nach den zeitlich unabhängigen Prozessen, ist die nächst einfache Klasse von Prozessen diejenige, die über eine Art „Kurzzeitgedächtnis“ verfügen, sogenannte *Markov-Prozesse*. Die Markov-Eigenschaft wird über eine Annahme für die bedingte Verteilung definiert:

$$f_{X_{t_n}}(x_n | x_{n-1}, \dots, x_1) = f_{X_{t_n}}(x_n | x_{n-1}).$$

Die Markov-Bedingung besagt, dass die Wahrscheinlichkeit einer Änderung von  $x_{n-1}$  auf  $x_n$  in der Zeitspanne  $t_n - t_{n-1}$  gerade nicht von früheren Zeitpunkten und den dort realisierten Werten des Prozesses abhängt. Die gesamte für die Zukunft relevante Information ist in der Gegenwart bereits vorhanden (vgl. Gardiner [50], S. 43, Honerkamp [58], S. 67).

Ein Markov-Prozess ist daher eindeutig durch  $f_{X_{t_1}}(x_1)$  und die bedingten Verteilungen bestimmt. Alle endlichdimensionalen Verteilungen lassen sich daraus konstruieren, so zum Beispiel für  $t_3 > t_2 > t_1$ :

$$f_{X_{t_1}, \dots, X_{t_3}}(x_1, \dots, x_3) = f_{X_{t_3}}(x_3 | x_2) f_{X_{t_2}}(x_2 | x_1) f_{X_{t_1}}(x_1)$$

(vgl. Gardiner [50], S. 43). Die eindimensionalen bedingten Verteilungen werden auch *Übergangswahrscheinlichkeiten* genannt.

Eine weitere wichtige Klasse von Prozessen sind die sogenannten (strikt) *stationären Prozesse*. Ein stochastischer Prozess  $X = (X_t, t \geq 0)$  heisst (strikt) stationär, wenn die endlichdimensionalen Verteilungen invariant unter Translationen in der Zeit sind, das heisst wenn  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  und  $(X_{t_1+\epsilon}, \dots, X_{t_n+\epsilon})$  für jede mögliche Wahl von  $t_1, \dots, t_n \in T$ ,  $n \geq 1$  und  $\epsilon$ , so dass  $t_1 + \epsilon, \dots, t_n + \epsilon \in T$ , dieselbe Verteilung besitzen (vgl. Mikosch [86], S. 29). Solche Verteilungen sind dann nur von Zeitdifferenzen  $t_i - t_j$  abhängig ( $i, j \in \mathbb{N}$ ).

#### 1.2.4 Der Wiener-Prozess

Der Wiener-Prozess gehört zwar in die Klasse der Markov-Prozesse, seine Bedeutung ist aber so herausragend, dass ihm ein eigener Abschnitt gebührt. So lässt sich jeder sogenannte *Diffusions-Prozess*, das heisst ein Prozess mit stetiger Trajektorie beziehungsweise stetigem Pfad, durch Wiener-Prozesse ausdrücken (vgl. Gardiner [50], S. 52 f.). Ebenso spielt er bei der Stochastischen Integration eine wichtige Rolle (vgl. Gardiner [50], S. 83 ff.). Schliesslich bildet er die Basis für die Entwicklung vieler Finanzmarktmodelle.

Da es sich beim Wiener-Prozess  $W = (W_t, t \geq 0)$  um einen Markov-Prozess handelt, genügt zu dessen Charakterisierung die Angabe der Übergangswahrscheinlichkeit

$$f_{W_{t_n}}(w_n | w_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_n - t_{n-1})}} e^{-\frac{(w_n - w_{n-1})^2}{2(t_n - t_{n-1})}} \quad (1.2)$$



mit  $t_n > t_{n-1}$  und der eindimensionalen Dichte

$$f_{W_t}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{w^2}{2t}}. \quad (1.3)$$

Dabei stellt  $f_{W_t}$  eine Verteilung dar, die für  $t \neq 0$  einer Normalverteilung mit Erwartungswert Null und Varianz  $t$  entspricht und für  $t \rightarrow 0$  gegen eine  $\delta$ -Funktion strebt.

Der Wiener-Prozess besitzt einige interessante Eigenschaften (vgl. Gardiner [50], S. 68 ff.). Zunächst ist der Wiener-Prozess nicht stationär. Die stetigen Pfade des Wiener-Prozesses sind nicht differenzierbar. Dies lässt sich wie folgt begründen. Eine zunächst als deterministisch angenommene Funktion  $W(t)$  ist differenzierbar in  $t$ , falls der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{W(t+h) - W(t)}{h}$$

existiert. Da es sich bei  $W$  um einen stochastischen Prozess handelt, lassen sich „nur“ Aussagen über Wahrscheinlichkeiten machen. Deshalb untersucht man die Wahrscheinlichkeit

$$P \left\{ \left| \frac{W_{t+h} - W_t}{h} \right| > k \right\}.$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist für den Wiener-Prozess gegeben durch

$$2 \int_{kh}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} e^{-\frac{w^2}{2h}} dw.$$

Für den Grenzübergang  $h \rightarrow 0$  gilt dann

$$P \left\{ \left| \frac{W_{t+h} - W_t}{h} \right| > k \right\} = 1.$$

Für beliebige Werte von  $k$  ist daher die Grösse  $\left| \frac{W_{t+h} - W_t}{h} \right|$  fast sicher grösser als dieser Wert, das heisst die Ableitung ist in jedem Punkt fast sicher unendlich und existiert damit fast sicher nicht.

Eine weitere wichtige Eigenschaft des Wiener-Prozesses ist die stochastische Unabhängigkeit der Änderungen oder Inkremente von  $W$ . Die gemeinsame Verteilung lässt sich wegen der Markov-Eigenschaft schreiben als

$$f_{W_{t_n}, \dots, W_{t_1}}(w_n, \dots, w_1) = \prod_{i=1}^{n-1} f_{X_{t_{i+1}}}(w_{i+1}|w_i) f_{X_{t_1}}(w_1)$$

und unter Verwendung der Übergangswahrscheinlichkeit (1.2) als

$$f_{W_{t_n}, \dots, W_{t_1}}(w_n, \dots, w_1) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{i+1} - t_i)}} e^{-\frac{(w_{i+1} - w_i)^2}{2(t_{i+1} - t_i)}} f_{X_{t_1}}(w_1).$$

Definiert man  $\Delta W_i \equiv W(t_i) - W(t_{i-1})$  als Änderung des Prozesses bei einer Zeitdifferenz  $\Delta t_i \equiv t_i - t_{i-1}$ , ist die gemeinsame Verteilung der einzelnen  $\Delta W_i$  durch

$$f_{\Delta W_{t_1}, \dots, \Delta W_{t_2}}(\Delta w_1, \dots, \Delta w_2) = \prod_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t_i}} e^{-\frac{\Delta w_i^2}{2\Delta t_i}} f_{X_{t_1}}(w_1)$$

gegeben. Somit ist die Bedingung für eine stochastische Unabhängigkeit erfüllt.

### 1.2.5 Prozesse mit Poisson-Sprüngen

Ein weiterer wichtiger nichtstationärer Markov-Prozess ist der sogenannte *Poisson-Prozess* (vgl. Gardiner [50], S. 75 f., Honerkamp [58], S. 72, Neftci [87], S. 149 ff., Shimko [106], S. 16 ff.). Er beschreibt das Auftreten von Sprüngen um einen gewissen Betrag zu bestimmten zufälligen Zeiten. Diese Sprünge führen dazu, dass die Trajektorie dieses Prozesses nicht mehr stetig ist und damit auf keinen Fall differenzierbar ist.

Ein stochastischer Prozess  $(X_t, t \in [0, \infty))$  heisst Poisson-Prozess, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:  $X_0 = 0$ , stationäre und unabhängige Inkremente  $X_t - X_{t-1}$  und  $X_t$  poissonverteilt für alle  $t > 0$  und  $\lambda > 0$ :

$$f_{X_t}(x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}. \quad (1.4)$$

Dies ist ein Modell dafür, dass im Zeitintervall  $[0, t]$  gerade  $x$  Ereignisse eintreten. Für die Übergangswahrscheinlichkeit ergibt sich:

$$f_{X_{t_2}}(x_2|x_1) = \begin{cases} \frac{(\lambda(t_2-t_1))^{(x_2-x_1)}}{(x_2-x_1)!} e^{-\lambda(t_2-t_1)} & \text{falls } x_2 \geq x_1 \\ 0 & \text{falls } x_2 < x_1 \end{cases} \quad (1.5)$$

mit  $x = 0, 1, \dots$  und  $t_2 > t_1$ .

### 1.2.6 Martingale im zeitkontinuierlichen Fall

Ein Begriff, der vor allem bei der Bewertung von Optionen eine wichtige Rolle spielt, ist derjenige des *Martingals*. Dieser Begriff wird an dieser Stelle für zeitkontinuierliche stochastische Prozesse eingeführt (vgl. Neftci [87], S. 102 ff. und Mikosch [86], S. 77 ff.).

Für die Definition eines Martingals muss zunächst der Begriff einer *Filtration* eingeführt werden. Dazu nimmt man an, dass  $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$  eine Menge von  $\sigma$ -Algebren eines Ergebnisraumes  $\Omega$  ist und dass alle  $\mathcal{F}_t$  Teilmengen einer grösseren  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}$  auf  $\Omega$  sind.

Die Menge  $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$  von  $\sigma$ -Algebren auf  $\Omega$  heisst Filtration, wenn

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \text{ für alle } 0 \leq s \leq t. \quad (1.6)$$

Eine Filtration kann daher als wachsende Menge von Informationen interpretiert werden.

Die Verknüpfung einer Filtration mit einem stochastischen Prozess ergibt sich folgendermassen. Ein stochastischer Prozess  $(X_t, t \geq 0)$  ist an eine Filtration  $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$  adaptiert, falls für die  $\sigma$ -Algebren  $\sigma(X_t)$  des Prozesses gilt:

$$\sigma(X_t) \subset \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \geq 0.$$

Der stochastische Prozess  $(X_t, t \geq 0)$  ist immer an die sogenannte *natürliche Filtration*, die durch den stochastischen Prozess selbst generiert wird, adaptiert:

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t).$$

Dies bedeutet, dass der stochastische Prozess nicht mehr Information trägt als die Filtration.

Damit kann nun die Martingaleigenschaft definiert werden. Ein stochastischer Prozess  $(X_t, t \geq 0)$  wird als zeitkontinuierliches Martingal bezüglich der Filtration  $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$  bezeichnet, wenn gilt:

1.  $E[X_t] < \infty$  für alle  $t \geq 0$ ,
2.  $(X_t, t \geq 0)$  ist adaptiert an die Filtration  $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ ,
3.  $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$  für alle  $0 \leq s \leq t$ .

Punkt 3 stellt in dieser Definition die zentrale Bedingung dar. Sie besagt, dass  $X_s$  die beste Prognose für  $X_t$  ist, gegeben  $\mathcal{F}_s$ . Ein Prozess, für den  $E[X_t | \mathcal{F}_s] > X_s$  für alle  $0 \leq s \leq t$  gilt, wird als *Submartingal*, ein Prozess, für den  $E[X_t | \mathcal{F}_s] < X_s$  für alle  $0 \leq s \leq t$  gilt, wird als *Supermartingal* bezeichnet.

Für die Definition zeitdiskreter Filtrationen und Martingale sei auf die Literatur verwiesen (vgl. Mikosch [86], S. 78 und S. 80):

### 1.2.7 Charakteristische Funktion

Die Momente einer Zufallsvariablen oder eines stochastischen Prozesses lassen sich durch Differenzieren der zugehörigen charakteristischen Funktion bestimmen.

Die charakteristische Funktion  $G(k, t)$  einer Zufallsvariablen  $X$  beziehungsweise stochastischen Prozesses  $(X_t, t \geq 0)$  mit zugehöriger Dichtefunktion  $f$  ist über

$$G(k, t) \equiv E[e^{ikX_t}] = \int e^{ikX_t} f_{X_t}(x) dx \quad (1.7)$$

definiert<sup>2</sup> (vgl. Honerkamp [58], S. 13 f., Gardiner [50], S. 32 f., Neftci [87], S. 298

---

<sup>2</sup> $i$  ist die imaginäre Einheit, das heisst  $i \in \mathbb{C}$ .

f.). Existieren alle Momente, kann man durch Entwickeln der Exponentialfunktion in eine Taylor-Reihe die charakteristische Funktion in

$$G(k, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} k^n E[X_t^n] \quad (1.8)$$

überführen. Ist die charakteristische Funktion bekannt, lässt sich das  $n$ -te Moment von  $X_t$  berechnen, indem die  $n$ -te Ableitung der charakteristischen Funktion an der Stelle  $k = 0$  ausgewertet wird:

$$\left. \frac{d^n G(k, t)}{dk^n} \right|_{k=0} = i^n E[X_t^n]. \quad (1.9)$$

### 1.2.8 Stochastische Differentialgleichungen

In der Darlegung stochastischer Konzepte in den vorhergehenden Abschnitten wurde in der Notation nicht zwischen zeitstetigen und zeitdiskreten Prozessen unterschieden. Eine Unterscheidung in der Notation erleichtert allerdings in den folgenden Abschnitten das Verständnis der Zusammenhänge. Deshalb wird zu folgender Notation übergegangen:  $X_t$  bezeichnet einen zeitdiskreten Prozess,  $X(t)$  bezeichnet einen zeitstetigen Prozess.

#### Einführung in stochastische Differentialgleichungen

Die Dynamik eines zeitstetigen stochastischen Prozesses  $X(t)$ , also die zeitliche Entwicklung dieses Prozesses, kann durch eine sogenannte *stochastische Differentialgleichung* beschrieben werden. Sie lautet in ihrer einfachsten Form

$$\frac{dX(t)}{dt} = \alpha(X(t), t) + \eta(t) \quad (1.10)$$

mit  $\eta(t) \sim i.i.d. N(0, \sigma^2)$ . Die zeitliche Änderung von  $X(t)$  setzt sich also zusammen aus einem deterministischen Teil  $\alpha(X(t), t)$ , wobei  $\alpha$  eine Funktion des Prozesses  $X(t)$  und der Zeit  $t$  ist, und einem stochastischen Prozess  $\eta(t)$ . Man kann sagen, dass der Prozess  $X(t)$  seinen Zufallscharakter über das weiße Rauschen  $\eta(t)$  erhält. Ohne diesen stochastischen Anteil würde es sich um eine deterministische Differentialgleichung handeln. Gleichung (1.10) lässt sich durch Trennung der Variablen überführen in

$$dX(t) = \alpha(X(t), t) dt + \eta(t) dt \quad (1.11)$$

und durch Integration über das Zeitintervall  $[t, t + dt]$  auf folgende Form bringen:

$$X(t + dt) - X(t) = \int_t^{t+dt} \alpha(X(t'), t') dt' + \int_t^{t+dt} \eta(t') dt'. \quad (1.12)$$

Die linke Seite dieser Gleichung wird definiert als  $dX(t) \equiv X(t + dt) - X(t)$ . Der Ausdruck  $dX(t)$  wird auch als *stochastisches Differential* bezeichnet. Das Integral

über  $\alpha(X(t), t)$  lässt sich näherungsweise darstellen als  $\alpha(X(t), t)dt$ . Schwierigkeiten bereitet hingegen das Integral über  $\eta(t)$ . Es handelt sich hierbei um ein sogenanntes *stochastisches Integral*. An dieser Stelle genügt es, das Integral als Grenzwert einer Summe zu betrachten, wobei die Art des Grenzwertes nicht genauer diskutiert werden soll (vgl. Gardiner [50], S. 83 ff.). Das Integral  $d\tilde{W}(t) \equiv \int_t^{t+dt} \eta(t') dt'$  ist dann als Summe normalverteilter Zufallsvariablen wieder normalverteilt. Für Erwartungswert und Varianz des Integrals  $d\tilde{W}(t)$  gilt (vgl. Honerkamp [58], S. 81):

$$\begin{aligned} E[d\tilde{W}(t)] &= 0, \\ \text{var}[d\tilde{W}(t)] &= \sigma^2 dt. \end{aligned}$$

Definiert man  $dW(t) \equiv \sigma^{-1}d\tilde{W}(t)$ , so ist  $dW(t) \sim i.i.d. N(0, dt)$  ein Wiener-Prozess und es ergibt sich

$$dX(t) = \alpha(X(t), t) dt + \sigma dW(t). \quad (1.13)$$

In dieser Form werden in der Regel stochastische Differentialgleichungen formuliert, hier für den einfachsten Fall eines konstanten Koeffizienten  $\sigma$ .

Die allgemeinste Form einer stochastischen Differentialgleichung mit einem Koeffizienten  $\sigma(X(t), t)$ , der vom Prozess selbst und explizit von der Zeit abhängt, lautet

$$\frac{dX(t)}{dt} = \alpha(X(t), t) + \sigma(X(t), t) \eta(t) \quad (1.14)$$

mit  $\eta(t) \sim i.i.d. N(0, 1)$  oder in Integralform

$$X(t + dt) - X(t) = \int_t^{t+dt} \alpha(X(t'), t') dt' + \int_t^{t+dt} \sigma(X(t'), t') \eta(t') dt'. \quad (1.15)$$

Hier trifft man nun auf ein komplizierteres stochastisches Integral über  $\eta(t)$ . Als approximativen Beitrag des Integrals für kleine  $dt$  kann man den Wert des Integranden am Anfang des Intervalls  $[t, t + dt]$  betrachten und ihn mit der Länge des Intervalls multiplizieren. Es ergibt sich

$$dX(t) = \alpha(X(t), t) dt + \sigma(X(t), t) \underbrace{\int_t^{t+dt} \eta(t') dt'}_{\equiv dW(t) \sim i.i.d. N(0, dt)}, \quad (1.16)$$

beziehungsweise

$$dX(t) = \alpha(X(t), t) dt + \sigma(X(t), t) dW(t). \quad (1.17)$$

In dieser Form werden sehr viele Modelle für die zeitliche Entwicklung von Aktienkursen, Zinssätzen oder auch anderer mikro- und makroökonomischen Größen formuliert. Der Term  $\alpha(X(t), t)$  wird als *Driftanteil* bezeichnet. Dies erklärt sich daraus, dass bei konstantem  $\alpha$  und bei fehlendem stochastischen Anteil  $dW(t)$ ,  $X(t)$  einfach linear mit der Zeit anwachsen würde. Der Faktor  $\sigma(X(t), t)$  wird als *Diffusionsanteil* bezeichnet.

Einige der wichtigsten stochastischen Differentialgleichungen als Modelle im Finanzbereich zusammen mit ihren Eigenschaften werden beispielsweise bei Shimko (vgl. Shimko [106]) diskutiert.

### Stochastische Differentialgleichungen mit Sprungkomponente

Stochastische Prozesse, bei denen sowohl kontinuierliche Änderungen in Form eines Wiener-Prozesses als auch diskrete Sprünge in Form eines Poisson-Prozesses auftreten, können ebenfalls durch eine stochastische Differentialgleichung beschrieben werden:

$$dX(t) = \alpha(X(t), t) dt + \sigma(X(t), t) dW(t) + \xi(X(t), t) dq(t). \quad (1.18)$$

$dq(t)$  bezeichnet hier die Sprungkomponente des Prozesses. Betrachtet man in Gleichung (1.5), welche die Übergangswahrscheinlichkeit eines Poisson-Prozesses angibt, kleine Zeitintervalle  $dt = t_2 - t_1$  und Änderungen des Prozesses um eine ganzzahlige Einheit, so lässt sich diese Übergangswahrscheinlichkeit näherungsweise schreiben als

$$f_{X_{t_2}}(x_2 = x_1 + 1 | x_1) = \lambda dt. \quad (1.19)$$

Der Parameter  $\lambda$  ist damit ein Mass für die Wahrscheinlichkeit eines Sprunges pro Zeiteinheit. Die Grösse  $dq(t)$  in Gleichung (1.18) ist dann eine Zufallsvariable, die einen Sprung um eine Einheit zum Zeitpunkt  $t$  beschreibt. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsvariablen ist gegeben durch

$$\begin{aligned} P(dq(t) = 1) &= \lambda dt \\ P(dq(t) = 0) &= (1 - \lambda) dt. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Im Falle eines Sprunges ändert sich der Prozess  $X(t)$  um den Betrag  $\xi(X(t), t)$ .

### Euler-Approximation

Stochastische Differentialgleichungen beschreiben die Zeitentwicklung von zeitstetigen Prozessen. Für eine direkte numerische Simulation eignen sie sich daher nicht. Unter Simulation wird in diesem Zusammenhang die Generierung einer diskreten Trajektorie als eine mögliche Realisierung des Prozesses verstanden. Es wird daher eine diskrete Approximation benötigt. Die einfachste Approximation dieser Art ist die sogenannte *Euler-Approximation* (vgl. Kloeden und Platen [72], S. 305 ff.). Ausgangspunkt bildet die allgemeine stochastische Differentialgleichung

$$dX(t) = \alpha(X(t), t) dt + \sigma(X(t), t) dW(t),$$

wobei  $dW(t) \sim i.i.d. N(0, dt)$ . Zunächst wird die Zeit vom Startpunkt  $t_0$  bis zum Endzeitpunkt  $T$  in  $N$  äquidistante Stücke  $\Delta t \equiv (T - t_0)/N$  eingeteilt. Es ergibt sich so eine Folge von äquidistanten Zeitpunkten  $t_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ). Als zeitdiskrete Approximation  $X_t$  für den zeitkontinuierlichen stochastischen Prozess  $X(t)$  schreibt man

$$X_{t+\Delta t} - X_t = \alpha(X_t, t) \Delta t + \sigma(X_t, t) \Delta W_t, \quad (1.21)$$

wobei  $\Delta W_t \sim i.i.d. N(0, \Delta t)$ . Für den Wert  $X_{t+\Delta t}$  des Prozesses zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$ , gegeben den Wert des Prozesses  $X_t$  zum Zeitpunkt  $t$ , ergibt sich

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \alpha(X_t, t) \Delta t + \sigma(X_t, t) \Delta W_t. \quad (1.22)$$

Mit dieser Gleichung lässt sich aus den bekannten Werten zum Zeitpunkt  $t$  und einer Realisierung einer normalverteilten Zufallsvariablen der Wert des Prozesses am darauffolgenden Zeitpunkt bestimmen. Stochastische Differentialgleichungen können so numerisch gelöst werden.

### 1.2.9 Itô's Lemma

Bisher wurden Änderungen  $dX(t)$  des stochastischen Prozesses in kleinen Zeitintervallen  $dt$  betrachtet. Wie aber werden Änderungen von Funktionen des stochastischen Prozesses beschrieben? Diese Frage ist zum Beispiel bei der Bewertung von Derivaten von Bedeutung. Der Wert eines Derivats hängt funktional von einem zugrundeliegenden Instrument ab. So hängt beispielsweise der Wert einer Aktienoption von der Kursentwicklung der zugehörigen Aktie ab. Wird dann die Kursentwicklung des zugrundeliegenden Instruments durch einen stochastischen Prozess beschrieben, ergibt sich der Wert des Derivats als Funktion des Wertes des stochastischen Prozesses.

Man betrachtet also eine Funktion  $f(X(t), t)$  in Abhängigkeit vom stochastischen Prozess  $X(t)$  und der Zeit  $t$ :

$$f(X(t), t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ausgangspunkt bildet die stochastische Differentialgleichung (1.17). Entwickelt man  $f$  in eine Taylor-Reihe um  $(X, t)$  (vgl. Bronstein und Semendjajew [20], S. 279): führt dies auf

$$\begin{aligned} df &= f(X + dX, t + dt) \\ &= \frac{\partial f}{\partial X} dX + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} (dX)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial t} dX dt + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 \right\} \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (1.23)$$

Für  $dX$  ist jeweils die stochastische Differentialgleichung (1.17) einzusetzen, was hier aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht explizit dargestellt wird. Die Summanden in Gleichung (1.23) werden nun auf ihre Ordnung bezüglich  $dt$  untersucht. Terme mit  $(dt)^n$  ( $n > 1$ ) werden vernachlässigt, da sie für kleine  $dt$  zu verschwindenden Beiträgen führen.

$dW$  ist als Wiener-Prozess normalverteilt und von der Ordnung  $\sqrt{dt}$ . Mit Wahrscheinlichkeit Eins gilt  $(dW)^2 \rightarrow dt$  für  $dt \rightarrow 0$ . Dies bedeutet, dass in

$$(dX)^2 \stackrel{(1.17)}{=} (\alpha dt)^2 + (\sigma dW)^2 + 2\alpha\sigma dW dt$$

der zweite Term dominiert:

$$(dX)^2 \approx \sigma^2(X(t), t) dt.$$

$dX dt = \alpha dt^2 + \sigma dW dt$  besitzt keine Beiträge der Ordnung  $dt$  und wird daher vernachlässigt.

Insgesamt ergibt sich damit als Entwicklung bis zur Ordnung  $dt$  die sogenannte *Itô-Formel* (vgl. Wilmott et al. [116], S. 26 ff., Shimko [106], S. 13 ff., Karatzas und Shreve [70], S. 149 ff., Honerkamp [58], S. 81):

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial X} \{ \alpha(X(t), t) dt + \sigma(X(t), t) dW(t) \} + \frac{\partial f}{\partial t} dt \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \sigma^2(X(t), t) dt. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Dieser Zusammenhang wird auch als Itô-Lemma bezeichnet.

Für den Prozess mit Poisson-Sprüngen (1.20) ergibt sich als Itô-Formel (vgl. Shimko [106], S. 18):

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial X} \{ \alpha(X(t), t) dt + \sigma(X(t), t) dW(t) \} + \frac{\partial f}{\partial t} dt \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \sigma^2(X(t), t) dt + \underbrace{[f(X + \xi, t) - f(X, t)]}_{\text{Änderung von } f \text{ bei Eintritt eines Sprunges}} dq(t). \end{aligned} \quad (1.25)$$

### 1.3 Renditen und Renditeverteilungen

Es sind fast immer Renditen und weniger Preise oder Kurse, die in der Finanzökonomie betrachtet und untersucht werden. Dafür lassen sich im wesentlichen zwei Gründe anführen, ein ökonomischer und ein mathematisch theoretischer Grund (vgl. Campbell et al. [26], S. 9 ff.).

Aus ökonomischer Sicht spricht folgendes Argument für die Betrachtung von Renditen. Renditegrößen sind als Verhältniszahlen dimensionslos, das heisst Anlagen in unterschiedlichen Währungen und in ganz unterschiedlichen Märkten und Produkten lassen sich direkt miteinander vergleichen.

Mathematisch gesehen sind es vor allem die statistischen Eigenschaften von Renditen, die dazu führen, dass sie den Preisen vorzuziehen sind. Zu diesen Eigenschaften zählt vor allem die Stationarität. So führen viele der dynamischen stochastischen Modelle, zum Beispiel auch der Wiener- und der Poisson-Prozess, zu nichtstationären Preisen,



aber zu stationären Renditen. Diese Stationaritätseigenschaft ist etwa bei der Parameterschätzung mit Hilfe der Maximum-Likelihood Methode wichtig.

Die folgenden Abschnitte setzen sich daher mit den verschiedenen Möglichkeiten auseinander, wie Renditegrößen definiert werden können, und welche Vor- und Nachteile mit der einen oder anderen Definition verbunden sind. Ebenso wird auf die Dichten beziehungsweise Verteilungen von Renditen eingegangen, vor allem auf den Unterschied zwischen unbedingter und bedingter Verteilung.

### 1.3.1 Einführung von Renditegrößen

Grundlage für die Berechnung von Renditegrößen bilden die Preise einer Anlage, etwa Aktienkurse zu verschiedenen Zeiten. Dieser Preis einer Anlage zum Zeitpunkt  $t$  sei im folgenden mit  $P_t$  bezeichnet.

Es gibt zwei Möglichkeiten, wie Renditen definiert werden können, zum einen als arithmetische Wachstumsraten oder relative Preisänderungen, zum anderen als geometrische Wachstumsraten oder logarithmische Preisänderungen.

#### Arithmetische Wachstumsraten

Die arithmetische Wachstumsrate oder relative Preisänderung  $R_t$  zwischen den Zeitpunkten  $t-1$  und  $t$  ist definiert als

$$R_t = R_{t-1,t} \equiv \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}. \quad (1.26)$$

Die so definierte Rendite  $R_t$  ist also eine dimensionslose Grösse, verlangt aber immer die Angabe des Zeithorizontes über den sie bestimmt wurde, zum Beispiel als Tages-, Monats- oder Jahresrendite.

Werden einzelne Renditen  $R_t$  einer Anlage über  $k$  Perioden derselben Länge aggregiert, ergibt sich

$$R_{t-k,t} \equiv \frac{P_t - P_{t-k}}{P_{t-k}}$$

oder ausgedrückt in Renditen der Einzelperioden

$$\begin{aligned} \frac{P_t - P_{t-k}}{P_{t-k}} &= \frac{P_t}{P_{t-k}} - 1 = \frac{P_t}{P_{t-1}} \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \cdot \dots \cdot \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}} - 1 \\ &= \left( \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} + 1 \right) \cdot \dots \cdot \left( \frac{P_{t-k+1} - P_{t-k}}{P_{t-k}} + 1 \right) - 1 \\ &= \left( \prod_{i=1}^k (R_{t-i+1} + 1) \right) - 1. \end{aligned}$$

Die Aggregation über mehrere Zeitperioden erweist sich also als eher mühsam.

Wird die Rendite eines Portfolios berechnet, das sich aus mehreren verschiedenen Anlagen zusammensetzt, so ist dies im Fall relativer Preisänderungen sehr einfach. Es ergibt sich bei  $N$  Anlagen und dem Gewicht  $w_i$  als relativem Wert der Anlage  $i$  ( $\sum_{i=1}^N w_i = 1$ ) als Portfoliorendite

$$R_{t,\text{Portfolio}} = \sum_{i=1}^N w_i R_t^i$$

mit den Einzelrenditen  $R_t^i$  ( $i = 1, \dots, N$ ).

### Geometrische Wachstumsraten

Die zweite Möglichkeit, eine Renditegrösse zu definieren, ist diejenige als geometrische Wachstumsrate oder logarithmische Preisänderung (oft auch als Log-Rendite bezeichnet):

$$r_t = r_{t-1,t} \equiv \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}. \quad (1.27)$$

Die arithmetischen Wachstumsraten lassen sich hieraus durch Taylor-Entwicklung der Logarithmusfunktion gewinnen. Eine Aggregation über  $k$  Einzelperioden erfolgt im Fall der Log-Renditen durch Summation der Einzelrenditen

$$\begin{aligned} r_{t-k,t} &= \ln \frac{P_t}{P_{t-k}} \\ &= \ln \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \cdots \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^k r_{t-i,t-i+1} \end{aligned}$$

und ist damit sehr viel einfacher auszuführen als bei relativen Preisänderungen. Dies ist als wesentlicher Vorteil der Log-Renditen zu betrachten.

Ein weiterer Vorteil der geometrischen Wachstumsraten besteht darin, dass aus vielen zeitstetigen Modellen für die Dynamik von Aktienkursen durch Anwendung der Itô-Formel die Dynamik der logarithmischen Preisänderungen, somit der Rendite, abgeleitet werden kann (vgl. beispielsweise Kapitel 4).

Nachteile des Konzeptes geometrischer Wachstumsraten treten bei der Bestimmung einer Portfoliorendite auf, da der Logarithmus einer Summe nicht gleich der Summe der Logarithmen ist. Für eine empirische Studie wie der vorliegenden ist dies aber von sekundärer Bedeutung.

Deshalb wird im folgenden nahezu ausschliesslich mit geometrischen Wachstumsraten beziehungsweise Log-Renditen gearbeitet.

### 1.3.2 Unbedingte und bedingte Renditeverteilungen

Im Hinblick auf eine Modellbildung ist der Unterschied zwischen unbedingter und bedingter Renditeverteilung von Bedeutung.

Betrachtet man beispielsweise eine Stichprobe von Renditen  $r_{it}$  für die Zeitpunkte  $t = 1, \dots, T$  und für insgesamt  $i = 1, \dots, N$  verschiedene Anlagen, so kann die gemeinsame Dichte  $f$  dieser Renditen allgemein formuliert werden durch

$$f(r_{11}, \dots, r_{N1}; \dots; r_{1T}, \dots, r_{NT} | \boldsymbol{\theta}) .$$

Der Vektor  $\boldsymbol{\theta}$  bezeichnet einen Parametervektor, falls die Verteilung der Renditen durch eine spezielle Familie von Verteilungen modelliert wird. Bei einer Normalverteilung wären diese Parameter der Erwartungswert und die Varianz. Der Parametervektor  $\boldsymbol{\theta}$  wird allerdings in der Regel unterdrückt.

Mit Hilfe von bedingten Verteilungen, im folgenden für eine einzelne Anlage  $i$ , kann die zeitliche Entwicklung, also die Dynamik von Renditen erfasst werden. So lässt sich die gemeinsame Verteilung nach dem Multiplikationssatz als Produkt von bedingten Verteilungen und der Verteilung der Rendite für  $t = 1$  schreiben:

$$\begin{aligned} f(r_{i1}, \dots, r_{iT}) &= f_{i1}(r_{i1}) \cdot f_{i2}(r_{i2} | r_{i1}) \\ &\cdot f_{i3}(r_{i3} | r_{i2}, r_{i1}) \\ &\cdot \dots \\ &\cdot f_{iT}(r_{iT} | r_{iT-1}, \dots, r_{i1}) , \end{aligned}$$

wobei die Dichten  $f_{it}$  für verschiedene Zeitpunkte  $t = 1, \dots, T$  verschieden sein dürfen. Je nach Annahme oder Struktur der bedingten Verteilungen ergeben sich unterschiedliche Dynamiken. Vergleiche hierzu auch die Diskussion der stochastischen Prozesse, beispielsweise von Markov-Prozessen (vgl. Abschnitt 1.2.3).

Sind die Renditen  $r_{it}$  zeitlich unabhängig, so ist  $f_{it} = f_i \forall t$  und unbedingte und bedingte Dichtefunktion sind identisch:

$$f_{it}(r_{it} | r_{it-1}, r_{it-2}, \dots, r_{i1}) = f_i(r_{it}) .$$

Die unbedingte Dichte oder Verteilung von Renditen erhält man empirisch durch Schätzen (parametrisch oder nicht parametrisch) der Dichte anhand einer gegebenen Stichprobe von historischen Daten. Die bedingte Verteilung erhält man nur dadurch, dass ein Modell für die zeitliche Entwicklung der Renditen vorgegeben wird (vgl. Campbell et al. [26], S. 14, Hsieh [59]).



## Kapitel 2

# Annahmen über Renditeverteilungen und empirische Befunde

Jede Modellbildung geht, da es sich um eine vereinfachende Abbildung der Realität handelt, von einer oder mehreren Annahmen über den Untersuchungsgegenstand aus. Dies ist auch bei Finanzmarktmodellen nicht anders. In der Regel beziehen sich diese Annahmen auf die Art der Verteilung von Renditen und/oder auf die zeitliche Dynamik von Aktienkursen, Währungen, Zinsen oder ähnlichem. Es spielt keine Rolle, ob ein Modell explizit formuliert wird, etwa eine spezielle Verteilung für Renditen unterstellt wird, oder eine Modellbildung implizit erfolgt, indem zum Beispiel angenommen wird, dass eine empirische Verteilung historischer Renditen als gute Approximation für eine zukünftige Zeitperiode betrachtet werden kann. Im folgenden stehen Annahmen expliziter Modelle im Vordergrund, da in dieser Arbeit solche Modelle zur Beschreibung von Finanzmarktdaten verwendet werden.

Eine Untersuchung über Finanzmarktmodelle setzt daher eine Untersuchung über die den Modellen zugrundeliegenden Annahmen voraus. Dies wird Inhalt dieses Kapitels sein. Im ersten Abschnitt werden die häufigsten Annahmen über Finanzmarktdaten erläutert und diskutiert. Daran schliesst sich ein Abschnitt über statistische Testverfahren zur Überprüfung dieser Annahmen an. Schliesslich wird im dritten Abschnitt eine empirische Untersuchung für den schweizerischen Aktienmarkt durchgeführt.

### 2.1 Annahmen über Renditeverteilungen

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Annahmen über Finanzmarktdaten vorgestellt und kritisch diskutiert.

### 2.1.1 Probleme bei Finanzmarktzeitreihen

Zeitreihen von Finanzmarktdaten weisen gegenüber Zeitreihen wie sie in den naturwissenschaftlichen Disziplinen, etwa in der Physik, untersucht werden, einige gravierende Nachteile auf. Werden zum Beispiel Daten auf täglicher Basis erhoben, so liefert selbst ein Zeitraum von 100 Jahren nur circa 25000 Datenpunkte. Dies ist vergleichsweise wenig, zudem sind diese täglichen Daten durch Wochenenden und Feiertage unterbrochen. Bei naturwissenschaftlichen Experimenten ist dagegen eine fast kontinuierliche Beobachtung möglich. Naturwissenschaftliche Messungen können zudem wiederholt werden, eine Finanzmarktzeitreihe wird dagegen nur ein einziges Mal generiert und kann daher auch nur ein einziges Mal beobachtet werden.

Weiterhin existieren bei Finanzmarktzeitreihen Strukturbrüche, da sehr viele äussere Einflüsse auf den Wert zum Beispiel einer Aktie einwirken. Es sind nicht nur die Entwicklungen auf dem Aktienmarkt zu berücksichtigen, sondern das Verhalten von Aktienmärkten wird durch andere Märkte, durch viele andere makroökonomische Variablen und durch politische Entscheidungen beeinflusst. In naturwissenschaftlichen Untersuchungen werden die Versuchsbedingungen dagegen konstant gehalten.

Die angeführten Gründe machen deutlich, dass bei Finanzmarktdaten eine Modell- und Hypothesenbildung auf Schwierigkeiten stösst, Modellannahmen und Hypothesen daher auch schwer zu überprüfen sind.

### 2.1.2 Hypothese unabhängig und identisch verteilter Renditen

Eine der bekanntesten und am häufigsten getroffenen Annahmen über Finanzmarktdaten ist diejenige, dass Renditen zeitlich unabhängig und identisch verteilt sind (vgl. Campbell et al. [26], S. 33 ff., Duffie und Pan [37], S. 10). Diese Annahme wurde bereits im Jahre 1900 von Louis Bachelier [3] getroffen.

Eine der wichtigsten Konsequenzen dieser Annahme ist die Gleichheit von bedingter und unbedingter Dichtefunktion der Renditen. Diese Annahme ermöglicht es, mit der Maximum-Likelihood-Methode Parameterschätzungen anhand historischer Daten durchzuführen, worin ein wesentlicher Vorteil der *i.i.d.*-Annahme zu sehen ist. Für die ersten beiden Momente einer Renditeverteilung impliziert die *i.i.d.*-Annahme, dass diese zeitunabhängig sind.

Gegen die Annahme unabhängig und identisch verteilter Renditen wird eine ganze Reihe von Argumenten ins Feld geführt. Eines der bekanntesten dieser Argumente ist das sogenannte *Volatilitätsclustering* (vgl. J. P. Morgan [65], S. 55 f.). Darunter versteht man das verstärkte Auftreten sehr grosser Renditeschwankungen, also volatiler Kurse, in bestimmten Zeitperioden, während in anderen Zeitabschnitten nur geringe Schwankungen zu beobachten sind. Es entstehen also zeitliche Cluster hoher beziehungsweise niedriger Volatilitäten. Solches Volatilitätsclustering führt dazu, dass

die Standardabweichung, die als Masszahl für Volatilität oder Schwankung verwendet wird, als zeitabhängig oder heteroskedastisch zu betrachten ist. Dies spricht gegen die identische Verteilung der Renditen. Um Volatilitätsclustering empirisch zu beobachten, wird in der Regel ein Plot der Renditen gegen die Zeit verwendet. Solche Darstellungen sind allerdings mit Skepsis zu betrachten. Die Cluster sind nämlich nicht nur schwierig zu identifizieren, sondern ob sie überhaupt sichtbar sind, hängt sehr stark von der Wahl der Achsenskalierung ab.

Ein weiteres Argument gegen identisch verteilte Renditen, vor allem wenn sich diese Annahme auf sehr lange Zeiträume erstreckt, ist das folgende: Finanzmärkte agieren nicht unabhängig, sondern sie sind eingebettet in einen sehr viel grösseren Kontext. Wandel im ökonomischen, technologischen, rechtlichen und sozialen Umfeld übt deshalb einen Einfluss auf die Kursentwicklung und damit auf die Verteilung der Renditen aus.

Gegen die zeitliche Unabhängigkeit von Renditen spricht überdies ein empirisch zu beobachtendes Phänomen. So sind Renditen zeitlich zwar oft unkorreliert, dies bedeutet jedoch nicht, dass sie unabhängig sind, denn es ist ebenso zu beobachten, dass die quadrierten Renditen oder der Absolutbetrag der Renditen eine zeitliche Korrelation aufweisen. Dies ist ein Hinweis auf Abhängigkeit (vgl. J. P. Morgan [65], S. 56 ff.).

### 2.1.3 Tail-Verhalten von Renditeverteilungen

Eine weitere oft getroffene Annahme ist, dass Log-Renditen normalverteilt sind. Auch diese Annahme geht auf Bachelier zurück. Empirisch wird in der Regel allerdings beobachtet, dass die unbedingte Dichte von Renditen im Vergleich zur Normalverteilung *fat-tailed* oder *heavy-tailed* ist, das heisst, dass sich in den Enden der Verteilung mehr Wahrscheinlichkeitsmasse konzentriert als dies bei einer Normalverteilung der Fall ist (vgl. Bryson [22], S. 598 ff.).

Ein mögliches Kriterium zur Charakterisierung einer fat-tailed Verteilung ist die Nichtexistenz einer endlichen Varianz. Darüber hinaus existieren in der Literatur weitere Versuche, eine Verteilung bezüglich ihres Tail-Verhaltens zu klassieren (vgl. Bryson [22], S. 598 ff.).

Bei empirischen Studien wird oft als Kriterium zur Identifikation einer heavy-tailed Verteilung die Kurtosis geschätzt (vgl. Duffie und Pan [37], S.11, Hull und White [61], S.11). Eine höhere Kurtosis als der Wert Drei, dem Wert der eine Normalverteilung charakterisiert, soll dann eine Verteilung mit breiten Enden identifizieren. Verteilungen mit einer Kurtosis über Drei werden im allgemeinen als *leptokurtisch* bezeichnet. Bei der Verwendung der Kurtosis zur Charakterisierung des Tail-Verhaltens wird allerdings übersehen, dass eine heavy-tailed Verteilung zwar auch leptokurtisch ist, der Umkehrschluss aber nicht zwingend ist. Es wird daher in Abschnitt 2.2.4 eine explorative Methode vorgestellt, die es erlaubt, zwischen einer light-tailed und eine heavy-tailed Verteilung zu differenzieren.

Typischer Vertreter der Klasse der light-tailed Verteilungen ist die Normalverteilung. Verteilungen, die einen breiteren Tail als die Normalverteilung aufweisen, allerdings eine endliche Varianz besitzen, werden als *semi-fat-tailed* bezeichnet.

### 2.1.4 Nichtlinearitäten und deterministisches Chaos

Dieser Abschnitt greift die in Kapitel 1.1 geführte Diskussion über die Natur von Renditen auf. Bisher wurde in dieser Arbeit unterstellt, dass es sich bei Renditen um zeitabhängige Zufallsvariablen, also um stochastische Prozesse handelt.

Als Alternative zu einer stochastischen Beschreibung von Zeitreihen von Wirtschaftsdaten kann auch versucht werden, deren Dynamik durch ein deterministisches und lineares System zu beschreiben. Es handelt sich dabei um ein System, bei dem der funktionale Zusammenhang zwischen Werten des Untersuchungsgegenstandes zu verschiedenen Zeitpunkten linear und deterministisch ist. Da Wirtschaftszeitreihen durch solche Systeme allerdings oft nicht realistisch abgebildet werden, werden zusätzlich stochastische Einflüsse zugelassen, die für eine irreguläre Überlagerung ansonsten linearer Zusammenhänge sorgen. Solch ein Vorgehen ist zum Beispiel aus der Theorie der Wirtschaftszyklen bekannt (vgl. Lorenz [77], S. 222 ff.).

Sogenannte *deterministisch chaotische Systeme* können als weitere Möglichkeit zur Erklärung und Beschreibung von Wirtschaftszeitreihen, insbesondere von Finanzmarktzeitreihen, dienen. Diese Art der Beschreibung verfolgt einen deterministischen Ansatz. Bestimmte Konstellationen lassen es jedoch zu, dass ein System völlig irreguläres Verhalten zeigen kann, wie es bei beobachtbaren Finanzmarktdaten oft der Fall zu sein scheint. Chaotisches Verhalten in deterministischen Systemen tritt vor allem dann auf, wenn die Systeme nichtlineare Zusammenhänge aufweisen.

Soll solch ein Verhalten in Zeitreihen von Finanzmarktdaten detektiert werden, so stellen sich dieselben Probleme, wie sie in Abschnitt 2.1.1 schon erwähnt wurden. Der Hauptnachteil ist darin zu sehen, dass die Zeitreihen zu kurz sind, also zu wenige Daten zur Verfügung stehen.

Einige empirische Untersuchungen haben versucht, chaotisches Verhalten in Wirtschaftszeitreihen zu entdecken. Einen Überblick hierüber gibt Lorenz (vgl. [77], S. 222 ff.). Es kann nicht ausgeschlossen werden, dass mikro- und makroökonomische Zeitreihen solch ein Verhalten zeigen. Dabei sind Finanzmarktdaten per se keine bessere Kandidaten für chaotisches Verhalten. Selbst wenn Chaos nicht entdeckt werden kann, gibt es oft Anzeichen für niedrig dimensionale Nichtlinearitäten in vielen ökonomischen Zeitreihen (vgl. auch Campbell et al. [26], Kapitel 12, Chen et al. [27], Hsieh [59], Malliaris und Stein [82]). Lorenz fordert vor dem Hintergrund der geringen Datenbasis daher die Entwicklung zusätzlicher empirischer Tests zur Identifizierung von chaotischem Verhalten.



Krämer und Runde [74] stellen sogar die Hypothese auf, dass ein Grossteil des bisher entdeckten chaotischen Verhaltens in Finanzmarktzeitreihen nur darauf zurückzuführen ist, dass zum Beispiel Aktienkurse nur in diskreten Einheiten, sogenannten *Ticks*, gehandelt werden können (zum Beispiel CHF 0,10 oder CHF 1,-).

## 2.2 Statistische Tests zur Überprüfung der Annahmen

### 2.2.1 Brock–Dechert–Scheinkman–Test

Der Brock–Dechert–Scheinkman–Test (BDS–Test) wurde mit der Intention entwickelt, auf *i.i.d.* zu testen. So entdeckt der BDS–Test viele Abweichungen von dieser Annahme wie Nichtstationarität und deterministisches chaotisches Verhalten (vgl. Brock et al. [19], S. 52 ff.).

Die Nullhypothese  $H_0$  des BDS–Tests lautet: die Renditen sind unabhängig und identisch verteilt. Der Grundgedanke besteht nun darin, eine Testgrösse zu konstruieren, die unter  $H_0$  asymptotisch normalverteilt ist, um damit die Nullhypothese überprüfen zu können.

Für die nachfolgenden Überlegungen geht man davon aus, dass  $n$  Beobachtungen  $x_1, \dots, x_n$  einer Zeitreihe  $\{x_t\}$  vorliegen. Zusätzlich wird eine *Einbettungsdimension*  $m \in \mathbb{N}$  ( $m < n$ ), und ein beliebiger aber fester Abstand  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$  benötigt. Die Zeitreihe  $\{x_t\}$  wird nun in einen  $m$ -dimensionalen Raum durch Bildung von sogenannten *m-histories*

$$\mathbf{x}_t^m \equiv (x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+m-1}), \quad t = 1, \dots, n - m + 1$$

eingebettet (vgl. Brock et al. [19], S. 15 und S. 42). Diese Einbettung erlaubt die Definition des Korrelationsintegrals.

Das Korrelationsintegral  $C_m(\epsilon)$  ist definiert durch

$$C_m(\epsilon) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} C_{m,n}(\epsilon) \quad (2.1)$$

(vgl. Campbell et al. [26], S. 477), wobei

$$C_{m,n}(\epsilon) = \frac{2}{(n-m)(n-m+1)} \sum_{s=1}^{n-m} \sum_{t=s+1}^{n-m+1} I_m(x_s, x_t, \epsilon) \quad (2.2)$$

mit

$$I_m(x_s, x_t, \epsilon) = \prod_{k=0}^{m-1} I(x_{s+k}, x_{t+k}, \epsilon)$$

und

$$I(x_s, x_t, \epsilon) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |x_s - x_t| < \epsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die einzelnen Grössen können anschaulich interpretiert werden. Die Grösse  $I(\cdot)$  misst, ob zwei Beobachtungswerte räumlich nahe beieinander liegen.  $I_m(\cdot)$  ist genau dann gleich Eins, wenn zwei  $m$ -histories  $(x_s, x_{s+1}, \dots, x_{s+m-1})$  und  $(x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+m-1})$  einen Abstand kleiner  $\epsilon$  voneinander besitzen. Die Funktion  $C_{m,n}(\epsilon)$  misst schliesslich den Anteil der Punktepaare  $(\mathbf{x}_t^m, \mathbf{x}_s^m)$ , die weniger als den Abstand  $\epsilon$  voneinander entfernt liegen.

Das Korrelationsintegral  $C_m(\epsilon)$  kann daher als die Wahrscheinlichkeit interpretiert werden, dass zwei  $m$ -histories einen Abstand kleiner  $\epsilon$  voneinander besitzen.  $C_{m,n}(\epsilon)$  ist somit eine Schätzfunktion für das Korrelationsintegral.

Für die Konstruktion einer Testgrösse des BDS-Tests ist der folgende Zusammenhang von Bedeutung (vgl. Brock et al. [19], S. 16). Sind die Elemente einer Zeitreihe  $\{x_t\}$  *i.i.d.*, dann gilt

$$C_m(\epsilon) = [C_1(\epsilon)]^m \quad (2.3)$$

für alle festen  $m$  und  $\epsilon$ . Die Umkehrung dieses Zusammenhangs gilt nicht. Das heisst, gilt zwar  $C_m(\epsilon) = [C_1(\epsilon)]^m$ , dann folgt daraus nicht unbedingt die *i.i.d.*-Eigenschaft. Beispiele hierfür sind aber von sehr pathologischer Natur (vgl. Hsieh [59], Fussnote 7).

Der in Gleichung (2.3) formulierte Zusammenhang motiviert nun die Betrachtung der Grösse  $\sqrt{n}\{C_{m,n}(\epsilon) - [C_{1,n}(\epsilon)]^m\}$  als Grundlage für eine Test-Statistik zur Überprüfung der *i.i.d.*-Hypothese. Es gilt (vgl. Brock et al. [19], S. 42 ff.): unter der *i.i.d.*-Hypothese ist die BDS-Statistik

$$W_{m,n} = \frac{\sqrt{n}\{C_{m,n}(\epsilon) - [C_{1,n}(\epsilon)]^m\}}{\sigma_{m,n}(\epsilon)} \quad (2.4)$$

asymptotisch standardnormalverteilt.  $\sigma_{m,n}$  ist ein Schätzer für die asymptotische Standardabweichung von  $C_{m,n}(\epsilon) - [C_{1,n}(\epsilon)]^m$  und wird folgendermassen bestimmt:

$$\begin{aligned} \sigma_{m,n}^2(\epsilon) &= 4 \left\{ [K(\epsilon)]^m + 2 \sum_{j=1}^{m-1} [K(\epsilon)]^{m-j} [C(\epsilon)]^{2j} \right. \\ &\quad \left. + (m-1)^2 [C(\epsilon)]^{2m} - m^2 K(\epsilon) [C(\epsilon)]^{2m-2} \right\}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

wobei

$$\begin{aligned} K_n(\epsilon) &= \frac{6}{(n-m-1)(n-m)(n-m+1)} \cdot \\ &\quad \sum_{r=1}^{n-m-1} \sum_{s=r+1}^{n-m} \sum_{t=s+1}^{n-m+1} I_m(x_r, x_s, \epsilon) I_m(x_s, x_t, \epsilon). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Für die Anwendung der BDS-Statistik ist eine geeignete Wahl für  $m$  und  $\epsilon$  zu treffen (vgl. Brock et al. [19], S. 48 ff.). Der Wert für  $\epsilon$  sollte zwischen 0.5 und 2.0 mal der

Standardabweichung liegen. Für  $m$  sollte  $2 \leq m \leq 5$  gelten, bei einer Stichprobe von mehr als  $n = 500$  Beobachtungen, wobei  $n/m > 200$  gelten sollte, da sonst nicht genügend sich überlappende  $m$ -histories existieren.

### 2.2.2 Recurrence Plot

Beim *Recurrence Plot* handelt es sich um ein zweidimensionales graphisches Verfahren zur Entdeckung von strukturellen Änderungen in den zu untersuchenden Daten, wie zum Beispiel Volatilitätsclustering (vgl. Brock et al. [19], S. 87 f.). Das Konzept dieses graphischen Verfahrens ist eng mit den Ideen des BDS-Tests verwandt.

Werden mit  $t$  und  $s$  zwei Zeitperioden bezeichnet, so wird ein Punkt  $(t, s)$  im  $t$ - $s$ -Koordinatensystem gezeichnet, wenn für die zwei zugehörigen  $m$ -histories  $\mathbf{x}_t^m$  und  $\mathbf{x}_s^m$  und einem beliebig vorgegebenen Abstand  $\epsilon$  gilt:

$$\|\mathbf{x}_t^m - \mathbf{x}_s^m\|_\infty < \epsilon.$$

Für die Wahl der Parameter  $m$  und  $\epsilon$  sind die Ausführungen in 2.2.1 analog anzuwenden.

Beim Recurrence Plot ergeben sich dunkle und helle Flächen, die in der Regel symmetrisch zur Diagonalen liegen. Bei den dunklen Flächen erscheinen viele der räumlich nahe beieinander liegenden Punkte in einem kurzen Zeitintervall, bei den hellen Flächen erscheinen dagegen weit entfernte Punkte in einem kurzen Zeitintervall. Das Auftreten von abwechselnden dunklen und hellen Flächen zeigt eine Verletzung der *i.i.d.*-Annahme an.

Zwischen dem Recurrence Plot und dem Korrelationsintegral besteht eine enge Beziehung. Sind nämlich die Elemente einer Zeitreihe  $\{x_t\}$  *i.i.d.*, dann ist die Wahrscheinlichkeit für einen Punkt bei  $(t, s)$  gerade das Korrelationsintegral  $C_m(\epsilon)$ . Bei Vorliegen einer *i.i.d.*-Zeitreihe ist dann die Wahrscheinlichkeit für einen Punkt bei  $(t, s)$  für alle  $t$  und  $s$  gleich gross. Als Plot ergibt sich eine gleichmässig geschwärmte Fläche. Mit dem Recurrence Plot lassen sich aber auch Aussagen über die Art einer Verletzung der *i.i.d.*-Annahme machen:

1. Folgt aus einer Darstellung des Punktes  $(t, s)$ , dass der Punkt  $(t+1, s+1)$  mit hoher Wahrscheinlichkeit gezeichnet wird, dann macht sich dies in der graphischen Darstellung durch Linien parallel zur Diagonalen bemerkbar. Dies impliziert, dass räumlich nahe beieinander liegende Punkte für die Prognose zukünftiger Werte dienen können.
2. Liegt der Zeitreihe ein Trend zugrunde, so läuft die Darstellung „aus der Diagonalen“.
3. Phasen reduzierter Volatilität führen zu dunklen Quadraten. Dies kann als Indikator für Volatilitätsclustering verwendet werden.

4. Ein abrupter Wechsel in der Dynamik des die Zeitreihe generierenden Prozesses führt im Recurrence Plot zu einem abrupten Wechsel zwischen helleren und dunkleren Flächen. So können strukturelle Änderungen in den Daten detektiert werden.

### 2.2.3 Autokorrelationen und Q-Statistiken

Aussagen über zeitliche Korrelationen und Abhängigkeiten von Elementen einer Zeitreihe lassen sich auch durch die Schätzung der Autokorrelationsfunktion und die Auswertung der Q-Statistiken gewinnen (vgl. Campbell et al. [26], S. 44 ff., Hartung [55], S. 675 ff.).

Die Autokovarianzfunktion der Ordnung  $k$  einer Zeitreihe  $\{x_t\}$  ist definiert durch

$$\gamma(k) \equiv \text{cov}[x_t, x_{t+k}], \quad (2.7)$$

wobei  $k$  auch als *Time Lag* bezeichnet wird. Aus der Autokovarianzfunktion ergibt sich durch Normierung die Autokorrelationsfunktion der Ordnung  $k$ :

$$\rho(k) \equiv \frac{\text{cov}[x_t, x_{t+k}]}{\text{var}[x_t]} = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}. \quad (2.8)$$

Bei gegebener Stichprobe  $x_1, \dots, x_n$  werden Autokovarianz- und Autokorrelationsfunktion geschätzt durch

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x}), \quad (2.9)$$

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2}, \quad (2.10)$$

wobei der Erwartungswert von  $X$  als arithmetisches Mittel  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_t$  geschätzt wird und  $0 \leq k \leq n$ . Für den Time Lag  $k = 0$  gilt  $\hat{\rho}(0) = 1$ .

Zeigt eine graphische Darstellung der Autokorrelationsfunktion als Funktion des Time Lags nur für kleine  $k$  nicht verschwindende Funktionswerte, kann auf eine Unkorreliertheit der Daten geschlossen werden. Auch wenn aus Unkorreliertheit nicht Unabhängigkeit folgt, können auf Grundlage der Autokorrelationsfunktion Hinweise auf eine solche Unabhängigkeit abgeleitet werden. Wird bei Finanzdaten nicht nur die Autokorrelationsfunktion der Renditen, sondern auch diejenige der quadrierten Renditen oder des Absolutbetrages geschätzt, so ist das Nichtverschwinden dieser Autokorrelationen selbst bei verschwindender Autokorrelation der einfachen Renditen ein Indiz für eine Abhängigkeit der Daten (vgl. J. P. Morgan [65], S. 56 ff.).

Handelt es sich beim Schätzen der Autokorrelationsfunktion weitestgehend um ein Verfahren, bei dem versucht wird, durch eine graphische Darstellung der Autokorrelationsfunktion Rückschlüsse auf eine Korreliertheit der Daten zu ziehen, ist die

*Portemanteau-Statistik* oder *Q-Statistik* ein Test über die Nullhypothese, dass *alle* Autokorrelationen Null sind (vgl. Campbell et al. [26], S. 47).

Die Q-Statistik von Box-Pierce ist bei einem Stichprobenumfang  $n$  definiert durch

$$Q_m = n \sum_{k=1}^m \rho^2(k). \quad (2.11)$$

Unter der Nullhypothese ist der Schätzer  $\hat{Q}_m = n \sum_{k=1}^m \hat{\rho}^2(k)$  asymptotisch  $\chi^2$ -verteilt mit  $m$  Freiheitsgraden. Dabei bezeichnet  $m$  die Anzahl Time Lags, die in die Berechnung der Testgrösse eingeht. Die Nullhypothese ist bei einem Signifikanzniveau  $\alpha$  zu verwerfen, falls  $\hat{Q}_m > \chi_{m,1-\alpha}^2$ , wobei  $\chi_{m,1-\alpha}^2$  das  $(1 - \alpha)100\%$ -Quantil der  $\chi^2$ -Verteilung mit  $m$  Freiheitsgraden bezeichnet.

Für kleine Stichprobenumfänge wird die Q-Statistik von Box-Ljung verwendet:

$$Q'_m = n(n+2) \sum_{k=1}^m \frac{\rho^2(k)}{n-k}. \quad (2.12)$$

Unter der Nullhypothese ist die Schätzung  $\hat{Q}'_m$  wieder  $\chi^2$ -verteilt mit  $m$  Freiheitsgraden.

Q-Statistiken eignen sich dazu, Abweichungen von der Hypothese verschwindender Autokorrelationen in jeder Richtung und für alle Time Lags zu entdecken. Allerdings ist die Festlegung der Anzahl  $m$  von Time Lags, die berücksichtigt werden sollen, sorgfältig abzuwägen. Ist  $m$  zu klein, so besteht die Gefahr, dass bestehende Korrelationen höherer Ordnung eventuell unberücksichtigt bleiben. Werden dagegen zu viele Autokorrelationen verwendet, so hat der Test aufgrund nicht signifikanter Autokorrelationen höherer Ordnung eventuell nur eine geringe Aussagekraft. In der Regel wird in empirischen Studien für  $m$  ein Wert zwischen 10 und 15 gewählt.

Ebenso wie bei den Autokorrelationsfunktionen, kann eine Anwendung der Q-Statistik auf quadrierte Renditen oder auf den Absolutbetrag der Renditen Hinweise auf eine Abhängigkeit der Daten liefern.

#### 2.2.4 Excessfunktion

Bei der Schätzung der *Excessfunktion* handelt es sich um eine explorative Methode, um das Tail-Verhalten einer Verteilung zu beurteilen (vgl. Embrechts et al. [43], S. 294 ff., Emmer et al. [45]). Diese Methode wurde für positive Daten entwickelt. Um sie auf den linken Teil einer Renditeverteilung, also auf in der Regel negative Renditen anwenden zu können, wird von diesen Renditen der Absolutbetrag genommen. Eine Stichprobe des Absolutbetrages solcher Renditen sei durch  $x_1, \dots, x_n$  gegeben.

Die Excessfunktion ist definiert durch

$$e(u) \equiv E[x - u | x > u], \quad (2.13)$$

wobei  $u \geq 0$  den sogenannten *Schwellenwert* bezeichnet. Ein Schätzer für die Excessfunktion in Abhängigkeit des Schwellenwertes ist gegeben durch

$$\hat{e}_n(u) = \frac{1}{\#\{i : x_i > u, i = 1, \dots, n\}} \sum_{i=1}^n \max(x_i - u, 0). \quad (2.14)$$

Durch Auftragen von  $\hat{e}_n(u)$  als Funktion von  $u$  kann zwischen heavy- und light-tailed Verteilungen differenziert werden. Für eine Exponentialverteilung, die den Übergang zwischen einer light-tailed und einer heavy-tailed Verteilung darstellt, ist die Excessfunktion eine Konstante, nämlich gerade der Parameter der Exponentialverteilung. Eine Verteilung mit einem leichteren Tail als derjenige der Exponentialverteilung besitzt für wachsende  $u$  eine gegen Null fallende Excessfunktion. Die Excessfunktion einer Verteilung, die heavy-tailed ist, strebt hingegen gegen unendlich.

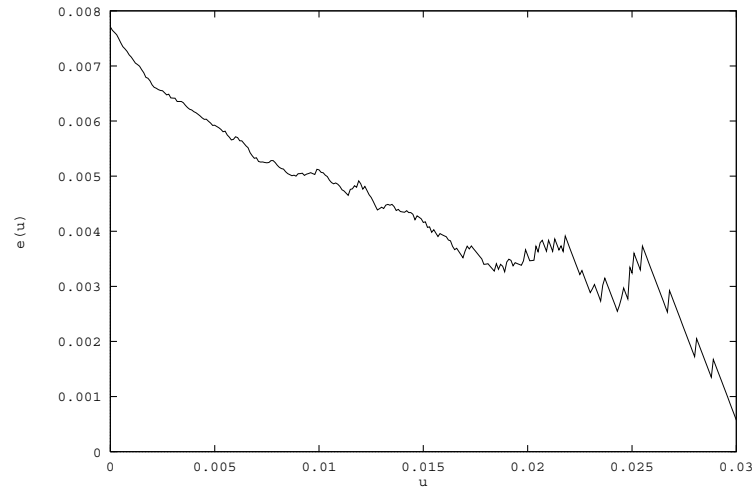


Abbildung 2.1: Excessfunktion von normalverteilten Renditen.

Abbildung 2.1 zeigt zur Illustration den Verlauf der Excessfunktion von 2000 simulierten normalverteilten Renditen mit Erwartungswert  $\mu = 0.0000$  und Varianz  $\sigma^2 = 0.0001$ .

### 2.2.5 Compass Rose

Wie bereits bei der Diskussion um das Vorliegen von chaotischem Verhalten in Finanzdaten erwähnt (vgl. Abschnitt 2.1.4), vermuten Krämer und Runde [74], dass viele Indizien für solches Verhalten in Wahrheit nur davon herrühren, dass an den Börsen Kurse nur in diskreten Einheiten (Ticks), gehandelt werden können. Diese Tatsache führt beim Auftragen der einfachen Renditen zum Zeitpunkt  $t+1$  gegen die Rendite zum Zeitpunkt  $t$  zu einem sternartigen Muster, welches als *Compass Rose* bezeichnet wird.

$P_t$  soll im folgenden den Preis einer Aktie und  $h > 0$  die Grösse eines Ticks bezeichnen. Für das Verhältnis zweier aufeinanderfolgenden als arithmetische Wachstumsraten berechneter Renditen ergibt sich

$$\frac{R_{t+1}}{R_t} = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t - P_{t-1}} \frac{P_{t-1}}{P_t}.$$

Die Compass Rose erscheint in einer graphischen Darstellung von  $R_{t+1}$  gegen  $R_t$ , wenn  $P_t \gg P_t - P_{t-1}$  gilt. Daraus folgt  $P_{t-1}/P_t \approx 1$ , was für das Verhältnis der Renditen auf

$$\frac{R_{t+1}}{R_t} \approx \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t - P_{t-1}} = \frac{n_{t+1} h}{n_t h} = \frac{n_{t+1}}{n_t}$$

führt. Hierin bezeichnet  $n_t \in \mathbb{Z}$  die Anzahl Ticks, um die sich der Preis geändert hat. Wird nun  $R_{t+1}$  gegen  $R_t$  abgetragen, ergeben sich charakteristische Geraden mit Steigung  $n_{t+1}/n_t$ . Abbildung 2.2 zeigt eine auf diese Art und Weise entstehende Compass Rose in einer schematischen Darstellung. Am häufigsten treten Geraden mit Verhältnissen  $n_{t+1}/n_t = 0, \pm 1, \pm 2$  auf und zwar in dieser Reihenfolge. Nicht ganz so deutlich zu erkennen sind in der Regel Strahlen zwischen diesen Geraden.

Der Effekt der Compass Rose wurde 1994 erstmals erwähnt, einem breiteren Publikum ist er allerdings erst seit 1996 bekannt. Oft wird dieser Effekt nur dadurch verdeckt, dass Achsen falsch skaliert sind oder für die Darstellung der Punkte zu grosse Symbole verwendet werden.

In einer Simulationsstudie haben Krämer und Runde [74] gezeigt, dass die Compass Rose tatsächlich nur dadurch entsteht, dass ausschliesslich in diskreten Einheiten gehandelt werden kann. In dieser Studie wurden normalverteilte Renditen mittels eines Zufallszahlengenerators erzeugt und anschliessend gerundet. Um Unzulänglichkeiten bei der Generierung von zufälligen Renditen ausschliessen zu können – insbesondere sind hier eventuelle statistische Abhängigkeiten zwischen den Zufallszahlen zu erwähnen – wurde durch den Autor der vorliegenden Arbeit eine Simulationsstudie mit verschiedenen Zufallszahlengeneratoren aus Numerical Recipes durchgeführt („ran1“, „ran3“ und „ran4“, vgl. Press et al. [95], Kapitel 7). Die Ergebnisse stimmen mit denjenigen von Krämer und Runde überein.

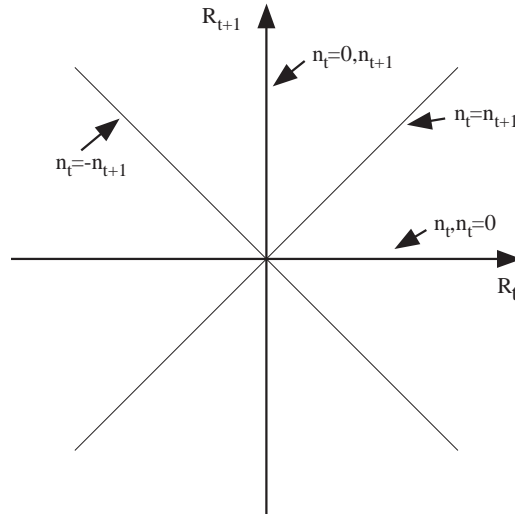


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung einer Compass Rose.

Die Simulationsstudien zeigen allerdings ernsthafte Konsequenzen für die Anwendung des BDS-Tests auf. So kann eine an sich korrekte Nullhypothese von *i.i.d.*-Renditen nur wegen Rundungsfehlern abgelehnt werden. Eine Ablehnung dieser Nullhypothese liesse dann auch eine Erklärung von Aktienrenditen durch chaotische Systeme zu. Werden Renditen aber als logarithmische Kursänderungen berechnet, dürfte dies keine Rolle spielen. Durch die Berechnung des Logarithmus wird der Effekt aufgehoben, dass Aktienkurse nur in diskreten Einheiten gehandelt werden. Da im folgenden Log-Returns verwendet werden, sollten sich für die Anwendung des BDS-Tests keine Konsequenzen ergeben. Dies bedeutet, dass eine Ablehnung der *i.i.d.*-Hypothese nicht dadurch verursacht wird, dass Aktienkurse nur in diskreten Einheiten gehandelt werden.

## 2.3 Empirische Überprüfung für den schweizerischen Aktienmarkt

In diesem Abschnitt werden die in Abschnitt 2.1 diskutierten Annahmen über Finanzmärkte mit den in Abschnitt 2.2 vorgestellten statistischen Tests anhand von Daten des schweizerischen Aktienmarktes überprüft.

Dazu wurde ein Programm entwickelt, welches alle oben eingeführten statistischen Tests und graphischen Instrumente beinhaltet (vgl. Anhang F). Die Routine zum BDS-Test wurde nicht selbst entwickelt. Sie wird von W.D. Dechert der Allgemeinheit zur Verfügung gestellt und ist in die vom Autor erstellte Software integriert worden.



### 2.3.1 Datengrundlage

Der empirischen Untersuchung liegen alle Tagesschlusskurse der Jahre 1989 bis 1998 von fünf börsenkotierten schweizerischen Aktiengesellschaften zugrunde. Es handelt sich pro Aktie um 2492 Datenpunkte. Bei der Auswahl der untersuchten Titel wurde auf eine hohe Marktliquidität geachtet. So soll verhindert werden, dass einzelne Kauf- oder Verkaufsaufträge sich in deutlichen Kursbewegungen niederschlagen. Als Indikator für die Marktliquidität sind die täglichen Umsätze der einzelnen Titel verwendet worden. Ein hohes Handelsvolumen sollte für einen liquiden Titel sprechen. Folgende Titel wurden daher ausgewählt: ABB Inhaber (ABBI), Credit-Suisse Namen (CSN), Nestlé Namen (NESN), Novartis Namen (NOVN) und Roche Genussschein (ROG). Diese Titel bilden nicht nur die Grundlage für die Untersuchungen in diesem Abschnitt, sondern auch für die Analysen in den folgenden Kapiteln.

Die Daten wurden über die Datenbank von Datastream<sup>1</sup> bezogen. Die Aktienkurse sind korrigiert um Kapitalmassnahmen, das heisst um Kapitalerhöhungen, Splits, etc. Neben „normalen“ Tagesschlusskursen liefert Datastream auch sogenannte *Return Indices*. Sie zeigen die theoretischen Aktienkurse unter der Annahme, dass Dividenden reinvestiert werden, um zusätzliche Einheiten des jeweiligen Titels zu erwerben.

Die Berechnung dieser Return Indices setzt eine genaue Kenntnis der Höhe und des Zeitpunktes der Dividendenzahlung voraus. Da in der Schweiz keine Ausschüttungen aus laufenden Gewinnen vorgenommen werden dürfen, erfolgt die Dividendenzahlung einmal pro Jahr. Der Return Index  $RI_t$  am Tag  $t$  wird anhand der Kurse  $P_t$  und  $P_{t-1}$  für alle Zeitpunkte ausser dem Tag der Dividendenzahlung folgendermassen berechnet:

$$RI_t = RI_{t-1} \frac{P_t}{P_{t-1}}.$$

$P_0$  ist in den verwendeten Zeitreihen von Datastream durch den Schlusskurs des ersten Handelstages des Jahres 1988 gegeben. Für den Tag der Dividendenzahlung lautet die Berechnung

$$RI_t = RI_{t-1} \frac{P_t + D_t}{P_{t-1}},$$

wobei mit  $D_t$  die Dividende bezeichnet wird. Werden für die Return Indices die täglichen Renditen als geometrische Wachstumsraten ermittelt, so ergibt sich für alle Tage ausser dem Tag der Dividendenzahlung

$$\ln \frac{RI_t}{RI_{t-1}} = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}},$$

was der üblichen logarithmischen Preisänderung entspricht. Am Tag der Dividendenzahlung erhält man:

$$\ln \frac{RI_t}{RI_{t-1}} = \ln \frac{P_t + D_t}{P_{t-1}},$$

---

<sup>1</sup> Datastream ist eine Marke des Informationsanbieters Primark Corporation und bietet historische Zeitreihen von mikro- und makroökonomischen Daten an.

also eine um die Dividende korrigierte Rendite. Anzumerken bleibt, dass bei der Ermittlung der Return Indizes Steuern, speziell die Verrechnungssteuer, und Kosten der Reinvestition, zum Beispiel Kommissionen und Spesen, unberücksichtigt bleiben. Wenn nichts Anderes erwähnt wird, basieren die Untersuchungen in den folgenden Abschnitten und Kapiteln auf den dividendenkorrigierten Renditen.

Novartis ist am 20.12.1996 durch Fusion aus Ciba-Geigy und Sandoz hervorgegangen. Die von Datastream gelieferten Kurse für die Novartis Namenaktie bis zu diesem Zeitpunkt sind diejenigen der Sandoz AG.

Neben den Titeln der erwähnten Aktiengesellschaften wird auch ein Index untersucht und zwar der Swiss Market Index (SMI). Die Tagesschlusskurse des SMI wurden wiederum über Datastream bezogen. Dem SMI wurde der Vorzug vor dem Swiss Performance Index gegeben, da für letzteren an der Eurex<sup>2</sup> keine standardisierten Derivate gehandelt werden. Die Kurse und Renditen des SMI sind allerdings nicht unabhängig von denen der oben erwähnten Titel. Der SMI stellt als Index eine gewichtete Summe der Kurse von ausgewählten Aktien des schweizerischen Aktienmarktes dar. Da alle untersuchten Titel in die Berechnung des SMI für den analysierten Zeitraum eingehen, besteht eine gewisse Abhängigkeit zwischen Aktien und Index.

### 2.3.2 Der schweizerische Aktienmarkt in den Jahren 1989 bis 1998

Am Beispiel des SMI wird ein kurzer Überblick über die Entwicklung des Aktienmarktes in der Schweiz in den Jahren 1989 bis 1998 gegeben. Diese Entwicklung kann nicht isoliert betrachtet werden, sondern ist im Kontext der makroökonomischen Entwicklung, vor allem auch der globalen Märkte, zu sehen.

Abbildung 2.3 zeigt das Verhalten der Renditen am Beispiel des SMI für den erwähnten Zeitraum. Sehr gut sind einzelne Ereignisse zu erkennen, wie der Minicrash im Oktober 1989, die Kuwait-Krise in der zweiten Jahreshälfte 1990 und Anfang 1991 und der Moskauer Putschversuch im August 1991. Das seit Herbst 1997 unruhiger gewordene Börsengeschehen lässt sich in einer deutlich erhöhten Volatilität ablesen. Im Gegensatz zu den Jahren 1989 bis 1991, in denen hauptsächlich einzelne starke Kurseinbrüche zu verzeichnen waren, sind nun starke Abweichungen sowohl nach unten als auch nach oben zu beobachten, und zwar über einen längeren Zeitraum.

Ausgelöst wurden die Krisen ab 1997 im südostasiatischen Wirtschaftsraum (Indonesien, Süd Korea, Malaysia, Philippinen, Thailand) (vgl. Basle Committee on Banking Supervision [8], IOSCO [44]). In den Jahren zuvor waren in diesen Ländern sehr hohe Wachstumsraten zu verzeichnen gewesen, was hohe ausländische Investitionen,

---

<sup>2</sup>Die Eurex ist die aus SOFFEX und Deutsche Börse AG durch Fusion am 25.9.1998 hervorgegangene Terminbörse. An ihr werden standardisierte Geldmarkt-, Kapitalmarkt-, Aktien- und Indexprodukte gehandelt.

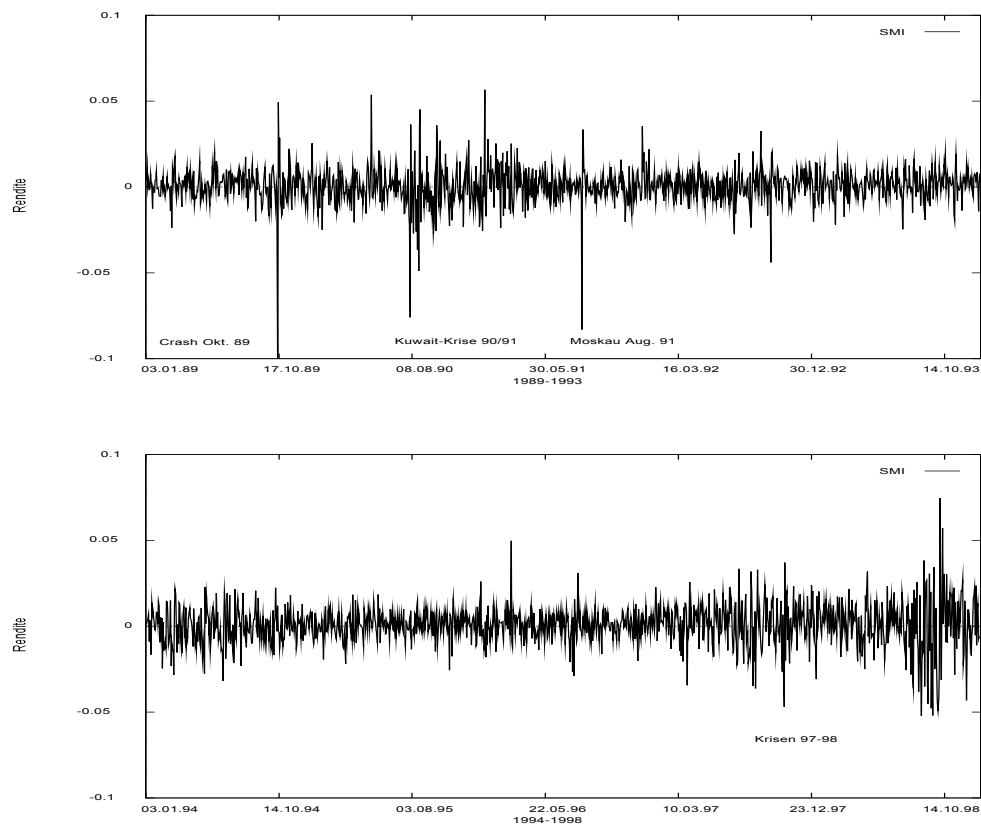


Abbildung 2.3: Tagesrenditen des SMI in den Jahren 1989–1993 und 1994–1998.

Kapitalzufluss und ein verstärktes Engagement ausländischer Banken, vor allem europäischer Banken, zur Folge hatte. Die auftretenden wirtschaftlichen Schwierigkeiten blieben allerdings nicht auf den südostasiatischen Raum beschränkt, sondern sie wirkten sich auch auf die aufsteigenden Märkte in Lateinamerika und Osteuropa und später auf die entwickelten Märkte Europas und der USA aus.

Solchen Krisen entstehen nie über Nacht, sondern sie kündigen sich vorher an. So auch in diesem Fall. Die Länder Südasiens hatten mit einer steigenden Inflation zu kämpfen und häuften kurzfristige Auslandsschulden an, welche die Gefahr in sich bergen, nicht erneuert werden zu können.

Zu Beginn des Jahres 1997 brachen einige koreanische Konzerne zusammen, was den Startpunkt der Turbulenzen markierte. Im Juli desselben Jahres wurde die thailändi-

sche Währung abgewertet und im Zuge davon auch andere asiatische Währungen, teilweise weit unter ein Niveau, das als notwendig erachtet wird, um die Wettbewerbsfähigkeit im Export zu gewährleisten. Eine Abwertung bei gleichzeitig steigenden Preisen bedeutet eine geringere reale Kaufkraft und verstärkt den Inflationsdruck. Als Folge ging das Wirtschaftswachstum dramatisch zurück. Die Marktkapitalisierung verminderte sich innerhalb eines Jahres um bis zu 85% (gemessen in US Dollar). Diese ganzen Ereignisse führten zu einem spekulativen Druck auf die aufsteigenden Märkte in Lateinamerika und Osteuropa, womit sich die Krise weltweit auszubreiten begann. Ausländische Investoren zogen schliesslich ihr Kapital ab. In Indonesien führten die wirtschaftlichen Schwierigkeiten zusätzlich zu innenpolitischen Spannungen und sozialen Unruhen.

Wenn sich auch die Auswirkungen dieser Krisen auf die europäischen Märkte mit der Zeit abschwächten, bildeten sie für längere Zeit einen gewissen Unsicherheitsfaktor.

Im August des Jahres 1998 brachen neue Turbulenzen aus (vgl. Committee on the Global Financial System [29]). Am 17. August wurde die russische Währung abgewertet, gleichzeitig fielen russische Staatsanleihen aus. Dies führte dazu, dass das Risiko in anderen aufsteigenden Märkten, vor allem Lateinamerikas, verstärkt wahrgenommen wurde. Die Währungen dieser Länder gerieten unter Druck, der Marktwert von Staatsanleihen dieser Länder fiel daher. Bis Mitte September setzte deshalb eine starke Nachfrage nach „sicheren“ Anlagemöglichkeiten ein. So fielen die Renditen der Staatsanleihen der führenden Industrienationen und erstklassiger privater Schuldner.

Auch die Aktienmärkte der Industrienationen waren von diesen Geschehnissen betroffen. Es kam zu einem Preisverfall und einer deutlich gestiegenen Volatilität. Besonders die Titel von europäischen Banken waren betroffen, da die Investoren davon ausgingen, dass das Engagement gerade dieser Banken in Russland besonders hoch sei (vgl. o.V. [91]). Schweizerische Banktitel verloren rund die Hälfte an Wert. So wurde die Credit-Suisse First Boston, eine Tochter der Credit-Suisse Group, in ihrem Rating herabgestuft, was für die Titel der Credit-Suisse einen Kursrückgang zur Folge hatte. Zuvor war der Kurs durch Fusionsgerüchte stark angeheizt worden (vgl. Maier [79]).

Schliesslich kamen noch die Verluste des Hedge Fund „Long-Term Capital Management“ hinzu, die am 22.9.1998 bekanntgegeben wurden. Dieser Fund kontrollierte mit nur 4 Milliarden US Dollar Eigenkapital Anlagen in der Höhe von 125 Milliarden US Dollar. Vor allem die UBS AG war von diesen Verlusten betroffen (vgl. Maier und Heusser-Bachmann [80], Maier und Schmocker [81]).

Fast so schnell wie die Krise ausgebrochen war, hörte sie auch wieder auf. Ausschlaggebend war eine Zinssenkung in den USA am 29.9.1998 und die Einsicht der Investoren, dass die Reaktionen wohl übertrieben waren.

Die erläuterten Entwicklungen im schweizerischen Aktienmarkt werden an vielen Stellen in die Diskussion empirischer Befunde einfließen.

### 2.3.3 Überprüfung der i.i.d.-Annahme mittels BDS-Test

Der BDS-Test wird dazu verwendet, die Annahme unabhängig und identisch verteilter Renditen zu überprüfen. Untersucht werden die fünf genannten Aktientitel ergänzt um den SMI. Für diese Titel werden jeweils ein zehnjähriger Zeitraum (1989–1998) und zwei fünfjährige Subperioden (1989–1993 und 1994–1998) analysiert, also insgesamt 18 Untersuchungen durchgeführt. Diese Perioden bilden ebenso die Grundlage für die Analysen in den weiteren Abschnitten dieses Kapitels.

Exemplarisch werden die Ergebnisse für die Credit-Suisse Namenaktie demonstriert. Die detaillierten Ergebnisse für die übrigen Titel finden sich in Anhang B.1.

Für die Anwendung des BDS-Tests sind die Einbettungsdimension  $m$  und der vorgegebene Abstand  $\epsilon$  geeignet zu wählen. Für die Einbettungsdimension wurde  $m = 2, 3, 4, 5$  gewählt. Dies stellt sicher, dass bei einer Anzahl von  $n$  Beobachtungen zwischen circa 1250 (fünfjährige Periode) und 2500 (zehnjährige Periode) die Forderung  $n/m > 200$  erfüllt ist. Der Abstand  $\epsilon$  wird in Einheiten  $\delta$  der Standardabweichung gemessen und auf  $\delta = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$  festgelegt. Mit allen möglichen Kombinationen von  $\delta$  und  $m$  ergeben sich 16 BDS-Statistiken.

Tabelle 2.1 zeigt nun die Ergebnisse für die Credit-Suisse Namenaktie. Aufgeführt ist die Prüfgrösse des BDS-Tests für verschiedene Werte von  $\delta$  und  $m$  und für die erwähnten Zeiträume. Diese Testgrösse ist unter der Nullhypothese, dass die Renditen *i.i.d.* sind, asymptotisch standardnormalverteilt. Die kritischen Werte für eine zweiseitige Fragestellung betragen 2.756 bei einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 1\%$  respektive 1.960 bei einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 5\%$ . Zunächst werden die Resultate bei einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 1\%$  diskutiert. In 62.5% aller Fälle wird hierbei für die Periode 1989–1998, in 100% aller Fälle für die Periode 1989–1993 und in 87% aller Fälle für die Periode 1994–1998 die Hypothese identisch und unabhängig verteilter Renditen nicht abgelehnt. Bei einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 5\%$  reduzieren sich diese Werte auf 50%, 94% und 62.5%. Vor allem für die Jahre 1989–1993 weist der BDS-Test auf *i.i.d.*-Renditen der Credit-Suisse Namenaktie hin.

Tabelle 2.2 zeigt im Überblick die Häufigkeit der Nichtablehnung der Nullhypothese für alle untersuchten Aktien und den SMI. Insgesamt wurden 288 BDS-Statistiken ausgewertet.

Insgesamt lässt sich festhalten, dass der BDS-Test darauf hinweist, dass die Renditen der untersuchten Aktien und des SMI unabhängig und identisch verteilt sind. Diese Hinweise sind für die fünfjährigen Perioden, vor allem für die Jahre 1989–1993, stärker ausgeprägt als für den gesamten zehnjährigen Zeitraum.

Periode		1989–1998	1989–1993	1994–1998
Beobachtungen $n$		2491	1243	1247
$m$	$\delta$			
2	0.5	0.7433	0.3842	0.5352
3	0.5	0.8218	0.4218	0.5812
4	0.5	0.5805	0.2836	0.3994
5	0.5	0.3675	0.1822	0.2418
2	1.0	1.2872	0.6652	1.0277
3	1.0	2.3131*	1.1844	1.8105
4	1.0	2.6835**	1.3376	2.1291*
5	1.0	2.7007**	1.3098	2.1471*
2	1.5	1.1908	0.5661	0.9478
3	1.5	2.5449*	1.2646	1.9475
4	1.5	3.6180**	1.7406	2.8465**
5	1.5	4.4192**	2.1012*	3.5244**
2	2.0	0.8007	0.3454	0.6056
3	2.0	1.8301	0.9153	1.3438
4	2.0	2.9045**	1.3954	2.1824**
5	2.0	3.8901**	1.8487	2.9864**
* signifikant bei $\alpha = 5\%$				
** signifikant bei $\alpha = 1\%$				

Tabelle 2.1: BDS-Statistiken für verschiedene Werte von  $m$  und  $\delta$  und verschiedene Zeiträume der Credit-Suisse Namenaktie.

### 2.3.4 Recurrence Plots

Zwischen Recurrence Plot und BDS-Test besteht eine enge Beziehung. So sind für die Plots die gleichen Parameter festzusetzen wie für den BDS-Test. Die Werte für  $m$  und  $\delta$  wurden im folgenden auf  $m = 5$  und  $\delta = 0.5$  festgelegt. Am Beispiel des SMI und der Credit-Suisse Namenaktie sollen die Recurrence Plots diskutiert werden. Die Renditedaten umfassen weiter die Jahre 1989 bis 1998. Der SMI kann als Abbild des gesamten Marktgeschehens betrachtet werden. Zudem kann der Recurrence Plot für den SMI mit der zeitlichen Entwicklung der Renditen in Abbildung 2.3 verglichen werden. Die untersuchten Aktien zeigen im wesentlichen alle dasselbe Bild wie der Recurrence Plot für die Credit-Suisse Namenaktie. Daher stehen die Ergebnisse für die Credit-Suisse Namenaktie repräsentativ für die übrigen Titel.

Abbildung 2.4 und Abbildung 2.5 zeigen die Recurrence Plots für den SMI und die Credit-Suisse Namenaktie. Wegen der sehr grossen Datenmenge können aus technischen Gründen nur Daten oberhalb der Diagonalen dargestellt werden. Die Punkte unterhalb der Diagonalen ergeben sich aus denjenigen oberhalb der Diagonalen durch

Signifikanzniveau	Periode		
	1989–1998	1989–1993	1994–1998
$\alpha = 1\%$	81%	100%	92%
$\alpha = 5\%$	68%	94%	79%

Tabelle 2.2: Häufigkeit der Nichtablehnung der Nullhypothese des BDS-Tests bei verschiedenen Signifikanzniveaus für alle fünf Aktientitel und den SMI.

Spiegelung an derselben. Zu erkennen sind helle und dunkle Flächen, die sich miteinander abwechseln. Dunkle Flächen zeigen Renditen mit niedriger Volatilität oder allgemein ein ruhiges Börsengeschehen an. Helle Flächen sprechen dagegen für hohe Volatilitäten. Solche helle Flächen treten vor allem in den Jahren 1997 und 1998 auf. Betrachtet man diese hellen Flächen für den SMI genauer und vergleicht sie mit den Renditen, lässt sich folgendes festhalten. Die hellen Flächen im Recurrence Plot korrespondieren mit den in Abschnitt 2.3.2 genannten Phasen erhöhter Volatilität. So tritt der erste helle Bereich im Zeitraum Mitte 1990 bis Anfang 1991 auf. Dies ist genau die Zeit der Kuwait-Krise. Eine weitere helle Fläche ist ungefähr für das Jahr 1994 zu erkennen. In der Darstellung der zeitlichen Entwicklung der Renditen sind für diesen Zeitraum erhöhte Volatilitäten zu beobachten, wenn auch nicht besonders ausgeprägt. Der helle Bereich für die Jahre 1997 und 1998 wird in der ersten Jahreshälfte 1998 unterbrochen durch einen etwas dunkleren Abschnitt. Dieser Bereich korrespondiert mit leicht geringeren Renditeausschlägen für diesen Zeitraum.

In der Regel wird versucht, Volatilitätsclustering, also das Auftreten von Phasen erhöhter oder verminderter Volatilität, durch die Betrachtung der zeitlichen Entwicklung der Renditen, wie etwa in Abbildung 2.3 zu entdecken. Mit dem Recurrence Plot können solche Phasen ebenfalls entdeckt werden und zwar trennschärfer als beim erstgenannten Vorgehen. Er wird daher für diesen Zweck vorgezogen.

Neben der Untersuchung des Volatilitätsverhaltens, dient der Recurrence Plot der graphischen Überprüfung der *i.i.d.*-Annahme. Ein Wechsel zwischen hellen und dunklen Abschnitten spricht gegen die Annahme unabhängig und identisch verteilter Renditen. Solche abrupten Wechsel sind auch in Abbildung 2.4 und 2.5 zu erkennen. Daneben treten aber auch teilweise sehr grosse Flächen mit einer gleichmässigen Überdeckung auf. Dies kann als Hinweis auf *i.i.d.* interpretiert werden.

Wechsel zwischen Bereichen hoher und niedriger Volatilität oder Strukturbrüche machen schliesslich noch auf ein Problem bei der Parameterschätzung von expliziten Modellen aufmerksam. Bei diesen Modellen muss auf Grundlage historischer Daten eine Parameterschätzung vorgenommen werden, welche aber für das aktuelle oder zukünftige Verhalten wegen einer veränderten Situation nicht mehr repräsentativ sein

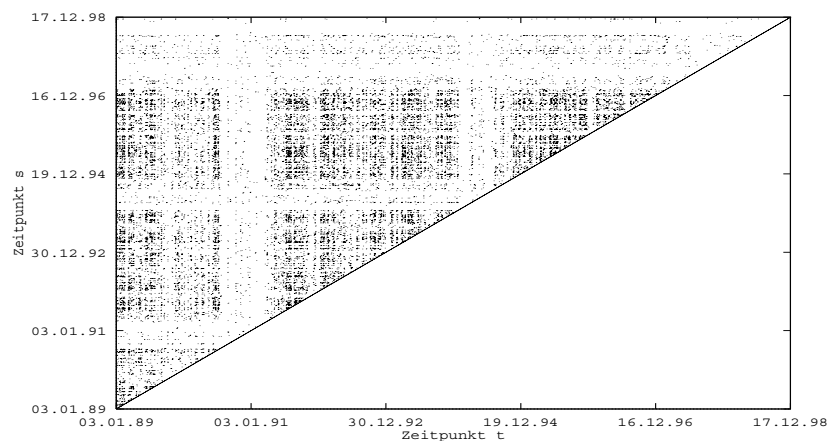


Abbildung 2.4: Recurrence Plot für die Renditen des SMI: Zeitraum 1989–1998,  $m = 5$ ,  $\delta = 0.5$ .

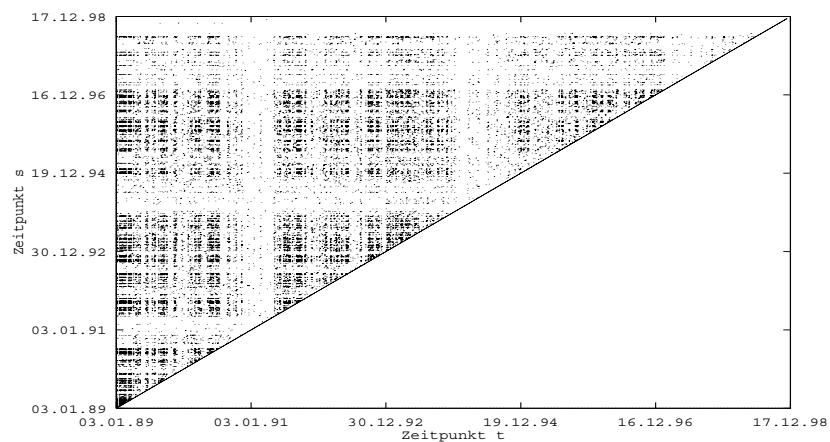


Abbildung 2.5: Recurrence Plot für die Renditen der CSN: Zeitraum 1989–1998,  $m = 5$ ,  $\delta = 0.5$ .



müssen.

### 2.3.5 Empirische Autokorrelationsfunktionen und Q-Statistiken

Die Schätzung von Autokorrelationsfunktionen und die Auswertung von Q-Statistiken lassen Aussagen über die zeitliche Korrelation der Renditen zu. Werden zudem Autokorrelationen und Q-Statistiken für den Absolutbetrag der Renditen und für quadrierte Renditen betrachtet, lassen sich Hinweise auf zeitliche Abhängigkeiten der Renditen ableiten. Beispielhaft werden im folgenden die Ergebnisse für die Credit-Suisse Namenaktie diskutiert. Die detaillierten Resultate für die übrigen Titel finden sich im Anhang B.2.

Die Abbildungen 2.6 bis 2.8 zeigen die geschätzten Autokorrelationsfunktionen für die Perioden 1989–1998, 1989–1993 und 1994–1998 in Abhängigkeit vom Time Lag. Dieser Lag wird hier in Tagen gemessen. Für die Renditen  $r_t$  stellt man für alle drei Zeiträume fest, dass die Korrelationen mit Ausnahme kleiner Time Lags zwischen ein und zwei Tagen sehr gering sind. Ein anderes Bild ergibt sich bei der Betrachtung des Absolutbetrages der Renditen  $|r_t|$  und der quadrierten Renditen  $r_t^2$ . Hier variieren die Ergebnisse je nachdem, ob der zehnjährige Zeitraum betrachtet wird oder eine der Subperioden. Wird die Autokorrelationsfunktion von  $|r_t|$  und  $r_t^2$  für die Renditen der Jahre 1989–1998 geschätzt, so ergibt sich eine Funktion, die deutlich von Null verschiedene Werte aufweist, und zudem nur sehr langsam abfällt. Dies bedeutet, dass auch für grosse Time Lags noch eine Korrelation in den Daten besteht. Dieses Verhalten ist vor allem auf die Jahre 1994–1998 zurückzuführen. Hier zeigen die Autokorrelationsfunktionen nahezu dasselbe Verhalten wie für den gesamten zehnjährigen Zeitraum, während die Autokorrelationen der quadrierten Renditen und der Absolutbeträge der Renditen der Jahre 1989–1993 bis auf kleine Time Lags nahezu verschwinden. Die übrigen untersuchten Titel weisen in der Regel ein ganz ähnliches Verhalten auf, ebenso die Korrelationsfunktionen für den SMI. Einzig die Novartis Namenaktie zeigt ein anderes Bild. In diesem Fall weist nur die Autokorrelationsfunktion der Absolutbeträge der Renditen für die Jahre 1989–1998 und 1994–1998 deutlich von Null verschiedene Korrelationen auf, die quadrierten Renditen dagegen nicht.

Während die Schätzung der Autokorrelationsfunktionen graphisch rasch einen Eindruck darüber zulässt, ob eine Korrelation vorliegt, lassen die Q-Statistiken von Box–Pierce und Box–Ljung eine Quantifizierung dieser Zusammenhänge zu. Diese Ergebnisse werden nun präsentiert. Die Anzahl der berücksichtigten Time Lags wurde bei allen Schätzungen auf  $m = 15$  festgelegt. Tabelle 2.3 zeigt die Resultate für die Credit-Suisse Namenaktie. Die Q-Statistiken sind jeweils unter der Nullhypothese, dass alle Korrelationen von Null verschieden sind, asymptotisch  $\chi^2$ -verteilt mit  $m = 15$  Freiheitsgraden. Die kritischen Werte betragen 30.58 bei einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 1\%$  und 25.00 bei einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 5\%$ . Betrachtet man die Q-Statistiken ergibt sich folgendes Bild. Wie bei der graphischen Analyse der Autokorrelationsfunktionen resultieren unterschiedliche Ergebnisse je nach un-

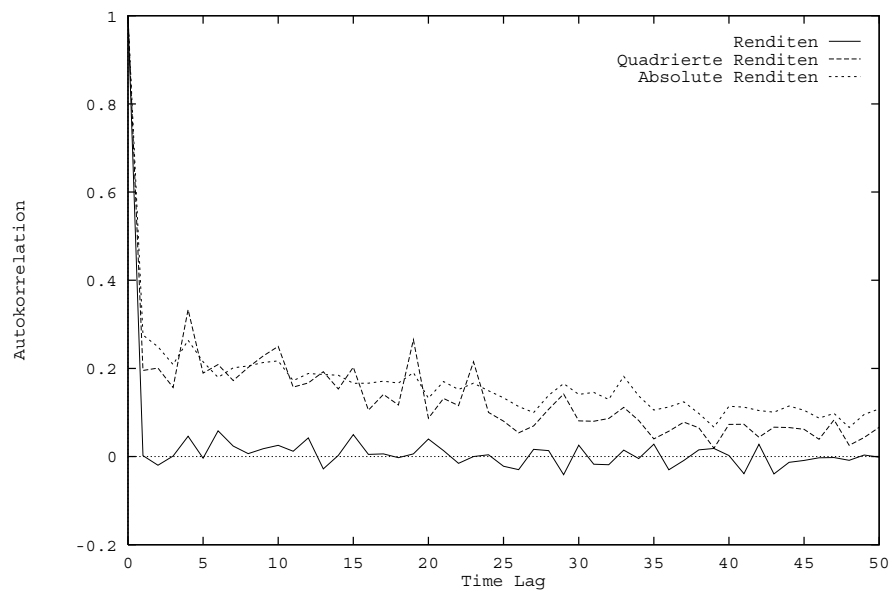


Abbildung 2.6: Empirische Autokorrelationsfunktion von  $r_t$ ,  $r_t^2$  und  $|r_t|$  der CSN. Zeitraum 1989 bis 1998.

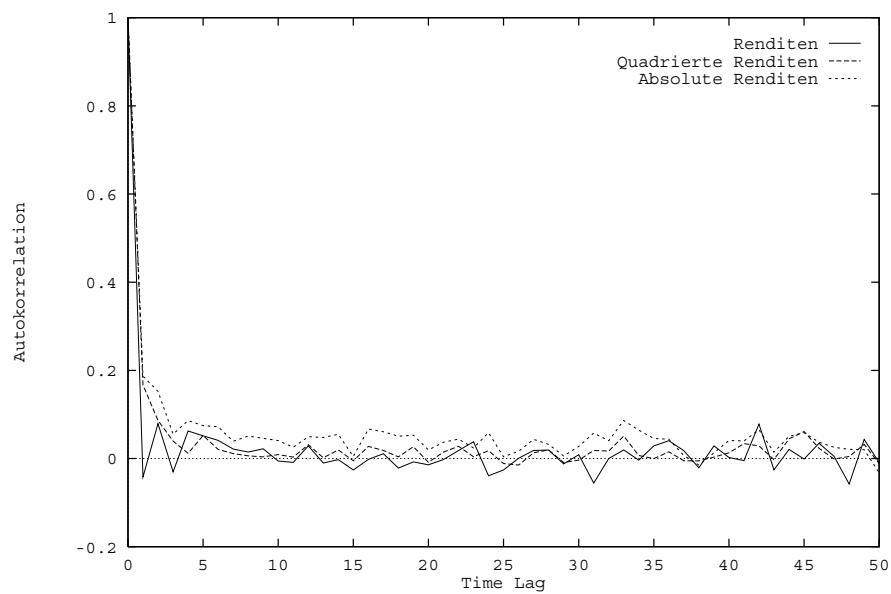


Abbildung 2.7: Empirische Autokorrelationsfunktion von  $r_t$ ,  $r_t^2$  und  $|r_t|$  der CSN. Zeitraum 1989 bis 1993.

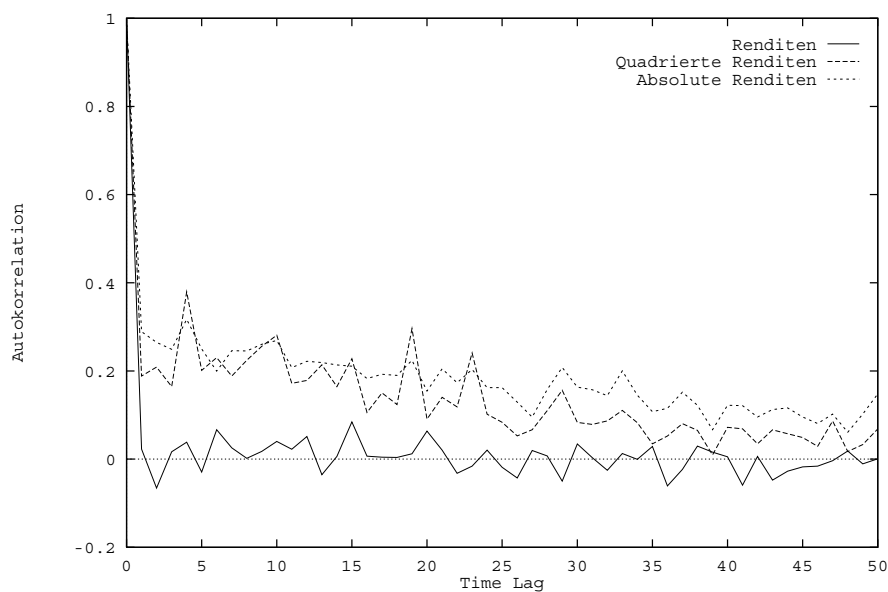


Abbildung 2.8: Empirische Autokorrelationsfunktion von  $r_t$ ,  $r_t^2$  und  $|r_t|$  der CSN. Zeitraum 1994 bis 1998.

Zeitraum	Q-Statistik	$r_t$	$r_t^2$	$ r_t $
1989–1998	Box–Pierce	31.7046**	1577.60**	1660.06**
	Box–Ljung	31.8446**	1583.63**	1666.04**
1989–1993	Box–Pierce	24.9542	51.9772**	119.110**
	Box–Ljung	25.0831*	52.1453**	119.660**
1994–1998	Box–Pierce	32.4482**	947.733**	1134.56**
	Box–Ljung	32.7340**	955.097**	1143.04**
* signifikant bei $\alpha = 5\%$				
** signifikant bei $\alpha = 1\%$				

Tabelle 2.3: Q-Statistiken von Box–Pierce und Box–Ljung für die CSN. Signifikanzniveaus  $\alpha = 1\%$  und  $\alpha = 5\%$ . Anzahl Time Lags  $m = 15$ .

tersuchtem Zeitraum und untersuchter Renditegrösse. Nur für die Periode zwischen 1989 und 1993 wird die Hypothese verschwindender Korrelationen für die Renditen nicht abgelehnt. Für alle Zeiträume wird für die Absolutbeträge der Renditen und für die quadrierten Renditen die Nullhypothese verworfen. Die Werte der Teststatistiken nach Box–Pierce und Box–Ljung weisen dabei nur geringe Differenzen auf, was auf ausreichend grosse Stichprobenumfänge schliessen lässt.

Ein ähnliches Bild ergibt sich bei der Untersuchung aller übrigen Titel und des SMI. Tabelle 2.4 zeigt die relative Häufigkeit einer Nichtablehnung der Nullhypothese bei verschiedenen Signifikanzniveaus für die Renditegrössen  $r_t$ ,  $r_t^2$  und  $|r_t|$ . Die relativen Häufigkeiten wurden auf Grundlage der Ergebnisse für die fünf ausgewählten Aktien und für den SMI aller drei Zeitperioden berechnet. Die Hypothese unkorrelierter

	$r_t$	$r_t^2$	$ r_t $
Box–Pierce $\alpha = 1\%$	50%	0%	0%
$\alpha = 5\%$	50%	0%	0%
Box–Ljung $\alpha = 1\%$	50%	0.6%	0%
$\alpha = 5\%$	40%	0.6%	0%

Tabelle 2.4: Relative Häufigkeiten der Nichtablehnung der Nullhypothese der Q–Statistiken nach Box–Pierce und Box–Ljung.

Renditen wird nur in rund der Hälfte der Fälle nicht abgelehnt. Nur bei der Novartis Namenaktie und dem SMI ergibt sich eine Unkorreliertheit der Renditen für alle untersuchten Zeiträume. Für die quadrierten Renditen und den Absolutbetrag der Renditen muss auf das Vorhandensein zeitlicher Korrelationen geschlossen werden. Ausnahme bildet auch hier die Novartis Namenaktie, was sich bereits bei der Schätzung der Autokorrelationsfunktion angedeutet hat. So ergibt sich bei den Renditen dieser Aktie für den Zeitraum 1994–1998 eine Nichtablehnung der Hypothese von unkorrelierten quadrierten Renditen.

Insgesamt haben die Untersuchungen in diesem Abschnitt gezeigt, dass vor allem bei den quadrierten Renditen und bei den absoluten Renditen zeitliche Korrelationen bestehen. Dies muss als Hinweis auf eine zeitliche Abhängigkeit der Renditen gedeutet werden.

### 2.3.6 Empirische Excessfunktionen

Mit der Schätzung der Excessfunktion soll überprüft werden, ob die Renditeverteilungen der vorliegenden Aktien fat-tailed sind oder nicht. Wiederum wird dies exemplarisch für den SMI und die Credit–Suisse Namenaktie dargestellt.

Abbildung 2.9 und 2.10 zeigen den geschätzten Excess in Abhängigkeit vom Schwellenwert. Als Datenbasis liegen weiter die Jahre 1989–1998 zugrunde. Beide Excessfunktionen zeigen ein ähnliches Verhalten. Während sie zunächst noch leicht fallen, steigen sie mit wachsendem  $u$  stark an. Daraus lässt sich eindeutig schliessen, dass es sich bei den vorliegenden Renditeverteilungen um fat-tailed Verteilungen handelt. Die Excessfunktionen für die übrigen Aktien zeigen denselben Verlauf.

### 2.3.7 Zusammenfassung der empirischen Resultate

Für fünf Titel des schweizerischen Aktienmarktes und für den SMI wurden einige der wichtigsten Annahmen über Renditen empirisch überprüft.

Zunächst werden die Ergebnisse der BDS-Tests diskutiert. Die Resultate dieses Test lassen den Schluss zu, dass in den meisten Fällen die Hypothese von unabhängig und identisch verteilten Renditen nicht abgelehnt werden kann. Dieses Resultat rechtfertigt die Verwendung von Modellen, welche gerade die *i.i.d.*-Annahme für Renditen unterstellen.

Mit dem Recurrence Plot lassen sich sehr trennscharf Regionen hoher und niedriger Volatilität voneinander unterscheiden. Die Trennschärfe ist dabei wesentlich besser als bei einer blossen Betrachtung der Renditen in Abhängigkeit der Zeit. Die grossen gleichmässig überdeckten Flächen in den Recurrence Plots der untersuchten Renditedaten weisen auf unabhängig und identisch verteilte Renditen in diesen Perioden hin.

Die Schätzung der Autokorrelationsfunktionen und die Auswertung der Q-Statistiken ergibt jedoch Hinweise auf eine zeitliche Abhängigkeit der Renditen. Dies steht im Widerspruch zu den Implikationen der BDS-Tests. Auf einen konzeptuellen Unterschied zwischen Autokorrelationsfunktion einerseits und Recurrence Plot andererseits ist allerdings hinzuweisen. Bei der Schätzung der Autokorrelationsfunktion werden alle Elemente einer Zeitreihe berücksichtigt, die einen bestimmten zeitlichen Abstand voneinander besitzen. Beim Recurrence Plot werden räumliche Abstände gemessen, wobei es im Gegensatz zur Schätzung der Autokorrelationsfunktion darauf ankommt, aus welchem zeitlichen Bereich einer Zeitreihe die jeweils betrachteten Daten stammen.

Es wird daher vermutet, dass zumindest für bestimmte Zeitperioden, vor allem für die Jahre 1989 bis 1993, die *i.i.d.*-Hypothese haltbar ist.

Renditeverteilungen schweizerischer Aktien zeigen breite Enden. Dies hat die Schätzung der Excessfunktion eindeutig ergeben. Dieses Resultat hat auch für den SMI Gültigkeit.

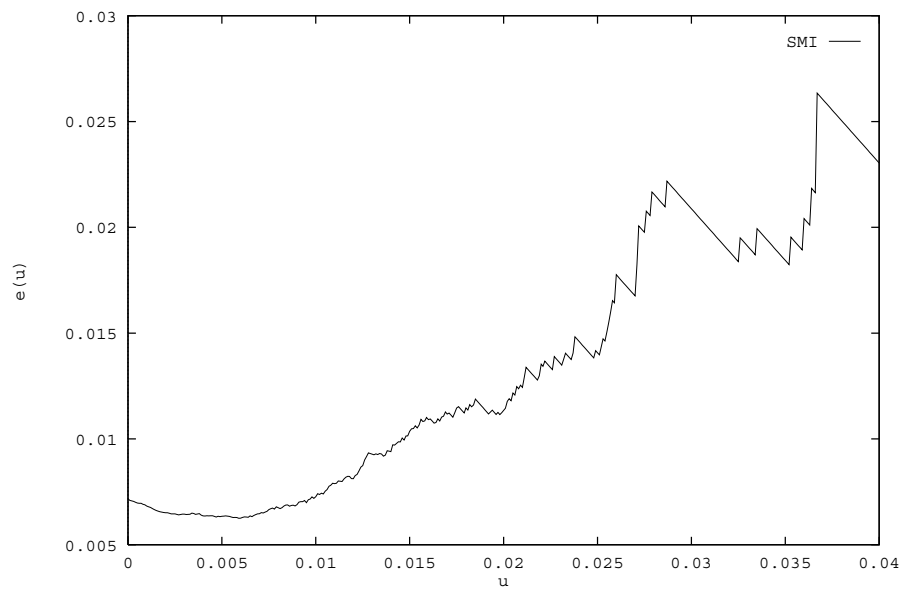


Abbildung 2.9: Empirische Excessfunktion für die Renditen des SMI. Zeitraum 1989 bis 1998.

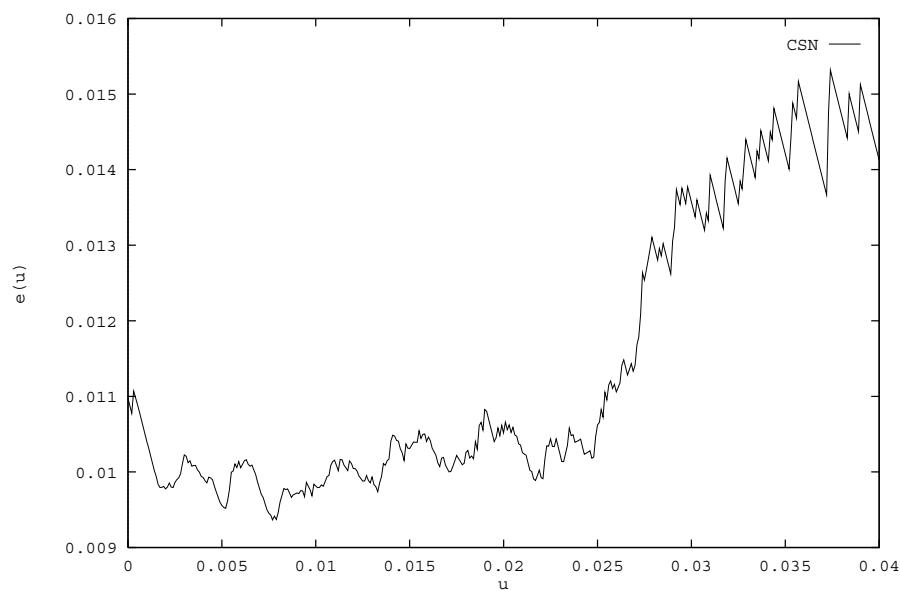


Abbildung 2.10: Empirische Excessfunktion für die Renditen der CSN. Zeitraum 1989 bis 1998.

## Kapitel 3

# Überblick über verschiedene Finanzmarktmodelle

Dieses Kapitel gibt einen kurzen Überblick über die wichtigsten Ansätze zur Modellierung von Finanzmarktdaten. Es handelt sich dabei lediglich um eine Auswahl und nicht um eine vollständige Erfassung dieser Modelle. Aus diesen Ansätzen werden drei Modelle ausgewählt, die in den nachfolgenden Kapiteln für den schweizerischen Aktien- und Optionenmarkt untersucht werden und die als Basis für parametrische Value-at-Risk-Schätzungen auf diesen Märkten dienen. Eine ausführliche Begründung für die getroffene Wahl erfolgt ebenfalls.

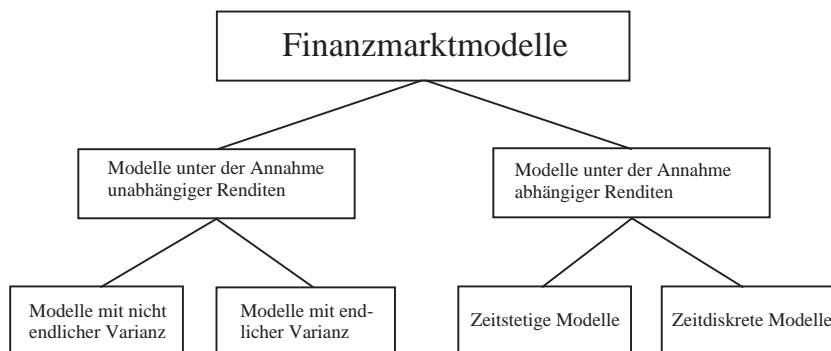


Abbildung 3.1: Klassifizierung verschiedener Finanzmarktmodelle.

Als Grundschema für die Einordnung der Modelle werden die Annahmen über die zeitliche Abhängigkeit der Renditen verwendet (vergleiche hierzu auch Abbildung 3.1). Bei Modellen, die eine zeitliche Unabhängigkeit unterstellen, sind unbedingte und be-

dingte Renditeverteilungen identisch. Ansätze, die zeitliche Abhängigkeiten für die Renditen zulassen, postulieren Modelle für die bedingten Renditeverteilungen. In beiden Modellklassen existieren Modelle, die Renditeverteilungen mit breiteren Enden als diejenigen der Normalverteilung ergeben. Bei den zeitunabhängigen Modellen erfolgt eine Einteilung in Renditeverteilungen mit endlicher Varianz und solche mit nicht endlicher Varianz. Die zeitabhängige Modellierung der Rendite erlaubt zusätzlich eine Berücksichtigung des Effekts des Volatilitätsclustering. In dieser Klasse wird zwischen zeitstetigen und zeitdiskreten Modellen unterschieden (vgl. auch die Diskussion in Abschnitt 1.2.1). Formuliert werden all diese Modelle auf der Basis von Log-Renditen.

Nicht speziell diskutiert werden nichtlineare Modelle und deterministisch chaotische Systeme.

### 3.1 Modelle unter der Annahme unabhängiger Renditen

Bei Modellen, die auf der Annahme zeitlicher Unabhängigkeit der Renditen beruhen, sind bedingte und unbedingte Renditeverteilung identisch. Da keine Hypothesen über die Form der bedingten Renditeverteilungen gebildet werden, können Effekte wie das Volatilitätsclustering nicht modelliert werden. Eine Modellierung von unbedingten Renditeverteilungen mit breiten Enden ist dagegen möglich. Bei den im folgenden diskutierten Modellen handelt es sich ausschliesslich um zeitstetige Modelle.

#### 3.1.1 Renditeverteilungen mit endlicher Varianz

##### Geometrische Brownsche Bewegung und normalverteilte Renditen

Das Standardmodell zur Beschreibung der Kursdynamik von Aktien und zur Beschreibung von Aktienrenditen ist die *Geometrische Brownsche Bewegung*. Sie impliziert normalverteilte Renditen.

Die Geometrische Brownsche Bewegung ergibt sich aus der allgemeinen stochastischen Differentialgleichung (1.17), indem Drift und Volatilität als Funktionen angenommen werden, die zwar von der Zeit unabhängig sind, aber linear vom Aktienkurs abhängen. Während der Prozess für den Kurs  $S(t)$  nichtstationär ist, bilden die Renditen  $r(t)$  einen stationären Prozess. Diese Renditen sind unabhängig und identisch normalverteilt.

Die Geometrische Brownsche Bewegung bildet die Grundlage für die Ableitung des Optionspreismodells nach Black und Scholes [11]. Dieses Modell ermöglicht die Bewertung von europäischen Call- und Put-Optionen mit Hilfe einer geschlossenen Formel. Ebenso existieren analytische Ausdrücke für die Bewertung von europäischen Optionen mit Dividendenzahlungen und für die Bewertung amerikanischer Optionen. Für



komplexere Optionsstrukturen lassen sich die entsprechenden Gleichungen zumindest numerisch lösen. In all diesen Optionspreisformeln nimmt die Volatilität eine zentrale Rolle ein.

### Mischung von Normalverteilungen

Ein weiterer zeitunabhängiger Ansatz zur Modellierung von Renditen, welcher es zugleich ermöglicht, Renditeverteilungen mit breiteren Enden als diejenigen der Normalverteilung zu erhalten, ist die Mischung zweier verschiedener Normalverteilungen (vgl. Venkataraman [111], Kon [73], Duffie und Pan [37], S. 38, Hamilton [54], S. 685 ff.).

Dabei wird die Gesamtrendite  $r(t)$  aus zwei normalverteilten Renditen  $r_n(t) \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$  und  $r_\beta(t) \sim N(0, \sigma_\beta^2)$  zusammengesetzt:

$$r(t) = \lambda r_n(t) + (1 - \lambda) r_\beta(t) \quad , \quad \lambda \in [0, 1] \quad ,$$

wobei  $\lambda = 1$  mit Wahrscheinlichkeit  $p$  und  $\lambda = 0$  mit Wahrscheinlichkeit  $(1 - p)$  auftritt. Der Erwartungswert der gesamten Rendite wird durch denjenigen von  $r_n(t)$  bestimmt. Interpretieren lässt sich diese Mischung von zwei normalverteilten Zufallsvariablen folgendermassen: das normale Börsengeschehen wird durch die Renditen  $r_n(t)$  modelliert, ausserordentliche Ereignisse, die mit Wahrscheinlichkeit  $(1 - p)$  eintreten, werden durch die Renditen  $r_\beta(t)$  modelliert, die eine höhere Varianz  $\sigma_\beta^2 > \sigma_n^2$  aufweisen. So ergeben sich Renditeverteilungen mit breiten Enden.

Zu schätzen sind die Parameter  $\mu_n, \sigma_n^2, \sigma_\beta^2$  und die Wahrscheinlichkeit  $p$ . Die zugehörige Log-Likelihood-Funktion besitzt bei gewöhnlicher Maximum-Likelihood-Schätzung allerdings kein globales Maximum. Deshalb werden in der Praxis diese Grössen mittels einer Quasi-Bayesian-Maximum-Likelihood-Methode geschätzt (vgl. Hamilton [54], S. 689).

Neben der Kombination von Normalverteilungen sind auch Mischungen von Verteilungen unterschiedlicher Familien vorstellbar, zum Beispiel die Mischung einer Normalverteilung mit einer Student t-Verteilung, die im folgenden Abschnitt dargestellt wird.

### Student t-Verteilung

Eine Modellierung von Renditen durch die Familie der Student t-Verteilungen ergibt ebenfalls breitere Enden als eine Normalverteilung (vgl. Blattberg und Gonedes [13]). Die Dichte der Student t-Verteilung mit  $k$  Freiheitsgraden ist definiert als

$$f(r) = \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)^{-1} (k-2)^{-1/2} \left(1 + \frac{r^2}{k-2}\right)^{-(k+1)/2} \quad ,$$

wobei  $\Gamma(\cdot)$  die Gammafunktion bezeichnet (vgl. Bronstein und Semendjajew [20], S. 681). Für  $k \rightarrow \infty$  konvergiert die Student t-Verteilung bekanntlich gegen eine Normalverteilung.

### Sprung-Diffusions-Prozess

Der *Sprung-Diffusions-Prozess* als Modell für die Dynamik von Aktienkursen wurde von Merton [84] eingeführt. Die Grundidee dieses Ansatzes besteht darin, „normale“ Kursänderungen als Geometrische Brownsche Bewegung zu modellieren. Zusätzlich treten zu zufälligen Zeiten, modelliert als Poisson-Prozess, aussergewöhnliche Ereignisse ein, die zu deutlichen Kurssprüngen führen können. Die Grösse solcher Kurssprünge wird wiederum durch eine Zufallsvariable beschrieben. Die Kombination dieser beiden Prozesse führt dann zu Renditeverteilungen mit breiten Enden. Für die Existenz solcher Kurssprünge lassen sich empirische Hinweise finden (vgl. Ball und Torous [4], Jorion [69], Bruand [21]).

Wie im Fall der Geometrischen Brownschen Bewegung kann auch für den Sprung-Diffusions-Prozess eine geschlossene Optionspreisformel für den Fall europäischer Optionen hergeleitet werden.

### Verallgemeinerte hyperbolische Verteilungen

Eine Klasse von Verteilungen, die in den neunziger Jahren zur Modellierung von Aktienrenditen vorgeschlagen wurde, sind die sogenannten *verallgemeinerten hyperbolischen Verteilungen* und speziell die *hyperbolische Verteilung* (vgl. Eberlein und Keller [40], Prause [94]). Auch für letztere konnte eine Optionspreisformel zur Bewertung europäischer Optionen hergeleitet werden (vgl. Eberlein und Jacod [39]).

Empirische Untersuchungen für amerikanische, deutsche und schweizerische Aktien haben ergeben, dass sich die hyperbolische Verteilung zur Modellierung empirischer Renditeverteilungen gut eignen, da vor allem die Enden der Renditeverteilungen besser approximiert werden als zum Beispiel durch die Normalverteilung (vgl. Eberlein und Keller [40], Eberlein et al. [41], Küchler et al. [75], Rydberg [102], Rydberg [103], Weber [113]).

### 3.1.2 Renditeverteilungen mit nicht endlicher Varianz

Eine Renditeverteilung, die fat-tailed ist, besitzt eine nicht endliche Varianz (vgl. Bryson [22]). Die bisher vorgestellten Modelle zeigen mit Ausnahme der Geometrischen Brownschen Bewegung zwar breitere Enden als eine Normalverteilung, sind aber im strengen Sinne der Definition einer fat-tailed Verteilung eher *semi-fat-tailed*, da sie endliche Varianzen besitzen.

### Stabile Pareto-Verteilung

Die Familie der *Stabilen Pareto-Verteilung* besitzt keine endliche Varianz und keine endlichen höheren Momente. Dies bedeutet, dass Stichprobenschätzungen für Varianz oder auch Kurtosis von stabil pareto-verteilten Zufallsvariablen mit wachsendem Stichprobenumfang nicht konvergieren, sondern divergieren. Die Stabile Pareto-

Verteilung ist damit der Klasse der fat-tailed Verteilungen zuzuordnen.

Die Bezeichnung „stabil“ ist dadurch begründet, dass stabil pareto-verteilte Zufallsvariablen stabil unter Summation sind, das heisst, dass die Summe von unabhängigen und stabil pareto-verteilten Zufallsvariablen wieder eine stabil pareto-verteilte Zufallsvariable ist. Eine geschlossene Darstellung der Dichtefunktion ist nur in Spezialfällen möglich. Es handelt sich dabei um die Normalverteilung, die Cauchy- und die Bernoulli-Verteilung (vgl. Campbell et al. [26], S. 17 ff.). Dagegen lässt sich ein expliziter Ausdruck für den natürlichen Logarithmus der charakteristischen Funktion  $G(k)$  der Stablen Pareto-Verteilung angeben (vgl. Campbell et al. [26], S. 18):

$$\ln G(k) = \ln E[e^{ikX}] = i\delta k - \gamma|k|^\alpha \left\{ 1 - i\beta \operatorname{sgn}(k) \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right\},$$

wobei  $X$  eine stabil pareto-verteilte Zufallsvariable darstellt. Die Parameter  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  und  $\gamma$  sind wie folgt zu interpretieren.  $\delta \in \mathbb{R}$  ist der Lageparameter,  $\beta \in \mathbb{R}$  der Schiefeparameter. Für  $\beta = 0$  ergibt sich eine symmetrische Verteilung, für  $\beta > 0$  eine rechtsschiefe und für  $\beta < 0$  eine linksschiefe Verteilung.  $\gamma \in \mathbb{R}^+$  ist ein Skalierungsparameter. Der Exponent  $\alpha \in (0, 2]$  ist vor allem für das Verhalten in den Enden verantwortlich. Für  $\alpha = 2$  ergibt sich die Normalverteilung, für  $\alpha \rightarrow 0$  werden die Enden der Verteilung zunehmend breiter.

Gegen eine Modellierung von Aktienrenditen durch eine Stabile Pareto-Verteilung spricht, dass empirische Befunde in der Regel mit wachsendem Stichprobenumfang eine Konvergenz der Schätzungen höherer Momente zeigen. Da sich über längere Zeiträume berechnete Renditen als Summe von Eintagesrenditen ergeben, sind diese nach dem Zentralen Grenzwertsatz zunehmend normalverteilt. Dies wird empirisch auch beobachtet. Die Stabilität unter Summation von stabil pareto-verteilten Zufallsvariablen widerspricht somit den empirischen Befunden über die Verteilung von Mehrperiodenrenditen.

Empirische Untersuchungen zur Modellierung von Aktienrenditen durch die Stabile Pareto-Verteilung finden sich beispielsweise bei Mandelbrot [83] und Tucker [110].

## 3.2 Modelle unter der Annahme abhängiger Renditen

Bei zeitabhängigen Modellen für die Renditen sind unbedingte und bedingte Renditeverteilung nicht mehr identisch. Deshalb sind nun bedingte Renditeverteilungen zu modellieren.

### 3.2.1 Zeitstetige Modelle

Bei der Geometrischen Brownschen Bewegung sind Drift und Volatilität als zeitunabhängig angenommen. Eine Verallgemeinerung dieses Modells kann in Richtung

zeitabhängigem Drift und/oder zeitabhängiger Volatilität erfolgen. In der Literatur werden allerdings eher die Modelle mit zeitabhängiger Volatilität diskutiert, da die Volatilität in den Optionspreisformeln von Black und Scholes, die auf der Geometrischen Brownschen Bewegung beruhen, eine zentrale Rolle einnimmt. Mit der Berücksichtigung zeitabhängiger Volatilitäten wird eine bessere Beschreibung von Optionsmarktpreisen durch die in einem Optionspreismodell bestimmten Preise erwartet.

Mit einer zeitabhängigen Volatilität kann zusätzlich der Effekt des Volatilitätsclustering berücksichtigt werden.

### Zeitabhängiger Drift

Modelle mit zeitabhängigem Drift wurden beispielsweise von Lo und Wang (vgl. Campbell et al. [26], S. 371 ff.) untersucht. Diese Autoren haben mehrere Alternativen zur Geometrischen Brownschen Bewegung als Modelle für die Aktienkursdynamik vorgeschlagen. Der *Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit Trend* stellt eine solche Alternative dar. Für den logarithmierten Aktienkurs  $H(t) = \ln S(t)$  schreibt sich dieser Prozess in der Form

$$d(H(t) - \mu t) = -\gamma (H(t) - \mu t) dt + \sigma dW(t)$$

mit  $dW(t) \sim i.i.d. N(0, dt)$  und  $\gamma \geq 0$ . Falls  $H(t)$  vom Trend  $\mu t$  abweicht, erfolgt eine Anpassung an diesen Trend mit Anpassungsrate  $\gamma$ . Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (ohne Trend) ist der einzige Prozess mit unabhängig und identisch normalverteilten Inkrementen  $dW(t)$ , der stationär ist (vgl. Gardiner [50], S. 77). Durch Berücksichtigung eines Trends wird er nicht stationär.

Als Optionspreisformeln ergeben sich die Black-Scholes-Formeln mit modifizierter Volatilität, die für die vorgestellte Kursdynamik zu höheren Optionspreisen führen als die Black-Scholes-Formel.

Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit Trend zeigt nicht verschwindende Autokorrelationen für Renditen. Lo und Wang haben verschiedene Modelle untersucht, die zu verschiedenen funktionalen Zusammenhängen für die Autokorrelationsfunktionen führen.

### Zeitabhängige Volatilität

Das bekannteste zeitstetige Modell mit einer zeitabhängigen Volatilität ist dasjenige von Hull und White [63]. Sie postulieren für den Aktienkurs eine Dynamik der Form

$$dS(t) = \mu S(t) dt + S(t) \sigma(t) dW_1(t)$$

mit  $dW_1(t) \sim i.i.d. N(0, dt)$  und Driftparameter  $\mu$  und für die Volatilität  $\sigma(t)$  einen stochastischen Prozess in der Form eines *Mean-Reverting-Prozesses* (vgl. Shimko [106], S. 12)

$$d\sigma^2(t) = a (b - \sigma^2(t)) dt + \xi [\sigma^2(t)]^\alpha dW_2(t)$$

mit  $dW_2(t) \sim i.i.d. N(0, dt)$ . Die Prozesse  $dW_1(t)$  und  $dW_2(t)$  weisen dabei eine Korrelation  $\rho$  auf. Für die spezielle Wahl  $\alpha = 1/2$  geht der Prozess für den Kurs in den

*Square-Root-Prozess* über, der von Cox, Ingersoll und Ross [31] als Modell für die Zinssatzdynamik vorgeschlagen wurde.

Die Parameterschätzung für den stochastischen Prozess, der zur Modellierung von  $\sigma^2(t)$  unterstellt wird, gestaltet sich schwierig, da dessen Realisierungen nicht beobachtet werden können. Sind Aktienkurs und stochastische Volatilität unkorreliert ( $\rho = 0$ ), kann eine geschlossene Optionspreisformel für die Bewertung europäischer Optionen abgeleitet werden.

Sind Aktienkurs und stochastische Volatilität korreliert ( $\rho \neq 0$ ), ergibt sich kein einfaches Resultat für den Optionspreis europäischer Optionen. Für den Spezialfall  $\alpha = 1/2$  geben Hull und White [62] eine Potenzreihenentwicklung für den Optionspreis an. Heaton [57] leitet ebenfalls für  $\alpha = 1/2$  eine geschlossene Optionspreisformel ab.

Wird statt dem oben beschriebenen stochastischen Ansatz zur Modellierung von  $\sigma(t)$  ein rein deterministischer Ansatz zur Modellierung verwendet, so ändern sich die Black-Scholes-Formeln nur dahingehend, dass als „neue“ Volatilität das Integral über die Volatilität vom Bewertungszeitpunkt  $t$  bis zum Verfall  $T$ , das heisst  $\int_t^T \sigma(s) ds$ , einzusetzen ist.

### 3.2.2 Zeitdiskrete Modelle

Für eine zeitabhängige diskrete Modellierung der Volatilität existiert eine Vielzahl von Modellen. Eine zeitdiskrete Modellformulierung korrespondiert dabei mit einer nur zeitdiskreten Beobachtungsmöglichkeit von Kursen und Renditen.

#### ARCH- und GARCH-Modelle

Allen *ARCH-Modellen* (ARCH = Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) und *GARCH-Modellen* (GARCH = Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) liegt eine einheitliche Struktur für die Modellierung der Renditen zugrunde:

$$r_t = \sigma_t v_t ,$$

wobei es sich bei  $v_t$  um eine unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert  $E[v_t] = 0$  und Varianz  $E[v_t^2] = 1$  handelt.

Die zeitabhängige bedingte Varianz  $\sigma_t^2$  ergibt sich als Funktion der Zeit  $t$ , vergangener Renditen  $r_{t-1}, \dots, r_{t-p}$  und vergangener Varianzen  $\sigma_{t-1}^2, \dots, \sigma_{t-q}^2$ :

$$\sigma_t^2 = F(t, r_{t-1}, \dots, r_{t-p}, \sigma_{t-1}^2, \dots, \sigma_{t-q}^2) .$$

Je nach Spezifikation der Funktion  $F$  und der Verteilung von  $v_t$  gegeben  $r_{t-1}, \dots, r_{t-p}$  ergeben sich unterschiedliche Modelle. Oft wird für die Verteilung von  $v_t$  eine Normalverteilung unterstellt, was aber zur Folge hat, dass die Verteilung von  $r_t$  eine

Verteilung mit breiteren Enden als diejenigen der Normalverteilung ist.

Der *ARCH(p)-Ansatz* nach Engle [48] ist das klassische zeitabhängige Modell für die Volatilität beziehungsweise Varianz:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p r_{t-p}^2,$$

wobei  $\alpha_0 > 0$  und  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \geq 0$ . Der Prozess für  $\sigma_t^2$  besitzt somit ein Gedächtnis über  $p$  Zeitperioden.

Beim *Sprung-Prozess-ARCH* wird ein ARCH-Prozess mit einem Poisson-Prozess kombiniert (vgl. Jorion [69]). Die Motivation für solch eine Modellierung ist analog zu derjenigen des Sprung-Diffusions-Prozesses nach Merton (vgl. Abschnitt 3.1.1). Die Rendite wird modelliert über

$$r_t = \sigma_t v_t + \sum_{i=1}^n \ln Y_i,$$

wobei  $v_t \sim i.i.d. N(0, 1)$ . Die Zufallsvariablen  $Y_i$  beschreiben die Sprunghöhe von zufällig auftretenden Kurssprüngen. Der Logarithmus von  $Y_i$  wird als normalverteilt angenommen, das heisst  $\ln Y_i \sim i.i.d. N(\theta, \delta^2)$ .  $n$  beschreibt die Anzahl von Kurssprüngen und wird als poissonverteilte Zufallsvariable mit Parameter  $\lambda t$  modelliert.  $\lambda$  ist die mittlere Anzahl Sprünge pro Zeiteinheit. Die Varianz  $\sigma_t^2$  wird als ARCH(1)-Prozess  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2$  modelliert.

Eine Verallgemeinerung der ARCH-Prozesse stellen die GARCH( $p, q$ )-Prozesse dar, bei denen die Varianz  $\sigma_t^2$  zusätzlich von vergangenen Varianzen zu den Zeitpunkten  $t-1, \dots, t-q$  abhängt:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 = \alpha_0 &+ \alpha_1 r_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p r_{t-p}^2 \\ &+ \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \sigma_{t-q}^2 \end{aligned}$$

mit  $\alpha_0 > 0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q \geq 0$ .

Die klassische Version des GARCH-Modells ist diejenige von Bollerslev [15] mit  $p = q = 1$  und normalverteilten  $v_t$  (*Normal-GARCH*). Eine empirische Untersuchung dieses Modells für schweizerische Finanzmärkte hat Wasserfallen [112] vorgenommen. Daneben existiert eine Vielzahl von Modellspezifikationen, die sich bezüglich der Verteilung von  $v_t$  unterscheiden. Als *t-GARCH* nach Bollerslev [14] wird ein Modell bezeichnet, in welchem eine Student t-Verteilung zur Modellierung von  $v_t$  verwendet wird. Weitere Modellspezifikationen für  $v_t$  bestehen in einer Verwendung der verallgemeinerten Fehlerverteilung (Generalized Error Distribution), sogenannte *GED-GARCH-Modelle* nach Nelson [88], oder durch nicht parametrische Schätzung der Verteilung von  $v_t$  durch Engle und Gonzales-Rivera [47].

Der *Integrated GARCH-Prozess* (IGARCH, vgl. Nelson [88]) ist ein Normal-GARCH( $p, q$ )-Prozess mit einer speziellen Bedingung an die Parameter:

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{i=1}^q \beta_i = 1.$$

Die Varianz der unbedingten Renditeverteilung ist dann nicht endlich, das heisst es liegt eine fat-tailed Verteilung vor. Zusätzlich ist der Prozess für  $r_t$  und  $r_t^2$  nicht stationär.

Der *asymmetrische GARCH-Prozess* (AGARCH, vgl. Alexander [1], S. 244) soll eine bessere Beschreibung von empirischen Renditeverteilungen bezüglich ihrer Schiefe und ihrer breiten Enden ermöglichen. Die breiten Enden dieser Verteilungen werden durch eine Student t-Verteilung für  $v_t$  modelliert. Um die Schiefe besser berücksichtigen zu können, wird ein zusätzlicher Parameter  $\xi$  eingeführt. Das asymmetrische GARCH(1,1)-Modell beispielsweise ist dann gegeben durch:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 (r_{t-1} - \xi)^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2,$$

wobei  $\alpha_0 > 0$  und  $\alpha_1, \beta_1, \xi \geq 0$ .

Damit die bedingte Varianz immer positiv bleibt, durften in den vorigen Modellen nur positive Parameter auftreten, was eine Beschränkung der Dynamik bedeutet. Deshalb hat Nelson [88] einen *exponentiellen GARCH-Prozess* (EGARCH) der Form

$$\log \sigma_t^2 = \alpha + g(z_{t-1}) + \beta \log \sigma_{t-1}^2$$

vorgeschlagen, wobei  $z_t = r_t/\sigma_t$  und  $g(z_t)$  mit Koeffizienten  $w$  und  $\lambda$  gegeben ist durch

$$g(z_t) = w z_t + \lambda(|z_t| - \sqrt{2/\pi}).$$

Weitere Verallgemeinerungen des ARCH- und GARCH-Modells sind etwa *Factor ARCH* (vgl. Alexander [1], S. 246), *Cross Market GARCH* beziehungsweise *Multivariate GARCH* (vgl. Campbell et al. [26], S. 490 ff.), das *Komponenten Modell* (vgl. Alexander [1], S. 245) und der *GARCH-M-Prozess* (GARCH in Mean, vgl. Campbell et al. [26], S. 494, Hamilton [54], S. 667).

Der Einfluss der Renditen  $r_{t-1}, \dots, r_{t-p}$  auf  $\sigma_t^2$  ist bei ARCH- und GARCH-Modellen quadratisch, was dazu führen kann, dass Tage mit hohen absoluten Renditen bei der Parameterschätzung Instabilitäten verursachen. Methoden zur Parameterschätzung in ARCH- und GARCH-Modellen sind in Hamilton (vgl. Hamilton [54], S. 660 ff. und S. 665 ff.) und Gouriéroux (vgl. Gouriéroux [53], S. 43 ff.) dargestellt. In vielen Softwarepaketen zur Behandlung ökonometrischer Fragestellungen sind Routinen zur ARCH- und GARCH-Modellierung bereits aufgenommen worden (vgl. Alexander [1], S. 246). So stellt zum Beispiel SAS solche Routinen zur Verfügung.

### Ein weiteres Modell mit zeitabhängiger Volatilität

Ein weiteres Modell mit zeitabhängiger Volatilität ist das Modell der *Regime Switching Volatility* (vgl. Hamilton [54], S. 667 ff.).

Beim Regime Switching Volatility Modell sind für bestimmte Zeitperioden verschiedene „Varianzniveaus“ zugelassen, beispielsweise zwei mögliche Niveaus  $\sigma_a^2$  und  $\sigma_b^2$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass die Varianz zur Zeit  $t+1$  den Wert  $\sigma_{t+1}^2 = \sigma_b^2$  annimmt, gegeben die Varianz zur Zeit  $t$  war  $\sigma_t^2 = \sigma_a^2$ , ist  $P(\sigma_{t+1}^2 = \sigma_b^2 | \sigma_t^2 = \sigma_a^2) = \Pi_{ab}$ . Es ist daher eine ganze Matrix von solchen Übergangswahrscheinlichkeiten zu schätzen:

$$\begin{pmatrix} \Pi_{aa} & \Pi_{ab} \\ \Pi_{ba} & \Pi_{bb} \end{pmatrix}.$$

### Zeitabhängige Modellierung in RiskMetrics<sup>TM</sup>

Bei den Modellen, die von J. P. Morgan [65] in ihrem RiskMetrics<sup>TM</sup>-Paket zur Messung von Marktrisiken vorgestellt werden, handelt es sich um bereits diskutierte Modelle: der *Standard-RiskMetrics-Ansatz* (vgl. [65], S. 73) ist im wesentlichen ein GARCH(1,1)-Modell, das *RiskMetrics-GED-Modell* (vgl. [65], S. 238 f.) ist ein GED-GARCH-Ansatz. Der *Normal-Mixture-Ansatz* (vgl. [65], S. 237 f.) ist eine einfache Verallgemeinerung des Modells der Mischung zweier Normalverteilungen mit nun zeitabhängigen Volatilitäten. In den Beispielen in RiskMetrics<sup>TM</sup> zu diesem Modell werden allerdings nur konstante Volatilitäten verwendet.

## 3.3 Modellwahl

Folgende Modelle wurden für die weiteren Untersuchungen ausgewählt: Geometrische Brownsche Bewegung, Sprung-Diffusions-Prozess und hyperbolische Verteilung.

Diese zeitstetig formulierten Modelle beruhen alle auf der Annahme, dass die Renditen zeitlich unabhängig sind. Daraus folgt, dass bedingte und unbedingte Renditeverteilungen identisch sind. Die ausgewählten Modelle nehmen nicht nur unabhängige, sondern auch identisch verteilte Renditen an. Sie postulieren darüber hinaus eine endliche Varianz der Renditeverteilung, so dass im engeren Sinne Modellverteilungen untersucht werden, die höchstens semi-fat-tailed sind.

Für die Auswahl dieser drei Modelle lassen sich mehrere Argumente anführen. So hat die empirische Studie in Kapitel 2 ergeben, dass zumindest für gewisse Zeitperioden die Hypothese unabhängig und identisch verteilter Renditen nicht verworfen werden kann. Diese Annahme erleichtert vor allem die Anwendung dieser Modelle in der Praxis. So können die Modellparameter jeweils mit der Maximum-Likelihood-Methode aus historischen Daten geschätzt werden.



Auf eine Auswahl von Modellen mit zeitabhängiger Volatilität wurde verzichtet. Bei der Risikomessung wird es vor allem auf extreme Ereignisse ankommen, also auf Renditen in den Enden einer Renditeverteilung. Deshalb steht eine Modellierung vor allem dieser Enden im Vordergrund, was mit den ausgewählten Modellen sehr viel direkter möglich ist als mit Modellen, die eine zeitabhängige Volatilität berücksichtigen. Der Grund dafür ist darin zu sehen, dass bei letzteren Modellen die Verteilung der Renditen durch die Wahl eines Modells für die Volatilität und durch die Wahl der Verteilung von  $v_t$  beeinflusst wird.

Die Geometrische Brownsche Bewegung ist das Standardmodell zur Modellierung von Finanzmarktdaten. Es setzt den Benchmark, mit dem andere Ansätze verglichen werden können. Die sich aus diesem Modell ergebende Hypothese normalverteilter Renditen hat wichtige Konsequenzen für die praktische Umsetzung dieses Modells. So existieren analytische Ausdrücke für die Schätzfunktionen der Modellparameter und die Monte-Carlo-Simulation dieses Modells ist einfach zu implementieren.

Empirische Untersuchungen belegen die Existenz von Kurssprüngen in den Daten. Deshalb erscheint eine Erweiterung der Geometrischen Brownschen Bewegung um eine Sprungkomponente sinnvoll. Die hyperbolische Verteilung als weitere Modellalternative hat sich ebenfalls in empirischen Studien als gutes Modell zur Approximation empirischer Renditeverteilungen herausgestellt. Eine empirische Überprüfung für den schweizerischen Aktienmarkt lag aber zu Beginn der vorliegenden Arbeit nicht vor. Ebenfalls lag keine umfassende empirische Anwendung als Grundlage zur Messung von Marktrisiken vor. Dies gilt sowohl für den Sprung-Diffusions-Prozess als auch für das hyperbolische Modell. Mit der vorliegenden Arbeit wird diese Lücke geschlossen. Der Sprung-Diffusions-Prozess und die hyperbolische Verteilung implizieren zudem (semi-) fat-tailed Renditeverteilungen und sollten sich aus diesem Grund zur Modellierung empirischer Renditeverteilungen besser eignen als eine Normalverteilung, die durch die Geometrische Brownsche Bewegung impliziert wird.

Die wachsende Bedeutung derivativer Finanzinstrumente erfordert die Modellierung von Optionspreisen. Ein sehr wichtiger, wenn nicht der ausschlaggebende Grund für die getroffene Auswahl ist daher die Tatsache, dass für jedes der Modelle eine geschlossene analytische Optionspreisformel zur Bewertung europäischer Optionen existiert. Dies bedeutet insbesondere, dass zur Bewertung von Optionen keine aufwendigen Monte-Carlo-Simulationen durchzuführen sind. Die Auswahl eines der drei obigen Modelle erlaubt im Rahmen des jeweiligen Modells eine konsistente Modellierung von Aktien- und Optionskursen. Die Modellansätze können damit empirisch auf zwei Ebenen untersucht werden: zum einen durch Vergleich von Modellverteilungen und empirischen Verteilungen der Renditen des Basisinstrumentes, zum anderen durch Vergleich von theoretisch berechnetem Optionspreis und dem Marktpreis der Option.

Im folgenden Kapitel werden nun die drei ausgewählten Modelle detailliert vorgestellt.



## Kapitel 4

# Ausgewählte Finanzmarktmodelle

Dieses Kapitel beinhaltet eine ausführliche Diskussion der im vorigen Kapitel ausgewählten Finanzmarktmodelle. Es handelt sich dabei um die Geometrische Brownsche Bewegung (GBB), den Sprung-Diffusions-Prozess (SD) und das hyperbolische Modell (HYP). Eine umfassende empirische Überprüfung der Modelle anhand von Renditedaten des schweizerischen Aktien- und Optionenmarktes schliesst sich im folgenden Kapitel an.

### 4.1 Geometrische Brownsche Bewegung

Die Geometrische Brownsche Bewegung stellt das Standardmodell zur Beschreibung der zeitlichen Dynamik von Aktienkursen dar. Historisch geht dieses Modell auf Louis Bachelier zurück (vgl. Bachelier [3]). Er reichte im Jahr 1900 eine Dissertation ein, in welcher versucht wurde, Börsenkurse mit Hilfe der Brownschen Bewegung zu beschreiben. Schon damals war sein Ziel, Optionen bewerten zu können. Er begründete dieses Modell mit rein logischen Überlegungen und nicht mit empirischen Argumenten. Interessanterweise entstand diese Arbeit fünf Jahre vor einer Arbeit Albert Einsteins, in der er die Geometrische Brownsche Bewegung zur Beschreibung von Molekularbewegungen heranzog. Norbert Wiener hat dann 1923 die Geometrische Brownsche Bewegung mathematisch etabliert.

Bachelier fand Zeit seines Lebens nicht die Anerkennung, die ihm zugestanden wäre. So wurde seine heute so wichtige Arbeit von Henri Poincaré, damals einem führenden französischen Mathematiker, gerade noch zur Promotion zugelassen. Erst in den fünfziger Jahren wurde seine Arbeit wiederentdeckt und erschien 1964 in englischer Übersetzung (vgl. Bachelier [3]).

Der Durchbruch der Geometrischen Brownschen Bewegung als Modell für die Aktienpreisdynamik gelang endlich im Jahr 1973. In diesem Jahr veröffentlichten Myron Scholes und Fisher Black einerseits und Robert Merton andererseits, jeweils Arbeiten zur mathematischen Bewertung von Optionen (vgl. Black und Scholes [11], Merton [85]). Ausgangspunkt für die heute berühmte Black–Scholes–Formel ist die Modellierung der Aktienpreisdynamik mittels der Geometrischen Brownschen Bewegung. Scholes und Merton erhielten für ihre Arbeit im Jahr 1997 den Nobelpreis (Black ist 1995 verstorben, der Nobelpreis wird nicht posthum verliehen).

Rund 100 Jahre nachdem die Brownsche Bewegung postuliert wurde, hat sie nichts an Aktualität verloren. Dafür gibt es viele Gründe. Als wichtigster Grund ist zu nennen, dass die Geometrische Brownsche Bewegung normalverteilte Renditen impliziert. Dies bedeutet, dass die Parameter des Modells einfach geschätzt werden können und dass viele Resultate analytisch ableitbar sind, zum Beispiel auch Ausdrücke für bestimmte Risikomasse. Daneben sind aber auch die Schwächen dieses Modells zu erwähnen. So besitzt die Normalverteilung keine Fat Tails und die Geometrische Brownsche Bewegung beruht auf der Hypothese identisch und unabhängig verteilter Renditen.

Die vergleichsweise einfache Struktur der Geometrischen Brownschen Bewegung erlaubt es, anschaulich viele der Konzepte einzuführen, die auch bei komplexen Modellen Anwendung finden, sei es das Vorgehen bei der Parameterschätzung oder bei der Bewertung von Optionen. Aus diesem Grund werden viele dieser Vorgehensweisen in diesem Abschnitt erläutert.

Zunächst wird die Geometrische Brownsche Bewegung vorgestellt und ihre Eigenschaften diskutiert. Eine zentrale Rolle nimmt der Abschnitt über die Bewertung von Optionen ein. Die Konzepte, die dort eingeführt werden, bilden ebenso den theoretischen Rahmen für die Optionspreisbestimmung in komplexeren Modellen. Desweiteren wird auf die Parameterschätzung eingegangen, wobei ebenfalls die allgemeine Methodik vorgestellt wird. Schliesslich wird das Simulationsmodell der Geometrischen Brownschen Bewegung für die Durchführung von Monte–Carlo–Simulationen vorgestellt.

Die Geometrische Brownsche Bewegung wird in den meisten Büchern über moderne Finanzmathematik diskutiert. Empfohlen seien an dieser Stelle die Publikationen von Campbell et al. [26], Hull [60], Neftci [87] und Wilmott et al. [116].

#### 4.1.1 Die Stochastische Differentialgleichung und ihre Eigenschaften

Die Geometrische Brownsche Bewegung geht davon aus, dass sich der Preis  $S(t)$  einer Aktie oder einer anderen Anlage zum Zeitpunkt  $t$  als zeitkontinuierlicher stochastischer Prozess beschreiben lässt. Die zeitliche Entwicklung dieses Preises, also die

Aktienpreisdynamik, wird dann durch die stochastische Differentialgleichung

$$dS(t) = \alpha S(t) dt + \sigma S(t) dW(t) \quad (4.1)$$

mit  $dW(t) \sim i.i.d. N(0, dt)$  bestimmt (vgl. Neftci [87], S. 254 ff.). Die Preisänderung  $dS(t)$  setzt sich also zusammen aus einem deterministischen Teil  $\alpha S(t) dt$  und einem stochastischen Teil  $\sigma S(t) dW(t)$  mit konstanten Parametern  $\alpha$  und  $\sigma$ . Der deterministische Anteil stellt den zeitlichen Trend dar. Ohne den Zufallsprozess würde der Kurs der Aktie mit der Zeit exponentiell anwachsen. Der stochastische Anteil überlagert diesen Trend mit zufälligen Schwankungen.

Setzt man  $X(t) \equiv \alpha t + \sigma W(t)$ , so geht die Gleichung (4.1) über in

$$dS(t) = S(t) dX(t) .$$

Dies ist das stochastische Analogon zur einfachsten deterministischen Differentialgleichung

$$dy = y dx ,$$

deren Lösung bekanntlich die Exponentialfunktion ist. Es erstaunt daher nicht, dass Gleichung (4.1) ebenfalls durch eine Exponentialfunktion gelöst wird.

Um einige Eigenschaften der Geometrischen Brownschen Bewegung leicht ablesen zu können, wird die Transformation  $H(t) = \ln S(t)$  durchgeführt. Die zeitliche Entwicklung von  $H(t)$  wird wieder durch eine stochastische Differentialgleichung beschrieben, die sich aus derjenigen für  $S(t)$  durch Anwendung des Itô-Lemmas (vgl. Abschnitt 1.2.9) ergibt:

$$dH(t) = \left( \alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t) . \quad (4.2)$$

Die Lösung dieser stochastischen Differentialgleichung ist gegeben durch

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \left( \alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right\} \quad (4.3)$$

mit  $W(t) \sim i.i.d. N(0, t)$  (vgl. Neftci [87], S. 254 ff.). Aus Gleichung (4.2) folgt auch, dass die logarithmischen Kursänderungen  $dH(t)$  und damit die Renditen unabhängig und identisch verteilt sind.

Anhand dieser Gleichungen können der bedingte Erwartungswert und die bedingte Varianz von  $H(t)$  respektive  $\ln S(t)$  abgelesen werden:

$$E[\ln S(t) \mid \ln S(0)] = \ln S(0) + \left( \alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t , \quad (4.4)$$

$$var[\ln S(t) \mid \ln S(0)] = \sigma^2 t . \quad (4.5)$$

Bedingter Erwartungswert und bedingte Varianz sind lineare Funktionen der Zeit, das heisst der Prozess für  $\ln S(t)$  ist nicht stationär (vgl. J. P. Morgan [65], S. 52).

Weiterhin lassen sich Aussagen über die Verteilung von  $\ln S(t)$  machen. So ist  $\ln S(t)$  normalverteilt mit obigem Erwartungswert und Varianz, das heisst

$$\ln S(t) \sim N \left( \ln S(0) + \alpha t - \frac{1}{2} \sigma^2 t, \sigma^2 t \right). \quad (4.6)$$

Dies impliziert für die Log-Rendite  $r(t) = \ln S(t) - \ln S(0)$  ebenfalls eine Normalverteilung:

$$r(t) \sim N \left( \alpha t - \frac{1}{2} \sigma^2 t, \sigma^2 t \right). \quad (4.7)$$

#### 4.1.2 Optionspreismodell

Dieser Abschnitt behandelt die Ableitung des Optionspreismodells unter der Annahme, dass sich die Aktienkurse oder andere der Option zugrundeliegende Instrumente gemäss der Geometrischen Brownschen Bewegung entwickeln. Zu den Optionspreisformeln gelangt man auf zweierlei Arten, zum einen über die Herleitung einer partiellen Differentialgleichung, zum anderen über einen Martingalansatz, dem heute eher üblichen Weg in der Finanzmathematik. Beide Konzepte bilden die Grundlage für die Bewertung von Derivaten in den nachfolgend zu diskutierenden Modellen. Desweiteren wird erläutert, was unter einer *risikoneutralen Bewertung* zu verstehen ist.

##### Die partielle Differentialgleichung von Black und Scholes

Die Herleitung einer Optionspreisformel, wie sie durch Black und Scholes vorgenommen wurde, beruht auf einer Reihe von Annahmen, die teilweise eine sehr starke Vereinfachung der Realität darstellen. Black selbst äusserte sich zu diesen Annahmen folgendermassen: „I sometimes wonder why people still use the Black–Scholes formula, since it is based on such simple assumptions – unrealistically simple assumptions“ (zitiert in Göing [52]). Gerade diese Annahmen führen aber auf eine erstaunlich einfache Optionspreisformel, was deren weite Verbreitung sicherlich gefördert hat. Nachfolgend seien diese Annahmen kurz erläutert (vgl. Wilmott et al. [116], S. 41 f.):

1. Die Dynamik des Aktienkurses sei durch eine Geometrische Brownsche Bewegung beschrieben. Dies stellt die fundamentale Annahme dar.
2. Es existiere ein risikoloser Zinssatz  $r$ , zu dem unbegrenzt finanziert und investiert werden kann (Soll– gleich Haben–Zins). Die Volatilität  $\sigma$  sei über die Laufzeit der Option konstant.
3. Es erfolgen keine Dividendenzahlungen.
4. Steuern und Transaktionskosten werden nicht berücksichtigt.
5. Es existieren keine Arbitragemöglichkeiten, das heisst alle risikolosen Portfolios erzielen dieselbe Rendite.

6. Das der Option zugrundeliegende Instrument kann jederzeit in beliebigen Einheiten (nicht unbedingt ganzzahligen Einheiten) gehandelt werden. Leerverkäufe seien möglich.
7. Unterstellt wird eine europäische Option, das heisst die Ausübung ist nur am Verfalltag möglich.

Es sind vor allem zwei dieser Annahmen, die Anlass zur Kritik geben. Die erste Annahme, die in Frage gestellt werden kann, ist die Modellierung der Aktienpreisdynamik. Als Alternativen hierzu werden in dieser Arbeit weitere Modelle vorgestellt. Die zweite dieser Annahmen betrifft die Volatilität, die eine zentrale Rolle in den Optionspreisformeln von Black und Scholes einnimmt. Sie wird bei der Geometrischen Brownschen Bewegung als zeitlich konstant angenommen. Daher werden in der Literatur als Alternativen zeitabhängige Modellierungen für die Volatilität vorgeschlagen (vgl. Abschnitt 3.2).

Für die Ableitung der Optionspreisformeln sei der Wert der Option in Abhängigkeit vom Aktienkurs  $S(t)$  und der Zeit  $t$  mit  $V(S, t)$  bezeichnet (vgl. Neftci [87], S. 237 ff. und S. 254 ff., Wilmott et al. [116], S. 42 ff.). Wird die Dynamik der Aktienkurse durch die Geometrische Brownsche Bewegung (4.1) bestimmt, so kann mit Hilfe des Itô-Lemmas die Dynamik der Optionspreise angegeben werden (vgl. [116], S. 42):

$$\frac{dV(S, t)}{V(S, t)} = \alpha_V dt + \sigma_V dW(t) \quad (4.8)$$

mit

$$\alpha_V = \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \alpha S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t}}{V(S, t)}, \quad (4.9)$$

$$\sigma_V = \frac{\sigma S \frac{\partial V}{\partial S}}{V(S, t)}. \quad (4.10)$$

$dV(S, t)/V(S, t)$  ist das Verhältnis der Änderung des Optionspreises  $dV$  und dem Optionspreis  $V$  und somit als Rendite zu interpretieren. Es handelt sich bei der Dynamik für  $V(S, t)$  um einen Diffusionsprozess mit etwas komplizierteren Koeffizienten als bei der Aktienkursdynamik. Die Idee von Black und Scholes bestand nun darin, ein Portfolio zu konstruieren, bestehend aus einer Aktie mit Anteil  $w_1$ , einer Option auf diese Aktie mit Anteil  $w_2$  und einer risikolosen Anlage mit Anteil  $w_3$  am Gesamtportfolio. Für die Anteile  $w_j$  gilt:  $\sum_{j=1}^3 w_j = 1$ .

Auch für die Dynamik des Portfoliowertes  $P(t)$  kann die Zeitentwicklungsgleichung angegeben werden (vgl. [116], S. 43):

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = \alpha_P dt + \sigma_P dW(t) \quad (4.11)$$

mit

$$\alpha_P = w_1\alpha + w_2\alpha_V + w_3r = w_1(\alpha - r) + w_2(\alpha_V - r) + r, \quad (4.12)$$

$$\sigma_P = w_1\sigma + w_2\sigma_V + w_3\sigma_r. \quad (4.13)$$

Dabei ist die Volatilität  $\sigma_r$  des risikolosen Zinssatzes  $r$  gleich Null, da es sich um eine risikolose Anlage handelt. Gemäss Gleichung (4.11) setzt sich die Portfoliorendite zusammen aus der erwarteten Rendite im Zeitintervall  $\alpha_P dt$  und einer zufälligen Komponente  $\sigma_P dW(t)$ , die als unsicher, das heisst risikobehaftet zu betrachten ist. Durch geeignete Wahl der Anteile  $w_1$  und  $w_2$  lässt sich dieses Portfolio risikolos gestalten beziehungsweise der Zufall „ausschalten“. Man wähle daher  $w_1 = w_1^*$  und  $w_2 = w_2^*$  so, dass

$$\sigma_P = w_1^* \sigma + w_2^* \sigma_V = 0. \quad (4.14)$$

Das risikolose Portfolio erzielt dann die Rendite  $\alpha_P$ . Diese Rendite muss gleich dem risikolosen Zinssatz  $r$  sein:  $\alpha_P = r$ . Die Begründung hierfür liefert das *No-Arbitrage-Argument*. Falls  $\alpha_P > r$  ist, würde ein Investor sich Geld zum Zinssatz  $r$  leihen und ins Portfolio investieren. Falls  $\alpha_P < r$ , würde er dagegen Geld zum Zinssatz  $r$  anlegen. Das Vorhandensein solcher Arbitragemöglichkeiten führt dazu, dass sich die Renditen durch Marktmechanismen angleichen. Aus Gleichungen (4.12) und (4.13) folgt dann

$$\frac{\alpha_V - r}{\sigma_V} = \frac{\alpha - r}{\sigma}. \quad (4.15)$$

Einsetzen dieser Beziehung in die Gleichungen für  $\alpha_V$  und  $\sigma_V$  führt auf die parabolische partielle Differentialgleichung von Black und Scholes (vgl. Black und Scholes [11], Neftci [87], S. 255):

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} + \frac{\partial V(S, t)}{\partial t} + rS \frac{\partial V(S, t)}{\partial S} - rV(S, t) = 0. \quad (4.16)$$

Es handelt sich hierbei um einen Spezialfall der aus der Physik bekannten Differentialgleichung der Wärmeausbreitung und Diffusion in einem Medium (vgl. Bronstein und Semendjajew [20], S. 476).

Zusätzlich sind zur Lösung der Differentialgleichung Rand- und Anfangsbedingungen zu stellen. Für eine europäische Call-Option  $V(S, t) = C(S, t)$  ist als Bedingung für den Verfallzeitpunkt  $T$

$$C(S, T) = \max\{S(T) - K, 0\}$$

zu fordern, für einen europäischen Put  $V(S, t) = P(S, t)$

$$P(S, T) = \max\{K - S(T), 0\},$$

wobei  $K$  jeweils den Ausübungspreis bezeichnet.

Partielle Differentialgleichungen vom Typ der Differentialgleichung (4.16) lassen sich mittels numerischer Verfahren approximativ lösen (vgl. als Einführung Neftci [87],



S. 268 ff.). Bei den gegebenen Randbedingungen existiert aber auch eine analytische Lösung. Es ergibt sich (vgl. Black und Scholes [11], Neftci [87], S. 255)

$$C(S, t) = S N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (4.17)$$

$$P(S, t) = S (N(d_1) - 1) - K e^{-r(T-t)} (N(d_2) - 1), \quad (4.18)$$

wobei

$$(1) \quad N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-1/2 x^2} dx,$$

$$(2) \quad d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + 1/2 \sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}},$$

$$(3) \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T-t}.$$

Durch Angabe anderer Randbedingungen lassen sich weitere Typen von Optionen bewerten. Für amerikanische Optionen, das heisst für Optionen, die jederzeit vor dem Verfall ausgeübt werden können, existiert ebenfalls eine geschlossene Lösung (vgl. Hull [60], S. 259). Für exotische Optionen kann zumindest eine numerische Lösung berechnet werden (vgl. Neftci [87], S. 263 ff.). Eine Erweiterung der Black-Scholes-Formel für europäische Optionen auf kontinuierliche und diskrete Dividendenzahlungen ist ebenfalls möglich (vgl. Wilmott et al. [116], S. 90 ff.).

### Risikoneutrale Bewertung

Erstaunliches Ergebnis der Black-Scholes-Analyse ist, dass in Gleichung (4.16) und in deren Lösungen keine Grössen eingehen, die durch die Risikoeinstellung eines Investors beeinflusst werden. Die Grössen *Aktienkurs*, *Zeit*, *Volatilität* und *Zinssatz* hängen nicht von der Präferenz des Anlegers ab, wohl aber die erwartete Rendite. Diese geht aber gerade nicht in die erwähnten Gleichungen ein.

Daraus lässt sich folgender Gedankengang ableiten (vgl. Hull [60], S. 239 ff.). Die Risikopräferenz geht nicht in die partielle Differentialgleichung ein und beeinflusst damit auch nicht deren Lösung. Man kann also jede beliebige Art der Risikoeinstellung für einen Investor unterstellen. Die einfachste Annahme ist, dass alle Investoren risikoneutral sind. Man befindet sich also in einer „risikoneutralen Welt“. Dies hat zwei Konsequenzen. Erstens muss die erwartete Rendite einer Investition gleich dem risikolosen Zinssatz sein, da ein Anleger keine Risikoprämie fordert. Zweitens ergibt sich der Gegenwartswert einer zukünftigen erwarteten Rendite durch Abzinsen derselben mit dem risikolosen Zinssatz als Diskontierungssatz.

### Martingalansatz

Ein steigendes Interesse an Optionen und deren Bewertung hat dazu geführt, dass sich auch die Mathematik vermehrt mit der Bewertung von Derivaten befasst. In der modernen Finanzmathematik wird heute allerdings ein anderer Ansatz, der sogenannte

*Martingalanatz*, gewählt, um zur Black-Scholes-Formel zu gelangen (vgl. Campbell et al. [26], S. 354 f., Neftci [87], S. 305 ff.). Dieser Ansatz hat auch für alternative Optionspreismodelle Bedeutung und wird deshalb hier eingeführt.

Als Annahmen für die Bewertung einer europäischen Option gelten die auf Seite 66 geschilderten. Insbesondere wird die Geometrische Brownsche Bewegung für die Aktienkursdynamik unterstellt.

Der Wert der Option  $V(S, T)$  zum Verfallzeitpunkt  $T$  ist eine zufällige Grösse. Dies liegt daran, dass der Aktienkurs als Zufallsvariable modelliert wird und dieser Kurs am Verfalltag zu einem früheren Zeitpunkt noch ungewiss ist. Für den Wert einer Call-Option zum Zeitpunkt  $T$  gilt

$$C(S, T) = \max\{S(T) - K, 0\}, \quad (4.19)$$

für einen Put

$$P(S, T) = \max\{K - S(T), 0\}. \quad (4.20)$$

Es sind dies gerade die Randbedingungen der Differentialgleichung von Black und Scholes.

Der Wert der Option zu einem früheren Zeitpunkt  $t < T$  ergibt sich dann durch (zeitkontinuierliche) Abzinsung des bedingten Erwartungswertes von Gleichung (4.19) beziehungsweise (4.20) mit dem risikolosen Zinssatz  $r$ . Für einen Call ist

$$C(S, t) = E_P[e^{-r(T-t)} \max\{S(T) - K, 0\} | S(t)] \quad (4.21)$$

zu bestimmen. Die Überlegungen für einen Put verlaufen analog und werden daher nicht weiter verfolgt. Als Wahrscheinlichkeitsmass  $P$  wird die bedingte Verteilung von  $S(t)$  gemäss Geometrischer Brownscher Bewegung verwendet. Danach ist  $S(T)$  lognormalverteilt mit bedingtem Erwartungswert

$$E_P[S(T) | S(t)] = S(t) e^{\alpha(T-t)}. \quad (4.22)$$

Dies hat wichtige Konsequenzen für den abgezinste Preisprozess  $S(t) e^{-rt}$ . So ist der abgezinste bedingte Erwartungswert von  $S(T)$  unter dem Mass  $P$  gegeben durch

$$E_P[e^{-r(T-t)} S(T) | S(t)] = S(t) e^{(\alpha-r)(T-t)}. \quad (4.23)$$

Für  $\alpha > r$  ist dies ein Submartingal, für  $\alpha < r$  ein Supermartingal. Aus Gleichung (4.23) folgt, dass die erwartete Rendite nicht unbedingt gleich dem risikolosen Zinssatz ist. Dies stellt einen Widerspruch zur Annahme einer risikoneutralen Welt dar, in welcher alle Anlagen die gleiche risikolose Verzinsung ergeben müssen.

Dieser Widerspruch wird durch den Übergang zu einem neuen Wahrscheinlichkeitsmass  $P^*$  aufgelöst, welches sicherstellt, dass die Bedingung einer risikoneutralen Welt erfüllt ist. Mathematisch gesehen wird der Übergang von Mass  $P$  zu Mass  $P^*$  durch

das *Girsanov-Theorem* beschrieben (vgl. Neftci [87], S. 290 ff.), was im vorliegenden Fall durch eine Ersetzung von  $\alpha$  durch den risikolosen Zinssatz  $r$  erfolgt. Die adjustierte Aktienkursdynamik ist also gegeben durch eine Geometrische Brownsche Bewegung, bei der der Drift  $\alpha S$  durch  $r S$  ersetzt wird.

Das Mass  $P^*$  lässt sich durch die bedingte Verteilung von  $S(T)$  charakterisieren. Es handelt sich um eine lognormale Verteilung mit bedingtem Erwartungswert

$$E_{P^*}[S(T)|S(t)] = S(t) e^{r(T-t)}. \quad (4.24)$$

Für den diskontierten Preisprozess  $S(t) e^{-rt}$  gilt unter diesem Mass

$$E_{P^*}[e^{-r(T-t)} S(T)|S(t)] = S(t), \quad (4.25)$$

das heisst es handelt sich nun um ein Martingal. Das adjustierte Mass  $P^*$  wird deshalb auch als *äquivalentes Martingalmass* bezeichnet und die hier vorgestellte Bewertungstechnik bezieht ihren Namen aus dieser Eigenschaft. Die erwartete Rendite ist somit gleich dem risikolosen Zinssatz.

Der Wert der Call-Option ergibt sich nun als Erwartungswert bezüglich dem Mass  $P^*$ :

$$C(S, t) = E_{P^*}[e^{-r(T-t)} \max\{S(T) - K, 0\} | S(t)]. \quad (4.26)$$

Soll die Option zum heutigen Zeitpunkt  $t = 0$  bewertet werden, ist der zugehörige Aktienkurs  $S(t = 0)$  bekannt und der bedingte Erwartungswert in Gleichung (4.26) kann durch einen unbedingten Erwartungswert ersetzt werden:

$$\begin{aligned} C(S, t = 0) &= E_{P^*}[e^{-rT} \max\{S(T) - K, 0\}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} \max\{S(T) - K, 0\} f(y(T)) dy(T) \end{aligned} \quad (4.27)$$

mit

$$f(y(T)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 T} \left( y(T) - \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \right)^2 \right\} \quad (4.28)$$

und

$$S(T) = S(0)e^{Y(T)}.$$

Die Zufallsvariable  $Y(T)$  ist dabei normalverteilt mit Erwartungswert  $(r - 1/2 \sigma^2)T$  und Varianz  $\sigma^2 T$ . Alle weiteren Berechnungen stellen Integrationen dar und münden in den bereits bekannten Black-Scholes-Formeln (vgl. Neftci [87], S. 306 ff.). Im übrigen kann gezeigt werden, dass die Herleitung der Optionspreisformel über eine partielle Differentialgleichung und der Martingalansatz äquivalent sind (vgl. Neftci [87], S. 311 ff.).

Die Analyse von Black und Scholes über eine partielle Differentialgleichung ist sicherlich der ökonomisch anschaulichere Weg zur Herleitung von Optionspreisformeln. So

sind zum Beispiel Portfolios zu bilden und Arbitrageargumente einzusetzen. Schwierig ist allerdings der Zugang zu partiellen Differentialgleichungen. Der Martingalansatz ist dagegen mathematisch eleganter. Problempunkt ist hier das Auffinden des äquivalenten Martingalmasses  $P^*$ . In diesem Sinne kann keiner der Ansätze dem jeweils anderen vorgezogen werden.

### 4.1.3 Parameterschätzung

Zunächst wird das allgemeine Vorgehen zur Parameterschätzung in zeitkontinuierlichen Modellen vorgestellt. Es handelt sich dabei um das Konzept der Maximum-Likelihood-Schätzung. Auf dieser Grundlage können anschliessend die Parameter eines speziellen Modells geschätzt werden. Die Ausführungen orientieren sich an Campbell et al. (vgl. [26], S. 356 ff.)

#### Allgemeines Vorgehen in zeitkontinuierlichen Modellen

Als Ausgangspunkt wird eine allgemeine stochastische Differentialgleichung als Modell für die Dynamik des Aktienpreises  $S(t)$  betrachtet:

$$dS(t) = b(S(t), t; \alpha) dt + a(S(t), t; \beta) dW(t) \quad (4.29)$$

mit  $dW(t) \sim i.i.d. N(0, dt)$ . Die Koeffizientenfunktionen  $a$  und  $b$  hängen dabei unter anderem von den zu schätzenden Parametern  $\alpha$  und  $\beta$  ab. Diese werden zum Parametervektor  $\theta = (\alpha, \beta)'$  zusammengefasst. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die Koeffizientenfunktionen nur vom aktuellen Kurs  $S(t)$  abhängen, das heisst die Lösung der Differentialgleichung ein Markov-Prozess ist.

Gesucht ist eine Schätzung  $\hat{\theta}$  für den Parametervektor  $\theta$ . Dazu wird die Maximum-Likelihood-Methode angewandt. Zu diesem Zweck liege eine Stichprobe  $S_0, \dots, S_n$  beziehungsweise  $S_{t_0}, \dots, S_{t_n}$  von  $n+1$  Kursen zu den Zeitpunkten  $t_0, \dots, t_n$  vor.

Die zugehörige Dichtefunktion  $f(S_0, \dots, S_n; \theta)$  kann wegen der geforderten Markov-Eigenschaft auch als Produkt der marginalen Dichte  $f(S_0; \theta)$  von  $S_0$  und den Übergangswahrscheinlichkeiten  $f(S_k, t_k | S_{k-1}, t_{k-1}; \theta)$  ( $k = 1, \dots, n$ ) geschrieben werden:

$$f(S_0, \dots, S_n; \theta) = f(S_0; \theta) \prod_{k=1}^n f(S_k, t_k | S_{k-1}, t_{k-1}; \theta). \quad (4.30)$$

Aus Gleichung (4.30) lässt sich die Log-Likelihood-Funktion

$$\begin{aligned} \ln L(\theta) &= \ln \{f(S_0, \dots, S_n; \theta)\} \\ &= \ln f_0(S_0; \theta) + \sum_{k=1}^n \ln f(S_k, t_k | S_{k-1}, t_{k-1}; \theta) \end{aligned} \quad (4.31)$$

ableiten. Dies führt auf den Maximum-Likelihood-Schätzer

$$\hat{\theta} = \max_{\theta} \{\ln L(\theta)\}. \quad (4.32)$$

Über die statistischen Eigenschaften dieses Schätzers lässt sich folgendes aussagen. Unter schwachen Regularitätsbedingungen gilt, dass  $\hat{\theta}$  konsistent und asymptotisch normalverteilt ist, das heisst für  $n \rightarrow \infty$  gilt

$$\sqrt{n} (\hat{\theta} - \theta) \sim N(0, I^{-1}(\theta))$$

mit Informationsmatrix

$$I(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} -E \left[ \frac{1}{n} \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right].$$

Unter die erwähnten Regularitätsbedingungen fällt insbesondere die Forderung eines stationären stochastischen Prozesses.

Der obige Zusammenhang besagt unter anderem, dass für  $n \rightarrow \infty$   $\text{var}[\hat{\theta}] \approx 1/n I^{-1}(\theta)$ . Die Informationsmatrix  $I(\theta)$  lässt sich durch

$$\hat{I}(\theta) = \frac{1}{n} \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \Big|_{\theta=\hat{\theta}}$$

schätzen. Eine Maximum-Likelihood-Schätzung ist nur dann möglich, wenn die Log-Likelihood-Funktion in geschlossener Form darstellbar ist, was im wesentlichen von der Gestalt der Koeffizientenfunktionen abhängt. Es lässt sich eine Bedingung angeben, ob eine Maximum-Likelihood-Schätzung möglich ist oder nicht. Folgt die Dynamik von  $S(t)$  der stochastischen Differentialgleichung (4.29) und handelt es sich dabei um einen Markov-Prozess, so kann für die Übergangswahrscheinlichkeit  $f(S(t), t | S(t_0), t_0)$  ( $t > t_0$ ) eine zur stochastischen Differentialgleichung äquivalente Differentialgleichung aufgestellt werden, die sogenannte *Fokker-Planck-Gleichung* (vgl. Honerkamp [58], S. 86):

$$\frac{\partial f(S(t), t | S(t_0), t_0)}{\partial t} = - \frac{\partial (a f(S(t), t | S(t_0), t_0))}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (b^2 f(S(t), t | S(t_0), t_0))}{\partial S^2} \quad (4.33)$$

mit Anfangsbedingung  $f(S(t), t | S(t_0), t_0) = \delta(S(t) - S(t_0))$ , wobei  $\delta$  die Dirac-Delta-Funktion bezeichnet. Ist die Differentialgleichung (4.33) explizit lösbar, ist eine Maximum-Likelihood-Schätzung möglich.

### Parameterschätzung bei der Geometrischen Brownschen Bewegung

Die Geometrische Brownsche Bewegung ergibt sich aus der stochastischen Differentialgleichung (4.29), wenn für die Koeffizientenfunktionen die Spezifikationen

$$\begin{aligned} a(S(t), t; \alpha) &= \alpha S(t) \\ b(S(t), t; \beta) &= \sigma S(t) \end{aligned}$$

gewählt werden. Zu schätzen sind der Drift  $\alpha$  und die Volatilität  $\sigma$  beziehungsweise für den Prozess für  $\ln S(t)$ , der im folgenden betrachtet wird, der Parameter

$\mu \equiv (\alpha - 1/2 \sigma^2)$  (vgl. Gleichung (4.1)).

Beim Prozess  $\ln S(t)$  handelt es sich allerdings um einen nichtstationären stochastischen Prozess, so dass die im vorigen Abschnitt erwähnten Regularitätsbedingungen nicht erfüllt sind. Die Log-Renditen bilden dagegen einen stationären Prozess. Zur Schätzung des Parametervektors  $\theta$  bildet man daher zunächst eine Stichprobe der Log-Renditen  $r_k \equiv r_{t_k} = \ln S_{t_k} / \ln S_{t_{k-1}}$  und verwendet diese für eine Maximum-Likelihood-Schätzung. Die Renditen sind normalverteilt,  $r \sim N(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$  mit  $\Delta t = (t_n - t_0)/n$ , wodurch die Log-Likelihood-Funktion bei gegebener Stichprobe  $r_1, \dots, r_n$  gegeben ist durch

$$\ln L(\theta | r_1, \dots, r_n) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2 \Delta t) - \frac{1}{2\sigma^2 \Delta t} \sum_{k=1}^n (r_k - \mu \Delta t)^2. \quad (4.34)$$

Die Maximum-Likelihood-Schätzer für  $\mu$  und  $\sigma^2$  sind schliesslich gegeben durch

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n \Delta t} \sum_{k=1}^n r_k \quad (4.35)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n \Delta t} \sum_{k=1}^n (r_k - \hat{\mu} \Delta t)^2. \quad (4.36)$$

Ein grosser Vorteil der Geometrischen Brownschen Bewegung ist darin zu sehen, dass diese Schätzer in geschlossener Form darstellbar sind. Die Parameterschätzung ist somit ohne die Anwendung eines numerischen Verfahrens zur Maximierung der Log-Likelihood-Funktion möglich.

#### 4.1.4 Simulationsmodell

Bereits im vorigen Abschnitt wurde implizit zur Parameterschätzung eine zeitdiskrete Formulierung der stochastischen Differentialgleichung (4.1) verwendet. Für numerische Simulationen lassen sich zeitkontinuierliche stochastische Differentialgleichungen ebenfalls nicht verwenden. Es wird eine zeitdiskrete Approximation benötigt. Die einfachste Approximation dieser Art ist die Euler-Approximation (vgl. Abschnitt 1.2.8).

Ausgangspunkt bildet die allgemeine stochastische Differentialgleichung (4.29). Zunächst wird die Zeit vom Startpunkt  $t_0$  bis zum Endzeitpunkt  $T$  in  $N$  äquidistante Abschnitte partitioniert:  $\Delta t = (T - t_0)/N$ . Es ergibt sich eine Folge von äquidistanten Zeitpunkten  $t_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Als diskrete Approximation  $S_t$  für den kontinuierlichen Prozess schreibt man

$$S_{t+\Delta t} - S_t = b(S_t, t; \alpha) \Delta t + a(S_t, t; \beta) \Delta W_t, \quad (4.37)$$

wobei  $\Delta W_t \sim i.i.d. N(0, \Delta t)$ . Für den Wert des Prozesses im Zeitschritt von  $t$  auf  $t + \Delta t$  ergibt sich

$$S_{t+\Delta t} = S_t + b(S_t, t; \alpha) \Delta t + a(S_t, t; \beta) \Delta W_t.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung, im folgenden auch als Simulationsmodell bezeichnet, lässt sich aus den bekannten Werten zum Zeitpunkt  $t$  und einer Realisierung einer normalverteilten Zufallsvariablen der Wert des Prozesses zum darauffolgenden Zeitpunkt bestimmen.

Für die Geometrische Brownsche Bewegung nimmt das Simulationsmodell die Gestalt

$$S_{t+\Delta t} = S_t + \alpha S_t \Delta t + \sigma S_t \Delta W_t \quad (4.38)$$

an. In einer Simulation sind für die Parameter  $\alpha$  und  $\sigma$  deren Maximum-Likelihood-Schätzungen einzusetzen.

## 4.2 Sprung-Diffusions-Prozess nach Merton

Von Robert Merton wurde vorgeschlagen, die Dynamik der Aktienkursentwicklung durch ein Modell zu beschreiben, welches sich aus zwei Komponenten zusammensetzt (vgl. Merton [84], S. 309 ff.). Eine erste Komponente soll „normale“ Änderungen im Aktienkurs beschreiben. Ursachen für diese Änderungen können durch kurzfristige Ungleichgewichte in Angebot und Nachfrage auf dem Aktienmarkt, durch Änderungen in den ökonomischen Erwartungen oder durch das Eintreffen neuer Informationen, die den gesamten Markt betreffen aber nur geringe Kurskorrekturen nach sich ziehen, verursacht sein. Insgesamt sollen die „normalen“ Schwankungen nur zu marginalen Kursänderungen führen. Dieser Teil des Prozesses wird daher durch eine Geometrische Brownsche Bewegung modelliert, die den Diffusionsanteil des Gesamtprozesses charakterisiert.

Ein zweiter Teil der Dynamik soll „anormale“ Änderungen berücksichtigen. Dabei handelt es sich um neue, sehr wichtige Informationen, deren Eintreffen nicht mehr nur zu marginalen, sondern zu deutlichen Kursänderungen führt. Solche Informationen sind in der Regel als unternehmensspezifisch angenommen, das heisst sie betreffen nicht den Gesamtmarkt. Dieser zweite Anteil an der Gesamtdynamik der Aktienkurse wird durch einen Poisson-Prozess modelliert, der dafür sorgt, dass zu zufälligen Zeiten Ereignisse eintreten, die einen grossen Kurssprung verursachen. Dies ist dann der Sprung-Anteil des Prozesses.

Setzt man beide Komponenten zum sogenannten Sprung-Diffusions-Prozess zusammen, ergeben sich ruhige Phasen, in denen keine neue Informationen eintreffen, und sehr unruhige Phasen, die durch das Eintreffen solcher Informationen geprägt sind. Die Länge dieser Phasen ist von rein zufälliger Natur.

Für das Auftreten solcher Poisson-Sprünge gibt es empirische Evidenz. Ball und Torous [4] haben signifikante Sprünge in den Renditen von US-amerikanischen Aktien entdeckt. Jorion [69] fand solche Sprünge in verschiedenen Wechselkursen. Eine Arbeit, die sich mit der Existenz von Poisson-Sprüngen auf dem schweizerischen Aktien-

und Optionenmarkt auseinandersetzt und diese auch signifikant nachweist, ist diejenige von Bruand [21].

Im Gegensatz zur Geometrischen Brownschen Bewegung ergeben sich im Modell des Sprung-Diffusions-Prozesses Renditeverteilungen, die breitere Enden besitzen als diejenige der Normalverteilung. Eine bessere Approximation empirischer Renditeverteilungen sollte folglich möglich sein.

Gegliedert ist dieser Abschnitt folgendermassen. Zunächst wird das Modell für die Aktienkursdynamik vorgestellt, anschliessend wird die Ableitung einer Optionspreisformel für europäische Optionen diskutiert. Es schliesst sich das Vorgehen bei der Parameterschätzung an, wobei auf das numerische Verfahren zur Maximierung der Log-Likelihood-Funktion besonders eingegangen wird. Schliesslich wird ein Algorithmus zur Monte-Carlo-Simulation des Modells entwickelt. Die Ausführungen der folgenden Abschnitte zum Sprung-Diffusions-Prozess beruhen auf Kapitel 9 in Merton [84].

#### 4.2.1 Die stochastische Differentialgleichung und ihre Eigenschaften

Die Geometrische Brownsche Bewegung wurde bereits ausführlich diskutiert, so dass zunächst eine Diskussion des Poisson-Prozesses erfolgt, bevor beide Teile zusammengefügt werden. Das Eintreffen neuer Information soll unabhängig und identisch verteilt sein, das heisst einzelne Poisson-Ereignisse werden stochastisch unabhängig angenommen. Ein Sprung um Eins in einem kleinen Zeitintervall  $dt$  wird durch eine Zufallsvariable  $dq(t)$  mit Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\begin{aligned} P(dq(t) = 0) &= 1 - \lambda dt, \\ P(dq(t) = 1) &= \lambda dt \end{aligned} \tag{4.39}$$

modelliert. Dieser Prozess ergibt sich aus einem Poisson-Prozess wie in Abschnitt 1.2.5 und 1.2.8 beschrieben. Der Poisson-Prozess determiniert, ob in einem bestimmten Zeitintervall ein Sprung eintritt. Noch festzulegen ist, zu welchen Kursänderungen dieser Sprung führt. Tritt im Zeitintervall  $dt$  ein Sprung ein, so führt dieses Ereignis zu einer durch eine Zufallsvariable  $Y$  modellierten Kursänderung von  $S(t)$  auf  $S(t + dt) = S(t) Y$ . Die Ausprägungen von  $Y$  bei verschiedenen Sprüngen werden als stochastisch unabhängig und identisch verteilt angenommen. Die Verteilung von  $Y$  ist zunächst nicht genauer spezifiziert.

Zusammengefasst lässt sich folgende stochastische Differentialgleichung aufstellen (vgl. Merton [84], S. 313):

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (\alpha - \lambda k) dt + \sigma dW(t) + dq(t). \tag{4.40}$$

Hierin bezeichnen  $\alpha$  die erwartete Rendite und  $\sigma^2$  die Varianz der Rendite, falls kein Sprung eintritt. Bei  $dW(t)$  handelt es sich um einen Wiener-Prozess, das heisst



$dW(t) \sim i.i.d. N(0, dt)$ .  $dq(t)$  ist ein Sprung-Prozess nach Gleichung (4.39), wobei dieser Prozess und der Wiener-Prozess als unabhängig voneinander angenommen werden. Die Grösse  $k$  ist definiert als der Erwartungswert der prozentualen Änderung des Kurses, falls ein Sprung eintritt, das heisst  $k \equiv E[Y - 1]$ . Die Parameter  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $k$  und  $\sigma$  sind als zeitlich konstant angenommen. Gleichung (4.40) lässt sich in einer Form notieren, die die Unterscheidung zwischen Eintreten und Nichteintreten eines Sprungs besser herausstreicht:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \begin{cases} (\alpha - \lambda k) dt + \sigma dW(t) & \text{falls kein Sprung} \\ & \text{eintritt} \\ (\alpha - \lambda k) dt + \sigma dW(t) + (Y - 1) & \text{falls ein Sprung} \\ & \text{eintritt} \end{cases} \quad (4.41)$$

Der Sprung-Diffusions-Prozess geht in die Geometrische Brownsche Bewegung über, falls  $\lambda = 0$  und damit  $dq(t) = 0$ .

Die stochastische Differentialgleichung (4.40) kann explizit gelöst werden (vgl. Merton [84], S. 314). Für den Aktienkurs ergibt sich

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \left( \alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k \right) t + \sigma W(t) \right\} Y(n) \quad (4.42)$$

mit  $W(t) \sim N(0, t)$  und

$$Y(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ \prod_{j=1}^n Y_j & \text{falls } n \geq 1. \end{cases}$$

Die  $Y_j$  sind *i.i.d.* und die Anzahl Sprünge  $n$  ist poissonverteilt mit Parameter  $\lambda t$ .  $Y(n)$  beschreibt daher die Gesamtänderung des Kurses aufgrund von  $n$  Sprüngen im Zeitintervall  $[0, t]$ .

Aus der Lösung (4.42) für die Aktienkurse lässt sich ein Ausdruck für die Rendite  $r(t)$  ableiten:

$$r(t) = \frac{\ln S(t)}{\ln S(0)} = \left\{ \left( \alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k \right) t + \sigma W(t) \right\} + \ln Y(n) \quad (4.43)$$

mit

$$\ln Y(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ \sum_{j=1}^n \ln Y_j & \text{falls } n \geq 1. \end{cases}$$

Ebenso lassen sich bedingter Erwartungswert und Varianz von  $S(t)$  beziehungsweise  $\ln S(t)$  angeben:

$$\begin{aligned} E[\ln S(t) | \ln S(0)] &= \ln S(0) + \left( \alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k \right) t + E[n \ln Y_j] \\ &= \ln S(0) + \left( \alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k \right) t + (\lambda t) E[\ln Y_j], \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$var[\ln S(t) | \ln S(0)] = \sigma^2 t + var[n \ln Y_j]. \quad (4.45)$$

Die Verteilung der Zufallsvariablen  $Y$  ist noch zu wählen. Für die Annahme, dass  $\ln Y$  unabhängig und identisch normalverteilt mit Erwartungswert  $\mu_J$  und Varianz  $\sigma_J^2$  ist, lassen sich empirische Bestätigungen finden (vgl. Bruand [21], Jorion [69]) und, was besonders interessant ist, eine geschlossene Optionspreisformel angeben. Die Indizes „J“ zeigen an, dass es sich um Größen im Zusammenhang mit der Sprung-Komponente handelt.

#### 4.2.2 Optionspreismodell

Dieser Abschnitt behandelt die Ableitung einer Optionspreisformel für den Sprung-Diffusions-Prozess (vgl. Merton [84], S. 314 ff.). Die Herleitung einer solchen Formel wird durch das Vorhandensein der Sprung-Komponente erschwert. Für die Annahme lognormalverteilter Sprunghöhen  $Y$  wird sich aber eine geschlossene Formel angeben lassen. Die Annahmen, die dem Optionspreismodell zugrunde liegen, sind dieselben wie bei der Black-Scholes-Analyse. Einzig die Kursdynamik wird nicht durch eine Geometrische Brownsche Bewegung sondern durch einen Sprung-Diffusions-Prozess beschrieben.

Der Wert der Option sei analog wie im Abschnitt 4.1.2 mit  $V(S, t)$  bezeichnet. Aus der Dynamik für  $S(t)$  folgt die Optionspreisdynamik

$$\frac{dV(S, t)}{V(S, t)} = (\alpha_v - \lambda k_v) dt + \sigma_v dW(t) + dq_v(t). \quad (4.46)$$

Dabei bezeichnen  $\alpha_v$  die erwartete Rendite der Option und  $\sigma_v^2$  deren Varianz, falls kein Sprung eintritt.  $dq_v(t)$  ist ein Sprung-Prozess analog Gleichung (4.39) und  $k_v$  ist definiert durch  $k_v \equiv E[Y_v - 1]$ . Die Koeffizienten  $\alpha_v$  und  $\sigma_v$  ergeben sich durch Anwendung des Itô-Lemmas (vgl. Abschnitt 1.2.8) auf Gleichung (4.40):

$$\alpha_v = \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (\alpha - \lambda k) S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \lambda E[V(SY, t) - V(S, t)]}{V(S, t)}, \quad (4.47)$$

$$\sigma_v = \frac{\sigma S \frac{\partial V}{\partial S}}{V(S, t)}. \quad (4.48)$$

Der Prozess  $dq_v(t)$  ist abhängig vom Prozess für die Aktie  $dq(t)$ . Bei der Option tritt nur dann ein Sprung auf, wenn bei der zugrundeliegenden Aktie ein solcher auftritt. Trotz dieser Abhängigkeit sind die Sprunghöhen  $Y_v$  und  $Y$  nicht notwendigerweise linear abhängig, da die Funktion  $V(S, t)$  nicht linear in  $S$  sein muss.

Analog zur Black-Scholes-Analyse wird nun ein Portfolio gebildet, bestehend aus einer Aktie (Anteil  $w_1$ ), einer Option auf diese Aktie (Anteil  $w_2$ ) und einer risikolosen Anlage (Anteil  $w_3$ ). Für die Anteile  $w_j$  gilt:  $\sum_{j=1}^3 w_j = 1$ . Wiederum lässt sich die Dynamik des Portfoliowertes  $P(t)$  angeben:

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = (\alpha_P - \lambda k_P) dt + \sigma_P dW(t) + dq_P(t). \quad (4.49)$$

Dabei bezeichnen  $\alpha_P$  die erwartete Rendite der Option und  $\sigma_P^2$  deren Varianz, falls kein Sprung eintritt.  $dq_P(t)$  ist ein Sprung-Prozess analog Gleichung (4.39) und  $k_P \equiv E[Y_P - 1]$  ist der Erwartungswert der zufälligen prozentualen Änderung des Portfoliowertes bei Eintritt eines Sprungs. Die Koeffizienten  $\alpha_P$  und  $\sigma_P$  sind gegeben durch

$$\alpha_P = w_1(\alpha - r) + w_2(\alpha_V - r) + r, \quad (4.50)$$

$$\sigma_P = w_1\sigma + w_2\sigma_V. \quad (4.51)$$

Die prozentuale Änderung  $Y_P - 1$  setzt sich aus einer Änderung in der Aktie und einer Änderung im Optionswert zusammen:

$$Y_P - 1 = w_1(Y - 1) + w_2 \frac{V(SY, t) - V(S, t)}{V(S, t)}. \quad (4.52)$$

In der Black-Scholes-Analyse würde man an dieser Stelle die Portfoliogewichte so wählen, dass  $\sigma_P = w_1^*\sigma + w_2^*\sigma_V = 0$  gilt, und damit das Portfolio risikolos wird. Durch die Anwesenheit des Sprung-Prozesses  $dq_P(t)$  wird das Portfolio hingegen selbst mit  $w_1^*$  und  $w_2^*$  nicht risikolos. Es kann gezeigt werden, dass keine Gewichte  $w_1^*$  und  $w_2^*$  existieren, so dass das Risiko aus dem Portfolio verschwindet (vgl. Merton [84], S. 316). Das „Sprung-Risiko“ bleibt bestehen.

Dass einzig die Sprung-Komponente als Unsicherheitsquelle verbleibt, erkennt man, wenn die Gewichte analog zu Black-Scholes gewählt werden und der neue Portfoliowert  $P^*$  betrachtet wird:

$$\frac{dP^*(t)}{P^*(t)} = \begin{cases} (\alpha_P^* - \lambda k_P^*) dt & \text{falls kein Sprung} \\ & \text{eintritt} \\ (\alpha_P^* - \lambda k_P^*) dt + (Y_P^* - 1) & \text{falls ein Sprung} \\ & \text{eintritt} \end{cases} \quad (4.53)$$

Es verbleibt ein reiner Sprung-Prozess.

Aus Gleichung (4.47) und Gleichung (4.52) folgt für die prozentuale Änderung des Portfoliowertes aufgrund eines Sprung-Ereignisses:

$$Y_P^* - 1 = w_2^* \frac{V(SY, t) - V(S, t) - \frac{\partial V(S, t)}{\partial S}(SY - S)}{V(S, t)}. \quad (4.54)$$

Das *No Arbitrage-Argument* von Black und Scholes kann also nicht angewendet werden. Ist die erwartete Rendite  $\alpha_V = g(S, t)$  der Option als Funktion von  $S$  und  $t$  bekannt, so kann eine Optionspreisformel abgeleitet werden. Aus Gleichung (4.47) folgt, dass  $V(S, t)$  die gemischte Differential-Differenzengleichung

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} + (\alpha - \lambda k) S \frac{\partial V(S, t)}{\partial S} + \frac{\partial V(S, t)}{\partial t} - g(S, t) V(S, t) \\ & + \lambda E[V(SY, t) - V(S, t)] \end{aligned}$$

erfüllen muss. Solche Gleichungen sind analytisch schwer zu lösen, in der Regel aber mit Hilfe eines numerischen Verfahrens. Viel schwerwiegender ist aber die Tatsache, dass die Kenntnis der erwarteten Rendite  $\alpha$  der Aktie und der erwarteten Rendite  $g(S, t)$  der Option verlangt ist. Beide Grössen spielen dagegen bei der Black–Scholes–Lösung keine Rolle.

Die gemischte Differential–Differenzengleichung kann umgangen werden, wenn die Gültigkeit des *Capital Asset Pricing Models (CAPM)* und dessen Annahmen unterstellt werden (vgl. Campbell et al. [26], S. 181 ff.). Nach dem CAPM erwartet ein Anleger bei einer Investition eine Rendite, die sich aus einem risikolosen Teil und einem Teil zusammensetzt, der ihn für das systematische Risiko entschädigt. Unter systematischem Risiko werden Unsicherheiten in marktspezifischen, wirtschaftlichen, politischen sowie marktpsychologischen Faktoren verstanden. Das unsystematische Risiko liegt in firmenspezifischen Faktoren begründet. Solche Risiken lassen sich durch Diversifikation ausschalten, das heisst der Investor kann dafür keine Entschädigung verlangen. Im CAPM ist die erwartete Rendite einer Anlage  $r_A$  gegeben durch

$$r_A = r + \beta(r_{Markt} - r).$$

Mit  $r$  wird die Rendite einer risikolosen Anlage, mit  $r_{Markt}$  diejenige des gesamten (Aktien–) Marktes bezeichnet. Der sogenannte  $\beta$ –Faktor ergibt sich aus der Marktrendite  $r_{Markt}$  und der Rendite  $r_A$  der Anlage, in die investiert wird:

$$\beta = \frac{cov(r_{Markt}, r_A)}{\sigma_{Markt}^2}.$$

Dieser Faktor kann über eine lineare Regression aus historischen Zeitreihendaten geschätzt werden.

Wie in Abschnitt 4.2.1 gesehen, erfolgt die Modellierung der Aktienkursdynamik im Sprung–Diffusions–Prozess über zwei Komponenten. Eine erste Komponente besteht aus der Geometrischen Brownschen Bewegung und wandelt neue Informationen in marginale Kursänderungen um. Die zweite Komponente führt zu grösseren Kursprüngen aufgrund bedeutender neuer Informationen. Es wird nun folgende wichtige Annahme getroffen: bei diesen letztgenannten Informationen handele es sich ausschliesslich um firmenspezifische Information. Dies hat zur Konsequenz, dass sie praktisch keinen Einfluss auf den Gesamtmarkt hat. Damit stellt die „Sprung–Komponente“ unsystematisches Risiko dar, das heisst dieser Anteil ist unkorreliert mit dem Gesamtmarkt. In einer weiteren Annahme wird davon ausgegangen, dass diese Überlegung für alle Aktien eines Marktes Gültigkeit hat.

Beim Portfolio mit Wert  $P^*$ , bei dem die Gewichte  $w_1^*$  und  $w_2^*$  nach Black und Scholes eingeführt wurden (vgl. Gleichung (4.53)), ist die einzige unsichere Grösse beziehungsweise Risikoquelle die Sprung–Komponente. Aber nach den obigen Überlegungen handelt es sich dabei um unsystematisches Risiko, das heisst es gilt  $\beta = 0$ . Gilt das CAPM, folgt daraus, dass die erwartete Rendite aller Anlagen mit verschwindendem Beta gleich dem risikolosen Zinssatz sein muss:  $\alpha_P^* = r$ . Aus Gleichung (4.50)

folgt somit

$$w_1^* (\alpha - r) + w_2^* (\alpha_V - r) = 0 .$$

und

$$\frac{\alpha_V - r}{\sigma_V} = \frac{\alpha - r}{\sigma} .$$

Einsetzen in (4.47) liefert schliesslich die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} + (r - \lambda k) S \frac{\partial V(S, t)}{\partial S} + \frac{\partial V(S, t)}{\partial t} - r V(S, t) \\ & + \lambda E[V(SY, t) - V(S, t)] . \end{aligned} \quad (4.55)$$

Alle Grössen, die erwartete Renditen darstellen (ausser dem risikolosen Zinssatz), sind aus dieser Gleichung verschwunden. Für  $\lambda = 0$  ergibt sich zudem die Differentialgleichung nach Black und Scholes.

Für eine konkrete Option können nun die Randbedingungen vorgegeben werden, zum Beispiel für einen europäischen Call  $V(S, t) = C(S, t)$ :

$$C(S, T) = \max\{S(T) - K, 0\} .$$

Eine Lösung der Differentialgleichung (4.55) verlangt darüber hinaus die Kenntnis der Verteilung von  $Y$ . Definiert man mit  $X_n$  eine Zufallsvariable, die dieselbe Verteilung hat wie das Produkt von  $n$  unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen  $Y$  ( $X_0 \equiv 1$ ) und bezeichnet man mit  $V_{BS}(S, t, K, \sigma^2, r)$  die Black-Scholes-Lösung, so ist die Lösung von (4.55) gegeben durch:

$$\begin{aligned} V(S, t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda(T-t)) (\lambda(T-t))^n}{n!} \\ & \cdot E[V_{BS}(SX_n \exp(-\lambda k(T-t)), T, K, \sigma^2, r)] , \end{aligned} \quad (4.56)$$

was einer gewichteten Summe von Black-Scholes-Lösungen entspricht.

Im Spezialfall einer Lognormalverteilung von  $Y$ , das heisst  $\ln Y \sim N(\mu_J, \sigma_J^2)$  ergibt sich, dass  $X_n$  ebenfalls lognormalverteilt respektive  $\ln X_n$  normalverteilt ist mit Varianz  $n \sigma_J^2$ . Zusätzlich definiert man zur Vereinfachung der Notation weitere Grössen:

$$\begin{aligned} \sigma_n & \equiv \sigma_B^2 + \frac{n \sigma_J^2}{T-t} , \\ r_n & \equiv r - \lambda k + \frac{n \ln(1+k)}{T-t} , \\ \lambda' & \equiv \lambda (1+k) . \end{aligned}$$

Für  $k = E[Y - 1]$  gilt  $k = \exp\{\mu_J + 1/2 \sigma_J^2\} - 1$ . Hier wurde  $\sigma_B \equiv \sigma$  gesetzt, um besser zwischen der Volatilität der Geometrischen Brownschen Bewegung und derjenigen des

Sprunganteils unterscheiden zu können. Als Optionspreis ergibt sich letztendlich

$$V(S, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda'(T-t))(\lambda'(T-t))^n}{n!} V_{BS}(S, T, K, \sigma_n^2, r_n). \quad (4.57)$$

Diese Optionspreisformel wird im folgenden verwendet. Für deren numerischen Auswertung muss die Fakultät von  $n$  berechnet werden, was bei grösseren  $n$  (ungefähr  $n \geq 60$ ) auf Schwierigkeiten stösst. Die Fakultät liesse sich in diesem Fall zwar durch die Stirling-Formel approximieren (vgl. Bronstein und Semendjajew [20], S. 103), hier kann aber ein Umweg angewendet werden, der eine exakte Berechnung für  $n > 0$  erlaubt:

$$\frac{\exp(-\lambda'(T-t))(\lambda'(T-t))^n}{n!} = \exp \left\{ -\lambda'(T-t) + n \ln(-\lambda'(T-t)) - \sum_{i=1}^n \ln i \right\}.$$

Weiter muss für die Berechnung der unendlichen Reihe an geeigneter Stelle abgebrochen werden, dass heisst die verbleibenden unberücksichtigten Glieder dürfen nur noch verschwindende Beiträge liefern. Mit  $n \in [0, \dots, 500]$  wird ein konservativer Ansatz gewählt.

#### 4.2.3 Parameterschätzung

Die Parameterschätzung beim Sprung-Diffusions-Prozess erfolgt analog wie bei der Geometrischen Brownschen Bewegung nach dem Maximum-Likelihood-Prinzip.

Zunächst wird, ausgehend von der stochastischen Differentialgleichung (4.40), mit Hilfe des Itô-Lemmas die Dynamik des logarithmierten Preisprozesses  $H(t) \equiv \ln S(t)$  bestimmt:

$$\begin{aligned} dH(t) = d \ln S(t) &= \frac{1}{S} \{ (\alpha - \lambda k) S dt + S \sigma_B dW(t) \} - \frac{1}{2} \frac{1}{S^2} \sigma_B^2 S^2 dt \\ &+ \underbrace{\{ \ln(S + \xi) - \ln S \} dq(t)}_{\equiv \ln Y(n)} \\ &= \left( \alpha - \lambda k - \frac{1}{2} \sigma_B^2 \right) dt + \sigma_B dW(t) + \ln Y(n) \end{aligned} \quad (4.58)$$

mit

$$\ln Y(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ \sum_{j=1}^n \ln Y_j & \text{falls } n \geq 1. \end{cases}$$

Die  $Y_j$  sind *i.i.d.*,  $n$  ist poissonverteilt mit Parameter  $\lambda t$ . Für die Verteilung von  $\ln Y_j$  wird angenommen, dass es sich um eine Normalverteilung handelt, das heisst  $\ln Y_j \sim N(\mu_J, \sigma_J^2)$ . Daraus folgt für die Verteilung von  $\ln Y(n)$ :  $\ln Y(n) \sim N(n \mu_J, n \sigma_J^2)$ .

Anhand der Gleichung (4.58) kann die Verteilung der Log-Renditen  $r(t) = \ln S(t) - \ln S(0)$  abgelesen werden.  $\varphi$  bezeichne die Dichte der Normalverteilung, dann ist die

Dichte  $f(r(t))$  der Renditen  $r(t)$  bestimmt durch

$$f(r_t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda t)(\lambda t)^n}{n!} \cdot \varphi\left(\left(\alpha - \lambda k - \frac{1}{2}\sigma_B^2\right)t + n\mu_J, \sigma_B^2 t + n\sigma_J^2\right). \quad (4.59)$$

Der Term  $\exp(-\lambda t)(\lambda t)^n/n!$  stellt die Wahrscheinlichkeit dar, dass im Zeitintervall  $[0, t]$  genau  $n$  Poisson-Ereignisse eingetreten sind. Zur Vereinfachung der Notation definiert man noch  $\mu_B \equiv (\alpha - \lambda k - \frac{1}{2}\sigma_B^2)$ . Zu schätzen ist also der Parametervektor  $\theta = (\mu_B, \sigma_B^2, \mu_J, \sigma_J^2, \lambda)'$ . Die Log-Likelihood-Funktion berechnet sich bei einer gegebenen Stichprobe von Log-Renditen  $r_1, \dots, r_n$  mit  $\Delta t = (t_n - t_0)/n$  zu

$$\begin{aligned} \ln L(\theta | r_1, \dots, r_m) &= \sum_{i=1}^m \left\{ \ln \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda \Delta t)^n}{n!} \frac{1}{\sqrt{\sigma_B^2 \Delta t + n\sigma_J^2}} \right. \\ &\quad \left. \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(r_i - \mu_B \Delta t - n\mu_J)^2}{\sigma_B^2 \Delta t + n\sigma_J^2}\right\} \right\} \\ &\quad - m\lambda \Delta t - \frac{m}{2} \ln(2\pi). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Wieder muss die Summe über  $n$  an einer geeigneten Stelle abgebrochen werden. Für den Fehler, den man dabei begeht, existiert eine Abschätzung (vgl. Jorion [69]). Das Aufsummieren der ersten elf Summanden erzielt aber eine hinreichende Genauigkeit.

Die Maximierungsaufgabe

$$\hat{\theta} = \max_{\theta} \{\ln L(\theta)\}$$

ist analytisch nicht lösbar. Deshalb muss auf ein numerisches Verfahren zurückgegriffen werden. Für die Bestimmung von Extrema in mehreren Dimensionen existieren verschiedene Verfahren (vgl. Press et al. [95], S. 340 ff.). Hier wird auf das sogenannte *Newton-Raphson-Verfahren* zurückgegriffen. Es handelt sich dabei um die verallgemeinerte Version des Newton-Verfahrens zur Bestimmung von Nullstellen in einer Dimension. Für die Wahl dieser Methode sind mehrere Gründe anzuführen. Als erstes ist sie einfach und vor allem numerisch stabil. Zudem werden in allen Maximierungsalgorithmen (partielle) Ableitungen benötigt. In vielen Verfahren werden diese Ableitungen ebenfalls numerisch berechnet. Für die vorliegende Log-Likelihood-Funktion können die Ableitungen allerdings noch analytisch bestimmt werden, was deren Verwendung nahelegt. Im folgenden wird kurz auf das implementierte Newton-Raphson-Verfahren eingegangen.

Eine Maximierung von  $\ln L(\theta) = \ln L(\mu_B, \sigma_B^2, \mu_J, \sigma_J^2, \lambda)$  verlangt die Bestimmung der Nullstellen der Ableitungsfunktion von  $\ln L(\theta)$ . Diese Funktion sei mit  $\mathbf{F}(\theta)$  bezeich-

net und definiert als

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial \ln L}{\partial \mu_B} \\ \vdots \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_5 \end{pmatrix}.$$

Sie bildet vom  $\mathbb{R}^5$  in den  $\mathbb{R}^5$  ab. Die Idee des Newton–Raphson–Verfahrens besteht darin, die Funktion  $\mathbf{F}$  in eine Taylor–Reihe zu entwickeln:

$$F_i(\boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta}) = F_i(\boldsymbol{\theta}) + \sum_{j=1}^5 \frac{\partial F_i}{\partial \theta_j} \delta\theta_j + O((\delta\boldsymbol{\theta})^2) \quad (4.61)$$

oder

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{J}\delta\boldsymbol{\theta} + O((\delta\boldsymbol{\theta})^2).$$

Mit  $J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial \theta_j}$  wird die Jacobi–Matrix bezeichnet. Da  $\mathbf{F}$  selbst schon eine Ableitung von  $\ln L$  darstellt, sind in Gleichung (4.61) alle zweiten partiellen Ableitungen von  $\ln L$  zu berechnen, was analytisch möglich ist. Terme der Ordnung  $O((\delta\boldsymbol{\theta})^2)$  und höher werden vernachlässigt. Im nächsten Schritt wird die Nullstelle von  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta})$  bestimmt:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta}) = 0 \iff \mathbf{J}\delta\boldsymbol{\theta} = -\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}).$$

Dabei handelt es sich um ein System von linearen Gleichungen für die Korrekturen  $\delta\boldsymbol{\theta}$ , die die Funktionen  $F_i$  näher an Null heranzuführen. Solch ein lineares Gleichungssystem kann über eine LR–Zerlegung und anschliessendes Rückwärtseinsetzen gelöst werden (vgl. Bronstein und Semendjajew [20], S. 735 f., Press et al. [95], S. 34 ff.). Es ergibt sich so ein neuer Vektor  $\boldsymbol{\theta}$ :  $\boldsymbol{\theta}_{neu} = \boldsymbol{\theta}_{alt} + \delta\boldsymbol{\theta}$ . Dieses Vorgehen kann iterativ solange durchgeführt werden, bis die gewünschte Genauigkeit erzielt wird.

Bei der numerischen Lösung von Extremwertaufgaben kann nie ganz sichergestellt werden, dass das Verfahren ein globales und nicht ein lokales Extremum liefert. Durch die Wahl verschiedener Startvektoren für  $\boldsymbol{\theta}$  kann diese Gefahr aber verringert werden. Ebenso wenig kann eine Konvergenz bei der numerischen Lösung von Extremwertaufgaben garantiert werden.

#### 4.2.4 Simulationsmodell

Für eine Monte–Carlo–Simulation des Sprung–Diffusions–Prozesses wird wieder eine Euler–Approximation der stochastischen Differentialgleichung (4.40) verwendet. Die Zeitdiskretisierung  $\Delta t$  ergibt sich aus dem Startzeitpunkt  $t_0$ , dem Endzeitpunkt der Simulation  $T$  und der Anzahl Zeitschritte  $N$ :  $\Delta t = (T - t_0)/N$ .

Zunächst wird der Sprunganteil, das heisst der Poisson–Prozess  $dq(t)$  betrachtet. Sei mit  $\Delta q_t$  dessen zeitdiskrete Formulierung bezeichnet. Um den Poisson–Prozess zu simulieren, zieht man zunächst eine in  $(0, 1]$  gleichverteilte Zufallszahl  $\xi_1$ .  $\xi_1$  liegt mit Wahrscheinlichkeit  $\lambda\Delta t$  im Intervall  $(0, \lambda\Delta t]$ . Ist  $\xi_1 \leq \lambda\Delta t$  wird ein Sprung ausgeführt, andernfalls wird kein Sprung ausgeführt (vgl. Honerkamp [58], S. 115).



Für den Diffusionsanteil wird eine Euler-Approximation wie im Fall der Geometrischen Brownschen Bewegung verwendet. Die Euler-Approximation für den gesamten Sprung-Diffusions-Prozess lautet dann

$$S_{t+\Delta t} = S_t + S_t \cdot \begin{cases} (\mu_B + \frac{1}{2}\sigma_B^2) \Delta t + \sigma_B \Delta W_t & \text{falls Sprung - Ereignis} \\ & \text{nicht eintritt} \\ (\mu_B + \frac{1}{2}\sigma_B^2) \Delta t + \sigma_B \Delta W_t & \text{falls Sprung - Ereignis} \\ + (Y - 1) & \text{eintritt} \end{cases} \quad (4.62)$$

wobei  $\Delta W_t \sim i.i.d. N(0, \Delta t)$ . Zunächst wird also bestimmt, ob ein Poisson-Ereignis eintritt, anschliessend wird über Gleichung (4.62) ein neuer Kurs berechnet. In Gleichung (4.62) wurde  $\alpha - \lambda k$  durch  $\mu_B + 1/2\sigma_B^2$  ersetzt. So treten in diesem Simulationsmodell nur Grössen auf, die auch geschätzt werden können. Für die Zufallsvariable  $Y$  wird wieder eine Lognormalverteilung verwendet, das heisst  $\ln Y \sim N(\mu_J, \sigma_J^2)$ .

Im Regelfall wird in empirischen Studien die Parameterschätzung auf Tagesbasis vorgenommen, das heisst  $\Delta t = 1$ . Die geschätzten Grössen dürfen aber nicht auf andere Zeithorizonte skaliert werden, was die Grösse des Zeitschrittes in der Monte-Carlo-Simulation auf die Zeitdiskretisierung der Parameterschätzung fixiert. Bei der Schätzung der Parameter kann allerdings der Fall eintreten, dass für  $\lambda$  ein Wert grösser als Eins geschätzt wird. Dies stellt insofern ein Problem dar, weil dann  $\lambda \Delta t$  beim diskretisierten Poisson-Prozess  $\Delta q_t$  mit  $\Delta t = 1$  keine Wahrscheinlichkeit mehr darstellt. Das bedeutet, dass die Zeitskala zu grob gewählt wurde, um die Dynamik des Prozesses korrekt zu beschreiben. Konsequenz wäre, die Zeitskala zu verringern. Da aber in der Regel nur Tagesdaten zur Parameterschätzung zur Verfügung stehen, ist dieses Vorgehen praktisch nicht durchführbar. Dagegen spricht auch die Annahme, dass für Intraday-Kurse ganz andere Preisprozesse wie für Tagesdaten verantwortlich sind.

Deshalb wird folgendes Vorgehen vorgeschlagen. Falls  $\lambda \Delta t < 1$ , wird obiges Verfahren angewendet. Ist  $\lambda \Delta t \geq 1$ , wird zunächst eine Realisierung einer poissonverteilten Zufallsvariablen  $Z$  mit Erwartungswert  $E[Z] = \lambda \Delta t$  gezogen. Dazu stellt Numerical Recipes eine Routine bereit, die auf der Verwerfungsmethode beruht (vgl. Press et al. [95], S. 293 ff. und Anhang A.3). Dies ergibt die Anzahl Poisson-Ereignisse im Zeitintervall  $[t, t + \Delta t]$ . Damit lässt sich das modifizierte Simulationsmodell

$$S_{t+\Delta t} = S_t + S_t \cdot \begin{cases} (\mu_B + \frac{1}{2}\sigma_B^2) \Delta t + \sigma_B \Delta W_t & \text{falls Sprung - Ereignis} \\ & \text{nicht eintritt} \\ (\mu_B + \frac{1}{2}\sigma_B^2) \Delta t + \sigma_B \Delta W_t & \text{falls } z \text{ Sprung - Ereignisse} \\ + \sum_{i=1}^z (Y_i - 1) & \text{eintreten} \end{cases} \quad (4.63)$$

aufstellen. Natürlich liesse sich letzteres Simulationsmodell auch für den Fall  $\lambda \Delta t < 1$  einsetzen. Da aber das Aufrufen der externen Routine zur Erzeugung einer Realisierung einer poissonverteilten Zufallsvariablen sehr zeitintensiv ist, wird eine Trennung in die Fälle  $\lambda \Delta t < 1$  und  $\lambda \Delta t \geq 1$  empfohlen.

## 4.3 Die hyperbolische Verteilung als Modell für Aktienrenditen

### 4.3.1 Einleitung

Die hyperbolische Verteilung wird zur Modellierung einer Vielzahl von empirischen Verteilungen aus den unterschiedlichsten naturwissenschaftlichen Disziplinen, so zum Beispiel der Geologie, Biologie, Astronomie oder der Strömungsmechanik in der Physik herangezogen. So konnte festgestellt werden, dass die Verteilung der Teilchengrösse von Sandkörnern, wie sie in Sanddünen auftreten, sehr gut durch eine hyperbolische Verteilung approximiert werden kann. Ähnliche Ergebnisse wurden für Sandablagerungen in Flüssen gefunden (vgl. Barndorff-Nielsen [7]). Ein sehr interessanter Anwendungsfall der hyperbolischen Verteilung ist in der statistischen Mechanik zu finden. So wird in der newtonschen statistischen Mechanik die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung eines idealen Teilchengases im wesentlichen aus der Normalverteilung abgeleitet. Werden dieselben Berechnungen für die Einsteinsche relativistische Physik angestellt, so ergibt sich als Geschwindigkeitsverteilung der Teilchen eine hyperbolische Verteilung (vgl. Barndorff-Nielsen und Blæsild [6], Barndorff-Nielsen [7]).

Mitte der neunziger Jahre wurde dann festgestellt, dass auch empirische Renditeverteilungen von Aktien durch hyperbolische Verteilungen approximiert werden können. Insbesondere die breiten Enden empirischer Renditeverteilungen lassen sich besser beschreiben als dies zum Beispiel mit der Normalverteilung möglich ist. Entsprechende Untersuchungen wurden für deutsche und dänische Aktien angestellt (vgl. Eberlein und Keller [40], Eberlein et al. [41], Küchler et al. [75], Rydberg [102], Rydberg [103]). Ebenso konnte auf Grundlage der hyperbolischen Verteilung ein Modell zur Bewertung von Optionen abgeleitet werden, was diese Verteilung umso interessanter werden lässt (vgl. Eberlein und Keller [40], Eberlein und Jacod [39]). Deshalb erscheint eine Untersuchung für den schweizerischen Aktienmarkt vielversprechend.

In diesem Abschnitt soll nun eine kurze Einführung in die hyperbolische Verteilung gegeben werden. Ihre wichtigsten Eigenschaften und ihre Einordnung in eine grössere Klasse von Verteilungen, der sogenannten *verallgemeinerten hyperbolischen Verteilung*, werden diskutiert. Der stochastische Prozess, der im Zeitablauf hyperbolisch verteilte Renditen generiert, wird vorgestellt. Ebenso werden die Grundzüge des Optionspreismodells skizziert. Als weiterer wichtiger Punkt im Hinblick auf eine empirische Untersuchung wird schliesslich das Vorgehen bei der Schätzung der Parameter der hyperbolischen Verteilung dargestellt.

### 4.3.2 Die hyperbolische Verteilung

Die Dichtefunktion der eindimensionalen hyperbolischen Verteilung ist definiert als (vgl. Barndorff-Nielsen und Blæsild [6])

$$\text{hyp}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) \equiv \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\alpha\delta K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} \exp\left(-\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} + \beta(x - \mu)\right), \quad (4.64)$$

wobei  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\delta \geq 0$ ,  $\alpha > 0$  und  $\alpha^2 > \beta^2$ . Hierin bezeichnet  $K_1$  die verallgemeinerte Besselfunktion 3. Art mit Index 1. Die Bedeutung der Parameter  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  und  $\mu$  ist die folgende:  $\alpha$  und  $\beta$  sind Parameter, welche die Form der Verteilung angeben. Je grösser  $\alpha$  ist, desto leptokurtischer ist die Verteilung. Der Parameter  $\beta$  ist ein Mass für die Asymmetrie, wobei sich der symmetrische Fall für  $\beta = 0$  ergibt.  $\mu$  gibt die Lage der Verteilung an und  $\delta$  ist schliesslich ein Skalierungsparameter.

Die Bezeichnung *hyperbolische Verteilung* ergibt sich aus der Tatsache, dass der natürliche Logarithmus der Dichtefunktion eine Hyperbel (in mehreren Dimensionen ein Hyperboloid) darstellt. Der natürliche Logarithmus der Dichte einer Normalverteilung stellt dagegen eine Parabel (in mehreren Dimensionen ein Paraboloid) dar. Diese Eigenschaft deutet darauf hin, dass sich die hyperbolische Verteilung zur Beschreibung der Fat Tails einer Renditeverteilung besser eignet als die Normalverteilung. Zur Verdeutlichung ist in Abbildung 4.1 die Dichtefunktion, in Abbildung 4.2 der Logarithmus der Dichtefunktion der hyperbolischen Verteilung mit Parametern  $\alpha = 130.0$ ,  $\beta = 0.0$ ,  $\delta = 0.007$  und  $\mu = 0.0$  aufgetragen. Gleichzeitig ist eine Normalverteilung mit gleichem Erwartungswert und gleicher Varianz ( $\mu = 0.0$ ,  $\sigma^2 = 0.000156$ ) abgebildet.

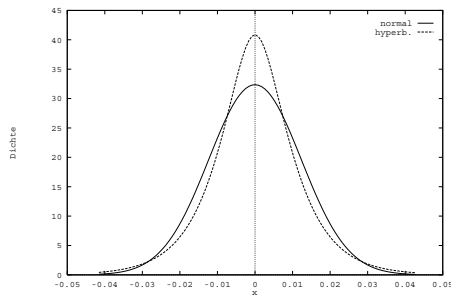


Abbildung 4.1: Dichtefunktionen der Normalverteilung und hyperbolischen Verteilung (Parameter siehe Text).

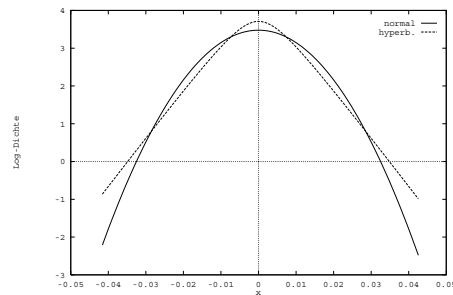


Abbildung 4.2: Log-Dichtefunktionen der Normalverteilung und hyperbolischen Verteilung (Parameter siehe Text).

Um ein besseres Verständnis für die hyperbolische Verteilung zu gewinnen, werden in den folgenden zwei Abbildungen Dichten der hyperbolischen Verteilung mit ver-

schiedenen Parameterwerten miteinander verglichen. In Abbildung 4.3 ist zunächst eine Erhöhung des Parameters  $\beta$  dargestellt. Ein höheres  $\beta$  führt ceteris paribus zu einer linkssteilen, asymmetrischen Verteilung. In Abbildung 4.4 sind die Auswirkungen einer Erhöhung des Parameters  $\alpha$  zu erkennen. Werden alle anderen Parameter konstant gehalten, so führt ein grösseres  $\alpha$  zu einer leptokurtischeren Verteilung.

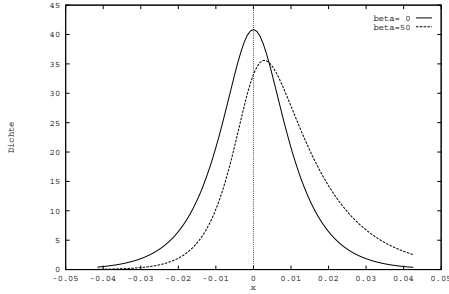


Abbildung 4.3: Dichtefunktionen der hyperbolischen Verteilung mit  $\alpha = 130$ ,  $\delta = 0.007$ ,  $\mu = 0.0$  und  $\beta = 0.0$  bzw.  $\beta = 50$ .

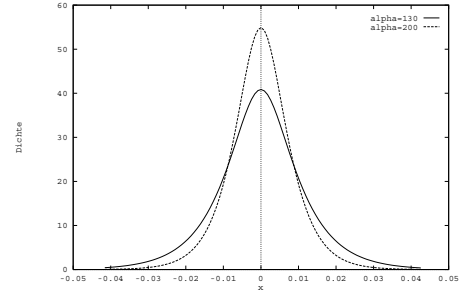


Abbildung 4.4: Dichtefunktionen der hyperbolischen Verteilung mit  $\delta = 0.007$ ,  $\mu = 0.0$ ,  $\beta = 0.0$  und  $\alpha = 130$  bzw.  $\alpha = 200$ .

Definiert man zwei neue Parameter

$$\xi \equiv \left(1 + \delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)^{-1/2} \quad \text{und} \quad (4.65)$$

$$\chi \equiv \xi \beta / \alpha, \quad (4.66)$$

erhält man eine Parametrisierung der hyperbolischen Verteilung  $hyp(x; \chi, \xi, \delta, \mu)$ , die den Vorteil besitzt, dass  $\xi$  und  $\chi$  invariant unter Skalentransformationen und Translationen sind. Die Parameter müssen nun die Bedingungen  $0 \leq |\chi| < \xi < 1$  erfüllen (vgl. Barndorff-Nielsen und Blæsild [6]).

Für den wichtigen Spezialfall einer symmetrischen und zentrierten Verteilung, das heisst einer Verteilung mit Parametern  $\mu = \beta = 0$ , der für die Ableitung des Optionspreismodells benötigt wird, ergibt sich mit  $\zeta \equiv \xi^2 - 1$

$$hyp(x; \zeta, \delta) = \frac{1}{2 \delta K_1(\zeta)} \exp \left( -\zeta \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\delta}\right)^2} \right) \quad (4.67)$$

(vgl. Eberlein und Keller [40]).

Die hyperbolische Verteilung stellt einen Spezialfall einer grösseren Klasse von Verteilungen dar, der sogenannten verallgemeinerten hyperbolischen Verteilung, deren

Dichtefunktion definiert ist als (vgl. Barndorff-Nielsen und Blæsild [6])

$$h(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{(\kappa/\delta)^\lambda}{\sqrt{2\pi} K_\lambda(\delta\kappa)} \frac{K_{\lambda-1/2}(\alpha g_\delta(x-\mu))}{\left(\frac{1}{\alpha} g_\delta(x-\mu)\right)^{1/2-\lambda}} \exp(\beta(x-\mu)), \quad (4.68)$$

wobei  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g_\delta(x) = \sqrt{\delta^2 + x^2}$  und  $\kappa^2 = \alpha^2 - \beta^2$ . Die Parameter müssen nun folgenden Bedingungen genügen:

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \delta \geq 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

und

$$\begin{aligned} \delta \geq 0 & \quad \alpha > 0 \quad \alpha^2 > \beta^2 \quad \text{falls} \quad \lambda > 0, \\ \delta > 0 & \quad \alpha > 0 \quad \alpha^2 > \beta^2 \quad \text{falls} \quad \lambda = 0, \\ \delta > 0 & \quad \alpha \geq 0 \quad \alpha^2 \geq \beta^2 \quad \text{falls} \quad \lambda < 0. \end{aligned}$$

$K_\lambda$  ist eine verallgemeinerte Besselfunktion dritter Art mit Index  $\lambda$  und für  $\lambda = 1$  ergibt sich die hyperbolische Verteilung. Für andere Werte von  $\lambda$  ergeben sich weitere Verteilungen, die ebenfalls im Zusammenhang mit der Modellierung von Aktienrenditen diskutiert werden (vgl. Prause [94]). So erhält man zum Beispiel für  $\lambda = -\frac{1}{2}$  die Dichte der *normalen inversen gaussischen Verteilung* (vgl. Barndorff-Nielsen [5], Rydberg [103] und Chhikara und Folks [28]).

### 4.3.3 Eigenschaften der hyperbolischen Verteilung und verwandte Verteilungen

Zu den wichtigen Eigenschaften einer Verteilung gehören deren Momente. Im Fall der hyperbolischen Verteilung können diese Momente nicht als einfache Funktionen der Parameter dargestellt werden. Mit Hilfe des Differentialoperators

$$T_\zeta \equiv -\delta^2 \zeta^{-1} \frac{d}{d\zeta} \quad (4.69)$$

lassen sich die Momente der Verteilung zumindest kompakt darstellen (vgl. Küchler et al. [75]):

$$\begin{aligned} \text{Erwartungswert} & : E(x) = \beta T_\zeta a(\zeta) + \mu, \\ \text{Varianz} & : \text{var}(x) = \beta^2 T_\zeta^2 a(\zeta) + T_\zeta a(\zeta), \\ \text{Schiefe} & : \gamma_1(x) = \frac{\beta^3 T_\zeta^3 a(\zeta) + 3\beta T_\zeta^2 a(\zeta)}{\left(\beta^2 T_\zeta^2 a(\zeta) + T_\zeta a(\zeta)\right)^{3/2}}, \\ \text{Kurtosis} & : \gamma_2(x) = \frac{\beta^4 T_\zeta^4 a(\zeta) + 6\beta^2 T_\zeta^3 a(\zeta) + 3T_\zeta^2 a(\zeta)}{\left(\beta^2 T_\zeta^2 a(\zeta) + T_\zeta a(\zeta)\right)^2}, \end{aligned}$$

wobei  $\zeta \equiv \delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$  und  $a(\zeta) \equiv -\ln \zeta + \ln K_1(\zeta)$ . Dabei handelt es sich um komplizierte Kombinationen von Besselfunktionen. Im Spezialfall der symmetrischen und zentrierten Dichtefunktion ergibt sich für die Varianz (vgl. Eberlein und Keller [40])

$$\text{var}(x) = \delta^2 \frac{1}{\zeta} \frac{K_2(\zeta)}{K_1(\zeta)}. \quad (4.70)$$

Nutzt man das asymptotische Verhalten der Besselfunktion für grosse und kleine Argumente aus (vgl. Abschnitt 4.3.7), lassen sich für Schiefe und Kurtosis Näherungen ableiten (vgl. Barndorff-Nielsen et al. [7]). Approximativ gilt dann:

$$\gamma_1 \sim \begin{cases} \frac{6}{\sqrt{2}} \frac{\beta}{\alpha} \{1 + O((\beta/\alpha)^2)\} & \text{falls } \beta/\alpha \rightarrow 0, \zeta \rightarrow 0 \\ 3 \zeta^{-1/2} \frac{\beta}{\alpha} \{1 + O((\beta/\alpha)^2)\} & \text{falls } \beta/\alpha \rightarrow 0, \zeta \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4.71)$$

und

$$\gamma_2 \sim \begin{cases} 3 \{1 + O((\beta/\alpha)^2)\} & \text{falls } \beta/\alpha \rightarrow 0, \zeta \rightarrow 0 \\ 3 \zeta^{-1} \{1 + O((\beta/\alpha)^2)\} & \text{falls } \beta/\alpha \rightarrow 0, \zeta \rightarrow \infty \end{cases}. \quad (4.72)$$

Das asymptotische Verhalten der Kurtosis deutet darauf hin, dass die hyperbolische Verteilung in einem bestimmten Grenzübergang zur Normalverteilung führt.

Eine Vielzahl von bekannten Verteilungen ergeben sich als Spezialfälle der hyperbolischen Verteilung. Zur Ableitung dieser Spezialfälle eignet sich die Parametrisierung  $\text{hyp}(x; \chi, \xi, \delta, \mu)$ . Die Normalverteilung lässt sich durch den Grenzübergang  $\xi \rightarrow 0$  gewinnen; setzt man  $\xi = 1$ , ergibt sich die Laplace-Verteilung. Beim Limes  $|\chi| \rightarrow 1$  erhält man die Exponentialverteilung. Beim Grenzübergang  $\chi \rightarrow \pm \xi$  ergibt sich schliesslich die verallgemeinerte inverse gaussische Verteilung (vgl. Barndorff-Nielsen und Blæsild [6], Barndorff-Nielsen [5], Eberlein und Keller [40]).

Die Enden einer jeden verallgemeinerten hyperbolischen Verteilung, also auch diejenigen der hyperbolischen Verteilung, verhalten sich wie  $a x^b \exp(-c|x|)$  mit geeigneten Parametern  $a, b$  und  $c$  (vgl. Barndorff-Nielsen und Blæsild [6]). Ein Vergleich mit der Normalverteilung, deren Enden sich wie  $\exp(-x^2)$  verhalten, zeigt, dass die hyperbolische Verteilung langsamer abfällt als die Normalverteilung. Die hyperbolische Verteilung sollte also die Fat Tails einer Renditeverteilung besser beschreiben.

#### 4.3.4 Stochastischer Prozess

Kann die Verteilung der Renditen durch eine hyperbolische Verteilung gut beschrieben werden, dann liegt es nahe, für die zeitliche Entwicklung der Kurse  $S(t)$  einen stochastischen Prozess anzunehmen, welcher gerade hyperbolisch verteilte Renditen generiert. Ein solcher Prozess ist gegeben durch (vgl. Barndorff-Nielsen [5], Eberlein und Keller [40], Rydberg [103]):

$$S(t) = S(0) \exp(X(t)). \quad (4.73)$$

$X(t)$  ist hierbei eine hyperbolisch verteilte Zufallsvariable und  $S(0)$  bezeichnet den Preis zum Zeitpunkt 0. Der Prozess  $X(t), t \geq 0$  ist ein sogenannter *Lévy Prozess*,

das heisst ein Prozess mit stationären und unabhängigen Inkrementen, und wird im folgenden auch als hyperbolische Lévy Bewegung bezeichnet (vgl. Resnick [98]). Diese Bewegung ist dadurch gekennzeichnet, dass es sich um einen rein diskontinuierlichen Prozess handelt, das heisst der Prozess ändert seinen Wert nur durch diskrete Sprünge. Dies sei im Zusammenhang mit den beiden bisher diskutierten Modellen verdeutlicht. Die Geometrische Brownsche Bewegung ist nicht nur in der Zeit kontinuierlich, sondern auch die Kursänderungen sind stetig. Beim Sprung-Diffusions-Prozess wird die kontinuierliche Kursänderung um diskrete Sprünge ergänzt, wobei diese Sprünge zu beliebigen Zeiten auftreten können. Beim Prozess  $X(t)$  (vgl. Gleichung (4.73)) tritt zu jedem Zeitpunkt ein Sprung ein, wobei der Logarithmus der Sprunghöhe hyperbolisch verteilt ist. Diese Tatsache führt bei der Bewertung von Derivaten zu einigen Schwierigkeiten, wie man später noch sehen wird.

Der bedingte Erwartungswert und die bedingte Varianz des logarithmierten Kursprozesses  $\ln S(t)$  sind durch

$$\begin{aligned} E[\ln S(t) | \ln S(0)] &= \ln S(0) + t E[X(t)] = \ln S(0) + t (\beta T_{\zeta} a(\zeta) + \mu) , \\ \text{var}[\ln S(t) | \ln S(0)] &= t \text{var}[X(t)] = t (\beta^2 T_{\zeta}^2 a(\zeta) + T_{\zeta} a(\zeta)) \end{aligned}$$

gegeben.

Für die Monte-Carlo-Simulation wird ein zeitdiskretes Modell betrachtet. So ergibt sich der Kurs zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  aus demjenigen zum Zeitpunkt  $t$  über

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp(X_t) . \quad (4.74)$$

Die Zeitdiskretisierung  $\Delta t$  ergibt sich wiederum aus dem Startzeitpunkt  $t_0$ , dem Endzeitpunkt der Simulation  $T$  und der Anzahl Zeitschritte  $N$ :  $\Delta t = (T - t_0)/N$ .

Bei der Simulation des Prozesses (4.74) müssen hyperbolisch verteilte Zufallszahlen generiert werden. Dazu wird die Verwerfungsmethode verwendet (vgl. Honerkamp [58], S. 26 f. und Anhang A.3).

### 4.3.5 Optionspreismodell

Zur Ableitung einer Optionspreisformel im Modell hyperbolisch verteilter Aktienrenditen wird ein Martingalansatz gewählt. Da der Prozess (4.73) rein diskontinuierlich ist (vgl. Abschnitt 4.3.4), liegt die Schwierigkeit darin, ein äquivalentes Martingalmass zu finden. Die Ableitung ist mathematisch und technisch sehr schwierig, so dass im folgenden nur deren Grundzüge erläutert werden. Für Details wird auf die Literatur verwiesen (vgl. Eberlein [38], Eberlein und Jacod [39], Eberlein und Keller [40], Eberlein et al. [41] und Barndorff-Nielsen [5]). Im folgenden stehen daher nur diejenigen Gleichungen im Mittelpunkt, die zur konkreten Bewertung von Optionen ausgewertet werden müssen.

Der Wert  $C(S, T)$  einer europäischen Call-Option zum Verfallzeitpunkt  $T$  ist gegeben durch:

$$C(S, T) = \max\{S(T) - K, 0\}. \quad (4.75)$$

Der Wert der Option zu einem früheren Zeitpunkt  $t < T$  ist der mit dem risikolosen Zinssatz  $r$  abgezinste Erwartungswert des Optionswertes zum Zeitpunkt  $T$ :

$$C(S, t) = \exp(-r\tau) E_{P^*}[C(S, T)] \quad (4.76)$$

mit  $\tau \equiv T - t$ . Der Erwartungswert von  $C(S, T)$  wird dabei bezüglich dem äquivalenten Martingalmass  $P^*$  gebildet.

Im Fall der hyperbolischen Lévy Bewegung konzentriert man sich zur Vereinfachung auf die symmetrische und zentrierte hyperbolische Verteilung, das heisst auf die Verteilung mit Parametern  $\beta = \mu = 0$ , wobei die Dichte in der Form

$$hyp(x; \zeta, \xi) = \frac{1}{2\delta K_1(\zeta)} \exp\left(-\zeta \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\delta}\right)^2}\right)$$

parametrisiert sei. Inwieweit es gerechtfertigt ist, die Verteilung der Renditen durch die symmetrische und zentrierte hyperbolische Verteilung zu beschreiben, wird zu überprüfen sein.

Da es sich bei der hyperbolischen Lévy Bewegung um einen reinen Sprung-Prozess handelt, besteht die Schwierigkeit darin, ein äquivalentes Martingalmass zu finden. Es existiert eine Vielzahl von solchen Massen, so dass aus dieser Menge ein Mass auszuwählen ist. Um zu einer geschlossenen Optionsbewertungsformel zu gelangen, haben Eberlein und Keller [40] eine sogenannte *Escher-Transformation* angewendet, welche aus der Vielzahl möglicher Masse ein bestimmtes Mass auswählt. Das aus dieser Transformation resultierende Mass  $P^{\theta^*}$  wird als *Escher-äquivalentes Martingalmass* bezeichnet.  $P^{\theta^*}$  ist gegeben durch

$$dP^{\theta^*} = \exp(\theta^* X(t) - t \ln M(\theta^*)) dP, \quad (4.77)$$

wobei  $\theta^*$  Lösung der Gleichung

$$r - \ln M(\theta + 1) + \ln M(\theta) = 0 \quad (4.78)$$

ist. In dieser Gleichung bezeichnen  $r$  den konstanten (Tages-) Zinssatz und  $M(u)$  die Moment-erzeugende Funktion

$$M(u) = \frac{\zeta}{K_1(\zeta)} \frac{K_1(\sqrt{\zeta^2 - \delta^2 u^2})}{\sqrt{\zeta^2 - \delta^2 u^2}} \quad (4.79)$$

der hyperbolischen Verteilung mit  $|u| < \zeta/\delta$ .



Der Wert einer europäischen Call-Option zum Zeitpunkt  $t$  ergibt sich wiederum als abgezinster Erwartungswert des Optionspreises zum Verfallzeitpunkt  $T$ :

$$C(S, t) = \exp(-r\tau) E_{P^{\theta^*}}[C(S, T)] . \quad (4.80)$$

Hier wird nun der Erwartungswert bezüglich dem Escher-äquivalenten Martingalmass gebildet.

Als Ausdruck für den Preis einer europäischen Call-Option ergibt sich schliesslich:

$$C(S, t) = S(t) \int_c^{+\infty} f_{\tau}^{\zeta, \delta}(x; \theta^* + 1) dx - \exp(-r\tau) K \int_c^{+\infty} f_{\tau}^{\zeta, \delta}(x; \theta^*) dx , \quad (4.81)$$

wobei  $c = \ln(K/S(t))$ . Diese Integrationsgrenze rührt von der Maximumsfunktion  $\max\{S(t) - K, 0\}$  her. Die Dichte  $f_{\tau}^{\zeta, \delta}(x; \theta^*)$  ist über

$$f_{\tau}^{\zeta, \delta}(x; \theta^*) = \frac{\exp(\theta^* x) f_{\tau}^{\zeta, \delta}(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\theta^* y) f_{\tau}^{\zeta, \delta}(y) dy} \quad (4.82)$$

mit der Dichte  $f_{\tau}^{\zeta, \delta}(x)$  verknüpft und letztere ergibt sich als Fourierintegral der charakteristischen Funktion

$$f_{\tau}^{\zeta, \delta}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(ux) \left( \frac{\zeta}{K_1(\zeta)} \frac{K_1(\sqrt{\zeta^2 + \delta^2 u^2})}{\sqrt{\zeta^2 + \delta^2 u^2}} \right)^{\tau} du . \quad (4.83)$$

Für die konkrete Berechnung eines Optionspreises sind folgende Schritte auszuführen. Zunächst muss  $\theta^*$  als Lösung von Gleichung (4.78) bestimmt werden. Dies entspricht der Bestimmung einer Nullstelle einer Funktion. Im nächsten Schritt wird das Fourierintegral (4.83) mit Hilfe von Fast-Fourier-Transformations-Algorithmen berechnet (vgl. Press et al. [95], S. 577 ff.). Dazu stellt Numerical Recipes entsprechende Routinen bereit, die in vom Autor erstellte Programme eingebunden wurden. Anschliessend muss die Dichte  $f_{\tau}^{\zeta, \delta}(x; \theta)$  bestimmt werden. Die bei der Berechnung dieser Dichte und schliesslich, als letztem Schritt, bei der Berechnung des Optionspreises  $C(S, t)$  auftretenden Integrale werden mittels numerischer Integration ausgewertet (vgl. Press et al. [95], S. 129 ff.). Der numerische Aufwand zur Berechnung des Optionspreises im hyperbolischen Modell ist also recht hoch und daher sehr zeitintensiv.

### 4.3.6 Parameterschätzung

Die Schätzung des Parametervektors  $\theta \equiv (\alpha, \beta, \mu, \delta)'$  erfolgt nach dem Maximum-Likelihood-Prinzip. Die Log-Likelihood-Funktion der hyperbolischen Verteilung für eine gegebene Stichprobe von Renditen  $r_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ist gegeben durch

$$\ln L(\theta | r_1, \dots, r_n) = \sum_{i=1}^n \ln \text{hyp}(r_i | \theta)$$

$$\begin{aligned}
&= n \ln \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\alpha\delta K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} \\
&+ \sum_{i=1}^n \left\{ -\alpha\sqrt{\delta^2 + (r_i - \mu)^2} + \beta(r_i - \mu) \right\}. \quad (4.84)
\end{aligned}$$

Die Maximum-Likelihood-Schätzung  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  des Parametervektors  $\boldsymbol{\theta}$  ergibt sich durch Lösung des Gleichungssystems

$$\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta} | r_1, \dots, r_n)}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0. \quad (4.85)$$

Diese Gleichungen können nur auf numerischem Weg gelöst werden. Hierfür wird ein von Blæsild und Sørensen [12] entwickeltes Programm verwendet. Es beruht auf einer Modifikation des Gradientenverfahrens durch Broyden (vgl. Press et al. [95], S. 413 ff.).

### 4.3.7 Verallgemeinerte Besselfunktionen 3. Art

Die numerische Behandlung der verallgemeinerten Besselfunktion ist für die Anwendung der Klasse der hyperbolischen Verteilungen von Bedeutung. Da es sich bei dieser Funktion um eine komplexwertige und numerisch schwierig zu berechnende Funktion handelt, wird auf sie im folgenden kurz eingegangen.

Die verallgemeinerte Besselfunktion 3. Art  $K_\lambda(\gamma)$  mit Index  $\lambda$  kann auf verschiedene Arten parametrisiert werden, so zum Beispiel

$$K_\lambda(\gamma) = \int_0^{+\infty} \exp(-\gamma \cosh(x)) \cosh(\lambda x) dx \quad (Re \gamma > 0) \quad (4.86)$$

oder

$$K_\lambda(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^{\lambda-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma(x + x^{-1})\right) dx. \quad (4.87)$$

Aus den Beziehungen

$$\begin{aligned}
K_\lambda(\gamma) &= K_{-\lambda}(\gamma) \\
K_{\lambda+1}(\gamma) &= \frac{2\lambda}{\gamma} K_\lambda(\gamma) + K_{\lambda-1}(\gamma) \\
-2K'_\lambda(\gamma) &= K_{\lambda+1}(\gamma) + K_{\lambda-1}(\gamma)
\end{aligned} \quad (4.88)$$

für die verallgemeinerte Besselfunktion lässt sich für die Ableitung  $K'_\lambda(\gamma)$  von  $K_\lambda(\gamma)$  nach  $\gamma$  der Ausdruck

$$K'_\lambda(\gamma) = -\left(\frac{\lambda}{\gamma} K_\lambda(\gamma) + K_{\lambda-1}(\gamma)\right) \quad (4.89)$$

ableiten.

Für  $\gamma \rightarrow 0$  und  $\lambda > 0$  gilt die approximative Darstellung

$$K_\lambda(\gamma) \approx \Gamma(\lambda) 2^{\lambda-1} \gamma^{-\lambda}, \quad (4.90)$$

die sich besonders zur numerischen Auswertung der verallgemeinerten Besselfunktion eignet. Ebenso existiert eine approximative Darstellung für grosse  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} K_\lambda(\gamma) \approx & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \gamma^{-1/2} e^{-\gamma} \left( 1 + \frac{4\lambda^2 - 1}{8\gamma} + \frac{(4\lambda^2 - 1)(4\lambda^2 - 9)}{2! (8\gamma)^2} \right. \\ & \left. + \frac{(4\lambda^2 - 1)(4\lambda^2 - 9)(4\lambda^2 - 25)}{3! (8\gamma)^3} + \dots \right). \end{aligned} \quad (4.91)$$

In allen Fällen, bei denen keine zeitintensiven Computerberechnungen ausgeführt werden müssen, wird daher für den Fall kleiner  $\gamma$  ( $\gamma < 1 \cdot 10^{-6}$ ) die Besselfunktion nach Gleichung (4.90) berechnet. Im Fall  $\gamma > 1 \cdot 10^{-6}$  wird mittels numerischer Integration die Darstellung (4.86) ausgewertet. Da es sich um ein uneigentliches Integral handelt, muss die obere Grenze, bis zu welcher numerisch integriert wird, so gewählt werden, dass der Integrand für grössere Integrationsbereiche keinen Beitrag mehr liefert. Bei allen zeitaufwendigen Berechnungen wird auf eine Routine zurückgegriffen, die von Blæsild und Sørensen [12] bereitgestellt wird. Diese Routine beruht auf einer approximativen Darstellung von  $K_0$  und  $K_1$  über ein Polynom niedrigen Grades mit festgelegten Koeffizienten und lässt daher eine wesentlich schnellere Auswertung zu als eine numerische Integration. Verallgemeinerte Besselfunktionen mit  $\lambda > 1$  können daraus über die Iterationsformel (4.88) bestimmt werden (vgl. Abramowitz und Stegun [2] und Press et al. [95], S. 229 ff.).



## Kapitel 5

# Empirische Überprüfung der ausgewählten Modelle

Die in Kapitel 4 diskutierten Modelle implizieren für die Renditen einer Aktie ganz bestimmte Verteilungen. Die Geometrische Brownsche Bewegung führt auf normalverteilte Renditen, der Sprung-Diffusions-Prozess impliziert als Renditeverteilung eine Mischung von Normalverteilungen und das hyperbolische Modell führt auf hyperbolisch verteilte Renditen. Aus diesem Grund kann man untersuchen, wie gut empirische Renditeverteilungen durch eine Familie von Verteilungen approximiert werden können. Eine Überprüfung der Modelle auf Stufe der Renditeverteilung ist auch deshalb sinnvoll, da Risikomasse als Kenngrößen von Renditeverteilungen definiert sind.

Bei der Validierung der vorgestellten Modelle wird wie folgt vorgegangen. Zunächst werden anhand historischer Renditen die Parameter der Modelle geschätzt (vgl. Abschnitte 4.1.3, 4.2.3 und 4.3.6). In einem zweiten Schritt werden die theoretischen Verteilungen mit den so geschätzten Parametern berechnet. Schliesslich werden die theoretischen Verteilungen mit der empirischen Verteilung der Renditen verglichen. Statistische Tests dienen dabei zur Überprüfung, ob eine theoretische Verteilung mit einer empirischen Verteilung verträglich ist.

Die im vorangehenden Kapitel dargestellten Modelle werden anhand von Daten des schweizerischen Aktien- und Optionenmarktes überprüft. Dazu werden zunächst die eingesetzten Testverfahren dargestellt, anschliessend erfolgt die Darstellung der Analysen und die Diskussion der Ergebnisse. Die Untersuchungen werden dabei getrennt für den Aktienmarkt einerseits und für den Optionenmarkt andererseits durchgeführt.

Zur Untersuchung dieser Modelle wurde vom Autor die entsprechende Software entwickelt. Im Programm „est2“ sind Routinen implementiert, die Parameterschätzungen für alle drei Modelle zulassen. Ebenso sind statistische Testverfahren programmiert, mit denen die Hypothesen überprüft werden können, ob die Renditen nach einem

der Modelle verteilt sind. Das Programm „option“ erlaubt schliesslich die Bewertung europäischer Call-Optionen in jedem der ausgewählten Modelle.

## 5.1 Statistische Tests zur Validierung der Modelle

Die statistischen Testverfahren werden in diesem Abschnitt vorgestellt. Es handelt sich dabei um den Kolmogorov-Smirnov-Test (KS-Test), den  $\chi^2$ -Anpassungstest, den Likelihood-Quotienten-Test (LQ-Test) und als graphisches Instrument um den Quantil-Quantil-Plot (QQ-Plot).

### 5.1.1 Kolmogorov-Smirnov-Test

Der Kolmogorov-Smirnov-Test dient in dieser Arbeit zur Überprüfung der Nullhypothese normalverteilter Renditen, das heisst zur Überprüfung der sich aus der Geometrischen Brownschen Bewegung ergebenden Renditeverteilung. Vorteil dieses Tests ist die einfache Anwendung, der Nachteil besteht darin, dass die Menge der Verteilungen, die damit überprüfbar ist, eingeschränkt ist.

Die Grundidee des Kolmogorov-Smirnov-Tests besteht darin, den maximalen vertikalen Abstand zwischen hypothetischer Verteilungsfunktion  $F(r)$  und empirischer Verteilungsfunktion  $\hat{F}(r)$  zu ermitteln. Die empirische Verteilungsfunktion ergibt sich aus der Stichprobe der Renditen  $r_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) über

$$\hat{F}(r) = \frac{1}{n}(\#r_i | r_i < r) .$$

Der maximale vertikale Abstand  $D_n$  zwischen  $F(r)$  und  $\hat{F}(r)$  wird über

$$D_n = \max_r |F(r) - \hat{F}(r)|$$

bestimmt. Die Nullhypothese  $H_0$  einer Normalverteilung der Daten wird zum Signifikanzniveau  $\alpha$  verworfen, falls gilt

$$\sqrt{n} D_n \geq d_{n,1-\alpha} .$$

Die kritischen Werte  $d_{n,1-\alpha}$  ergeben sich als  $(1 - \alpha)\%$ -Quantile der Verteilung der Testgrösse  $D_n$ . Diese kritischen Werte lassen sich für Normalverteilungen (und andere Verteilungen) in Tabellen nachschlagen oder über Näherungsformeln bestimmen. Die so ermittelten Werte gelten aber nur dann, wenn die Parameter der hypothetischen Verteilung, bei der Normalverteilung also  $\mu$  und  $\sigma^2$ , bekannt sind. Müssen die Parameter zusätzlich aus der Stichprobe geschätzt werden, ändern sich die kritischen Werte, welche dann nicht mehr einfach bestimmt werden können. Für den Fall einer Normalverteilung sind solche kritischen Werte bei Hartung zu finden (vgl. Hartung [55], S. 184). Für andere Verteilungen stehen sie nicht zur Verfügung, was erklärt, dass der Kolmogorov-Smirnov-Test in dieser Arbeit auf die Überprüfung der Hypothese normalverteilter Daten beschränkt bleibt.

### 5.1.2 $\chi^2$ -Anpassungstest

Der  $\chi^2$ -Anpassungstest dient wie der Kolmogorov-Smirnov-Test zur Überprüfung der Nullhypothese  $H_0$ , dass die Daten von einer bestimmten theoretischen Verteilung erzeugt wurden (vgl. Hartung [55], S. 182 ff.).

Die Nullhypothese  $H_0$  unterstellt, dass die Renditen gemäss einer theoretischen Verteilung  $F(r)$  verteilt sind. Zur Konstruktion einer geeigneten Testgrösse, und zu deren konkreten Berechnung, wird in mehreren Schritten vorgegangen. Als erstes wird der Wertebereich der Untersuchungsvariablen in  $k$  Klassen unterteilt. Im nächsten Schritt wird die Anzahl Beobachtungen  $O_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) pro Klasse bestimmt, das heisst an dieser Stelle kommt die empirische Renditeverteilung ins Spiel. Anschliessend ist das entsprechende Pendant der theoretischen Verteilung numerisch aus der Verteilungsannahme zu bestimmen. Zu berechnen ist die Wahrscheinlichkeit  $p_i$ , mit der eine Beobachtung unter  $H_0$  in der  $i$ -ten Klasse liegt. Daraus ergibt sich die unter  $H_0$  erwartete Anzahl Beobachtungen in der  $i$ -ten Klasse mit  $E_i = n p_i$ . Im letzten Schritt wird die Testgrösse

$$T = \sum_{i=1}^k \frac{1}{E_i} (O_i - E_i)^2$$

bestimmt.  $T$  ist unter  $H_0$  asymptotisch  $\chi^2$ -verteilt mit  $k - 1$  Freiheitsgraden. Zu beachten ist, dass diese Approximation hinreichend genau ist, falls nicht mehr als 20% der  $E_i$  kleiner als fünf und alle Werte von  $E_i \geq 1$  sind. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, sind Klassen entsprechend zusammenzulegen.

Die Nullhypothese  $H_0$  wird zum Signifikanzniveau  $\alpha$  verworfen, falls

$$T > \chi_{k-1; 1-\alpha}^2$$

gilt.  $\chi_{k-1; 1-\alpha}^2$  ist dabei das  $(1-\alpha)\%$ -Quantil der  $\chi^2$ -Verteilung mit  $k - 1$  Freiheitsgraden. Müssen aus der Stichprobe zusätzlich  $g$  Parameter geschätzt werden, so reduziert sich die Anzahl Freiheitsgrade um die Anzahl geschätzter Parameter.  $H_0$  ist dann bei

$$T > \chi_{k-1-g; 1-\alpha}^2$$

zu verwerfen.

Die Quantile  $\chi_{k-1-g; 1-\alpha}^2$  lassen sich zwar in Tabellen nachschlagen, für die Anwendung in einer numerischen Routine ist deren Berechnung über eine Näherungsformel jedoch praktikabler. Verwendet wird dazu die Approximation nach Wilson und Hilferty (vgl. Hartung [55], S. 894):

$$\chi_{k-1-g; 1-\alpha}^2 \approx (k-1-g) \left\{ 1 - \frac{2}{9(k-1-g)} + u_{1-\alpha} \sqrt{\frac{2}{9(k-1-g)}} \right\}^3,$$

wobei mit  $u_{1-\alpha}$  das  $(1-\alpha)\%$ -Quantil der Standardnormalverteilung bezeichnet wird. Für zwei häufig verwendete Signifikanzniveaus  $\alpha = 1\%$  und  $\alpha = 5\%$  sind diese Quantile gegeben durch  $u_{0.99} = 2.3263$  und  $u_{0.95} = 1.6449$ .

Der  $\chi^2$ -Anpassungstest wird für alle drei Modelle und die sich daraus ergebenden Renditeverteilungen durchgeführt.

### 5.1.3 Likelihood-Quotienten-Test

Während bei den obigen Tests jeweils eine hypothetische mit einer empirischen Verteilung verglichen wird, stellt der Likelihood-Quotienten-Test zwei hypothetische Verteilungen einander gegenüber. Dies bedeutet, dass dieser Test nur Aussagen darüber machen kann, welche von zwei Verteilungen eher geeignet ist, die Daten zu beschreiben. Weiterhin ist zu beachten, dass die Alternativhypothese in einer bestimmten Parametrisierung die Nullhypothese enthalten muss. Deshalb wird der Likelihood-Quotienten-Test auf den Fall einer Normalverteilung als Nullhypothese und die Verteilung des Sprung-Diffusions-Prozesses als Alternativhypothese angewendet, da letztere die Normalverteilung für  $\lambda = 0$  als Spezialfall umfasst.

Die Testgrösse  $\tilde{\lambda}$  wird als Quotient aus den Likelihood-Funktionen  $L_{\text{GGB}}(\boldsymbol{\theta})$  und  $L_{\text{SD}}(\boldsymbol{\theta})$  gebildet. Als Werte für die entsprechenden Parametervektoren  $\boldsymbol{\theta}$  werden die jeweiligen Maximum-Likelihood-Schätzungen eingesetzt. So ergibt sich

$$\tilde{\lambda} = \frac{L_{\text{GGB}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{L_{\text{SD}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}. \quad (5.1)$$

Die Grösse  $-2 \ln \tilde{\lambda}$  ist  $\chi^2$ -verteilt mit  $p-q$  Freiheitsgraden.  $p$  ist die Anzahl Parameter im Sprung-Diffusions-Modell, das heisst  $p = 5$ , und  $q$  ist die Parameterzahl im Modell der Geometrischen Brownschen Bewegung, das heisst  $q = 2$ . Die Nullhypothese  $H_0$  wird zum Signifikanzniveau  $\alpha$  verworfen, falls

$$-2 \ln \tilde{\lambda} > \chi_{p-q, 1-\alpha}^2.$$

Wird die Nullhypothese verworfen, so bedeutet dies nur, dass sich die Renditeverteilung, die sich aus dem Sprung-Diffusions-Prozess ergibt, besser zur Beschreibung der Renditen eignet als die Normalverteilung.

### 5.1.4 Quantil-Quantil-Plot

Mit einem QQ-Plot kann auf graphische Weise einfach überprüft werden, ob Daten einer Beobachtungsreihe Realisierungen einer bestimmten Verteilung darstellen. Der Ansatz dieser Plots besteht darin, empirische Quantile gegen die entsprechenden theoretischen Quantile aufzutragen. Der QQ-Plot wird in dieser Arbeit zur Überprüfung der Normalverteilungshypothese eingesetzt.



Bei einer Normalverteilung  $N(\mu, \sigma^2)$  sind die theoretischen Quantile durch  $\sigma u_\alpha + \mu$  gegeben, wobei  $u_\alpha$  das  $\alpha\%$ -Quantil der Standardnormalverteilung darstellt. Für die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  sind dabei die geschätzten Werte einzusetzen. Die empirischen Quantile ergeben sich aus der geordneten Stichprobe der Renditen  $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n$ . So ist das  $\alpha\%$ -Quantil durch  $r_{[\alpha n]+1}$  bestimmt.  $[\cdot]$  ist dabei die Gauss-Klammer. Bei Zutreffen der Verteilungshypothese ergibt sich ungefähr eine Ursprungsgerade mit Steigung Eins.

## 5.2 Empirische Untersuchung für den schweizerischen Aktienmarkt

Die empirische Untersuchung in diesem Abschnitt geht anhand von Daten des schweizerischen Aktienmarktes der Frage nach, wie gut sich empirische Renditeverteilungen durch die in Kapitel 4 vorgestellten Modelle approximieren lassen.

Bei den untersuchten Titeln handelt es sich weiter um die bei der Analyse der Annahmen über Finanzmarktdaten vorgestellten Aktien: ABB Inhaber, Credit-Suisse Namen, Nestlé Namen, Novartis Namen und Roche Genussschein. Daneben wird auch der SMI als Aktienindex analysiert. Als Zeitraum wird wiederum die Periode 1989 bis 1998 unterstellt. Zur Berechnung der Renditen und zur Parameterschätzung werden die Return Indizes, also die dividendenkorrigierten Kurse herangezogen (vgl. Abschnitt 2.3.1). Die Zeitperiode 1989 bis 1998 wird zusätzlich in einzelne Subperioden unterschiedlicher Länge eingeteilt. So werden der zehnjährige Zeitraum, zwei fünfjährige, fünf zweijährige und als Vertreter einjähriger Subperioden die Jahre 1997 und 1998 untersucht. Es ist selbstverständlich, dass die Ergebnisse einer Gesamtperiode nicht unabhängig von den Ergebnissen einer Subperiode sind.

Für die Einteilung des Untersuchungszeitraums in Unterperioden sind drei Gründe anzuführen. Erstens hat die Analyse der Annahmen über Finanzmarktdaten gezeigt, dass sich Aktienrenditen zu verschiedenen Zeiten unterschiedlich verhalten (vgl. Abschnitt 2.3). Werden zweitens Risikomasse auf Grundlage historischer Daten geschätzt, so bestimmt der Stichprobenumfang, wie stark die Vergangenheit berücksichtigt wird. Bei sehr grossen Stichproben werden länger zurückliegende Ereignisse im Vergleich zu aktuelleren Daten stärker einbezogen. Es ist aber unrealistisch, Situationen von vor zehn Jahren als mögliche Szenarien für das kurzfristige zukünftige Kursverhalten zu verwenden. Und schliesslich drittens – hier wird den Ausführungen über die aufsichtsbehördlichen Rahmenbedingungen zur Risikomessung vorgegriffen – müssen bei Anwendung des Value-at-Risk-Konzeptes zur Messung von Marktrisiken die Schätzungen auf einen Zeitraum von mindestens einem Jahr abgestützt werden. Dies erklärt die Auswahl einjähriger Perioden. Durch die Einteilung in verschiedene Untersuchungsperioden werden pro Titel zehn Perioden unterschiedlicher Länge untersucht.

Neben der Untersuchung von Tagesrenditen, die im Vordergrund stehen wird, wer-

den auch Zehntagesrenditen analysiert. Hierbei geht es um die Frage, wie gut diese Renditen durch die Normalverteilung approximiert werden können. Werden zur Analyse Log-Renditen verwendet, so ergeben sich Zehntagesrenditen als Summe von zehn Eintagesrenditen. Sind die Tagesrenditen identisch aber beliebig verteilt und zudem unabhängig, so lässt sich der Zentrale Grenzwertsatz als Argument dafür heranziehen, dass die Zehntagesrenditen eher normalverteilt sind. Die Wahl von Eintages- oder Zehntagesrenditen wird bei der Schätzung von Risikomasszahlen von grosser Bedeutung sein.

Die Untersuchungen werden in drei Schritten durchgeführt. Zunächst wird auf der Grundlage einer Stichprobe von  $n + 1$  Tagesschlusskursen  $P_t$  eine Stichprobe von  $n$  Tagesrenditen berechnet. Bei der Bestimmung der Zehntagesrenditen werden sich überlappende Zeiträume verwendet. Die Zehntagesrenditen sind dann zwar nicht mehr unkorreliert, die Stichprobenumfänge würden aber sonst sehr klein werden (vgl. Huschens [64]). Im zweiten Schritt werden die Parameter der Geometrischen Brownschen Bewegung, des Sprung-Diffusions-Prozesses und des hyperbolischen Modells mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode geschätzt. Diese Parameter werden zur Bestimmung der theoretischen Verteilungen verwendet, um so in einem dritten Schritt die verschiedenen Tests durchzuführen.

Exemplarisch wird die Credit-Suisse Namenaktie herausgegriffen, um den Gang der Untersuchung und die Ergebnisse vorzustellen. Die Resultate für die übrigen Aktien und für den SMI sind in Anhang C.1 zu finden. Die Diskussion der Ergebnisse bezieht sich hingegen auf alle Titel.

### 5.2.1 Untersuchung von Tagesrenditen

Die detaillierten Ergebnisse der Untersuchungen für die drei Modelle sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst. Die Tabelle ist aufgeteilt in zwei Teile, wobei sich jeder dieser Teile wieder in drei Kategorien gliedert. Der obere Teil enthält die ein-, fünf- und zehnjährigen Perioden, der untere Teil die zweijährigen Perioden. Die Dreiteilung orientiert sich an den drei Modellen. Zunächst werden die Ergebnisse für die Geometrische Brownsche Bewegung, anschliessend für den Sprung-Diffusions-Prozess und schliesslich für das hyperbolische Modell gezeigt. Alle statistischen Tests werden zu den Signifikanzniveaus  $\alpha = 1\%$  und  $\alpha = 5\%$  durchgeführt.

Für die Geometrische Brownsche Bewegung werden die Parameter  $\mu$  und  $\sigma^2$  geschätzt. Einen ersten Überblick über die Gültigkeit der Hypothese normalverteilter Renditen gibt der Quantil-Quantil-Plot in Abbildung 5.1. Aufgetragen sind die empirischen Quantile gegen die Quantile einer Normalverteilung  $N(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$  für die Renditen der Credit-Suisse Namenaktie im Zeitraum 1989 bis 1998. In allen Bereichen, vor allem aber für sehr kleine und sehr grosse Quantile, weichen die Punkte deutlich von einer Ursprungsgeraden ab. Dies ist ein erster Hinweis gegen die Normalverteilungshypothese.

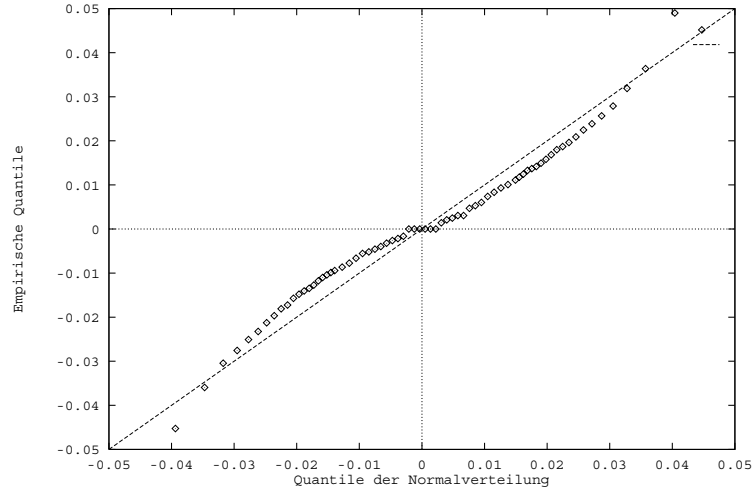


Abbildung 5.1: Quantil-Quantil-Plot für die Renditen der Credit-Suisse Namenaktie für den Zeitraum 1989 bis 1998.

Die Ergebnisse des  $\chi^2$ -Tests, des Kolmogorov-Smirnov-Tests (KS-Test) und des Likelihood-Quotienten-Tests (LQ-Test) lassen sich aus Tabelle 5.1 ablesen. In jedem Fall wird für die Credit-Suisse Namenaktie die Hypothese normalverteilter Renditen abgelehnt. Zusätzlich sind die entsprechenden Schätzungen für Schiefe und Kurtosis angegeben. Die Schätzungen für die Schiefe zeigen in der Regel negative Werte, was auf linksschiefe Verteilungen schliessen lässt. Die Kurtosis wird im allgemeinen deutlich höher geschätzt als der Wert Drei, der die Normalverteilung charakterisiert. Dies deutet auf leptokurtisches Verhalten hin. Dieses Resultat gilt auch auf die übrigen Titel.

Für den Sprung-Diffusions-Prozess sind Parameterschätzungen  $\hat{\mu}_B, \hat{\sigma}_B, \hat{\mu}_J, \hat{\sigma}_J$  und  $\hat{\lambda}$  für  $\mu_B, \sigma_B, \mu_J, \sigma_J$  und  $\lambda$  angegeben, sowie die Resultate des  $\chi^2$ -Tests. Für zwei Subperioden konnten mit dem Newton-Raphson-Verfahren numerisch keine Parameter geschätzt werden (mit „n.v.“ gekennzeichnet). Die  $\chi^2$ -Tests ergeben eine Nichtablehnung der Hypothese, dass die Renditen gemäss der durch den Sprung-Diffusions-Prozess implizierten Verteilung verteilt sind, für ein Signifikanzniveau von  $\alpha = 5\%$  ( $\alpha = 1\%$ ) in 5 (7) der zehn untersuchten Perioden. Die Resultate der Likelihood-Quotienten-Tests sprechen in allen Fällen gegen normalverteilte Renditen und damit im Sinne dieses Tests eher für das Sprung-Diffusions-Modell.

Für das Modell hyperbolisch verteilter Renditen sind schliesslich die Parameterschätzungen  $\hat{\alpha}, \hat{\delta}, \hat{\beta}$  und  $\hat{\mu}$  für  $\alpha, \delta, \beta$  und  $\mu$  sowie die Resultate der  $\chi^2$ -Tests

der Tabelle zu entnehmen. Die Hypothese hyperbolisch verteilter Renditen wird für ein Signifikanzniveau von  $\alpha = 5\%$  ( $\alpha = 1\%$ ) in 6 (8) der zehn untersuchten Perioden nicht abgelehnt.

Die Verteilungshypothesen werden für die Stichprobe der Rendite, welche die gesamten zehn Jahre zwischen 1989 und 1998 umfasst, statistisch signifikant verworfen. Zumindest graphisch kann gezeigt werden, dass auch für diesen Zeitraum das hyperbolische Modell und der Sprung-Diffusions-Prozess zu einer besseren Beschreibung empirischer Renditeverteilungen führen als die Geometrische Brownsche Bewegung. Abbildung 5.2 zeigt diese graphische Analyse. Die theoretischen Dichten wurden mit Hilfe der geschätzten Parameter berechnet, die empirische Dichte wurde unter Verwendung eines Kerndichteschätzers geschätzt (vgl. Abschnitt 7.3).

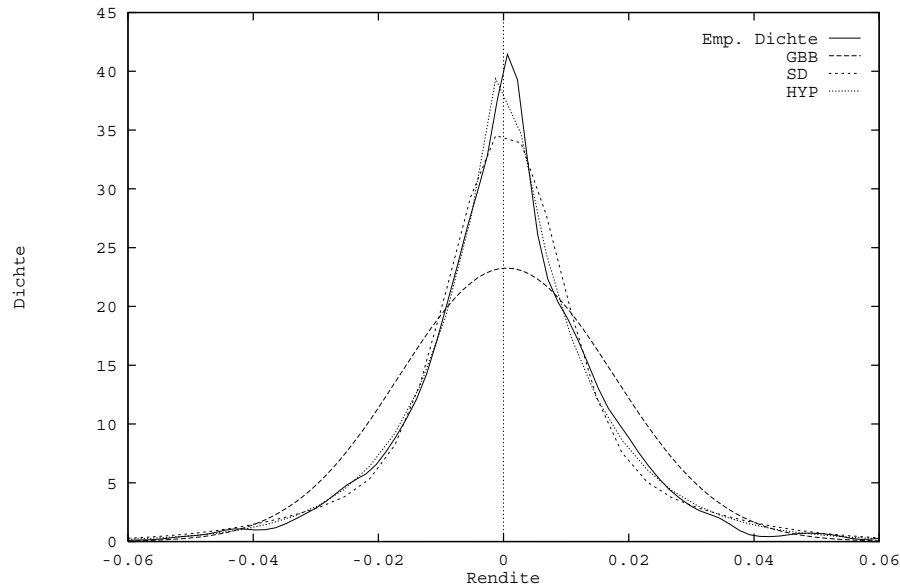


Abbildung 5.2: Vergleich der geschätzten Dichten für die Modelle GBB, SD und HYP mit der empirischen Dichte der Renditen der Credit-Suisse Namenaktie für den Zeitraum 1989–1998.

Die für die anderen Titel durchgeführten empirischen Analysen zeigen, dass die obigen Ergebnisse für die Credit-Suisse Namenaktie sich auf die restlichen Titel und den SMI übertragen lassen. Nimmt man den  $\chi^2$ -Test, welcher für alle drei Modelle durchgeführt wurde, als Grundlage, so können bei der Beurteilung aller fünf Aktien und des SMI für alle ausgewählten Perioden folgende Aussagen gemacht werden. Die

CSN		1-jährig		5-jährig		10-jährig
Modell		97	98	89-93	94-98	89-98
GBB	$\hat{\mu}$	0.002138	-0.000244	0.000589	0.000421	0.000509
	$\hat{\sigma}^2$	0.000427	0.000994	0.000187	0.000401	0.000294
	Schiefe	-0.022747	-0.360329	-0.135403	-0.201690	-0.200983
	Kurtosis	4.584337	6.665702	8.679897	10.554495	11.580543
	$\chi^2$ -Test	**	**	**	**	**
	KS-Test	**	**	**	**	**
	LQ-Test	**	**	n.v.	**	**
SD	$\hat{\mu}_B$	0.000282	0.001555	n.v.	0.000706	0.000361
	$\hat{\sigma}_B^2$	0.000015	0.000284	n.v.	0.000168	0.000073
	$\hat{\mu}_J$	0.001192	-0.005100	n.v.	-0.001622	0.000298
	$\hat{\sigma}_J^2$	0.000266	0.001999	n.v.	0.001295	0.000405
	$\hat{\lambda}$	1.556552	0.352792	n.v.	0.175615	0.497691
	$\chi^2$ -Test				*	**
HYP	$\hat{\alpha}$	67.418662	46.818029	107.306919	74.871366	88.171692
	$\hat{\delta}$	0.000731	3.19e-9	9.03e-11	2.18e-11	2.10e-12
	$\hat{\beta}$	3.034365	-1.972029	3.389320	1.180431	1.977279
	$\hat{\mu}$	0.000795	0.001559	-7.63e-11	-2.05e-11	1.88e-12
	$\chi^2$ -Test					**

CSN		2-jährig				
Modell		89-90	91-92	93-94	95-96	97-98
GBB	$\hat{\mu}$	-0.000704	0.000818	0.000834	0.000546	0.000982
	$\hat{\sigma}^2$	0.000192	0.000215	0.000201	0.000151	0.000711
	Schiefe	-0.496853	0.233812	-0.265384	1.753289	-0.406356
	Kurtosis	11.712962	6.375204	3.772030	17.632016	7.396454
	$\chi^2$ -Test	**	**	**	**	**
	KS-Test	**	**	**	**	**
	LQ-Test	**	**	**	n.v.	**
SD	$\hat{\mu}_B$	-0.000700	-0.001512	0.002716	n.v.	0.002533
	$\hat{\sigma}_B^2$	0.000028	0.000027	0.000056	n.v.	0.000238
	$\hat{\mu}_J$	-0.000005	0.001973	-0.001424	n.v.	-0.004575
	$\hat{\sigma}_J^2$	0.000227	0.000149	0.000108	n.v.	0.001335
	$\hat{\lambda}$	0.666699	1.180897	1.322148	n.v.	0.339230
	$\chi^2$ -Test			**		
HYP	$\hat{\alpha}$	112.206093	97.669892	133.386277	147.850557	54.992459
	$\hat{\delta}$	1.33e-11	3.74e-11	0.014045	0.008083	8.44e-9
	$\hat{\beta}$	-4.423536	3.894528	-14.124962	19.353681	-0.812236
	$\hat{\mu}$	1.87e-11	-4.29e-11	0.003661	-0.002035	0.001519
	$\chi^2$ -Test	*	*	**		

Tabelle 5.1: Ergebnisse für die Credit-Suisse Namenaktie. Teststatistiken: „\*“ signifikant bei  $\alpha = 5\%$ , „\*\*“ signifikant bei  $\alpha = 1\%$ .

Normalverteilungshypothese wird zum Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$  ( $\alpha = 1\%$ ) nur in 20% (25%) der Fälle nicht abgelehnt. In allen anderen Fällen kann diese Hypothese verworfen werden. Bei den Perioden, in denen die Normalverteilungshypothese für Renditen nicht abgelehnt wird, handelt es sich in der Regel um die Jahre 1997 und 1998 und um die zweijährigen Perioden 1993–1994 und 1997–1998.

Eine gleich hohe Nichtablehnungshäufigkeit der Nullhypothese ergibt sich für das Sprung–Diffusions–Modell und das hyperbolische Modell. Bei einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 5\%$  ( $\alpha = 1\%$ ) erfolgt eine Nichtablehnung in 68.3% (76.7%) aller Fälle. Damit werden diese beiden Hypothesen deutlich häufiger nicht abgelehnt als diejenige normalverteilter Renditen. Die Parameter im hyperbolischen Modell konnten in insgesamt fünf Fällen, im Sprung–Diffusions–Modell in acht Fällen numerisch nicht geschätzt werden.

Betrachtet man ausschliesslich die Daten des gesamten Beobachtungszeitraums 1989 bis 1998, so wird die Hypothese hyperbolisch verteilter Renditen nur für die Novartis Namenaktie, diejenige von gemäss Sprung–Diffusions–Prozess verteilter Renditen nur für die Novartis Namenaktie und den SMI nicht abgelehnt.

In Einzelfällen können die Parameter des Sprung–Diffusions–Prozesses im Sinne der Modellannahmen interpretiert werden (vgl. Abschnitt 4.2). Als Beispiel seien die geschätzten Parameter der Renditen der ABB Inhaberaktie für das Jahr 1997 betrachtet. Für die Häufigkeit des Eintreffens sehr wichtiger und firmenspezifischer Information ergibt sich mit  $\hat{\lambda} = 1.4796$  ein hoher Wert. Zudem zeigt  $\hat{\mu}_J < 0$  an, dass es sich um Informationen handelt, die sich negativ auf die Rendite auswirken. Diese Parameterschätzungen könnten durch die eintretende Asienkrise im Jahr 1997, die mehr oder weniger stark alle Unternehmen betroffen hat, und durch ein für die ABB spezifisches Ereignis beeinflusst sein. So ergibt sich vom 27. auf den 28.10.1997 eine negative Rendite von 12%, während der Gesamtmarkt nur um rund 5% nachgab. Grund für diesen Kurseinbruch war das Vorlegen schlechter Ertragszahlen und unsicherer Ertragsprognosen durch die ABB (vgl. o.V. [92]).

Für die Ableitung einer Optionspreisformel im hyperbolischen Modell war in Abschnitt 4.3.5 die Einschränkung  $\mu = \beta = 0$  getroffen worden. Inwieweit diese Annahme auch tatsächlich eine Einschränkung darstellt, kann anhand der geschätzten Parameterwerte untersucht werden. Für den Lageparameter  $\mu$  ist diese Annahme sehr gut erfüllt; es ergeben sich fast immer Werte nahe an Null. Der Symmetrieparameter ist nicht isoliert zu betrachten, sondern im Zusammenhang mit den übrigen Parametern des Modells. Vor allem im Vergleich mit den Schätzungen für  $\alpha$  sind die geschätzten Werte für  $\beta$  sehr klein, so dass von recht symmetrischen Verteilungen ausgegangen werden kann. Diese bestätigt auch zum Beispiel die Darstellung der Dichte in Abbildung 5.2.

Zusammengefasst lässt sich als sehr wichtiges Resultat festhalten, dass sich sowohl der Sprung–Diffusions–Prozess als auch das hyperbolische Modell besser als die Normal-

verteilung eignen, um die Verteilung von Aktienrenditen auf täglicher Basis auf dem schweizerischen Aktienmarkt zu beschreiben. Dieses Resultat wird für die folgenden Analysen eine wichtige Rolle spielen.

### 5.2.2 Untersuchung von Zehntagesrenditen

Zur Untersuchung, ob Zehntagesrenditen eher normalverteilt sind als Tagesrenditen, werden  $\chi^2$ -Tests durchgeführt. Die Resultate für die betrachteten fünf Aktien und den SMI für die jeweils zehn untersuchten Perioden ergeben folgendes Bild (vgl. Anhang C.2). Für ein Signifikanzniveau von  $\alpha = 5\%$  ( $\alpha = 1\%$ ) wird die Hypothese normalverteilter Renditen in 25% (40%) der Fälle nicht abgelehnt. Damit ergibt sich eine wesentlich höhere Nichtablehnungsquote als bei den Tagesrenditen. Es ist daher zu vermuten, dass für zunehmende Periodenlängen die Geometrische Brownsche Bewegung ein immer besseres Modell für die Beschreibung von Aktienrenditen ist und komplexere Modelle eventuell nicht eingeführt werden müssen.

## 5.3 Empirische Untersuchung für den schweizerischen Optionenmarkt

Aus der Geometrischen Brownschen Bewegung, dem Sprung-Diffusions-Prozess und dem hyperbolischen Modell ergeben sich jeweils Optionspreisformeln, die für den Fall eines europäischen Calls abgeleitet wurden. Während im vorigen Abschnitt die Modelle auf Stufe der Aktienkursdynamik durch Vergleich der theoretischen, durch die einzelnen Modelle implizierten Renditeverteilungen mit einer empirischen Renditeverteilung untersucht wurden, sollen nun die Optionsmodelle analysiert werden. Es ist naheliegend, die Validierung dieser Modelle durch einen Vergleich zwischen mit Hilfe einer Optionspreisformel berechneten Preisen und Marktpreisen vorzunehmen.

Damit sind allerdings einige Schwierigkeiten verbunden. Zunächst berücksichtigen die hergeleiteten Optionspreisformeln die Zahlung von Dividenden nicht, zudem wurden Optionen europäischer Art unterstellt, während die standardisierten Optionen, die an der SOFFEX und seit dem 28.9.1998 an der Eurex gehandelt werden, vom amerikanischen Typ sind. Das bedeutet, dass eine Ausübung jederzeit während der Laufzeit möglich ist. Indexoptionen, also beispielsweise Optionen auf den SMI, sind dagegen europäisch ausgestaltet. Bei amerikanischen Optionen spielt die Dividendenzahlung die entscheidende Rolle bei der Frage, ob eine Ausübung zu einem bestimmten Zeitpunkt erfolgen soll oder nicht, da die Dividende nur demjenigen zusteht, der die Aktie physisch besitzt.

Problematisch ist ausserdem die Festlegung des Zeitraums, über den die Parameter der Modelle zu schätzen sind. Längere Zeiträume sorgen für grössere Stabilität der numerischen Verfahren zur Parameterschätzung. Um den aktuellen Marktsituationen besser Rechnung tragen zu können, sind jedoch kürzere Zeiträume anzuraten.

Zur Parameterschätzung stehen Tagesschlusskurse der zugrundeliegenden Aktie zur Verfügung. Wird auf Grundlage dieser geschätzten Parameter und eines Aktienchlusskurses ein theoretischer Optionspreis berechnet, so muss dieser Preis konsequenterweise mit einem Marktpreis der Option zum Zeitpunkt des Handelsschlusses der Aktie verglichen werden. Die Handelszeiten an der Optionen- und der Aktienbörse müssen allerdings nicht synchronisiert sein. Deshalb sollten für die Optionsmarktpreise Intraday-Daten zur Verfügung stehen, aus denen der Marktpreis zu dem Zeitpunkt abgelesen werden kann, der mit dem Zeitpunkt des theoretisch berechneten Optionspreises korrespondiert. Solche Daten werden von den Börsen in Form sogenannter Tick-Daten zur Verfügung gestellt, sind jedoch nur für einen begrenzten Zeitraum verfügbar. Zudem sind diese Daten sehr umfangreich, da jedes einzelne Geschäft bis auf die Zehntelsekunde genau erfasst wird.

Die angesprochenen Schwierigkeiten werden in den folgenden Abschnitten sukzessive diskutiert. So wird zunächst auf die Berücksichtigung von Dividenden und die Bewertung amerikanischer Optionen eingegangen. Insbesondere wird ein pragmatisches Vorgehen vorgestellt, welches es erlaubt, die abgeleiteten Optionspreisformeln für europäische Calls ohne Modifikationen für amerikanische Call-Optionen einzusetzen. Anschliessend werden die verwendeten Datenquellen erläutert, bevor im darauffolgenden Abschnitt die Vorgehensweise beschrieben wird, mit der die Modellpreise der Optionen bestimmt wurden. Es fügt sich ein kurzer Überblick über das sehr unruhige Börsenjahr 1998 an. Im Hauptteil wird schliesslich eine detaillierte empirische Untersuchung anhand von Daten des Jahres 1998 vorgestellt.

### 5.3.1 Berücksichtigung von Dividendenzahlungen und Bewertung amerikanischer Optionen

Zunächst soll die Auswirkung einer Dividendenzahlung auf den Wert einer europäischen Call-Option untersucht werden, bevor der kompliziertere Fall einer amerikanischen Option analysiert wird. Betrachtet man die Optionspreisformeln der vorgestellten Modelle, so geht in jede dieser Gleichungen der Kurs  $S(t)$  der zugrundeliegenden Aktie zum Bewertungszeitpunkt  $t$  ein. Nimmt man an, dass zwischen dem Bewertungszeitpunkt  $t$  und dem Verfallzeitpunkt  $T$  noch eine oder mehrere Dividendenausschüttungen erfolgen, so sollte dies den Wert der Option mindern, da der Inhaber der Call-Option von dieser Zahlung nicht profitiert. Für einen Optionsinhaber stellen daher Dividendenzahlungen Opportunitätskosten dar. Diese Kosten können berücksichtigt werden, indem der Kurs  $S(t)$ , der zur Berechnung des Optionspreises verwendet wird, um diese Kosten vermindert wird.

Betrachtet man  $N$  zukünftige Dividendenzahlungen zu diskreten und *bekannten* Zeitpunkten  $t_i^* \leq T$  und *bekannter* Höhe  $D_i^*$  ( $i = 1, \dots, N$ ), kann der Kurs  $S(t)$  über

$$S^-(t) = S(t) - \sum_{i=1}^N D_i^* \exp\{-r(t_i^* - t)\} \quad (t \leq \min\{t_i^*\})$$



korrigiert werden (vgl. Hull [60], S. 249 f.). Nach der letzten Dividendenzahlung während der Laufzeit ( $t > \min\{t_i^*\}$ ) muss keine Korrektur mehr vorgenommen werden. Zur Berechnung eines Optionspreises wird dann statt dem Kurs  $S(t)$  der korrigierte Kurs  $S^-(t)$  eingesetzt.

Selbstverständlich sind Zeitpunkt und Höhe der Dividendenzahlung im Voraus nicht genau bekannt. Der Zeitpunkt der Dividendenzahlung wird in der Regel wenige Tage nach der Generalversammlung der entsprechenden Unternehmung festgelegt, deren Termine im Voraus bekannt sind. Die Höhe der Dividende kann allenfalls über ein Dividendenmodell (zum Beispiel nach Gordon oder Lintner, vgl. Gehrig und Zimmermann [51], S. 99 ff. und S. 433 ff.) oder über die bisherige Dividendenpolitik der Unternehmung abgeschätzt werden. Bei einer a-posteriori-Analyse sind diese Größen hingegen exakt bekannt.

Der Einfluss einer Dividendenzahlung auf den Wert einer amerikanischen Call-Option ist viel direkter als dies bei einer europäischen Call-Option der Fall ist. So kann ein Investor entscheiden, die Option auszuüben und die Dividendenzahlung einzunehmen. Eine entsprechende Optionspreisformel sollte dies berücksichtigen.

Eine Ausübung bei einer amerikanischen Option ist zu jedem Zeitpunkt  $t^* \leq T$  möglich. Die Informationen, die zum Bewertungszeitpunkt  $t \leq T$  verfügbar sind, seien mit  $I(t)$  bezeichnet. Sie umfassen die historischen Kurse  $S(\tilde{t})$  ( $\tilde{t} \leq t$ ) und die bereits erfolgten Dividendenzahlungen. Bei gegebenen Informationen  $I(t)$  ist zum Zeitpunkt  $t$  bekannt, ob eine Option bereits ausgeübt wurde, das heisst  $t^* \leq t$ , oder nicht ausgeübt wurde, das heisst  $t < t^*$ . Eine amerikanische Call-Option kann nun prinzipiell unter Verwendung des Martingalansatzes mit einem äquivalenten Martingalmass  $P^*$  bewertet werden (vgl. Neftci [87], S. 336). Der Bewertungszeitpunkt sei mit  $t$  bezeichnet:

1. Wird die Option erst bei Verfall  $T$  ausgeübt, ergibt sich ihr Wert aus

$$C(S, t; T) = E_{P^*}[\exp\{-r(T-t)\} \max\{S(T) - K, 0\} | I(t)]. \quad (5.2)$$

2. Für eine frühere Ausübung  $t^* < T$  ist der Optionswert durch

$$C^*(S, t) = \max_{t^* \in \Phi_{t,T}} \{E_{P^*}[\exp\{-r(T-t)\} C(S, t; t^*) | I(t)]\} \quad (5.3)$$

gegeben. Dabei ist  $\Phi_{t,T}$  die Menge aller möglichen Ausübungszeiten zwischen dem Bewertungszeitpunkt  $t$  und dem Verfall  $T$ .

Man wird daher alle möglichen Preise  $C(S, t; t^*)$  über Gleichung (5.2) berechnen und das Maximum des abgezinsten bedingten Erwartungswertes dieser Preise aufsuchen. So wird der zum Bewertungszeitpunkt  $t$  optimale Ausübungszeitpunkt  $t^*$  festgelegt.

Sind alle Dividenden während der Laufzeit bereits ausgeschüttet (oder werden überhaupt keine Dividenden ausgeschüttet), reduzieren sich die verfügbaren Informationen auf die Kenntnis der Kursentwicklung. Der Wert der Option ist unter diesen

Umständen erst am Verfalltag am höchsten. Aus einer amerikanischen Option wird eine europäische Option.

Unterstellt man als Kursdynamik die Geometrische Brownsche Bewegung, so sind analytische Optionspreisformeln für amerikanische Optionen bekannt, während dies zum Beispiel für das hyperbolische Modell nicht zutrifft. Daher wird für die Bewertung amerikanischer Call-Optionen folgendes pragmatisches Vorgehen vorgeschlagen, das sich aus den vorhergehenden Erläuterungen ergibt und nur eine mögliche Dividendenzahlung berücksichtigt.

1. Korrektur der Kurse um die Dividende

$$S^-(t) = S(t) - D_1^* \exp\{-r(t_1^* - t)\}.$$

2. Falls  $D_1^* \leq K(1 - \exp\{-r(t_1^* - t)\})$ , findet keine vorzeitige Ausübung statt und die amerikanische Option wird mit Hilfe von  $S^-(t)$  als europäische Option bewertet (vgl. Hull [60], S. 251). Andernfalls wird bei den empirischen Analysen in den folgenden Abschnitten auf eine Bewertung verzichtet. Obige Ungleichung geht von der vereinfachten Situation aus, dass die Entscheidung zwischen Ausübung am Dividendenzahltag und Ausübung am Verfalltag getroffen werden muss. Wird die Option nicht ausgeübt, kann der Ausübungspreis  $K$  noch bis zum Verfall zum Zinssatz  $r$  angelegt werden. Sind die Rückflüsse aus dieser Investition grösser als die Höhe der Dividende, wird man sicher erst am Verfall ausüben.
3. Wurde die Dividende vor dem Zeitpunkt der Bewertung ausgeschüttet, erfolgt eine Bewertung als europäische Option ohne korrigierte Kurse.

### 5.3.2 Datengrundlage

Eine Vielzahl von unterschiedlichen Daten werden für den Vergleich von Optionspreisen, berechnet mit Hilfe eines Optionspreismodells, und von Marktpreisen dieser Option benötigt. Für die Berechnung der theoretischen Preise müssen Kursdaten der zugrundeliegenden Aktien, risikolose Zinssätze sowie Zeitpunkt und Höhe von Dividendenzahlungen zur Verfügung stehen. Marktpreise von Optionen müssen für einen Vergleich ebenfalls verfügbar sein.

Datastream liefert für die zugrundeliegenden Aktienwerte Kursdaten und Return Indizes, jeweils als Tagesschlusskurse. Als risikolose Zinssätze werden historische Zeitreihen von LIBOR-Sätzen auf den Schweizer Franken, die in verschiedenen Laufzeitbändern von 1,3,6 und 12 Monaten zur Verfügung stehen, herangezogen. Diese Zinssätze werden von Reuters bereitgestellt. Zeitpunkt und Höhe der Dividendenzahlungen der Unternehmungen können zum Beispiel aus den offiziellen Meldungen der SOFFEX bezogen werden.

Das umfangreichste Datenmaterial ist für die Marktpreise der Optionen vorhanden. Es handelt sich dabei um Tick-Daten, wobei Handelszeiten, gehandelte Volumina und bezahlter Preis für alle getätigten Geschäfte erfasst sind. Diese Daten werden für den schweizerischen Markt bis zum 25.9.1998 von der SOFFEX in Zürich, von diesem Zeitpunkt an aufgrund des Zusammenschlusses von SOFFEX und Deutscher Börse AG zur Terminbörse Eurex, von der Deutschen Börse AG in Frankfurt geliefert. Es handelt sich bei diesen Optionen um standardisierte Produkte, das heisst um Produkte mit standardisierten Verfalldaten (jeweils der dritte Freitag eines Monats) und verschiedenen, standardisierten Laufzeiten und Serien von Ausübungspreisen.

Untersucht werden die Marktpreise von Call-Optionen des Jahres 1998 auf die in Abschnitt 5.2 untersuchten Aktien und den SMI mit Verfalldaten von Januar 1998 bis Dezember 1999, das heisst mit maximalen Laufzeiten von 1,2,3,6,9,12 und 18 Monaten.

Bei den Call-Optionen auf Aktien ist die Ausübung amerikanisch, bei Call-Optionen auf Indizes, hier auf den SMI, ist die Ausübung europäisch. Über die detaillierte Ausgestaltung dieser Produkte geben die Broschüren der Eurex [49] Auskunft.

### 5.3.3 Vorgehen bei der Berechnung der theoretischen Modellpreise und Filtern der Marktpreise

Die Bestimmung von Modellpreisen erfolgt für amerikanische Optionen nach dem in Abschnitt 5.3.1 vorgestellten Verfahren. Für die europäischen Optionen auf den SMI werden die Optionspreisformeln der Geometrischen Brownschen Bewegung, des Sprung-Diffusions-Prozesses und des hyperbolischen Modells direkt angewendet.

Die Parameterschätzungen erfolgen wie in Abschnitt 5.2 auf Grundlage der Return Indizes. Der historische Zeitraum auf Grundlage dessen die Parameterschätzung erfolgt, ist sorgfältig abzuwägen. Kürzere Zeiträume widerspiegeln die aktuelle Marktsituation in der Regel besser, grössere Datenmengen führen zu stabileren numerischen Verfahren zur Parameterschätzung. Der Basler Ausschuss für Bankenaufsicht verlangt bei der Anwendung des Value-at-Risk-Konzeptes zur Risikomessung die Abstützung auf mindestens ein Jahr. Deshalb werden für die Schätzungen die letzten 250 Kurse (circa ein Jahr) inklusive des Kurses am Bewertungstag verwendet. Auf diese Weise werden für jeden Tag des Jahres 1998 für die fünf Aktientitel und den SMI für alle drei Modelle die jeweiligen Parameter geschätzt (rund 4500 Schätzungen). Für Einzelfälle sind im Optionspreismodell des Sprung-Diffusions-Prozesses und des hyperbolischen Modells keine Schätzungen vorhanden. Für diese Tage werden als Näherung die Parameter des Vortages eingesetzt. Für die in die Optionspreisformeln einzusetzenden Kurswerte werden die „normalen“ Kurse und nicht die Return Indizes verwendet. Da es sich bei diesen Daten um Tagesschlusskurse handelt, ergibt sich ein theoretischer Optionspreis zum Zeitpunkt des Handelsschlusses der Aktienbörse.

Die Tage bis zum Verfall werden in Handelstagen gemessen, das heisst ohne Wochen-

enden und Feiertage. Bei der Korrektur der Kursdaten um Dividendenzahlungen wird die Dividende zusätzlich um die Verrechnungssteuer von 35% korrigiert.

Welcher risikolose Zinssatz verwendet wird, hängt davon ab, wie lange die Restlaufzeit der Option am Bewertungstag ist. Für Laufzeiten bis zu einem Monat wird der 1-Monats-LIBOR verwendet, für Laufzeiten von einem bis zu zwei Monaten der 2-Monats-LIBOR, für Laufzeiten von zwei bis zu drei Monaten der 3-Monats-LIBOR, für Laufzeiten von drei bis zu sechs Monaten der 6-Monats-LIBOR und schliesslich der 12-Monats-LIBOR für Laufzeiten von über sechs Monaten.

Die auf diese Art und Weise berechneten theoretischen Optionspreise stellen Preise am Ende eines Handelstages der Aktienbörse dar. Zur Validierung der Modelle müssen die theoretischen Preise mit Marktpreisen desselben Zeitpunktes verglichen werden. Da die Handelszeiten von Aktien- und Optionenbörse in der Regel nicht synchronisiert sind – erst seit dem 3.8.98 fallen Handelsschluss von Aktien und Optionen an der schweizerischen Börse zusammen – und zudem für die Marktpreise der Optionen sehr viele Daten zur Verfügung stehen, müssen letztere geeignet gefiltert werden. Ausgangspunkt dafür stellt der Zeitpunkt des Handelsschlusses an der Aktienbörse dar. Der theoretische Optionspreis wird nur dann mit einem Marktpreis verglichen, falls in der letzten Stunde vor dem Schluss der Aktienbörse die Option an der Optionenbörse gehandelt wurde. Ist dies der Fall, wird der letzte in dieser Stunde gehandelte Optionskurs herangezogen. In allen anderen Fällen wird auf einen Vergleich zwischen Markt- und Modellpreis verzichtet.

Insgesamt stehen für die fünf Aktien und den SMI für das Jahr 1998 202'142 Marktpreise bereit. Daraus werden mit dem geschilderten Verfahren 11'887 Preise ausgefiltert.

### 5.3.4 Ein erster Überblick über das Jahr 1998

Dieser Abschnitt dient dazu, einen Überblick über die Situation auf dem schweizerischen Markt im Jahr 1998 zu gewinnen. Diese Situation ist dann bei der Interpretation der empirischen Resultate zu berücksichtigen.

Abbildung 5.3 zeigt den Kursverlauf des SMI im Jahr 1998, Abbildung 5.4 die zugehörigen Renditen. Ab August ist ein massiver Kursrückgang zu beobachten, verbunden mit einer deutlich erhöhten Volatilität. Erst gegen Ende des Jahres ist eine leichte Erholung der Kurse zu erkennen (vgl. auch Abschnitt 2.3.2).

Ein erster grober Vergleich zwischen Marktpreisen und Modellpreisen von Call-Optionen zeigt für den Zeitraum August bis Oktober um bis zu 100% höhere Marktpreise als theoretisch berechnete Preise. Vor allem für kleine Ausübungspreise der Call-Optionen, das heisst für Optionen, die aus dem Geld liegen, tritt dieses Phänomen auf. Hierfür müssen die Ursachen analysiert werden.

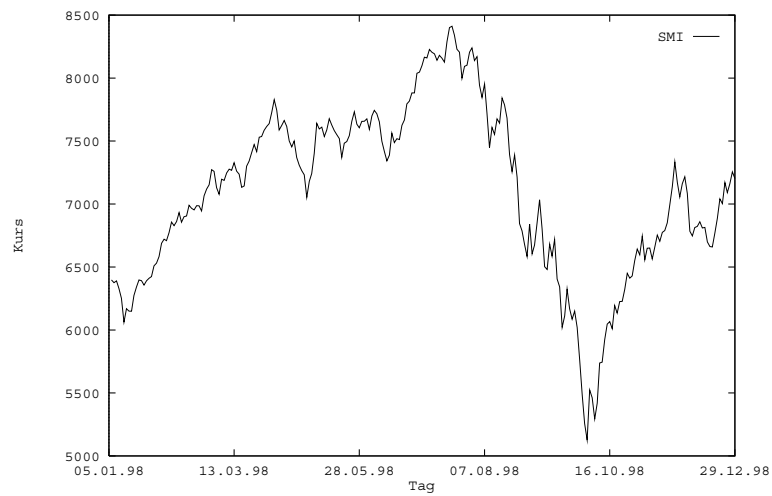


Abbildung 5.3: Kursverlauf des SMI im Jahr 1998.

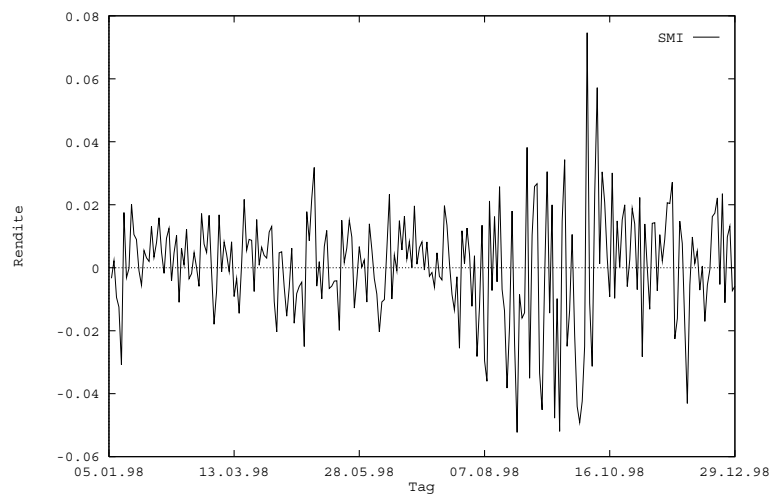


Abbildung 5.4: Renditen des SMI im Jahr 1998.

Für den erwähnten Zeitraum sind, wie gesagt, stark ansteigende Volatilitäten zu beobachten. Dies beeinflusst den Wert einer Option positiv, da bei grösserer Schwankungsfreudigkeit des Aktienkurses die Wahrscheinlichkeit steigt, dass eine Option bei Verfall im Geld liegt. Wird nun dieses Ansteigen der Volatilität in den Modellpreisen schnell genug berücksichtigt? Dazu betrachtet man zum Beispiel den zeitlichen Verlauf der Varianz  $\sigma^2$ , geschätzt über einen Zeitraum von jeweils einem Jahr. Die Standardabweichung  $\sigma$  geht in die Black-Scholes-Optionspreisformel als Mass für die Volatilität ein. In Abbildung 5.5 ist die Entwicklung der geschätzten Varianz im Jahr 1998 dargestellt. Daraus ist zu erkennen, dass mit einer ansteigenden Volatilität, sichtbar an grösseren Ausschlägen in den Renditen, auch die Schätzungen der Varianz ansteigen. Die ansteigende Volatilitäten werden also sehr rasch im Volatilitätsmass umgesetzt. Anders wäre die Situation bei sinkender Volatilität zu beurteilen. In diesem Fall werden starke Schwankungen in den Kursen aufgrund der historischen Zeitspanne, über die die Varianz geschätzt wird, präsent bleiben und auf die Schätzung von  $\sigma^2$  Einfluss ausüben. Die steigende Volatilität wird schnell genug im Volatilitätsmass berücksich-

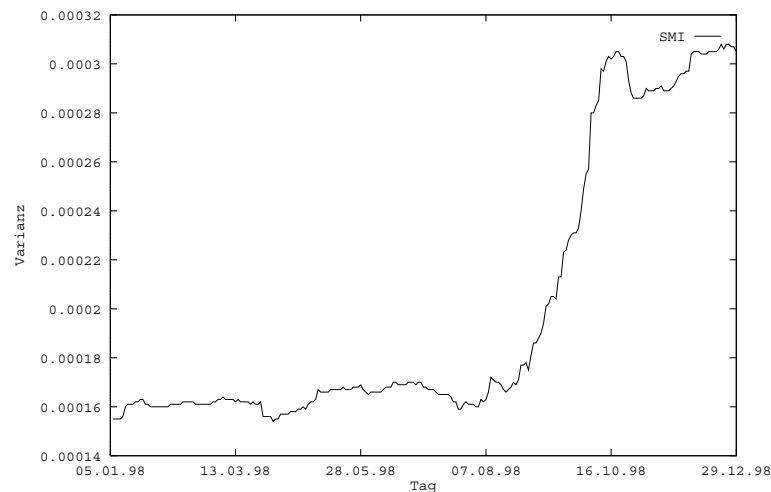


Abbildung 5.5: Varianzschätzungen für die Renditen des SMI im Jahr 1998.

tigt und scheint daher nicht die Ursache von zu tiefen Modellpreisen zu sein. Zudem ist ein zweiter dieser Entwicklung entgegenlaufender Faktor zu berücksichtigen. Sinkende Kurse am Aktienmarkt sollten bei Call-Optionen zu sinkenden Optionspreisen führen.

Ein ganz anderer Grund könnte für die hohen Marktpreise bei Call-Optionen insbesondere bei solchen, die aus dem Geld liegen, verantwortlich sein. Es könnte spekula-

tives Verhalten der Marktteilnehmer vorliegen. So lassen auch entsprechende Börsen-  
nachrichten aus dem Jahr 1998 darauf schliessen, dass am Markt zwar von einer deut-  
lichen, aber eher kurzfristig ausgerichteten Kurskorrektur ausgegangen wurde. Deckt  
man sich dann mit aus dem Geld liegenden Optionen auch zu überhöhten Preisen ein,  
lassen sich bei tatsächlichem Ansteigen der Kurse hohe Gewinne realisieren. Solche  
marktpsychologische Faktoren lassen sich in Modellen nur schwer berücksichtigen.

Diese Überlegungen haben zur Konsequenz, dass für detaillierte Untersuchungen zwei  
Zeiträume des Jahres 1998 unterschieden werden, zum einen die Monate Januar bis  
einschliesslich Juli, zum anderen die verbleibenden Monate August bis Dezember.

### 5.3.5 Detaillierte empirische Analysen

Die detaillierten Resultate des empirischen Vergleichs zwischen Markt- und Modell-  
preisen werden exemplarisch anhand der europäischen Call-Optionen auf den SMI  
und den amerikanischen Call-Optionen auf die Credit-Suisse Namenaktie präsen-  
tiert. Die Resultate für die verbleibenden Titel finden sich im Anhang D, wobei für  
die Optionen auf ABB Inhaber und Roche Genussschein Anmerkungen zu machen  
sind.

Für die ABB Inhaberaktie wurde am 25.6.1999 ein Aktiensplit durchgeführt und eine  
neue Einheitsaktie eingeführt. Dies führte zu einer Anpassung aller Optionskontrakte,  
da sich die zugrundeliegende Aktie und die Ausübungspreise änderten. Zudem wurde  
am gleichen Tag eine hohe ausserordentliche Dividende ausgeschüttet, was die Be-  
wertung mit dem vorgeschlagenen Verfahren erschwert (vgl. Abschnitt 5.3.1). Daher  
werden für die ABB-Optionen nur solche mit Verfall bis inklusive Juni 1999 berück-  
sichtigt.

Bei den Genussscheinen von Roche können für den Sprung-Diffusions-Prozess nur für  
die ersten 14 Handelstage des Jahres 1998 Parameter geschätzt werden. An allen an-  
deren Tagen konvergiert das numerische Verfahren entweder gar nicht oder führt auf  
 $\hat{\lambda} = 0$ , das heisst der Sprung-Diffusions-Prozess geht in die Geometrische Brownsche  
Bewegung über. Dies wird durch die Ergebnisse der Untersuchung der Aktienrendi-  
ten für die Jahre 1997 und 1998 bestätigt. Daher werden für Optionen auf den Roche  
Genussschein nur die Optionspreismodelle der Geometrischen Brownschen Bewegung  
und des hyperbolischen Modells untersucht.

Zunächst wird analysiert, wie sich die theoretischen Optionspreise der drei Model-  
le voneinander unterscheiden. Willkürlich ausgewählt wird für diesen Vergleich die  
Credit-Suisse Namenaktie mit Parameterschätzungen für den 18.12.1998. Tabelle 5.2  
fasst für die Geometrische Brownsche Bewegung, den Sprung-Diffusions-Prozess und  
für das hyperbolische Modell die Parameterschätzungen zusammen. Der Kurswert  
der Credit-Suisse Namenaktie an diesem Tag betrug CHF  $S = 215.00$ . Als risikoloser  
Zinssatz wird  $r = 2\%$  (p.a.) eingesetzt. Dies entspricht für den 18.12.1998 in etwa dem  
1-Monats-Libor, der in dieser Arbeit für Restlaufzeiten bis zu einem Monat verwen-

Modell	Parameter	Schätzung
GBB	$\hat{\mu}$ $\hat{\sigma}^2$	-0.000036 0.000991
SD	$\hat{\mu}_B$ $\hat{\sigma}_B^2$ $\hat{\mu}_J$ $\hat{\sigma}_J^2$ $\hat{\lambda}$	0.001985 0.000270 -0.005600 0.001976 0.360945
HYP	$\hat{\alpha}$ $\hat{\delta}$ $\hat{\beta}$ $\hat{\mu}$	47.031100 4.78e-09 -1.768980 0.001566

Tabelle 5.2: Parameterschätzungen für die einzelnen Modelle am 18.12.98.

det wird. Als Referenzmodell wird die auf Grundlage der Geometrischen Brownschen Bewegung abgeleitete Black-Scholes-Formel betrachtet, das heisst die beiden anderen Modelle werden jeweils mit dem Preisen aus der Black-Scholes-Formel verglichen. Abbildung 5.6 zeigt die Differenz zwischen Black-Scholes-Optionspreis und Optionspreis beim Sprung-Diffusions-Prozess, Abbildung 5.7 die Differenz zwischen Black-Scholes-Optionspreis und hyperbolischem Optionspreis für Restlaufzeiten  $\tau$  von 5, 3 und 1 Tag bis zum Verfall und für verschiedene Ausübungsverhältnisse  $S/K$ .

In beiden Darstellungen ist der sogenannte *Smile-Effekt* zu erkennen. Dies bedeutet, dass die Black-Scholes-Formel im Vergleich zu den beiden anderen Optionsmodellen Optionen überbewertet, die am Geld liegen ( $S/K \approx 1.00$ ), dagegen Optionen unterbewertet, die im oder aus dem Geld liegen ( $S/K < 0.95$  und  $S/K > 1.05$ ). Dieser Effekt wird auch in empirischen Untersuchungen festgestellt, bei denen Black-Scholes-Preise mit Marktpreisen verglichen werden (vgl. zum Beispiel Hull [60], S. 500). Die Beobachtung dieses Phänomens im intermodellaren Vergleich könnte für die Analyse der Marktpreise bedeuten, dass die Optionsmodelle des Sprung-Diffusions-Prozesses und des hyperbolischen Modells Marktpreise besser beschreiben als das Black-Scholes-Optionsmodell.

Während der Smile in Abbildung 5.7 sehr symmetrisch ist, ist in Abbildung 5.6, also beim Vergleich von Black-Scholes-Preis mit dem Preis im Sprung-Diffusions-Modell, eine Asymmetrie zu erkennen. Die Differenzen zwischen den Preisen bei  $S/K \approx 1.05$  sind grösser als diejenigen bei  $S/K \approx 0.95$ . Wird statt  $\mu_J < 0$  ein gleich grosser positiver Wert eingesetzt, dreht sich die Situation ceteris paribus genau um.

Im folgenden werden nun die Abweichungen zwischen Marktpreisen und den jewei-



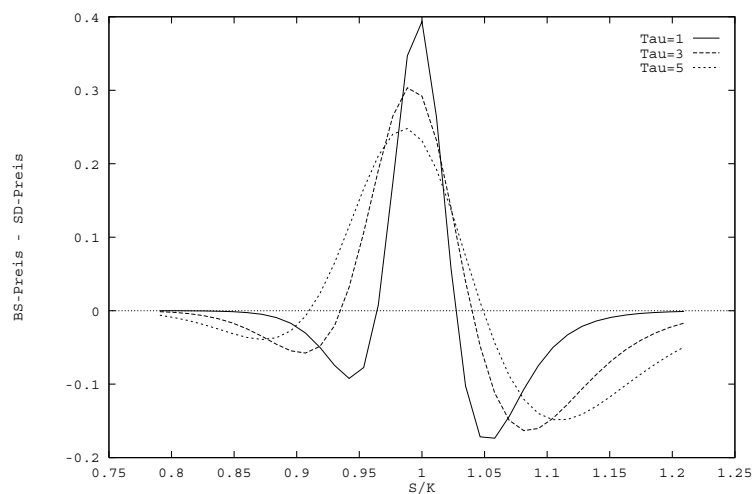


Abbildung 5.6: Differenz zwischen Black-Scholes-Preis und Sprung-Diffusions-Optionspreis in Abhängigkeit vom Ausübungsverhältnis  $S/K$ .

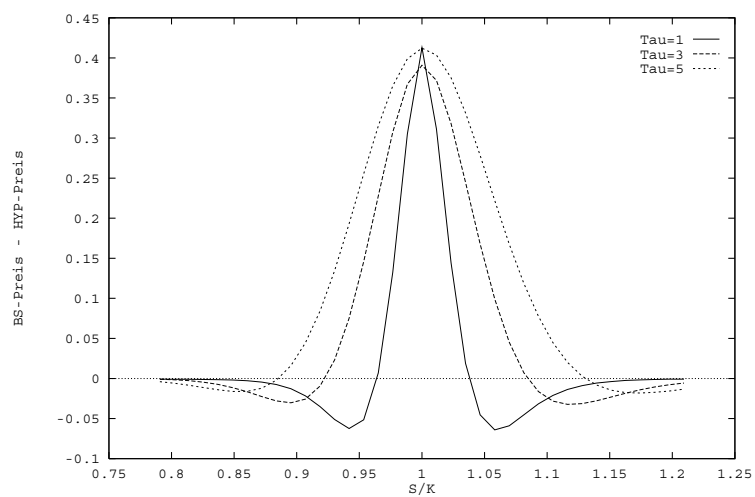


Abbildung 5.7: Differenz zwischen Black-Scholes-Preis und Optionspreis im hyperbolischen Modell in Abhängigkeit vom Ausübungsverhältnis  $S/K$ .

ligen Modellpreisen untersucht. Als Mass für die Abweichung zwischen Markt- und Modellpreisen werden die mittlere absolute relative Abweichung (MARA)

$$MARA = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{|\text{Marktpreis}_i - \text{Modellpreis}_i|}{\text{Marktpreis}_i}$$

und die mittlere relative Abweichung (MRA)

$$MRA = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{\text{Marktpreis}_i - \text{Modellpreis}_i}{\text{Marktpreis}_i}.$$

$M$  ist die Anzahl von Marktpreisen, die für einen Vergleich mit in einem Optionspreismodell berechneten Preisen zur Verfügung steht. Während sich die absolute relative Abweichung für einen ersten groben Vergleich eignet, wird bei einer detaillierten Analyse für verschiedene Restlaufzeiten und Ausübungsverhältnisse die relative Abweichung verwendet, um Unter- oder Überbewertungen durch die Modellpreise festzustellen.

Tabelle 5.3 gibt Auskunft über die mittleren absoluten relativen Abweichungen bei Call-Optionen auf den SMI und auf die Credit-Suisse Namenaktie für das gesamte Jahr 1998 und für die Subperioden Januar bis Juli beziehungsweise August bis Dezember. Die Ergebnisse erscheinen zunächst ernüchternd. So sind die Abweichungen über das ganze Jahr betrachtet nicht nur recht gross, auch wenn sie hauptsächlich durch die zweite Jahreshälfte verursacht werden, sondern auch die Unterschiede zwischen den einzelnen Modellen sind sehr gering. Erstaunlicherweise schneidet das Black-Scholes-Modell am besten ab.

Periode	Mittlere absolute relative Abweichung in %							
	SMI				CSN			
	M	GBB	SD	HYP	M	GBB	SD	HYP
1.1.98 – 29.12.98	3414	25.29	25.20	27.05	2268	24.26	25.10	27.12
1.1.98 – 31.7.98	1939	16.01	15.35	16.12	1134	16.58	16.48	17.18
3.8.98 – 29.12.98	1475	37.49	38.15	41.41	1134	31.94	33.72	37.07

Tabelle 5.3: Mittlere absolute relative Abweichung zwischen Modell- und Marktpreisen für Optionen auf den SMI und die Credit-Suisse Namenaktie.

Tabelle 5.4 zeigt nun detaillierte Ergebnisse für die mittlere relative Abweichung bei den Call-Optionen auf die Credit-Suisse Namenaktie, gegliedert nach verschiedenen Restlaufzeiten und Ausübungsverhältnissen. Der betrachtete Zeitraum reicht von Januar bis Juli 1998. Fett gedruckt ist jeweils die relative Abweichung desjenigen Mo-

dells, welches die geringste Abweichung aufweist. Negative Vorzeichen bedeuten Überbewertung durch ein Modell, positive Vorzeichen zeigen eine Unterbewertung an.

Für Restlaufzeiten zum Beispiel zwischen ein und zehn Tagen kann der Smile beobachtet werden: Unterbewertung für  $0.85 < S/K \leq 0.95$  und  $S/K > 1.05$ , Überbewertung für  $0.95 < S/K \leq 1.05$ . Diese Struktur lässt sich aber nicht durchgängig feststellen. Eindeutig zu beobachten ist, dass die relativen Abweichungen mit wachsendem  $S/K$  betragsmässig deutlich abnehmen. Werden zum Beispiel für  $0.85 < S/K \leq 0.95$  Abweichungen bis zu 30% erreicht, sinken diese Abweichungen bei grösseren Ausübungsverhältnissen in einstellige Prozentbereiche. Zählt man ab, wie oft ein bestimmtes Modell betragsmässig die geringste relative Abweichung aufweist, ergibt sich folgendes Bild: Black-Scholes in circa 22%, Sprung-Diffusions-Modell in circa 44% und hyperbolisches Modell in circa 33% aller Fälle. Das Sprung-Diffusions-Modell geht aus diesem Vergleich als das beste aller drei Modelle hervor, wobei anzumerken ist, dass die Unterschiede zwischen den einzelnen Modellpreisen sehr gering sind.

Tabelle 5.5 zeigt die zu Tabelle 5.4 analogen Untersuchungen für den Zeitraum August bis Dezember 1998. In fast allen Fällen wird eine Unterbewertung durch die Modelle festgestellt. Für kleine Ausübungsverhältnisse und dort speziell für kürzere Restlaufzeiten betragen die relativen Abweichungen sogar bis zu 100%. Mit wachsendem  $S/K$  wird die Übereinstimmung zwischen Modell- und Marktpreisen wieder besser. Dies belegt die Hypothese für eine Spekulation der Händler auf eine kurzfristige Kurskorrektur am Aktienmarkt. Von den drei Modellen schneiden zudem die Black-Scholes-Optionspreise am besten ab.

Tabelle 5.6 und Tabelle 5.7 zeigen dieselben Untersuchungen für die Call-Optionen auf den SMI. Es lassen sich im wesentlichen die gleichen Aussagen wie für die Optionen auf die Credit-Suisse Namenaktie machen: betragsmässig abnehmende relative Abweichungen mit wachsendem  $S/K$ , geringe Differenzen zwischen den Modellen und für den Zeitraum August bis Dezember deutliche Unterbewertungen für kleine Ausübungsverhältnisse. Wird die Anzahl Fälle gezählt, in denen ein bestimmtes Modell die beste Übereinstimmung liefert, so liegen für beide Zeiträume Black-Scholes-Modell und Sprung-Diffusions-Modell gleich auf, aber deutlich vor dem hyperbolischen Modell.

Fasst man die Ergebnisse für alle Titel und den SMI zusammen, ergibt sich ein nicht ganz einheitliches Bild. Folgende Aussagen lassen sich aber dennoch machen:

1. Mit wachsendem Ausübungsverhältnis werden die Abweichungen zwischen Markt- und Modellpreisen geringer. In der Regel gilt für  $S/K \geq 0.95$  eine gute Übereinstimmung.
2. Für die Periode August bis Dezember 1998 findet eine, vor allem für kleine Ausübungsverhältnisse deutliche Unterbewertung durch die vorgestellten Modelle statt. Der Grund dafür liegt möglicherweise in spekulativem Verhalten der Marktteilnehmer.

$S/K$	$\tau$	GBB	SD	HYP	M
$S/K \leq 0.85$	121 bis 160 > 160	0.0286 <b>-0.0245</b>	0.0370 0.1082	<b>0.0007</b> -0.0521	5 20
$0.85 < S/K \leq 0.95$	1 bis 10 11 bis 20 21 bis 40 41 bis 80 81 bis 120 121 bis 160 > 160	0.3295 <b>-0.0759</b> <b>-0.0776</b> <b>-0.0561</b> <b>-0.0002</b> -0.0651 0.1084	0.2473 -0.0950 -0.0888 -0.0639 0.0187 <b>-0.0414</b> 0.1085	<b>0.2369</b> -0.1079 -0.1141 -0.0894 0.0015 -0.0666 <b>0.1021</b>	26 36 56 42 3 11 17
$0.95 < S/K \leq 1.00$	1 bis 10 11 bis 20 21 bis 40 41 bis 80 81 bis 120 121 bis 160 > 160	<b>-0.2202</b> -0.1325 <b>-0.1038</b> -0.1118 <b>-0.0232</b> -0.0017 0.0942	-0.2491 <b>-0.1298</b> <b>-0.1038</b> <b>-0.1025</b> <b>-0.0232</b> 0.0154 0.0921	-0.2439 -0.1437 -0.1221 -0.1217 -0.0423 <b>0.0014</b> <b>0.0835</b>	102 84 139 85 10 5 4
$1.00 < S/K \leq 1.05$	1 bis 10 11 bis 20 21 bis 40 41 bis 80 81 bis 120 121 bis 160 > 160	-0.0772 -0.0658 -0.0671 -0.0740 0.0126 -0.0393 <b>-0.0428</b>	<b>-0.0667</b> <b>-0.0592</b> <b>-0.0619</b> <b>-0.0658</b> 0.0229 <b>-0.0272</b> -0.0431	-0.0755 -0.0703 -0.0742 -0.0793 <b>0.0100</b> -0.0415 -0.0450	79 47 73 38 6 2 2
$1.05 < S/K \leq 1.15$	1 bis 10 11 bis 20 21 bis 40 41 bis 80 81 bis 120 121 bis 160 > 160	0.0028 -0.0053 -0.0078 -0.0242 -0.0124 <b>0.0285</b> 0.0720	0.0036 <b>-0.0021</b> <b>-0.0049</b> <b>-0.0203</b> <b>-0.0071</b> 0.0379 0.0733	<b>0.0009</b> -0.0079 -0.0118 -0.0280 -0.0204 0.0298 <b>0.0697</b>	66 32 50 17 1 1 4
$1.15 < S/K$	1 bis 10 11 bis 20 21 bis 40 41 bis 80 121 bis 160 > 160	0.0306 -0.0031 0.0368 -0.0003 0.0183 0.0945	0.0328 <b>-0.0029</b> 0.0372 <b>0.0000</b> 0.0198 0.0956	<b>0.0305</b> -0.0036 <b>0.0357</b> -0.0018 <b>0.0165</b> <b>0.0933</b>	36 11 14 2 6 2

Tabelle 5.4: Mittlere relative Abweichungen zwischen Modell- und Marktpreisen bei Call-Optionen auf die Credit-Suisse Namenaktie im Zeitraum Januar bis Juli 1998.

$S/K$	$\tau$	GBB	SD	HYP	M
$S/K \leq 0.85$	1 bis 10	0.9709	<b>0.9633</b>	0.9663	16
	11 bis 20	<b>0.7928</b>	0.8080	0.8368	37
	21 bis 40	<b>0.6812</b>	0.7107	0.7472	51
	41 bis 80	<b>0.4687</b>	0.5090	0.5728	61
	81 bis 120	<b>0.4295</b>	0.4624	0.5183	26
	121 bis 160	<b>0.4777</b>	0.5288	0.5520	3
$0.85 < S/K \leq 0.95$	1 bis 10	<b>0.6186</b>	0.6234	0.6403	54
	11 bis 20	<b>0.4515</b>	0.4820	0.5176	88
	21 bis 40	<b>0.3145</b>	0.3439	0.3951	136
	41 bis 80	<b>0.2532</b>	0.2773	0.3266	103
	81 bis 120	<b>0.2103</b>	0.2326	0.2599	30
	121 bis 160	<b>0.2263</b>	0.2526	0.2889	1
$0.95 < S/K \leq 1.00$	1 bis 10	<b>0.2638</b>	0.3045	0.3209	51
	11 bis 20	<b>0.2431</b>	0.2662	0.2952	65
	21 bis 40	<b>0.2006</b>	0.2192	0.2509	79
	41 bis 80	<b>0.1779</b>	0.1944	0.2286	52
	81 bis 120	<b>0.1522</b>	0.1651	0.1794	12
	121 bis 160	<b>0.1647</b>	0.1761	0.1678	1
$1.00 < S/K \leq 1.05$	1 bis 10	<b>0.0997</b>	0.1116	0.1366	24
	11 bis 20	<b>0.1266</b>	0.1392	0.1690	34
	21 bis 40	<b>0.1254</b>	0.1378	0.1696	30
	41 bis 80	<b>0.1252</b>	0.1373	0.1699	21
	81 bis 120	<b>0.0890</b>	0.0994	0.1201	11
	121 bis 160	<b>0.2080</b>	0.2236	0.2522	1
$1.05 < S/K \leq 1.15$	1 bis 10	<b>-0.0010</b>	-0.0056	0.0020	25
	11 bis 20	<b>0.0449</b>	0.0457	0.0669	25
	21 bis 40	<b>0.0831</b>	0.0866	0.1141	16
	41 bis 80	<b>0.1108</b>	0.1174	0.1520	25
	81 bis 120	<b>0.0738</b>	0.0788	0.1207	2
	121 bis 160	<b>0.1307</b>	0.1449	0.1709	1
$1.15 < S/K$	1 bis 10	<b>-0.3036</b>	-0.3046	-0.3036	9
	11 bis 20	0.0127	<b>0.0112</b>	0.0166	11
	21 bis 40	0.0438	<b>0.0433</b>	0.0528	14
	41 bis 80	<b>0.0443</b>	0.0452	0.0615	12
	81 bis 120	<b>0.0833</b>	0.0870	0.0936	7

Tabelle 5.5: Mittlere relative Abweichungen zwischen Modell- und Marktpreisen bei Call-Optionen auf die Credit-Suisse Namenaktie im Zeitraum August bis Dezember 1998.

$S/K$	$\tau$	GBB	SD	HYP	M
$0.85 < S/K \leq 0.95$	1 bis 10	<b>0.3192</b>	0.4310	0.4296	10
	11 bis 20	-0.2858	-0.2035	<b>-0.0786</b>	22
	21 bis 40	<b>0.1180</b>	0.1461	0.2252	33
	41 bis 80	<b>0.1977</b>	0.2136	0.2902	22
	81 bis 120	<b>0.1086</b>	0.1156	0.1933	7
	121 bis 160	<b>0.1923</b>	0.1975	0.2426	11
	> 160	<b>0.2334</b>	0.2369	0.2925	33
$0.95 < S/K \leq 1.00$	1 bis 10	-0.3784	-0.3057	<b>-0.2488</b>	225
	11 bis 20	-0.1401	-0.1248	<b>-0.0472</b>	221
	21 bis 40	<b>0.0223</b>	0.0307	0.0899	297
	41 bis 80	<b>0.1218</b>	0.1262	0.1739	131
	81 bis 120	<b>0.0949</b>	0.0972	0.1562	60
	121 bis 160	<b>0.1907</b>	0.1933	0.2290	30
	> 160	<b>0.1626</b>	0.1647	0.2108	52
$1.00 < S/K \leq 1.05$	1 bis 10	-0.0265	-0.0298	<b>-0.0032</b>	169
	11 bis 20	-0.0189	-0.0210	<b>0.0154</b>	116
	21 bis 40	0.0404	<b>0.0401</b>	0.0737	130
	41 bis 80	<b>0.0996</b>	0.0997	0.1319	58
	81 bis 120	<b>0.0805</b>	0.0808	0.1222	50
	121 bis 160	<b>0.1602</b>	0.1611	0.1919	13
	> 160	<b>0.1429</b>	0.1433	0.1838	24
$1.05 < S/K \leq 1.15$	1 bis 10	-0.0113	-0.0121	<b>-0.0108</b>	41
	11 bis 20	0.0198	<b>0.0179</b>	0.0235	27
	21 bis 40	0.0301	<b>0.0281</b>	0.0390	28
	41 bis 80	0.0549	<b>0.0536</b>	0.0689	33
	81 bis 120	0.0127	<b>0.0113</b>	0.0316	21
	121 bis 160	0.0816	<b>0.0812</b>	0.1019	9
	> 160	0.1168	<b>0.1163</b>	0.1392	12
$1.15 < S/K$	1 bis 10	0.0132	<b>0.0132</b>	0.0132	15
	11 bis 20	0.0075	<b>0.0074</b>	0.0075	7
	21 bis 40	-0.0073	-0.0076	<b>-0.0069</b>	8
	41 bis 80	0.0029	<b>0.0025</b>	0.0041	15
	81 bis 120	0.0123	<b>0.0114</b>	0.0181	7
	> 160	0.0788	<b>0.0784</b>	0.0893	2

Tabelle 5.6: Mittlere relative Abweichungen zwischen Modell- und Marktpreisen bei Call-Optionen auf den SMI im Zeitraum Januar bis Juli 1998.

$S/K$	$\tau$	GBB	SD	HYP	M
$S/K \leq 0.85$	1 bis 10	<b>0.9995</b>	0.9998	0.9999	9
	11 bis 20	<b>0.9725</b>	0.9845	0.9820	12
	21 bis 40	<b>0.8074</b>	0.8486	0.8611	32
	41 bis 80	<b>0.7896</b>	0.8146	0.8515	26
	81 bis 120	<b>0.6726</b>	0.7009	0.7780	17
	121 bis 160	<b>0.1065</b>	0.1183	0.1956	4
	> 160	<b>0.4148</b>	0.4222	0.5163	12
$0.85 < S/K \leq 0.95$	1 bis 10	<b>0.6268</b>	0.6877	0.6719	80
	11 bis 20	<b>0.4791</b>	0.5344	0.5634	119
	21 bis 40	<b>0.5313</b>	0.5560	0.6103	171
	41 bis 80	<b>0.4010</b>	0.4125	0.4706	46
	81 bis 120	<b>0.4324</b>	0.4400	0.5059	46
	121 bis 160	<b>0.1533</b>	0.1562	0.2181	7
	> 160	<b>0.3480</b>	0.3507	0.4303	12
$0.95 < S/K \leq 1.00$	1 bis 10	-0.0455	<b>0.0446</b>	0.0584	134
	11 bis 20	<b>0.1841</b>	0.2003	0.2480	150
	21 bis 40	<b>0.3101</b>	0.3159	0.3640	156
	41 bis 80	<b>0.3041</b>	0.3058	0.3539	48
	81 bis 120	<b>0.3260</b>	0.3262	0.3680	31
	121 bis 160	0.1449	<b>0.1430</b>	0.1840	6
	> 160	0.2656	<b>0.2652</b>	0.3310	6
$1.00 < S/K \leq 1.05$	1 bis 10	<b>0.0002</b>	-0.0058	0.0254	82
	11 bis 20	0.1134	<b>0.1106</b>	0.1409	65
	21 bis 40	0.2018	<b>0.1997</b>	0.2319	70
	41 bis 80	0.2286	<b>0.2271</b>	0.2623	26
	81 bis 120	0.2639	<b>0.2627</b>	0.2965	12
	121 bis 160	0.1538	<b>0.1512</b>	0.1894	2
	> 160	0.2482	<b>0.2472</b>	0.2977	6
$1.05 < S/K \leq 1.15$	1 bis 10	-0.0283	-0.0303	<b>-0.0279</b>	17
	11 bis 20	0.0606	<b>0.0556</b>	0.0652	27
	21 bis 40	0.1215	<b>0.1167</b>	0.1307	10
	41 bis 80	0.1283	<b>0.1258</b>	0.1400	7
	81 bis 120	0.1736	<b>0.1721</b>	0.1889	6
	121 bis 160	0.1221	<b>0.1189</b>	0.1396	1
	> 160	0.1332	<b>0.1329</b>	0.1579	2
$1.15 < S/K$	1 bis 10	<b>-0.0308</b>	<b>-0.0308</b>	<b>-0.0308</b>	4
	11 bis 20	-0.0184	-0.0189	<b>-0.0183</b>	4
	21 bis 40	0.0266	<b>0.0249</b>	0.0274	4
	41 bis 80	0.0511	<b>0.0479</b>	0.0580	2
	81 bis 120	0.1022	<b>0.1010</b>	0.1109	2
	> 160	0.1119	<b>0.1091</b>	0.1223	2

Tabelle 5.7: Mittlere relative Abweichungen zwischen Modell- und Marktpreisen bei Call-Optionen auf den SMI im Zeitraum August bis Dezember 1998.

3. Insgesamt betrachtet führt die Optionspreisformel von Black- und Scholes zu den geringsten Abweichungen, gefolgt vom Sprung-Diffusions-Modell und etwas deutlicher vor dem hyperbolischen Modell. Dieses Ergebnis ist für die zweite Jahreshälfte stärker ausgeprägt.
4. Die Differenzen zwischen den einzelnen Modellpreisen sind im allgemeinen gering. Ausnahme bilden die Optionen auf den Roche Genussschein, bei dem die Marktsituation durch die Black-Scholes-Formel besser beschrieben wird als durch die entsprechende Formel im hyperbolischen Modell.
5. Es ist nicht ganz einfach, eine Tendenz zu erkennen, wann welches Modell möglicherweise die bessere Approximation darstellt: mit steigenden Ausübungsverhältnissen schneidet das Sprung-Diffusionsmodell etwas besser ab, bei kleinen Restlaufzeiten führt das hyperbolische Modell zu kleineren Abweichungen.

Aus diesen Ergebnissen kann folgendes Fazit gezogen werden. Alle Modelle führen zu etwa gleichen Optionspreisen. Das deutliche bessere Approximationsverhalten durch den Sprung-Diffusions-Prozess und das hyperbolische Modell auf Stufe der Aktienrenditen überträgt sich nicht auf die Optionsmodelle. Zudem erfordern Berechnungen im hyperbolischen Modell lange Computerrechenzeiten.

## 5.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel und dem Kapitel 4 wurde ein wichtiger Teil der vorliegenden Studie erarbeitet. Es wurden die Modelle erläutert und anhand von Marktdaten getestet, auf denen in einem späteren Teil die parametrischen Value-at-Risk-Schätzungen basieren werden.

Bei diesen Modellen handelt es sich um die Geometrische Brownsche Bewegung, den Sprung-Diffusions-Prozess und das hyperbolische Modell. Alle Modelle wurden diskutiert, ihre Eigenschaften erläutert und die Verfahren zur Parameterschätzung vorgestellt. Wichtiger Bestandteil war die Darstellung der Herleitung analytischer Optionspreisformeln für europäische Call-Optionen. Desweiteren wurden die statistischen Verfahren zur Überprüfung der einzelnen Modelle erläutert.

In detaillierten Untersuchungen wurden die Modelle für den schweizerischen Aktien- und Optionenmarkt überprüft. Für den Aktienmarkt ergab sich, dass empirische Verteilungen von Aktienrenditen auf täglicher Basis durch Verteilungen wie sie sich aus dem Sprung-Diffusions-Prozess und dem hyperbolischen Modell ergeben, deutlich besser approximiert werden als durch eine Normalverteilung, welche durch die Geometrische Brownsche Bewegung impliziert wird. Diese Eigenschaft überträgt sich allerdings nicht auf den Optionsmarkt. Dort sind die Differenzen zwischen den einzelnen Modellpreisen sehr gering. Bei einem Vergleich mit Marktpreisen schneiden die Black-Scholes-Optionspreise und diejenigen des Sprung-Diffusions-Prozesses etwas besser ab als die Optionspreise im hyperbolischen Modell. Festzuhalten ist auch, dass mit



---

wachsenden Ausübungsverhältnissen in allen Modellen eine bessere Approximation erzielt wird.



## Teil II

# Das Modellrisiko bei der Messung von Marktrisiken



## Kapitel 6

# Das Value-at-Risk-Konzept zur Messung von Marktrisiken

Das vorliegende Kapitel ist dem Value-at-Risk-Konzept zur Messung von Marktrisiken und verwandten Konzepten zur Risikomessung gewidmet. Zunächst wird definiert, was unter Risiko eigentlich zu verstehen ist und wie dieses Risiko mit dem Value-at-Risk-Konzept quantifiziert werden kann. Der Begriff des Modellrisikos wird darüber hinaus eine wichtige Rolle spielen. Da die Bankaufsichtsbehörden den Value-at-Risk als Risikomass vorschreiben, werden die entsprechenden Vorschriften dargestellt.

Risikomasse werden auf der Grundlage von Renditeverteilungen bestimmt. Da verschiedene Methoden existieren, wie man zu solchen Verteilungen gelangen kann, werden diese ebenfalls vorgestellt.

Alternativ zum Value-at-Risk wird die Klasse der Lower-Partial-Moments (LPM) als Risikomasse vorgestellt und diskutiert, ebenso wird der Zusammenhang dieser Masse mit dem Value-at-Risk aufgezeigt. Diese beiden Risikomasse sind allerdings nicht als eigenständig zu betrachten, sondern sie ergeben sich aus einer sehr viel allgemeineren Klasse von Risikomassen, auf die ebenfalls eingegangen wird.

Die Ausführungen dieses Kapitels beschränken sich auf das Wesentliche. Zum einen existiert in der Zwischenzeit umfangreiche Literatur zu den einzelnen Themengebieten, zum anderen stehen im Rahmen dieser Arbeit die nachfolgenden empirischen Studien im Vordergrund.

## 6.1 Der Risikobegriff

### 6.1.1 Was ist Risiko?

Unter Ökonomen besteht durchaus keine Einigung darüber, was unter Risiko zu verstehen ist, oder wie es gemessen werden kann. Für einen Überblick über verschiedene Definitionen des Begriffs „Risiko“ sei auf Brachinger [17] und Brachinger und Weber [18] verwiesen.

In dieser Arbeit wird Risiko verstanden als ein mit dem Ergreifen einer Handlungsalternative mögliches Ergebnis, das durch zwei Eigenschaften gekennzeichnet ist (vgl. Brachinger [17]):

1. das Ergebnis wird als negativ verstanden in dem Sinn, dass ein Schaden oder Verlust auftritt, und
2. das Eintreten dieses Ergebnisses zu einem in der Zukunft liegenden Zeitpunkt ist unsicher.

Damit von einem Schaden oder Verlust gesprochen werden kann, muss ein bestimmtes Referenzniveau vorgegeben werden, zum Beispiel eine erwartete Mindestverzinsung einer Anlage oder eine Auszahlung in einer gewissen Höhe. Mögliche unsichere Abweichungen von diesem Referenzniveau nach unten stellen dann ein Risiko dar.

### 6.1.2 Abgrenzung der Marktrisiken von anderen finanziellen Risiken

In dieser Arbeit werden *Marktrisiken* untersucht. Marktrisiken entstehen durch Marktpreisänderungen, was bedeutet, dass alle Instrumente, die auf Märkten gehandelt werden, solchen Risiken ausgesetzt sind (vgl. Coopers & Lybrand [30], S. 220 f., Johanning [66], S. 17, Read [96], S. 4 f., Schierenbeck [104], S. 8 f.). Insbesondere sind dies Zinsänderungsrisiken, Wechselkursrisiken sowie Kursrisiken von Aktien, Edelmetallen, Rohstoffen etc. und von den zugehörigen Derivaten.

Die Bedeutung von Marktrisiken hat in den letzten Jahren zugenommen, nicht zuletzt deshalb, weil Bankaufsichtsbehörden den von ihnen beaufsichtigten Banken strenge Vorschriften bezüglich der Messung von Marktpreisrisiken auferlegt haben (vgl. Basle Committee on Banking Supervision [9]). In der Schweiz müssen die Banken zu diesem Zweck alle bilanziellen und ausserbilanziellen Positionen zu Marktpreisen bewerten, Fremdwährungen sind dabei mit aktuellen Kursen umzurechnen (vgl. Eidgenössische Bankenkommission [42], S. 5).

Die Gründe, die dazu geführt haben, Methoden zur Quantifizierung von Marktrisiken zu entwickeln, sind vielfältig. Ein wichtiger Grund ist sicherlich in der wachsenden Bedeutung von Derivatemärkten zu sehen (vgl. Jorion [68], S. 11 f.). Innovationen

auf den Finanzmärkten, wie zum Beispiel die *Securitisations*, also etwa die Verbriefung von Hypothekarkreditforderungen, die dann am Kapitalmarkt emittiert werden<sup>1</sup>, sind ebenfalls zu erwähnen.

Einige spektakuläre Verluste von Unternehmen im Zusammenhang mit Marktpreisveränderungen haben, vor allem durch ihre psychologische Wirkung, ebenfalls dazu beigetragen, die Problematik von Marktrisiken in den Vordergrund zu rücken. Einige der wichtigsten dieser Fälle sind in Tabelle 6.1 überblickartig dargestellt. Wie daraus ersichtlich wird, waren nicht nur Bankinstitute davon betroffen. Für eine ausführliche Schilderung der Hintergründe der einzelnen Fälle sei auf Jorion verwiesen (vgl. Jorion [68], S. 23 ff.).

Unternehmen	Art der Unternehmung	Jahr	Markt	Verlust
Barings	über 200 Jahre alte britische Bank	95	Japanischer Aktienmarkt (Futures)	1.3 Mrd. \$
Metallgesellschaft	1993 14.-größte Industriegruppe in Deutschland mit 58'000 Beschäftigten	93	Öl (Futures)	1.3 Mrd. \$
Orange County	Fondsgesellschaft, Verwaltung von Mitteln öffentlicher Haushalte	94	Zinsen, mittelfristige Staatspapiere	1.7 Mrd. \$
Daiwa	1995 12.-größte japanische Bank	95	US-Treasury Bonds	1.1 Mrd. \$

Tabelle 6.1: Einige spektakuläre Verluste im Zusammenhang mit Marktrisiken.

Ein aktuelleres Beispiel aus der Schweiz betrifft die Verluste der aus der Schweizerischen Bankgesellschaft und dem Schweizerischen Bankverein hervorgegangenen UBS AG durch ihre Investitionen im amerikanischen Hedge Fund *Long Term Capital Management* in der Höhe von einer Milliarde USD. Bei der UBS AG waren vor allem organisatorische Mängel und das Fehlen von Kontrollinstrumenten für die Verluste verantwortlich (vgl. o. V. [89]). Solche Faktoren waren auch für die in obiger Tabelle erwähnten Beispiele mitverantwortlich.

Gerade in den Jahren 1993 bis 1996 haben verschiedene internationale Organisationen wie die Group of Thirty oder der Basler Ausschuss für Bankenaufsicht aber auch Unternehmen wie die Investmentbank J. P. Morgan Anstrengungen für einen verbesserten Umgang mit Marktrisiken unternommen. Read gibt hierfür einen kurzen

<sup>1</sup> Der Schweizerische Bankverein war das erste Bankinstitut in der Schweiz, das im Mai 1998 solch eine *Securitisations* von Hypotheken vorgenommen hat (vgl. o. V. [90]).

historischen Überblick (vgl. Read [96], S.5 f.).

Oft wird als Grund für die Konzentration auf Marktpreisrisiken die angeblich zunehmende Volatilität von Finanzmärkten angeführt. Sicherlich sind vor allem im Jahr 1998 die Märkte volatil geworden, es muss sich aber nicht um ein dauerhaftes Phänomen handeln. Phasen hoher Volatilität waren auch schon früher zu beobachten und sind wieder durch Phasen niedriger Volatilität abgelöst worden. Betrachtet man beispielsweise den schweizerischen Aktienmarkt im oben erwähnten Zeitraum der Jahre 1993 bis 1996, so kann nur für das Jahr 1994 eine leicht erhöhte Volatilität festgestellt werden. Man siehe hierzu die Renditeentwicklung des SMI auf Seite 39 und den Recurrence Plot des SMI auf Seite 44. Ansonsten war dies eine Phase eher ruhigen Börsengeschehens.

In dieser Arbeit werden ausschliesslich Marktrisiken betrachtet, wobei eine Einschränkung auf Aktienkursrisiken und Aktienoptionspreisrisiken vorgenommen wird. Der Aktienmarkt ist nach wie vor der bedeutendste Marktplatz für Finanzinstrumente und daher auch sehr liquide. Ebenso spielen Aktienoptionen von allen existierenden Optionen die wichtigste Rolle. Und was für eine empirische Untersuchung von essentieller Bedeutung ist: das verfügbare Datenmaterial ist umfangreich, sowohl was den Aktienmarkt als auch was den Markt gehandelter Optionen angeht.

Marktrisiken sind sorgfältig von anderen finanziellen Risiken abzugrenzen. Unter allgemeinen finanziellen Risiken sind neben Marktrisiken sogenannte *Bonitäts-* oder *Kreditrisiken*, *operative Risiken* oder *Betriebsrisiken* sowie *juristische Risiken* zu subsumieren. Unter Bonitäts- oder Kreditrisiko versteht man das Risiko, dass ein Kreditnehmer seinen Zahlungsverpflichtungen nicht mehr nachkommen kann. Bei den operativen Risiken oder Betriebsrisiken handelt es sich um menschliches oder technisches Versagen, mangelnde Kontrollsysteme etc.. Juristische Risiken bestehen schliesslich dann, wenn abgeschlossene Verträge rechtlich nicht durchsetzbar sind (vgl. Read [96], S. 5 f., Bühler und Schmidt [24], S. 7 f.).

### 6.1.3 Modell-, Parameter- und Schätzrisiken

Zur Quantifizierung, das heisst zur Angabe der Höhe des Risikos sind geeignete Masszahlen oder Risikomasse zu bestimmen. Bei der Messung von Marktrisiken sind diese Masszahlen statistische Kenngrössen einer Verteilung von Gewinnen und Verlusten oder einer Renditeverteilung der jeweils betrachteten Anlage.

Zu diesen Kenngrössen, die Masszahlen des Risikos darstellen, kann man prinzipiell auf zwei Arten gelangen. Gemeinsam ist diesen Ansätzen, dass eine Stichprobe von historischen Daten vorliegt. Der erste Ansatz, im folgenden auch als *explizite Modellbildung* bezeichnet, besteht darin, zunächst eine explizite Wahl einer Verteilungsfamilie als Modell für Renditeverteilungen beziehungsweise eines expliziten Modells für die den Marktveränderungen zugrundeliegenden Prozesse zu treffen (vgl. auch Kapitel 3). Es sind dann die entsprechenden Modellparameter auf Grundlage der Stichprobe



historischer Daten zu schätzen und schliesslich ist eine Schätzung des Risikomasses vorzunehmen. Ein zweiter Ansatz, im folgenden auch als *implizite Modellbildung* bezeichnet, trifft keine Annahmen über die Art der Verteilung der Renditen. Es werden direkt auf Grundlage der Stichprobe historischer Daten Risikomasszahlen als statistische Kenngrössen geschätzt. Ob eine implizite oder explizite Modellbildung erfolgt, gemeinsam ist diesen Ansätzen die vereinfachende Abbildung der Realität unter Verwendung von Annahmen. Wenn auch bei einer impliziten Modellbildung kein Modell für die Verteilung der Renditen vorgegeben wird, so ist dieser Ansatz trotzdem nicht frei von Annahmen. Im allgemeinen wird hierbei unterstellt, dass die Stichprobenelemente unabhängig und identisch verteilt sind. Diese Annahmen und damit das Modell können „besser“ oder „schlechter“ sein, das heisst die Realität besser oder schlechter approximieren. Somit tritt bereits bei der Wahl eines bestimmten Modells ein gewisses Risiko ein, das sogenannte *Modellrisiko* (vgl. Brachinger [17], Read [96], S. 5).

In der Literatur besteht weitgehend Einigkeit darüber, dass solche Modellrisiken bestehen. Dabei entspricht der oben formulierte Risikobegriff dem allgemeinen Verständnis von Modellrisiko, obgleich dies nur eine sehr vage Formulierung und Umschreibung darstellt. In der Literatur wird zudem eher auf die Ursachen von Modellrisiken und auf deren Typologisierung eingegangen als auf eine möglichst exakte Definition und eine mögliche Quantifizierung von Modellrisiken.

Bei der Typologisierung von Modellrisiken werden allerdings einzelne Risikoarten miteinander vermischt, die mit Modellrisiken nichts gemeinsam haben. Eine solche, durchaus repräsentative Typologisierung stellt diejenige von Crouhy et al. [32] dar. Danach lassen sich folgende Ursachen von Modellrisiken unterscheiden. Erstens bestehen Modellrisiken aufgrund einer möglicherweise falschen Modellwahl, das heisst durch die Wahl von Modellen, welche die charakteristischen Eigenschaften von Finanzmärkten nur unzureichend berücksichtigen. Dies stellt Modellrisiko dar wie es bereits oben formuliert und verstanden wurde. Zweitens soll nach dieser Typologie Modellrisiko dann vorliegen, wenn Modelle falsch implementiert werden, zum Beispiel durch Programmierfehler oder durch eine zu geringe Anzahl Simulationsläufe bei Monte-Carlo-Simulationen. Dies hat allerdings nichts mit Modellrisiko zu tun, sondern ist vielmehr operationelles Risiko. Als dritte Ursache von Modellrisiken wird eine falsche Kalibrierung eines Modells angesehen, das heisst es geht um die Fragestellung der Schätzung von Modellparametern. Dies kann ebenfalls nicht unter den Begriff des Modellrisikos subsumiert werden, sondern ist ein reines Schätzproblem und das Problem der Güte einer Schätzung. Fragen der Datenqualität haben fünftens ebenso mit eigentlichem Modellrisiko wenig gemeinsam. Schliesslich wird als letzte Ursache für Modellrisiko eine falsche Anwendung eines Modells erwähnt. Als Beispiel wird angeführt, dass die Anwendung der Black-Scholes-Formel für europäische Optionen auf amerikanische Optionen zu Fehlern führt. Dies stellt zwar Modellrisiko dar, da das Modell die Realität nicht korrekt beschreibt, aber Modellrisiko muss so verstanden werden, dass ein Risiko mit einem verwendeten Modell verbunden ist, obwohl die zugrundeliegenden Annahmen sorgfältig überprüft und kritisch hinterfragt wurden.

Es stellt sich also heraus, dass in der Literatur nur eine sehr ungenaue Formulierung des Modellrisikobegriffs verwendet wird, wobei zusätzlich noch mehrere Risikoarten miteinander vermischt werden. So werden unter Modellrisiko Risikoarten subsumiert, die gar kein Modellrisiko darstellen. Ebenso bleibt in der Regel völlig unklar, wie ein Modellrisiko quantifiziert werden kann.

Deshalb wird im folgenden der Begriff des Modellrisikos konkretisiert und von anderen Risikoarten abgegrenzt. Diese Konkretisierung wird im Rahmen der Messung von Marktrisiken vorgenommen.

Der Begriff des Modellrisikos lässt sich durch folgende Überlegungen genauer fassen. Zur Modellierung der wahren Renditeverteilung wird zunächst eine bestimmte Familie von Verteilungen ausgewählt. Innerhalb dieser Verteilungsfamilie approximieren einzelne Mitglieder dieser Familie die wahre Verteilung unterschiedlich gut. Es ist daher die beste Approximation aus der gewählten Verteilungsfamilie zu bestimmen. Diese beste Approximation ist aber wie die wahre Verteilung unbekannt. Bekannt ist dagegen eine Schätzung für die beste Approximation. Unter dem Modellrisiko wird daher die Differenz zwischen dem Wert  $RM$  eines Risikomasses für die wahre Verteilung und dem Wert  $RM^*$  desselben Risikomasses für die beste Approximation aus einer bestimmten Familie von Verteilungen verstanden. Diese Abweichung  $RM - RM^*$  und damit das Modellrisiko bleiben aber letztlich unbekannt.

Eine Risikomasszahl ist, wie gesagt, Kenngrösse einer Renditeverteilung. Welche Grösse dabei das Risiko am besten quantifiziert, ist jedoch nicht bekannt. Eine natürliche Wahl existiert nicht. Ähnlich wie beim oben diskutierten Modellrisiko kann diese Wahl gut oder schlecht sein, das heisst ein Verteilungsparameter kann das Risiko, das in einer Verteilung enthalten ist, erfassen oder auch nicht erfassen. Für diese Unsicherheit in der Wahl des „richtigen“ Risikomasses hat Brachinger [17] den Begriff *Parameterrisiko* geprägt.

Schliesslich ist die Kenngrösse, die das Risiko quantifizieren soll, zu bestimmen. Da die wahre Verteilung und die beste Approximation aus einer Verteilungsfamilie unbekannt sind, ist diese Kenngrösse auf Basis einer Schätzung für die beste Approximation zu schätzen. Unter *Schätzrisiko* wird dann die Differenz zwischen dem Wert des Risikomasses  $RM^*$  für die beste Approximation einer Verteilungsfamilie und dem Wert  $\widehat{RM}$  desselben Risikomasses für die geschätzte beste Approximation verstanden (vgl. Brachinger [17]).

Modellrisiko und Schätzrisiko lassen sich durch Addition zu einem Gesamtrisiko  $RM - \widehat{RM}$  zusammenfassen, wobei auch diese Grösse unbekannt ist. Idealerweise sollte die Höhe des Gesamtrisikos nicht von der Höhe des Parameterrisikos abhängig sein. Wird beispielsweise von einem Risikomass zu einem neuen Risikomass übergegangen, welches das Marktrisiko genauer erfasst, aber gleichzeitig das Modell und die Schätzmethodik unverändert belassen, so darf sich das Gesamtrisiko aus Modell- und Schätzrisiko nicht verändern.

Es zeigt sich also, dass Risiko nicht nur ein vielschichtiger Begriff ist, sondern dass bei den Schritten zur konkreten Angabe einer Risikomasszahl verschiedene Unsicherheiten oder Risikoquellen auftreten.

Im Mittelpunkt dieser Arbeit standen bisher einzelne Modelle zur Beschreibung von Prozessen auf den Aktien- und Optionenmärkten sowie die daraus resultierenden Renditeverteilungen (vgl. insbesondere Kapitel 4 und 5). Im Vordergrund stand also das Modellrisiko. Dies wird auch im weiteren der Fall sein, wenn auf Basis der diskutierten Modelle Risikokennziffern geschätzt werden. Die Gründe für diese Konzentration liegen auf der Hand. Die Reduzierung des Modellrisikos stellt den ersten und daher fundamentalen Schritt in Richtung einer „guten“ Risikomasszahl dar. Die besten Konzepte zur Verringerung des Parameterrisikos müssen versagen, wenn das Risiko auf Grundlage „falscher“ Modellverteilungen quantifiziert wird. Selbstverständlich gilt diese Überlegung auch in umgekehrter Richtung, die natürliche Reihenfolge besteht allerdings darin, zunächst Modellrisiken, dann Parameterrisiken zu minimieren. Kritisch zu beurteilen sind daher Studien zum Value-at-Risk-Konzept als Risikomasszahl, die auf der Annahme normalverteilter Renditen beruhen (vgl. etwa Bühler et al. [23], Johanning [66], S. 45 f.). Die empirischen Analysen in dieser Arbeit haben gezeigt, dass eine Normalverteilung nur eine unzureichende Approximation empirischer Renditeverteilungen darstellt.

Der Parameter, der das Modellrisiko beschreibt, ist zwar bekannt, aber der Wert dieses Parameters ist unbekannt. Um dennoch Aussagen über die Höhe des Modellrisikos ableiten zu können, werden in Kapitel 8 indirekte Kriterien eingeführt, mit denen das Modellrisiko abgeschätzt werden soll. Aus dem Wert eines solchen Kriteriums lässt sich allerdings nicht direkt auf die Höhe des Modellrisikos schliessen. Erst aus dem Vergleich verschiedener Kriterien und aus dem Vergleich dieser Kriterien bei unterschiedlichen Modellen werden sich Aussagen über die Höhe des Modellrisikos machen lassen, allerdings nur über Modellrisiken der untersuchten Modelle relativ zueinander. Es werden sich also nur indirekte Hinweise auf die Grösse des Modellrisikos eines bestimmten Modells ergeben.

Wenn auch Modellrisiken im Vordergrund stehen, sollen Parameterrisiken nicht ganz vernachlässigt werden. Hat man sich etwa für den Value-at-Risk als Risikogrösse entschieden, so müssen bei diesem Konzept noch weitere Spezifikationen vorgenommen werden, die über die Eignung dieses Konzeptes zur Risikomessung mitentscheiden. Selbst innerhalb eines Konzeptes lassen sich Parameterrisiken reduzieren. Auf Schätzrisiken schliesslich wird nur am Rande eingegangen.

## 6.2 Der Value-at-Risk als Risikomass

### 6.2.1 Einleitung

Der Value-at-Risk stellt derzeit das Standardrisikomass zur Messung von Marktrisiken dar. Dies liegt vor allem daran, dass die Bankaufsichtsbehörden dieses Konzept aufgegriffen und es in den entsprechenden Richtlinien aufgenommen haben.

So hat der Basler Ausschuss für Bankenaufsicht im April 1995 Richtlinien erlassen, die es den Banken erlauben, als Alternative zu dem bis zu diesem Zeitpunkt geltenden *Standardverfahren* sogenannte *interne Modelle* zur Messung von Marktrisiken zu verwenden, und damit Aktiva mit Eigenkapital zu unterlegen (vgl. Basle Committee on Banking Supervision [9], Read [96]).

Beim Standardverfahren werden die zu Marktpreisen bewerteten Aktiva, die einem Marktrisiko ausgesetzt sind, sehr vereinfacht ausgedrückt dadurch mit Eigenmitteln unterlegt, dass je nach Art der Aktivposition ein bestimmter Prozentsatz von der Höhe dieser Position durch Bereitstellung von Eigenkapital abzusichern ist.

Als interne Modelle können Banken Modelle, wie die in Kapitel 4 beschriebenen, und die daraus resultierenden Renditeverteilungen verwenden, um den Value-at-Risk zu schätzen. Diese Grösse wird für die einzelnen Aktivpositionen berechnet und dient als Grundlage für die Höhe der Eigenkapitalunterlegung.

In der Schweiz wurden die Vorschläge des Basler Ausschusses aufgegriffen und in Richtlinien der Eidgenössischen Bankenkommission (EBK) zur Eigenmittelunterlegung von Marktrisiken umgesetzt (vgl. Eidgenössische Bankenkommission [42]). Erlaubt sind nach diesen Richtlinien Standardverfahren und/oder interne Modelle – letztere von der Eidgenössischen Bankenkommission als Modellverfahren bezeichnet – unter Verwendung des Value-at-Risk-Konzeptes. Diese Vorschriften traten am 31.12.1997 in Kraft.

### 6.2.2 Definition des Value-at-Risk

Für einen vorgegebenen Zeithorizont und ein vorgegebenes Konfidenzniveau  $\alpha = 1 - p$ , ist der Value-at-Risk (VaR) derjenige Verlust einer Finanzposition, der innerhalb des betrachteten Zeithorizonts nur mit der Restwahrscheinlichkeit  $p$  überschritten wird (vgl. Brachinger [17], Brachinger [16]).

Der Zeithorizont, für den ein Value-at-Risk-Wert bestimmt wird, wird in der Regel als *Halteperiode* bezeichnet, da angenommen wird, dass die Finanzposition, für die eine Risikokennzahl berechnet wird, über die gesamte Zeitperiode hinweg gehalten wird. Für eine konkrete Bestimmung des Value-at-Risk können die Halteperiode und die Restwahrscheinlichkeit  $p$  im Prinzip frei gewählt werden.

Sei mit  $r$  die Rendite der betrachteten Anlage oder Finanzposition am Ende der Halteperiode relativ zum Beginn dieser Halteperiode bezeichnet. Diese Rendite ist als Zufallsvariable zu verstehen. Der Wert der Position zu Beginn der Halteperiode sei  $W_0$ , woraus sich ein unsicherer Wert  $W_0 \cdot (1 + r)$  am Ende der Halteperiode ergibt.

Um beurteilen zu können, ob am Ende der Halteperiode ein Verlust eingetreten ist, muss zunächst ein Referenzniveau festgelegt werden. Ein Verlust  $V$  ist dann gegeben, wenn die realisierte Rendite kleiner als das Referenzniveau ausfällt. Dieses Referenzniveau kann zum Beispiel in einer erwarteten Rendite  $E[r]$  bestehen, oder es wird als Referenzniveau gefordert, dass kein Wertverlust eintreten soll. Im ersten Fall beträgt der Verlust  $V = W_0 (E[r] - r)$ , im zweiten Fall  $V = -W_0 \cdot r$ .

Der Value-at-Risk kann nun in mathematisch-statistischer Weise durch die Wahrscheinlichkeitsaussage

$$P(V > VaR) = 1 - P(V \leq VaR) = p \quad (6.1)$$

implizit definiert werden (vgl. Brachinger [16], Brachinger [17]). Diese Gleichung besagt, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Verlust grösser als der Value-at-Risk genau  $p = 1 - \alpha$  beträgt. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 6.1 wiedergegeben. Wird

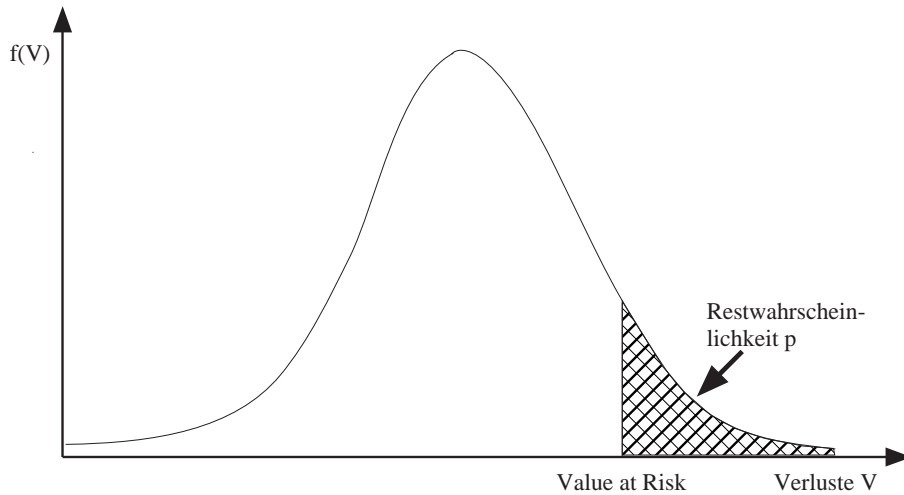


Abbildung 6.1: Definition des Value-at-Risk.

mit  $F$  die Verteilungsfunktion der Verluste bezeichnet, so kann durch Anwendung der Umkehrfunktion  $F^{-1}$  der Value-at-Risk explizit definiert werden (vgl. Brachinger [17], Brachinger [16]):

$$VaR = F^{-1}(1 - p). \quad (6.2)$$

Der Value-at-Risk ist somit nichts anderes als das  $(1 - p)100\%$ -Quantil einer Verlustverteilung. Je nachdem, was unter Verlust verstanden wird, ergeben sich unterschiedliche Value-at-Risk-Werte.

Statt Verlustverteilungen können auch Renditeverteilungen betrachtet werden. Das  $(1 - p)100\%$ -Quantil der Verlustverteilung ist das  $p100\%$ -Quantil der Renditeverteilung. Wird ein Verlust auf eine erwartete Rendite bezogen, ergibt sich als Value-at-Risk

$$VaR = -W_0 (r^*(p) - E[r]) , \quad (6.3)$$

wobei  $r^*(p)$  das  $p100\%$ -Quantil der Renditeverteilung bezeichnet. Hier spricht man vom Value-at-Risk bezüglich des Erwartungswertes. Wird dagegen nur dann von einem Verlust gesprochen, wenn auch tatsächlich ein Wertverlust eintritt, ist der Value-at-Risk gegeben durch

$$VaR = -W_0 r^*(p) . \quad (6.4)$$

Hier spricht man nun in der Regel vom Value-at-Risk bezüglich der Anfangsinvestition (vgl. Brachinger [17], Brachinger [16], Jorion [68], S. 91). Es ist nun wichtig, sich vor Augen zu führen, dass Value-at-Risk-Werte in der Praxis Schätzgrößen darstellen. Zur Bestimmung des Value-at-Risk ist in beiden Fällen das Quantil einer Renditeverteilung zu schätzen. Bei der Definition (6.3) muss zusätzlich die erwartete Rendite geschätzt werden, dafür ist der so definierte Value-at-Risk translationsinvariant.

Im folgenden wird von der Definition bezüglich der Anfangsinvestition (6.4) ausgegangen. Sie ist in der Anwendung etwas einfacher, vor allem was eine ex-post Überprüfung von Value-at-Risk-Schätzungen angeht. Zudem können Fehler bei der Schätzung des Erwartungswertes vermieden werden.

Auf wen die Begriffsbildung *Value-at-Risk* letztendlich zurückgeht, ist nicht ganz klar. Die Investmentbank J. P. Morgan hat jedenfalls durch die kostenlose Bereitstellung ihres Value-at-Risk-Paketes RiskMetrics<sup>TM</sup> 1994 für eine rasche Verbreitung dieses Konzeptes gesorgt (vgl. J. P. Morgan [65]). Die Idee, Risiko von Finanzpositionen mit dem Value-at-Risk respektive durch ein Quantil einer Verlust- oder Renditeverteilung zu messen, dürfte jedoch älter sein. Bei Hsieh (vgl. Hsieh [59], S. 52) findet sich ein Ausdruck zur Bestimmung von Kapitalreserven zur Deckung von Verlusten, welcher der Wahrscheinlichkeitsaussage (6.1) entspricht.

### 6.2.3 Diskussion des Value-at-Risk als Risikomass

Mit dem Value-at-Risk als Mass zur Quantifizierung von Marktrisiken sind sowohl Vor- als auch Nachteile verbunden, welche im folgenden kurz dargestellt werden.

Die Definition des Value-at-Risk geht implizit von einem Referenzniveau aus. Es werden also nur Abweichungen berücksichtigt, die unterhalb dieses Referenzniveaus liegen. Dies entspricht dem Risikobegriff, wie er in Abschnitt 6.1.1 formuliert wurde.

Da die Angabe des Value-at-Risk in Geldeinheiten erfolgt, ist diese Kenngrösse leicht interpretierbar (vgl. Brachinger [17]). Darüber hinaus lässt sich der Value-at-Risk als Grundlage für die Gestaltung von Limitestrukturen für den Handelsbereich von Finanzinstitutionen und zur Berechnung von Eigenkapitalunterlegungen der Marktrisiken verwenden (vgl. Johanning [67]). In der Praxis wird er auch dazu verwendet, Ertrags- und Leistungskontrollen auf Grundlage risikoadjustierter Kennzahlen vorzunehmen (vgl. Schierenbeck [104], S. 79 ff.). Der Value-at-Risk besitzt weiter den Vorteil, dass er sich zum Vergleich ganz unterschiedlicher Marktrisiken, das heisst Risiken unterschiedlicher Produkte und Risiken auf verschiedenen Märkten eignet. Selbst die Messung von Kreditrisiken basiert auf dem Value-at-Risk-Konzept.

Eine kritische Überprüfung des Value-at-Risk bezüglich dessen Eignung als Risikomass gibt Johanning (vgl. Johanning [66], S. 46 ff.). So enthält der Value-at-Risk keine Informationen über die Höhe der Verluste, die den Value-at-Risk überschreiten. Auch erhält man keine Angaben über die Wahrscheinlichkeit solcher Verluste. Dies widerspricht dem in Abschnitt 6.1.1 formulierten Risikobegriff. Der Value-at-Risk als Risikomass wächst nicht mit der Höhe potentieller (grosser) Verluste (vgl. Brachinger [17]). Schliesslich wird eine Renditeverteilung nur anhand einer einzelnen Kennzahl bewertet. Bei asymmetrischen oder schiefen Verteilungen kann so nur ein kleiner Teil der die Verteilung charakterisierenden Eigenschaften erfasst werden.

Abbildung 6.2 illustriert diesen letzten Punkt am Beispiel zweier Renditeverteilungen (in Anlehnung an Schröder [105], S. 84). Die eine Verteilung soll die Renditen eines (fiktiven) Portfolios bestehend aus Aktien darstellen, mit einem bestimmten Quantil  $r^*$  als bestimmenden Faktor für den Value-at-Risk. Gleichzeitig ist eine Renditeverteilung für ein (fiktives) Portfolio aus Aktienoptionen eingetragen, die das gleiche Quantil  $r^*$ , also den gleichen Value-at-Risk wie das Aktienportfolio aufweisen soll. Solche Optionsportfolios zeigen typischerweise asymmetrische Renditeverteilungen. In diesem Beispiel ist die erwartete Rendite unterhalb des Quantils  $r^*$ , also der erwartete Verlust, der den Value-at-Risk übersteigt, beim Optionenportfolio geringer als beim Aktienportfolio, die gesamte Verlustwahrscheinlichkeit aber sehr viel grösser. Solche Effekte berücksichtigt der Value-at-Risk nicht. Die Verwendung des Value-at-Risk als Risikomass kann daher unerwünschte Anreizwirkungen auf die Gestaltung eines Portfolios ausüben, unerwünscht in dem Sinn, dass eine Portfoliogestaltung mit einer höheren Verlustwahrscheinlichkeit zu einer gleichen Eigenkapitalunterlegung führt wie eine konservativere Gestaltung eines Portfolios.

#### 6.2.4 Regulatorische Rahmenbedingungen

Die meisten nationalen regulatorischen Rahmenbedingungen zur Messung von Marktrisiken orientieren sich an den Richtlinien des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht (vgl. Basle Committee on Banking Supervision [9]). So hat auch die Eidgenössische Bankenkommission diese Vorgaben nahezu unverändert aufgegriffen und in ihren Richtlinien dargelegt (vgl. Eidgenössische Bankenkommission [42]).

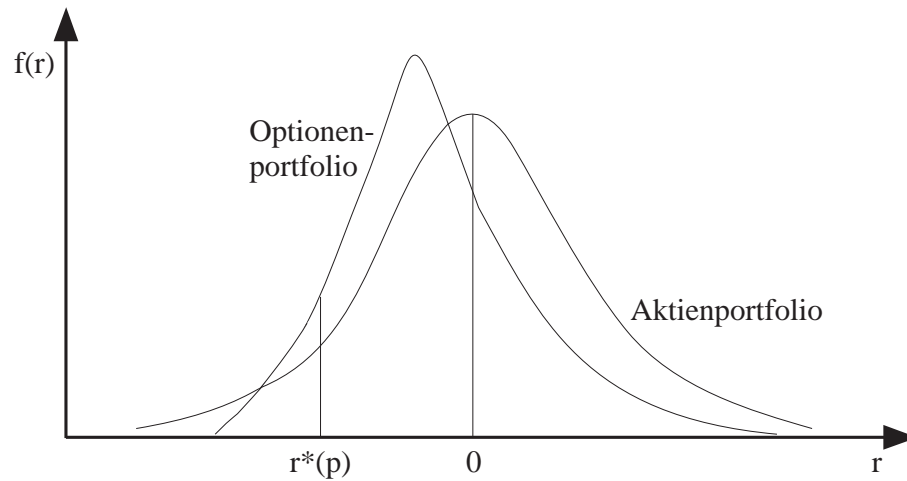


Abbildung 6.2: Zwei fiktive Portfolios mit unterschiedlichen Renditeverteilungen aber identischem Value-at-Risk.

Diese Vorschriften betreffen folgende Punkte:

1. Periodizität der Value-at-Risk-Berechnung (die EBK spricht von Berechnung, obwohl sich der Value-at-Risk nur schätzen lässt),
2. Wahl des Konfidenzniveaus  $\alpha$ ,
3. Wahl der Halteperiode und
4. historischer Beobachtungszeitraum und Aktualisierung der Datenreihen.

Diese Punkte werden im folgenden diskutiert (vgl. Eidgenössische Bankenkommision [42], S. 25 f.).

Die Periodizität der Value-at-Risk-Schätzungen muss ein Tag betragen. Kürzere Intervalle wären prinzipiell denkbar, sind aber vom damit verbundenen Aufwand nicht realistisch.

Das Konfidenzniveau  $\alpha$  der Value-at-Risk-Schätzung soll 99% betragen. Dies ist Ausdruck einer sehr vorsichtigen und konservativen Abschätzung des Marktrisikos. Aus statistischer Sicht ist gegen diese Wahl anzuführen, dass bei der Schätzung von sehr kleinen Quantilen wie dem 1%-Quantil oft nur wenige Beobachtungsdaten zur Verfügung stehen, was zu hohen Schätzfehlern führen kann.

Die Halteperiode und somit der Prognosehorizont wurde auf zehn Handelstage festgelegt. Werden Halteperioden von einem Tag verwendet, so müssen die entsprechenden



Value-at-Risk-Werte durch Multiplikation mit dem Faktor  $\sqrt{10}$  auf eine Halteperiode von zehn Tagen umgerechnet werden. Der Basler Ausschuss geht implizit von einer Definition des Value-at-Risk bezüglich der Anfangsinvestition aus. Wird eine Definition bezüglich des Erwartungswertes verwendet, muss zusätzlich der Erwartungswert mit dem Faktor Zehn multipliziert werden.

Zur Wahl der Halteperiode von zehn Tagen sind folgende kritischen Anmerkungen anzubringen. Es ist unwahrscheinlich, dass Portfolios aus verschiedenen Anlagen in ihrer Zusammensetzung über zehn Tage konstant bleiben, allein der Verfall von Optionen kann zu einer Veränderung der Portfoliozusammensetzung führen. Bei solch langen Haltedauern wird auf diese Weise ein Value-at-Risk für ein Portfolio berechnet, das so am Ende der Halteperiode nicht mehr existiert. Zudem können im Verlauf von zehn Tagen sehr starke Kursschwankungen an den Börsen auftreten, die so in den Value-at-Risk-Schätzungen keine ausreichende Berücksichtigung finden. Besonders kritisch ist die Umrechnung von eintägiger auf zehntägige Halteperioden zu beurteilen. Bei der Anwendung des Multiplikationsfaktors  $\sqrt{10}$  wird implizit davon ausgegangen, dass Renditeverteilungen durch eine Normalverteilung approximiert werden können (vgl. Zimmermann [117] und Kapitel 4). Die Approximationsfehler der Normalverteilung wurden bereits hinreichend diskutiert. Es ist allerdings anzumerken, dass es sich bei dieser Möglichkeit zur Umrechnung nur um eine Übergangsregelung (ohne Angabe von Fristen) handelt (vgl. Eidgenössische Bankenkommission [42], S. 25).

Ein alternativer Vorschlag zur Festlegung der Halteperiode und des Konfidenzniveaus stammt von J. P. Morgan. Sie schlagen eintägige Halteperioden und Konfidenzniveaus von 95% vor (vgl. J. P. Morgan [65], S. 8). Daneben verwenden Banken für interne Zwecke die unterschiedlichsten Konstellationen (vgl. Johanning [66], S. 37 f.). Welche Halteperioden und Konfidenzniveaus sinnvolle Value-at-Risk-Schätzungen liefern, kann nur im Rahmen empirischer Studien untersucht werden. Auch hier will die vorliegende Arbeit einen Beitrag leisten.

Der historische Beobachtungszeitraum wurde auf mindestens ein Jahr festgelegt. Hier musste ein Kompromiss gefunden werden. Lange historische Datenreihen verbessern auf der einen Seite die statistischen Eigenschaften einer Schätzung, können auf der anderen Seite zu einer zu starken Berücksichtigung historischer, die Zukunft ungenügend beschreibender Situationen führen.

Die Datenreihen und damit alle darauf basierenden Schätzungen, wie zum Beispiel Modellparameter, müssen mindestens quartalsweise oder, falls es die Marktbedingungen erfordern, sofort aktualisiert werden. Diese Formulierung ist allerdings zu unscharf und lässt einiges an Interpretationsspielraum zu. Im Sinne einer möglichst zeitsimultanen Verfolgung der Marktveränderungen, sollte eine tägliche Aktualisierung vorgenommen werden.

Neben diesen quantitativen Anforderungen werden auch qualitative Anforderungen formuliert. Sie betreffen zum Beispiel organisatorische Fragestellungen innerhalb ei-

ner Unternehmung, die zur Messung von Marktrisiken verpflichtet ist, und spielen damit im folgenden keine Rolle.

Wichtig ist dagegen die Vorgehensweise, wie aus den Value-at-Risk-Schätzungen die Höhe der Eigenmittel abgeleitet werden muss, die zur Absicherung der Marktrisiken eingesetzt werden müssen. Gemäss Richtlinien der Eidgenössischen Bankenkommision ergeben sich diese Eigenkapitalanforderungen aus dem grösseren der folgenden zwei Beträge (vgl. Eidgenössische Bankenkommision [42], S. 22):

1. dem aktuell ermittelten Value-at-Risk,
2. dem Durchschnitt der Value-at-Risk-Schätzungen der 60 unmittelbar vorangehenden Handelstage, multipliziert mit einem Faktor von mindestens Drei.

Die Höhe des Multiplikationsfaktors richtet sich vor allem nach der Prognosegüte des Modells, das durch eine Bank verwendet wird, und kann bei Bedarf erhöht werden. Im Kapitel 8 wird darauf genauer eingegangen.

Die Abwägung zwischen dem aktuellen Value-at-Risk und dem dreifachen sechzigstägigen Durchschnitt erscheint wenig sinnvoll. Durch Multiplikation mit dem Faktor Drei werden nur in Ausnahmefällen die aktuellsten Value-at-Risk-Schätzungen zur Eigenmittelunterlegung herangezogen (vgl. Bühler und Schmidt [24], S. 43). Da historische Informationen zum Beispiel in den Parameterschätzungen der Modelle enthalten sind, wird zudem die Vergangenheit in doppelter Weise berücksichtigt. In den folgenden Kapiteln wird deshalb ein modifiziertes Verfahren untersucht: zur Ermittlung des Eigenkapitalbedarfs werden die aktuellen Value-at-Risk-Schätzungen mit dem Faktor Drei multipliziert. So werden die aktuellen Marktentwicklungen besser berücksichtigt.

Der Multiplikationsfaktor wurde vom Basler Ausschuss eingeführt, um Schwächen einzelner Modelle abzufangen. Gegen diesen Faktor werden die meisten Gegenargumente angeführt. Nach diesen Richtlinien existieren für solche Schwächen mehrere Gründe (vgl. Basle Committee on Banking Supervision [9], S. 2 f.). Zunächst zeigen empirische Renditeverteilungen Fat Tails (vgl. auch Abschnitt 2.1.3), die etwa durch eine Approximation mit einer Normalverteilung nicht berücksichtigt werden. Inkonsistent ist dann, dass Value-at-Risk-Schätzungen, die auf Modellen beruhen, welche empirische Verteilungen gut approximieren, trotzdem mit Drei zu multiplizieren sind. Bei einer Halteperiode von zehn Tagen sind Renditen zudem zunehmend normalverteilt und weisen weniger ausgeprägte Fat Tails auf. Das Argument für den Multiplikationsfaktor verliert somit an Überzeugungskraft.

Weiter wird angeführt, dass die Vergangenheit nicht immer eine gute Approximation für die Zukunft darstellt. Dieses Problem wird immer bestehen. Durch den Multiplikationsfaktor sollen Risiken abgefangen werden, die sich aus aussergewöhnlichen Marktveränderungen und die sich durch Handelsaktivitäten innerhalb eines Tages ergeben, da Value-at-Risk-Schätzungen in der Regel auf Tagesendpositionen beruhen. Prinzipiell wären Intraday-VaR-Schätzungen möglich, praktisch aber kaum umzusetzen. Schliesslich soll der Multiplikationsfaktor vereinfachende Annahmen bei der

Bewertung von komplexen Instrumenten wie Optionen abfangen.

Gerade dieser letzte Grund und das Argument der unzureichenden Berücksichtigung von Fat Tails bieten keinen Anreiz, „bessere“ Modelle zu entwickeln. Allerdings werden „schlechte“ Modelle durch eine Erhöhung des Multiplikationsfaktors bestraft (vgl. Eidgenössische Bankenkommission [42], S. 28 f.).

Ein wichtiger Punkt innerhalb der regulatorischen Richtlinien betrifft die Behandlung von Optionen. Die Eidgenössische Bankenkommission geht implizit davon aus, dass zur Schätzung des Value-at-Risk bei Optionen ein Optionspreismodell verwendet wird (vgl. Eidgenössische Bankenkommission [42], S. 24), zum Beispiel das Black-Scholes-Modell (vgl. Abschnitt 4.1.2). Entwickelt man etwa für die Black-Scholes-Formel die Wertänderung des Optionspreises in eine Taylor-Reihe, lassen sich verschiedene Faktoren identifizieren, von denen diese Wertänderung abhängig ist (vgl. Jorion [68], S. 137 ff.). Die Eidgenössische Bankenkommission verlangt nun, dass mindestens drei solche Faktoren zu berücksichtigen sind. Dabei handelt es sich um Änderungen aufgrund von Preisänderungen des Basisinstruments (sogenanntes *Delta*), Änderungen des Delta aufgrund von Preisänderungen des Basisinstruments zur Berücksichtigung des nichtlinearen Charakters von Optionen (sogenanntes *Gamma*) und Veränderungen im Optionswert aufgrund sich ändernder Volatilitäten für das Basisinstrument (sogenanntes *Vega*). Im Fall der Black-Scholes-Formel kann dann unter Verwendung der für die Black-Scholes-Formel geltenden Annahmen ein einfacher Ausdruck für den Value-at-Risk hergeleitet werden, der eine einfache Schätzung zulässt. Für genauere Schätzungen muss eine Renditeverteilung für eine Option verwendet werden, was jedoch mit einem erhöhten Aufwand verbunden ist.

An der generellen Verwendung von Optionspreismodellen führt allerdings kein Weg vorbei. So sind historische Zeitreihen von Optionen oft viel zu kurz, etwa bei Laufzeiten von nur drei Monaten, und zudem oft nicht vollständig (vgl. hierzu auch die empirische Untersuchung zu Optionspreismodellen in Abschnitt 5.3). Das heisst, die Stichprobenumfänge historischer Daten sind oft zu klein, um daraus verlässliche Value-at-Risks zu schätzen.

Ein letzter, aber deshalb nicht weniger wichtiger Punkt, betrifft die Zulassung von Verfahren, mit denen Renditeverteilungen als Grundlage von Value-at-Risk-Schätzungen generiert werden dürfen. Hier werden vom Basler Ausschuss und von der Eidgenössischen Bankenkommission die *Monte-Carlo-Methode*, die *historische Simulation* und der *Varianz-Kovarianz-Ansatz* zugelassen (vgl. Basle Committee on Banking Supervision [9], Eidgenössische Bankenkommission [42], S. 25). Diese Verfahren werden im folgenden Abschnitt diskutiert.

### 6.2.5 Verfahren zur Generierung von Renditeverteilungen

Der Value-at-Risk ist aus einer Renditeverteilung zu schätzen. Es ist klar zu trennen, wie man zu einer solchen Renditeverteilung kommt und wie dann der Value-at-Risk

zu schätzen ist, beziehungsweise welches Verfahren zur Quantilschätzung verwendet wird. Diese Trennung ist in der Literatur nur sehr unscharf vorhanden, so wird oft von Verfahren zur Value-at-Risk-Schätzung gesprochen, gemeint ist aber die Generierung von Renditeverteilungen (vgl. zum Beispiel Johanning [66], S. 20 ff.). Deshalb werden in diesem Abschnitt Verfahren zur Erzeugung solcher Renditeverteilungen vorgestellt. Den Methoden um den Value-at-Risk zu schätzen, ist dann ein weiteres Kapitel vorbehalten.

Geeignete und von der Eidgenössischen Bankenkommision zugelassene Verfahren sind der Varianz-Kovarianz-Ansatz, die historische Simulation sowie die Monte-Carlo-Simulation. Eine Diskussion des Varianz-Kovarianz-Ansatzes macht nur für Portfolios Sinn. Die beiden verbleibenden Methoden werden dagegen für eine Anwendung auf eine einzelne Anlage diskutiert, sie können aber auch auf den Fall des Portfolios erweitert werden. Eine vereinfachte, die zugrundeliegenden Ideen aber besser herausarbeitende Darstellung ist auf diese Weise möglich. Zudem werden in den noch folgenden empirischen Studien historische Simulationen und Monte-Carlo-Simulationen auf einzelne Anlagen angewandt. Dies ermöglicht es, besser zwischen Aktien und Optionen zu trennen als dies bei Betrachtung von gemischten Aktien- und Optionsportfolios möglich wäre.

### Varianz-Kovarianz-Ansatz

Im folgenden wird zunächst ein Portfolio aus  $N$  Basisanlagen mit relativen Werten  $w_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ,  $\sum_{i=1}^N w_i = 1$ ) betrachtet, das keine Optionen enthalten soll. Die Gewichte  $w_i$  seien zum Vektor  $\mathbf{w} \equiv (w_1, \dots, w_N)' \in \mathbb{R}^N$  zusammengefasst.

Der Varianz-Kovarianz-Ansatz beruht auf der zentralen Annahme, dass zeitlich aufeinanderfolgende Renditen – im folgenden als relative Preisänderungen angenommen, da in diesem Fall eine Portfoliorendite einfach zu berechnen ist – aller Anlagen unabhängig, identisch und *gemeinsam* normalverteilt sind (vgl. Bühler und Schmidt [24], S. 24 f., Bühler et al. [23], S. 67, Johanning [66], S. 25 f.). Dies bedeutet, dass die gemeinsame Dichte der Renditen  $\mathbf{R}_t \equiv (R_t^1, \dots, R_t^N)'$  durch eine multivariate Normalverteilung gegeben ist. Die Portfoliorendite  $R_t^{\text{Portfolio}} = \sum_{i=1}^N w_i R_t^i$  ist damit ebenfalls normalverteilt mit Erwartungswert

$$\mu_{\text{Portfolio}} = \mathbf{w}' \boldsymbol{\mu},$$

wobei  $\boldsymbol{\mu} \equiv (\mu_1, \dots, \mu_N)' \in \mathbb{R}^N$  den Vektor der Erwartungswerte der Einzelrenditen darstellt, und mit Varianz

$$\sigma_{\text{Portfolio}}^2 = \mathbf{w}' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}.$$

$\boldsymbol{\Sigma}$  ist hier die Varianz-Kovarianz-Matrix

$$\boldsymbol{\Sigma} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \dots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}.$$

Erwartungswerte  $\mu_i$  und Varianzen  $\sigma_i^2$  ( $i = 1, \dots, N$ ) der Einzelrenditen lassen sich aus historischen Daten schätzen (vgl. Abschnitt 4.1.3), ebenso die Kovarianzen  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, N, i \neq j$ ) zwischen Renditen unterschiedlicher Anlagen (vgl. Abschnitt 2.2.3).

Der Value-at-Risk des gesamten Portfolios ergibt sich schliesslich mit Hilfe des  $p$ 100%-Quantils  $z^*(p)$  der Standardnormalverteilung bezüglich des Erwartungswertes (vgl. Gleichung (6.3)) als

$$VaR = -W_0 (z^*(p) - \mu_{\text{Portfolio}}),$$

beziehungsweise bezüglich der Anfangsinvestition (vgl. Gleichung (6.4)) als

$$VaR = -W_0 z^*(p).$$

Der Wert des Portfolios zu Beginn der Halteperiode ist hierbei mit  $W_0$  bezeichnet. Eine Schätzung des Value-at-Risk ist damit nicht notwendig, wohl aber die Schätzung der Varianzen und Kovarianzen der unterstellten multivariaten Normalverteilung.

Sind Optionen im Portfolio enthalten, sollte der Varianz-Kovarianz-Ansatz nicht mehr verwendet werden. Renditen von Optionen sind nicht mehr normalverteilt, sondern zeigen in der Regel asymmetrische und schiefe Verteilungen. Die dem Varianz-Kovarianz-Ansatz zugrundeliegenden Annahmen sind dann verletzt. Ähnliche Probleme treten auf, wenn Kurse von einer Währung in eine andere umzurechnen sind. Hier sind zwei Zufallsvariablen miteinander zu multiplizieren, was selbst bei einer Normalverteilungsannahme für die einzelnen Zufallsvariablen keine normalverteilte Zufallsvariable ergibt (vgl. Bühler et al. [23], S. 67.).

Der Varianz-Kovarianz-Ansatz führt auf einfache Weise zu Value-at-Risk-Werten. Dieser Vorteil ist auf die Normalverteilungsannahme für die Renditeverteilung zurückzuführen, einer Annahme, die für reale Renditen nicht haltbar ist (vgl. Kapitel 5). Enthalten Portfolios zudem Optionen oder Anlagen in unterschiedlichen Währungen, so sind Approximationen zu verwenden.

### Historische Simulation

Betrachtet man nur eine einzelne Anlage, zum Beispiel eine Aktie, so lässt sich die historische Simulation sehr einfach darstellen. Aus einer Stichprobe von historischen Renditen, die als unabhängig und identisch verteilt angenommen werden (vgl. Butler und Schachter [25], S. 372, Huschens [64], S. 12 ff.), wird der Value-at-Risk über Gleichung (6.3) oder (6.4) geschätzt. Erwartungswert und Quantil werden dazu aus der Stichprobe der historischen Renditen geschätzt. Der Zeitraum, über den die Renditen berechnet werden, muss daher der Länge der Halteperiode entsprechen. Die historische Simulation beinhaltet eine implizite Modellbildung. Es wird angenommen, dass eine Renditeverteilung, geschätzt auf Grundlage eines historischen Zeitraums, genau

die Verteilung zukünftiger Renditen beschreibt und dass die Renditen *i.i.d.* sind. Abbildung 6.3 gibt diese Zusammenhänge schematisch wieder. Ausgehend vom aktuellen

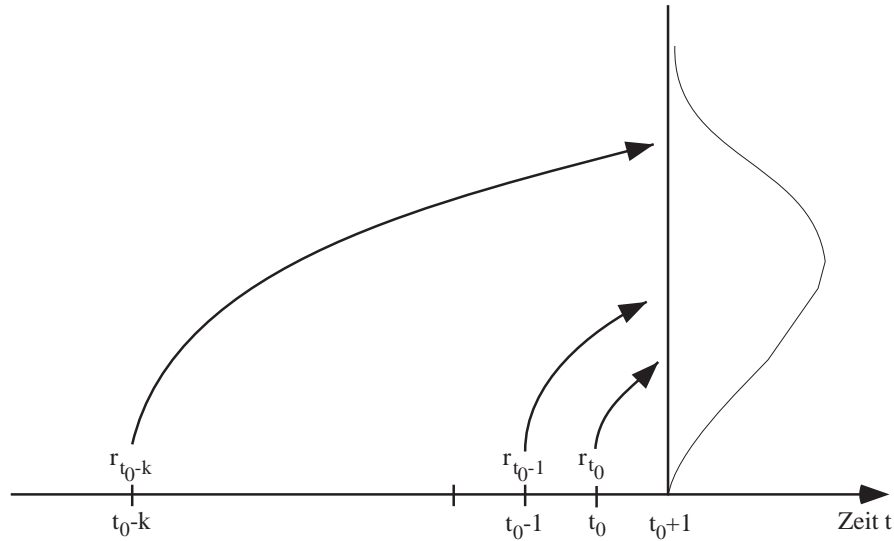


Abbildung 6.3: Grundidee der historischen Simulation.

Zeitpunkt  $t_0$  wird eine Stichprobe  $(k+1)$  historischer Renditen  $r_{t_{0-k}}, \dots, r_{t_0}$  verwendet, um das Quantil einer Verteilung zu schätzen, welche die möglichen Realisierungen der Rendite zum Zeitpunkt  $t_0 + 1$  prognostiziert. Die Halteperiode ist dabei gerade die Zeitdifferenz zwischen  $t_0$  und  $t_0 + 1$ .

Sollen Value-at-Risks für verschiedene Halteperioden geschätzt werden, erfordert dies eine Neuberechnung der Renditen über einen entsprechenden Zeithorizont und somit eine neue Schätzung von Erwartungswerten und Quantilen. Werden historische Beobachtungszeiträume von 250 Handelstagen und zehntägige Halteperioden verwendet, das heisst die Anforderungen des Basler Ausschusses und der Eidgenössischen Bankenkommision erfüllt, so stehen 24 sich nicht überlappende Renditen als Stichprobe zur Verfügung. Um den Stichprobenumfang zu erhöhen, kann mit sich überlappenden Zeiträumen bei der Renditeberechnung gearbeitet werden. Dafür sind diese Renditen dann korreliert (vgl. Hüschen [64], S. 14). Eine Umrechnung der Value-at-Risk-Schätzungen von einer Halteperiode auf eine andere wie in Abschnitt 6.2.4 erwähnt (vgl. Hüschen [64]), S. 3), beruht auf einer expliziten Modellannahme normalverteilter Renditen und widerspricht der Idee der historischen Simulation.

Vorteile der historischen Simulation bestehen darin, durch die Verwendung empirischer Renditeverteilungen auch Eigenschaften wie Fat Tails in die Value-at-Risk-Schätzungen einfließen zu lassen. Zudem ist die Umsetzung der Methode in der oben

beschriebenen Art sehr einfach.

Nachteilig wirkt sich der geringe Stichprobenumfang aus. Gerade in dem für die Quantilschätzung notwendigen Teil einer Renditeverteilung stehen oft nur wenige Daten zur Verfügung. Sollen Optionen berücksichtigt werden, muss auf ein Optionspreismodell, das heisst auf ein explizites Modell und die damit verbundenen Annahmen, zurückgegriffen werden.

Eine einfache Einführung in die Methode der historischen Simulation findet sich bei Read (vgl. Read [97]), eine detaillierte Übersicht über alle Varianten dieses Verfahrens hat Hüschen (vgl. Hüschen [64]) zusammengestellt.

### Monte-Carlo-Simulation

Das Verfahren der Monte-Carlo-Simulation wurde bereits in Abschnitt 1.2.8 bei der Erläuterung der stochastischen Differentialgleichungen indirekt angesprochen. Es beruht auf einem stochastischen Modell zur Beschreibung der Dynamik von Aktienkursen, also auf stochastischen Differentialgleichungen. Da zeitkontinuierliche Gleichungen für numerische Simulationen nicht verwendet werden können, muss die stochastische Differentialgleichung zeitdiskret approximiert werden. Dazu dient die Euler-Approximation, die in Abschnitt 1.2.8 vorgestellt wurde.

In Abbildung 6.4 ist die Grundidee der Monte-Carlo-Simulation schematisch wiedergegeben. Es werden  $M$  Realisierungen von Trajektorien generiert, wobei so viele Zeitschritte der Länge  $\Delta t$  auszuführen sind, wie zur Erreichung eines bestimmten Endzeitpunktes  $T$  notwendig sind. Man erhält so eine simulierte Stichprobe von Renditen. Daraus lassen sich alle gewünschten statistischen Grössen schätzen.

In dieser Arbeit wurden drei explizite Modelle detailliert vorgestellt, die mit der Monte-Carlo-Methode simuliert werden können. Es handelt sich um die Geometrische Brownsche Bewegung, den Sprung-Diffusions-Prozess und das hyperbolische Modell, für welche die jeweiligen Simulationsgleichungen bereits eingeführt wurden.

Mit der Monte-Carlo-Methode sind einige Vorteile verbunden (vgl. Bühler et al. [23], S. 26, Bühler und Schmidt [24], S. 68, Read [97], S. 6 f., Johanning [66], S. 35 f.). Werden verschiedene Modelle simuliert, eignet sich die Monte-Carlo-Simulation hervorragend, diese expliziten Modelle bezüglich ihres Modellrisikos zu vergleichen. Es lassen sich (fast) beliebig grosse Stichproben generieren, was die Schätzfehler verringert, allerdings zu Lasten der Rechenzeit.

Ein wichtiger Punkt ist, dass Optionspreismodelle immer auf Annahmen über die Dynamik des zugrundeliegenden Instruments basieren. Mit dem Monte-Carlo-Verfahren können, im Gegensatz zum Varianz-Kovarianz-Ansatz oder der historischen Simulation, Verteilungen von Optionsrenditen *konsistent* generiert werden. Dies ist ebenfalls

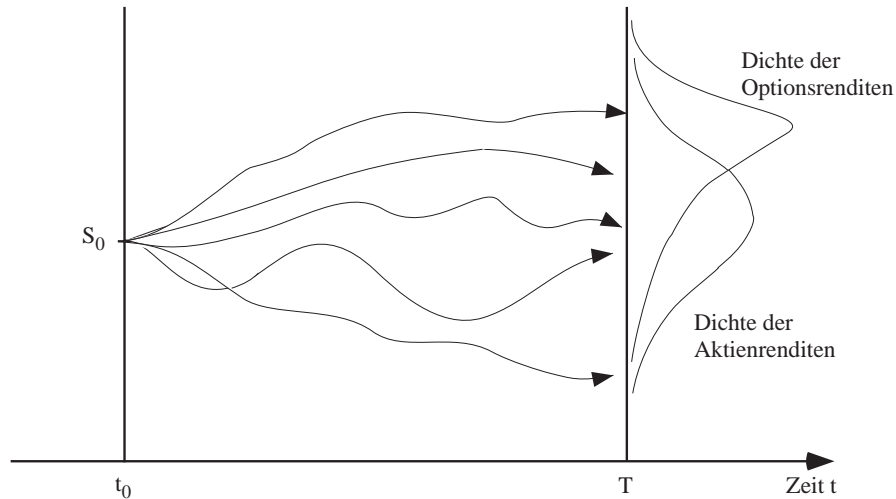


Abbildung 6.4: Grundidee der Monte-Carlo-Simulation.

in Abbildung 6.4 erfasst. Wurde eine Verteilung der Preise oder Renditen des Basisinstruments zu einem bestimmten Zeitpunkt generiert, lassen sich die Preise der simulierten Stichprobe direkt verwenden, um jeweils mit dem zugehörigen Optionspreismodell eine Verteilung der Optionspreise und damit der Optionsrenditen zu bestimmen. Der nichtlineare Charakter von Optionen wird somit vollumfänglich und nicht nur approximativ erfasst.

Die Parameter der dynamischen Modelle sind aus historischen Daten zu schätzen (vgl. Abschnitt 4.1.3). Werden diese Parameter auf Tagesbasis geschätzt, lassen sich beliebige Halteperioden für die Value-at-Risk-Schätzung verwenden, indem entsprechend viele (Tages-) Zeitschritte ausgeführt werden. Auf Umrechnungen der Value-at-Risk-Schätzungen kann ebenso verzichtet werden wie auf eine Neuberechnung der Renditen bei der historischen Simulation. Die Monte-Carlo-Methode besitzt allerdings einen sehr grossen Nachteil. Trotz der sehr raschen Entwicklung der Computerleistungen, sind die Rechenzeiten und damit der numerische Aufwand nach wie vor sehr hoch.

In dieser Arbeit wird der Varianz-Kovarianz-Ansatz nicht verwendet. Er beruht auf einer Reihe sehr vereinfachender Annahmen. Die historische Simulation wird eingesetzt, da sich mit ihr sehr einfach Renditeverteilungen erzeugen lassen. Anhand dieser empirischen Renditeverteilungen lassen sich zum Beispiel auch verschiedene Quantilschätzer testen. Die Monte-Carlo-Simulation eignet sich zur Überprüfung von Modellrisiken expliziter Modelle und wird deshalb sowohl für Aktien als auch für Aktienoptionen verwendet, im Gegensatz zur historischen Simulation, die auf Aktien beschränkt bleibt.



Wird zudem mit Hilfe des Monte-Carlo-Verfahrens die Geometrische Brownsche Bewegung für eine einzelne Anlage simuliert, so entsprechen die Resultate denjenigen der Varianz-Kovarianz-Methode für den Spezialfall eines Portfolios mit nur einer einzigen Anlage.

## 6.3 Lower-Partial-Moments

Ein zum Value-at-Risk alternatives Konzept zur Messung von Marktrisiken, das vermehrt in der Literatur diskutiert wird, ist das Konzept der sogenannten *Lower-Partial-Moments* (untere partielle Momente) (vgl. Brachinger [17], Brachinger [16]). Diese Momente enthalten als Spezialfall den Value-at-Risk und sind mit der Varianz verwandt.

### 6.3.1 Definitor der Lower-Partial-Moments

Die Lower-Partial-Moments  $k$ -ter Ordnung einer Zufallsvariablen  $r$  mit Verteilung  $F(r)$  sind definiert durch (vgl. Brachinger [17], Brachinger [16], Schröder [105], S. 89)

$$LPM_k(z) \equiv \int_{-\infty}^z (z - r)^k dF(r). \quad (6.5)$$

Im Fall von Renditeverteilungen wird  $z$  auch als Zielrendite bezeichnet. Solche Zielrenditen werden vom Investor vorgegeben, zum Beispiel durch einen Geldmarktsatz. Der Begriff *Lower* rührt daher, dass nur Ausprägungen unterhalb der Zielrendite erfasst werden. Da nicht die gesamte Verteilung betrachtet wird, werden sogenannte *partielle Momente* bestimmt.

Die Lower-Partial-Moments enthalten folgende Spezialfälle. Für  $k = 0$  ergibt sich einfach der Wert der Verteilungsfunktion  $F$  an der Stelle der Zielrendite.  $LPM_1 = 0.01$  beispielsweise bedeutet, dass die erwartete Unterschreitung der Zielrendite 1% beträgt. Für  $k = 2$  weisen die Lower-Partial-Moments eine grosse Ähnlichkeit zur Varianz auf. Wird als Zielrendite die erwartete Rendite eingesetzt, so ergibt sich gerade die halbe Varianz dieser Verteilung und wird daher als *Semivarianz* bezeichnet. Der Value-at-Risk kann aus dem Lower-Partial-Moment mit  $k = 0$  abgeleitet werden, indem als Zielrendite gerade das zum Value-at-Risk gehörende Quantil  $r^*(p)$  einer Renditeverteilung gewählt wird (vgl. Schröder [105], S. 89). Es gilt

$$LPM_0(r^*(p)) = \int_{-\infty}^{r^*(p)} dF(r) = P(R \leq r^*(p)) = F(r^*(p)),$$

woraus sich durch Invertierung der Verteilungsfunktion  $r^*(p)$  bestimmen lässt:

$$r^*(p) = F^{-1}(LPM_0).$$

### 6.3.2 Ein verallgemeinerter Value-at-Risk-Ansatz

Beim Value-at-Risk-Konzept wird ein Konfidenzniveau beziehungsweise eine Restwahrscheinlichkeit vorgegeben. Der Value-at-Risk ergibt sich dann durch Auswertung der Umkehrfunktion der Renditeverteilung.

Die Lower-Partial-Moments bilden die Basis für allgemeinere Value-at-Risk-Masse (vgl. Schröder [105], S. 92 f.). Statt eine Restwahrscheinlichkeit vorzugeben, wird nun der Wert des Integrals  $S_k$

$$S_k \equiv \int_{-\infty}^{VaR_k} (VaR_k - r)^k dF(r) \quad (6.6)$$

vorgegeben. Durch Invertierung kann der zu  $S_k$  gehörende verallgemeinerte Value-at-Risk  $VaR_k$  bestimmt werden. Für  $k = 0$  ist dies der „klassische“ Value-at-Risk, für  $k = 1$  ist  $S_1$  als Erwartungswert desjenigen Teils der Verteilung zu verstehen, der sich links vom  $VaR_1$  befindet. Für  $k \geq 2$  ist die Interpretation allerdings schwieriger. Auch ist nicht klar, welche Werte für  $S_k$  sinnvollerweise vorzugeben sind.

### 6.3.3 Value-at-Risk und Lower-Partial-Moments als Spezialfall der Stoneschen Risikomasse

In der Literatur wurde darauf hingewiesen (vgl. Brachinger [16]), dass Value-at-Risk und Lower-Partial-Moments nicht als eigenständige Risikomasse zu betrachten sind. Sie ergeben sich vielmehr aus einem allgemeineren Ansatz, den sogenannten *Stoneschen Risikomassen*, zwei Familien von dreiparametrischen Massen (vgl. Stone [109]).

Die erste Familie der Stoneschen Risikomasse ist definiert durch

$$RS_1(r) \equiv \int_{-\infty}^q |r - p|^k dF(r). \quad (6.7)$$

Der Parameter  $p$  ist das Referenzniveau bezüglich dem die Abweichungen gemessen werden. Die Potenz  $k \geq 0$  legt die Gewichtung der Abweichungen fest. Die Integralgrenze  $q$  bestimmt, welche Renditen zur Bestimmung des Risikomasses herangezogen werden.

Die zweite Familie ergibt sich als  $k$ -te Wurzel ( $k > 0$ ) der ersten Familie:

$$RS_2(r) \equiv (RS_1(r))^{\frac{1}{k}}. \quad (6.8)$$

Die Lower-Partial-Moments ergeben sich unmittelbar als Spezialfall des ersten Stoneschen Risikomasses, wenn  $q = p = z$  gesetzt wird. Der Value-at-Risk ergibt sich nicht ganz so unmittelbar. Mit  $k = 0$  erhält man zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass Renditen kleiner als der Wert  $q$  auftreten. Gibt man für diese Wahrscheinlichkeit einen festen Wert vor und löst unter Verwendung der Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion nach  $q$  auf, ist dies das für den Value-at-Risk benötigte Quantil der Renditeverteilung (vgl. Brachinger [16]).

### 6.3.4 Literaturüberblick über die Verwendung von Finanzmarktmodellen als Basis für Value-at-Risk-Schätzungen

Dieser Abschnitt gibt einen kurzen Literaturüberblick über die Verwendung verschiedener Finanzmarktmodelle als Basis für Value-at-Risk-Schätzungen. Bei diesen Modellen handelt es sich um diejenigen, die in Kapitel 3 vorgestellt wurden.

Eine der vielen Studien, die sich mit der Value-at-Risk-Schätzung auf Grundlage der Geometrischen Brownschen Bewegung beschäftigt, ist beispielsweise diejenige von Bühler et al. [23].

Ein empirischer Vergleich von Value-at-Risk-Schätzungen auf Basis einer Normalverteilung und einer Mischung von zwei Normalverteilungen für Renditen von verschiedenen Wechselkursen ergibt „genauere“<sup>2</sup> Value-at-Risk-Schätzungen für den Fall der Mischung (vgl. Venkataraman [111]). Monte-Carlo-Simulationen auf Basis einer Mischung zweier Normalverteilungen zur Schätzung des Value-at-Risk werden in Engel und Gizycki [46] im Vergleich mit einer Vielzahl anderer Modelle für Renditen verschiedener Wechselkurse präsentiert.

Eine Anwendung der Student t-Verteilung bei Value-at-Risk-Schätzungen findet sich bei Venkataraman [111], wenn auch nicht als umfassende empirische Studie.

Eine Diskussion des Sprung-Diffusions-Prozesses im Zusammenhang mit Value-at-Risk-Schätzungen findet sich bei Duffie und Pan [37]. Eine umfassende empirische Untersuchung dieses Modells als Grundlage für Value-at-Risk-Schätzungen existiert nach Kenntnis des Autors nicht.

Value-at-Risk-Schätzungen auf Grundlage der hyperbolischen Verteilung ergeben gegenüber der Normalverteilung „bessere“ Resultate (vgl. Eberlein et al. [41], Weber [113]).

Eine neuere Studie, die auf Grundlage der Stablen Pareto-Verteilung Value-at-Risk-Schätzungen für Tagesrenditen verschiedener Wechselkurse und Aktienindizes vornimmt, ergibt im Vergleich zur Normalverteilung eine höhere „Genauigkeit“ dieser Schätzungen (vgl. Khindanova et al. [71]).

Ein Überblick über empirische Untersuchungen von ARCH- und GARCH-Modellen für Volatilitäten auf Aktienmärkten findet sich bei Hamilton (vgl. [54], S. 672). Ein empirischer Vergleich verschiedener GARCH-Modelle als Grundlage für Value-at-Risk-Schätzungen findet sich bei Engel und Gizycki [46]. Portmann und Wegmann [93] untersuchen ein GARCH-Modell im Zusammenhang mit Value-at-Risk-Schätzungen

---

<sup>2</sup>Was unter einer „genauen“ Value-at-Risk-Schätzung zu verstehen ist, wird in Kapitel 8 thematisiert.

für ein aus schweizerischen Aktien bestehendes Portfolio.

## Kapitel 7

# Quantilschätzung und Schätzung von Lower–Partial–Moments

### 7.1 Einleitung

In diesem Kapitel wird ein Überblick über die wichtigsten bekannten und in dieser Arbeit verwendeten Verfahren zur Schätzung eines Quantils und zur Schätzung der Lower–Partial–Moments gegeben. Verfahren zur Schätzung von Quantilen sind in der Statistik seit Langem bekannt. Sie erleben aber seit der Diskussion um den Value–at–Risk geradezu eine Renaissance.

Grundsätzlich bestehen zwei Ansätze, um das Problem der Quantil– und LPM–Schätzung anzugehen, der nichtparametrische und der parametrische Ansatz. Bei den nichtparametrischen Verfahren werden direkt anhand der empirischen Daten Schätzungen vorgenommen, das heisst ohne Annahmen über die Verteilung der Daten. Hingegen werden bei den parametrischen Verfahren zunächst Annahmen über die den Daten zugrundeliegende Verteilung getroffen und anschliessend die Parameter dieser Verteilung geschätzt. Auf Basis dieser Schätzung können dann Quantile und Lower–Partial–Moments der Verteilung geschätzt werden. Bei den zuletzt angesprochenen Verfahren reduziert sich das Problem auf den ersten Blick also auf eine Parameterschätzung. Sind aber „falsche“ Annahmen über die Verteilung getroffen worden, so wirkt sich dies in einem systematischen Fehler in der Schätzung der interessierenden Grösse aus. Deshalb ist eine sorgfältige Überprüfung der Verteilungsannahmen unerlässlich und in diesem Sinne sind die nichtparametrischen Verfahren gegenüber den parametrischen Verfahren im Vorteil.

Neben der Methodik, wie eine bestimmte Grösse zu schätzen ist, wird im folgenden auch immer die numerische Umsetzung dieser Methodik angesprochen, da zu den

stets vorhandenen statistischen Schätzfehlern numerische Fehler hinzukommen. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn für einen Schätzwert ein Integral auf numerischem Weg auszuwerten ist. Diese numerischen Fehler gilt es möglichst klein zu halten. Dazu liefert die numerische Mathematik oft auch Abschätzungen über deren Grösse.

Es wird im folgenden davon ausgegangen, dass eine Stichprobe von Renditen  $r_1, \dots, r_n$  vorliegt. Die wahre Dichte der Renditen sei mit  $f(r)$  bezeichnet.

## 7.2 Nichtparametrische Schätzverfahren

Bei den nichtparametrischen Methoden werden zunächst diejenigen Verfahren vorgestellt, welche direkt die Daten einer Stichprobe als Grundlage für die Schätzung von Quantilen und Lower-Partial-Moments verwenden, anschliessend wird auf die Verwendung eines Kerndichteschätzers eingegangen.

### 7.2.1 Quantilschätzung bei klassierten Daten

Liegen klassierte Daten in Form eines Histogrammes vor, kann das  $p100\%$ -Quantil folgendermassen geschätzt werden (vgl. Hartung [55], S. 34 f.):

$$\hat{r}^*(p) = w_{j-1}^o + \frac{p - \hat{F}(w_{j-1}^o)}{p_j} (w_j^o - w_{j-1}^o). \quad (7.1)$$

Mit  $j$  wird dabei die Einfallsklasse des  $p100\%$ -Quantils bezeichnet. Die Obergrenze der  $j$ -ten Klasse ist  $w_j^o$ , die relative Häufigkeit der  $j$ -ten Klasse ist  $p_j$ . Mit  $\hat{F}$  wird die empirische Verteilungsfunktion bezeichnet. Es wird in der Einfallsklasse des Quantils linear interpoliert.

### 7.2.2 Schätzung des Quantils aus einer geordneten Stichprobe

Wird das  $p100\%$ -Quantil  $r^*(p)$  aus einer geordneten Stichprobe geschätzt, so wird dies auch als Perzentilmethode bezeichnet (vgl. Hartung [55], S. 34 f., Rinne [101], S. 365 und Davis und Steinberg [36], S. 408 f.). Sei die geordnete Stichprobe (nach Umnummerierung) gegeben durch  $r_1 \leq \dots \leq r_n$ . Eine Schätzung für das Quantil ergibt sich dann aus

$$\hat{r}^*(p) = r_{[np]+1}. \quad (7.2)$$

Hierbei ist  $[.]$  die Gauss-Klammer. Asymptotisch, das heisst für grosse  $n$ , gilt für den Stichprobenquantilschätzer

$$\hat{r}^*(p) \sim N\left(r^*(p); \frac{p(1-p)}{nf^2(r^*(p))}\right). \quad (7.3)$$

Der asymptotische Standardfehler des Stichprobenquantilschätzers ist somit

$$s.e.(\hat{r}^*(p)) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{nf^2(r^*(p))}} \quad (7.4)$$

und zum Konfidenzniveau  $(1 - \alpha)$  lässt sich das Konfidenzintervall

$$\left[ \hat{r}^*(p) \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{nf^2(r^*(p))}} \right] \quad (7.5)$$

angeben, wobei  $z_{1-\alpha/2}$  das  $(1 - \alpha/2)$  100%-Quantil der Standardnormalverteilung darstellt. In den Standardfehler geht die wahre Dichte  $f(r)$  explizit ein. In der Regel ist diese Dichte unbekannt, so dass die Angabe eines Konfidenzintervalls nicht möglich ist. Ein approximatives Konfidenzintervall kann aber wie folgt konstruiert werden (vgl. Ridder [99]). Sei  $r^*(p)$  das wahre  $p$ 100%-Quantil. Für ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$  gilt die Wahrscheinlichkeit

$$P(r_k \leq r^*(p) \leq r_l) = 1 - \alpha. \quad (7.6)$$

Gesucht sind nun die ganzen Zahlen  $k$  und  $l$ , so dass Bedingung (7.6) erfüllt ist. Die Werte  $r_k$  und  $r_l$  sind hierbei Elemente der geordneten Stichprobe vom Umfang  $n$ . Bezeichnet man mit  $X$  die Anzahl derjenigen Beobachtungen, die kleiner als das wahre  $p$ 100%-Quantil sind, so ist  $X$  eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  und eine zu Gleichung (7.6) äquivalente Formulierung des Problems ist gegeben durch:

$$P(k \leq X \leq l-1) = \sum_{j=k}^{l-1} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = 1 - \alpha. \quad (7.7)$$

In der Regel wird es nicht möglich sein, Werte für  $k$  und  $l$  zu finden, so dass Gleichung (7.7) exakt erfüllt wird. Zur Bestimmung dieser Werte werden daher zwei Ersatzkriterien herangezogen:

- (1)  $l - k$  möglichst klein ,
- (2)  $\sum_{j=k}^{l-1} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \approx 1 - \alpha.$

Ein Problem tritt bei der Berechnung der Binomialkoeffizienten auf, da hier sehr grosse Fakultäten  $n!$  berechnet werden müssen, die numerisch ungefähr für  $n \geq 60$  nicht mehr zugänglich sind. Deshalb wird für  $p < 0.1$  und  $n \geq 30$  die Binomialverteilung durch eine Poissonverteilung mit Parameter  $\lambda = n \cdot p$  approximiert:

$$\sum_{j=k}^{l-1} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \approx \exp(-n \cdot p) \sum_{j=k}^{l-1} \frac{(n \cdot p)^j}{j!}. \quad (7.8)$$

Für mehrere Fälle zwischen 250 und 2500 Tagesrenditen, was einer Beobachtungsperiode von ein bis zehn Jahre entspricht, sind die Werte für  $k$  und  $l$  bei einem Konfidenzniveau von approximativ 95% des Konfidenzintervalls und für zwei häufig verwendete Quantile mit  $p = 0.01$  und  $p = 0.05$  in Tabelle 7.1 wiedergegeben. Sie wurden mit einem Spreadsheet-Programm berechnet.

$n$	$p$	$(1 - \alpha)$	$k$	$l$
250	0.01	0.958	0	6
250	0.05	0.956	6	20
500	0.01	0.961	1	9
500	0.05	0.955	16	35
1250	0.01	0.955	6	20
1250	0.05	0.956	42	77
2500	0.01	0.954	15	35
2500	0.05	0.951	104	148

Tabelle 7.1: Konfidenzintervalle bei nichtparametrischer Quantilschätzung.

### 7.2.3 Schätzer für Lower-Partial-Moments

Betrachtet man noch einmal die Definition der  $k$ -ten unteren partiellen Momente, so sind diese gegeben durch

$$LPM_k(z) \equiv \int_{-\infty}^z (z - r)^k dF(r) . \quad (7.9)$$

Für  $k = 2$  und  $z = \mu$  entspricht dies der unteren Semivarianz. Die Grundidee besteht nun darin, die Lower-Partial-Moments in Analogie zum Stichprobenvarianzschätzer zu schätzen:

$$\widehat{LPM}_k(z) = \frac{1}{n} \sum_{r_j \leq z} (z - r_j)^k . \quad (7.10)$$

Werden klassierte Daten zur Schätzung der Lower-Partial-Moments herangezogen, ergibt sich wiederum in Analogie zur Varianzschätzung

$$\widehat{LPM}'_k(z) = \sum_{r'_j \leq z} (z - r'_j)^k p_j , \quad (7.11)$$

wobei  $r'_j$  die Klassenmitte der  $j$ -ten Klasse und  $p_j$  deren relative Häufigkeit bezeichnen.



## 7.3 Kerndichteschätzer

### 7.3.1 Einleitung

Histogramme sind dann keine gute Darstellung für die Dichte, wenn die Annahme gleichverteilter Beobachtungen in jeder Klasse nicht zu rechtfertigen ist. Dies ist zum Beispiel bei Renditeverteilungen vor allem in den Enden der Verteilung, auf die es bei der Quantilschätzung ankommt, der Fall. Deshalb wird versucht, eine empirische Dichte über einen Kernschätzer zu bestimmen. Dazu wird an äquidistanten Stellen des Wertebereichs die empirische Dichte berechnet. Dieselben Stellen und die Funktionswerte der Dichte an diesen Stellen können dann dazu genutzt werden, um über numerische Integrationsverfahren statistische Größen zu berechnen. Eine hervorragende Darstellung der Kerndichteschätzung findet sich bei Silverman [107]. Eine Anwendung auf Value-at-Risk-Schätzungen zeigen Butler und Schachter [25] und Ridder [100].

### 7.3.2 Kerndichteschätzer, Kernfunktion und Bandbreite

Sei wieder eine Stichprobe von Beobachtungen  $r_1, \dots, r_n$  einer Zufallsvariablen  $r$  gegeben. Bei einer Kerndichteschätzung ist die gewichtete Schätzung der Dichte  $f(r)$  gegeben durch

$$\hat{f}(r) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i} \sum_{i=1}^n w_i \varphi_h(r - r_i) \quad (7.12)$$

mit Gewichten  $w_i$  ( $w_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n w_i = n$ ) der einzelnen Beobachtungen, der Bandbreite  $h$  und dem sogenannten Kern  $\varphi_h$ . Der Kern  $\varphi_h$  ist mit dem Spektralfenster zur Glättung von Stichprobenspektren vergleichbar. Es existiert eine Vielzahl von verschiedenen Kernen (vgl. Hartung [55], S. 840 ff.). Im folgenden wird der Gausskern

$$\varphi_h(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}h} \exp\left(-\frac{r^2}{2h^2}\right) \quad (7.13)$$

verwendet, was der mit der Bandbreite  $h$  reskalierten Dichte der Standardnormalverteilung entspricht. Die optimale Bandbreite  $h_{\text{opt}}$  des Kerns ist für  $h \rightarrow 0$  und  $nh \rightarrow \infty$  durch

$$h_{\text{opt}} = \left( \frac{1}{2\sqrt{\pi}n \int (f''(r))^2 dr} \right)^{1/5} \quad (7.14)$$

bestimmt (vgl. Silverman [107], S. 40 ff.). Dieser optimale Wert kann jedoch nicht berechnet werden, da die wahre Dichte  $f$  und deren Ableitungen unbekannt bleiben. Silverman gibt als Abhilfe eine einfache Regel zur approximativen Bestimmung von  $h_{\text{opt}}$  an (vgl. Silverman [107], S. 47.):

$$h_{\text{opt}} \approx 0.9 \min(\hat{\sigma}, (Q_3 - Q_1)/1.34) n^{-1/5}. \quad (7.15)$$

$Q_3$  und  $Q_1$  sind dabei das 75%- und das 25%-Quantil der Stichprobe, welche aus der geordneten Stichprobe geschätzt werden können (vgl. Abschnitt 7.2.2),  $\hat{\sigma}$  ist die

Stichprobenstandardabweichung. Wird dagegen eine alternative approximative Fensterbreite von  $h \approx 1.06 \hat{\sigma} n^{-1/5}$  verwendet (vgl. Silverman [107], S. 45 und Ridder [100], S. 107), so kann dies zu negativen Funktionswerten führen, womit die geschätzte Funktion keine Dichte mehr ist.

### 7.3.3 Binning

Eine direkte Schätzung  $\hat{f}$  der Dichte gemäss Gleichung (7.12) an einer Stelle  $r$  beansprucht  $n$  Berechnungen der Kernfunktion. Wird die Dichte an jedem Punkt einer Partition mit  $g$  Stützstellen des Wertebereichs geschätzt, benötigt man schon  $n \cdot g$  solche Berechnungen. Für grosse Datensätze wird die Rechenzeit daher sehr gross. Deshalb werden die Daten diskreten Kategorien zugeordnet, ähnlich der Einteilung in Klassen bei Histogrammen. Dieser Vorgang wird als Binning bezeichnet.

Die einfachste Möglichkeit des Binning besteht darin, die Beobachtungen  $r_1, \dots, r_n$  einer äquidistanten Partition  $x_1, x_2, \dots, x_g$  mit Gitterabstand  $\delta$  zuzuordnen, indem eine Beobachtung  $r_i$  zusammen mit ihrem Gewicht  $w_i$  der ihr am nächsten gelegenen Stützstelle  $x_j$  zugeordnet wird. Ist diese Zuordnung abgeschlossen, so besitzt jede Stützstelle  $x_j$  ein Gewicht  $c_j$ , welches sich als Summe der Gewichte  $w_i$  ergibt, die dieser Stützstelle zugeordnet wurden. Es gilt daher  $\sum_{i=1}^n w_i = \sum_{j=1}^g c_j = n$ .

Ersetzt man die Paare  $(r_i, w_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), gebildet aus der Beobachtung  $r_i$  und zugehörigem Gewicht  $w_i$  dieser Beobachtung, durch  $(x_j, c_j)$  ( $j = 1, \dots, g$ ) schreibt sich die Dichteschätzung an einem Punkt  $x$  als

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^g c_j \varphi_h(x - x_j). \quad (7.16)$$

Für die  $g$  Stützstellen  $x_1, \dots, x_g$  erhält man als Schätzungen

$$\hat{f}(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^g c_j \varphi_h(x_i - x_j) \quad (7.17)$$

oder äquivalent dazu

$$\hat{f}(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^g c_j \varphi_h(|i - j|\delta). \quad (7.18)$$

### 7.3.4 Faltung

Betrachtet man Gleichung (7.17) genauer, so fällt auf, dass es sich hierbei um die Faltung zweier Funktionen respektive Vektoren handelt (vgl. Wegman [114], S. 369 ff., Wegman [115], S. 309 f.). Einer dieser Vektoren enthält die Werte des Kerns an den verschiedenen Stützstellen, der andere Vektor stellt die Gewichte  $c_j$  dar und die Dichteschätzung  $\hat{f}$  ist das Faltungsprodukt beider Vektoren (vgl. Bronstein und

Semendjajew [20], S. 620). Die nun folgenden Ausführungen dienen dazu, die beiden Vektoren auf eine Form zu bringen, die einen effizienten Einsatz von Fast-Fourier-Transformations-Routinen zur Berechnung der Faltung erlauben. Zu diesem Zweck werden zwei Vektoren

$$\begin{aligned} K &\equiv \frac{1}{n}(\varphi_h(0), \varphi_h(\delta), \dots, \varphi_h((g-1)\delta))' \quad \text{und} \\ C &\equiv (c_1, c_2, \dots, c_g)' \end{aligned}$$

definiert. Sehr viele Komponenten des Vektors  $K$  sind sehr klein und die numerisch kleinen Komponenten  $\varphi_h(i\delta)$  werden gleich Null gesetzt, falls  $\left|\frac{i\delta}{h}\right| \geq 4$ . Man definiert darüber die Zahl  $l = \min(g-1, 4h/\delta)$  als das grösste ganzzahlige Vielfache von  $\delta$ , bei welchem  $\varphi_h(l\delta)$  verschieden von Null ist. Sei weiter  $m$  die kleinste Potenz von zwei, die grösser als  $g+l+1$  ist<sup>1</sup>:

$$m = 2^{\text{ceil}(\log_2(g+l+1))}. \quad (7.19)$$

Die Vektoren  $K$  und  $C$  werden schliesslich noch modifiziert. Der Vektor  $K$  wird „symmetrisiert“ und „in der Mitte mit Nullen aufgefüllt“, so dass sich

$$K = \frac{1}{n} \underbrace{(\varphi_h(0), \varphi_h(\delta), \dots, \varphi_h(l\delta))}_{l+1}, \underbrace{(0, \dots, 0)}_{m-2l-1}, \underbrace{(\varphi_h(l\delta), \dots, \varphi_h(\delta))}_l \quad (7.20)$$

mit  $K \in \mathbb{R}^m$  ergibt. Der Vektor  $C$  wird auf dieselbe Dimension  $m$  gebracht, indem mit Nullen aufgefüllt wird:

$$C = (c_1, c_2, \dots, c_g, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-g})'. \quad (7.21)$$

Die Faltung  $K * C$  ist so ein  $m$ -dimensionaler Vektor, dessen erste  $g$  Komponenten gerade die Schätzungen  $\hat{f}(x_i)$  ( $i = 1, \dots, g$ ) enthalten. In der modifizierten Form der Vektoren  $K$  und  $C$  können die Fast-Fourier-Transformations-Routinen aus Numerical Recipes (vgl. Press et al. [95], S. 531 ff.) angewendet werden, um die Faltung zu berechnen.

### 7.3.5 Schätzung von Quantilen und Lower-Partial-Moments

Die Dichte  $f$  liegt nun in Form der Schätzungen  $\hat{f}(x_i)$  an den Stützstellen  $x_i$  ( $i = 1, \dots, g$ ) vor. Diese Stützstellen und die Funktionswerte an diesen Stellen können nun verwendet werden, um das Integral, über welches das Quantil

$$\int_{-\infty}^{r^*(p)} f(r) dr = p \quad (7.22)$$

<sup>1</sup>  $\text{ceil}(\cdot)$  ist die kleinste ganze Zahl, die grösser als das Argument ist. Viele Programmiersprachen stellen Funktionen desselben Namens zur Verfügung, die gerade dies leisten.

und das Integral, über welches die Lower-Partial-Moments

$$LPM_k(z) = \int_{-\infty}^z (z - r)^k f(r) dr. \quad (7.23)$$

definiert sind, mittels numerischer Integration auszuwerten (vgl. Ridder [100], S. 104 ff.). Da der Wert  $r^*(p)$  und die Zielrendite  $z$  in der Regel zwischen zwei Stützstellen  $x_l$  und  $x_{l+1}$  fallen, werden die Integrale jeweils bis zu den Grenzen  $x_l$  und  $x_{l+1}$  berechnet und anschliessend wird zwischen den gefundenen Werten interpoliert. Für die untere Grenze bei der numerischen Integration müssen die ersten Stützstellen so gewählt werden, dass sich als Dichteschätzungen Werte ergeben, die nahezu Null sind.

Das vom Autor erstellte Programm „kernel“ nimmt eine Kerndichteschätzung nach der beschriebenen Methode vor und erlaubt ebenso die Schätzung von Quantilen und Lower-Partial-Moments.

## 7.4 Parametrische Schätzverfahren

Bei den parametrischen Verfahren zur Schätzung von Quantilen und Lower-Partial-Moments sind zwei Alternativen zu unterscheiden. Bei der ersten Variante werden Verteilungsannahmen getroffen, die Parameter der Verteilung geschätzt und anschliessend die Bestimmungsgleichungen für das Quantil und die Lower-Partial-Moments ausgewertet. Für die Quantilschätzung steht eine weitere Alternative zur Verfügung, die sogenannten Extremwertmodelle, bei denen nur die Enden einer empirischen Verteilung durch spezielle Verteilungen approximiert und die Parameter dieser Verteilungen geschätzt werden. Extremwertmodelle werden in dieser Arbeit nicht verwendet, im Sinne eines vollständigen Überblicks über parametrische Schätzverfahren wird die Grundidee aber erläutert.

### 7.4.1 Treffen von Verteilungsannahmen

Bei einer parametrischen Schätzung der Quantile und Lower-Partial-Moments verlagert sich das Problem auf die Schätzung der Parameter der unterstellten Verteilung und auf die Überprüfung der Verteilungshypothesen.

#### Quantilschätzung

Sei  $f(r, \hat{\theta})$  die geschätzte parametrische Verteilung mit geschätztem Parametervektor  $\hat{\theta}$ . Zur Bestimmung des  $p$ 100%-Quantils  $r^*(p)$  muss folgende Gleichung

$$F(r^*) = \int_{-\infty}^{r^*(p)} f(r, \hat{\theta}) dr = p \quad (7.24)$$

respektive  $F(r^*) - p = 0$  gelöst werden. Dies ist also nichts anderes als die Bestimmung der Nullstelle einer Funktion, was hier mit der Intervallhalbierungsmethode (vgl. Press et al. [95], S. 343 ff.) gelöst wird. Dabei werden jeweils die Werte der Verteilungsfunktion  $F$  mit Hilfe einer numerischen Integration berechnet.

### Quantilschätzung bei Normalverteilungsannahme

Wird eine Normalverteilung für die Beobachtungen unterstellt, so ergibt sich als Schätzung für das  $p$ 100%-Quantil in diesem Spezialfall ein ganz einfacher Ausdruck (vgl. Hartung [55], S. 147)

$$\hat{r}^*(p) = z^*(p) \hat{\sigma} + \hat{\mu}, \quad (7.25)$$

wobei  $z^*(p)$  das korrespondierende Quantil der Standardnormalverteilung sowie  $\hat{\mu}$  und  $\hat{\sigma}$  die geschätzten Parameter der Normalverteilung darstellen. Im vorliegenden Fall lässt sich zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$  ein asymptotisches Konfidenzintervall (vgl. Ridder [99])

$$\left[ \hat{r}^*(p) \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(z^*(p))^2}{2}} \right] \quad (7.26)$$

angeben. Das entsprechende Quantil  $z^*(p)$  der Standardnormalverteilung kann in einer Tabelle nachgeschlagen oder über numerische Integration berechnet werden. Am einfachsten und schnellsten für eine numerische Umsetzung ist jedoch eine dritte Möglichkeit, die darin besteht, das Quantil durch einen Quotienten von zwei Polynomen niedrigen Grades zu approximieren. Diese Methode ist als *Hastings-Approximation* bekannt (vgl. Hartung [55], S. 891). Für  $0 < p < 0.5$  gilt:

$$-z^*(p) \approx t - \frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2}{1 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3} \quad (7.27)$$

mit  $t = \sqrt{-2 \ln(p)}$ . Die Parameter sind konstant und nehmen die Werte  $a_0 = 2.515517$ ,  $a_1 = 0.802853$ ,  $a_2 = 0.010328$ ,  $b_1 = 1.432788$ ,  $b_2 = 0.189269$  und  $b_3 = 0.001308$  an.

Für andere Verteilungen als die Normalverteilung können Konfidenzintervalle nicht so leicht angegeben werden.

### Schätzung der Lower-Partial-Moments

Eine Schätzung der Lower Partial Moments erfolgt bei einer parametrisch geschätzten Dichtefunktion  $f(r, \hat{\theta})$  durch numerische Integration der Gleichung (7.9).

## 7.4.2 Extremwertmodelle und Quantilschätzung

Die Problematik bei der Quantilschätzung besteht oft darin, dass man sich in Bereichen der Stichprobe bewegt, in dem nur wenige Beobachtungen vorliegen.

Bei den Extremwertmodellen (vgl. Embrechts et al. [43], Danielsson und de Vries [34], Danielsson und de Vries [35], Danielsson und Hartmann [33], Emmer et al. [45], Lux [78] und Ridder [99]) konzentriert man sich zunächst auf die extremen Werte, das heisst die kleinste oder die grösste Beobachtung. Im folgenden soll eine Stichprobe von  $n$  unabhängigen Realisierungen  $r_1, \dots, r_n$  einer Verteilung  $F$  gegeben sein und  $M_n = \min\{r_1, \dots, r_n\}$  sei die minimale Beobachtung in dieser Stichprobe.

Lassen sich Konstanten  $c_n > 0$  und  $d_n \in \mathbb{R}$  finden, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(c_n r + d_n) = H(r),$$

so muss  $H$  eine der folgenden Verteilungen sein. Fréchet, Weibull oder Gumbel. Dies ist die Aussage des *Fisher-Tippet Theorems* (vgl. Embrechts et al. [43], S. 120 ff.). Man sagt auch, dass  $F$  im *Maximum Domain of Attraction (MDA)* von  $H$  liegt:  $F \in MDA(H)$ . Für die drei obigen Verteilungen existiert eine einparametrische Darstellung, die sogenannte verallgemeinerte Extremwertverteilung  $H_\xi$  mit Parameter  $\xi$  (vgl. Embrechts et al. [43], S. 152).

Ist  $F \in MDA(H_\xi)$  kann der Parameter  $\xi$  geschätzt werden (vgl. Embrechts et al. [43], S. 327 ff.) und ein Quantilschätzer abgeleitet werden (vgl. Embrechts et al. [43], S. 348 ff.).

Der besondere Vorteil der beschriebenen Methode liegt darin, dass Quantile ausserhalb des Datenbereichs geschätzt werden können, also das  $p100\%$ -Quantil mit  $p < 1/n$ , ohne dass ein Verteilungsmodell für die Daten vorgegeben werden muss.

## 7.5 Beispiel zu den vorgestellten Schätzverfahren

Abgerundet wird dieses Kapitel mit der Behandlung eines einfachen Beispiels, mit dem alle später verwendeten Verfahren zur Schätzung eines Quantils und eines bestimmten Lower-Partial-Moments demonstriert werden sollen. Ausgangspunkt ist eine Stichprobe von 1000 mit einem Zufallszahlengenerator erzeugten Zufallszahlen, die Realisierungen einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen darstellen. Werden Erwartungswert und Varianz dieser Stichprobe als arithmetisches Mittel beziehungsweise Stichprobenvarianz geschätzt, so ergeben sich  $\hat{\mu} = -0.0031$  und  $\hat{\sigma}^2 = 1.0622$ . Diese Werte stimmen zwar nicht mit den erwarteten Grössen exakt überein, was bei einer Stichprobe auch nicht anders zu erwarten ist, aber ein Kolmogorov-Smirnov-Test verwirft bei einem Signifikanzniveau von 5% die Normalverteilungshypothese nicht. Folgende Tabelle zeigt Schätzwerte für das 5%-Quantil und das Lower-Partial-Moment  $LPM_2(0)$  mit Zielrendite  $z = 0.0$  und  $k = 2$  bei unterschiedlichen Schätzmethoden. Das wahre 5%-Quantil der Standardnormalverteilung beträgt -1.6449, für  $LPM_2(0)$  ergibt sich der Wert 0.5.

Da die wahre Dichte eine Standardnormalverteilung ist, wird die parametrische Schätzung als Referenzgrösse verwendet, um damit die anderen Schätzverfahren zu

		5%-Quantil	$LPM_2(0)$
parametrisch		-1.6987	0.5336
nichtparametrisch	geordnete Stichprobe	-1.6740	0.5474
	Histogramm (80 Klassen)	-1.6787	0.5473
	Kerndichteschätzung ( $g = 200$ )	-1.7156	0.5699

Tabelle 7.2: Beispiel zu Quantil- und LPM-Schätzungen.

vergleichen. Ein leicht negatives arithmetisches Mittel und eine leicht über Eins liegende Varianz der Stichprobe führen dazu, dass sich ein kleineres Quantil und eine grössere untere Semivarianz für die vorliegende Stichprobe als bei einer Standardnormalverteilung ergeben. Die Resultate der parametrischen Schätzung folgen dieser theoretischen Überlegung. Vergleicht man die nichtparametrischen Schätzungen mit dem parametrischen Schätzwert, so weichen diese jeweils um circa ein Prozent vom letzteren ab.

Schliesslich lassen sich noch Konfidenzintervalle angeben. Um ein Konfidenzintervall im Falle der Quantilschätzung bei einer geordneten Stichprobe angeben zu können, müssen zunächst die Werte für  $k$  und  $l$  gefunden werden. Diese ergeben sich bei einem Stichprobenumfang  $n = 1000$  und  $p = 0.05$  zu  $k = 36$  und  $l = 64$ , was einem Konfidenzniveau von 95.2% entspricht. Die Intervallgrenzen werden durch den 36-ten und den 64-ten Beobachtungswert in der geordneten Stichprobe bestimmt, was schliesslich auf das approximative Konfidenzintervall  $[-1.8116, -1.556]$  führt, bei einem geschätzten Quantil  $\hat{r}^*(0.05) = -1.6740$ . Für die parametrische Quantilsschätzung lässt sich ebenfalls auf einfache Weise ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 95% angeben:  $[-1.7967, -1.6007]$  bei einem geschätzten Quantil  $\hat{r}^*(0.05) = -1.6987$ .





## Kapitel 8

# Abschätzung des Modellrisikos bei Value-at-Risk-Schätzungen

Der Parameter, der das Modellrisiko beschreibt, ist zwar bekannt, aber der Wert dieses Parameters ist unbekannt und kann auch nicht direkt geschätzt werden. Aus diesem Grund ist man hier auf indirekte Hinweise oder Kriterien angewiesen. Einen ersten solchen Hinweis auf bestehende Modellrisiken liefern etwa empirische Untersuchungen wie sie in Kapitel 5 vorgestellt wurden. Eine bessere Approximation einer Modellverteilung an eine empirische Renditeverteilung ist dabei ein wichtiges Indiz für ein geringeres Modellrisiko.

Es lassen sich allerdings weitere Kriterien zur Abschätzung von Modellrisiken angeben. Solche Kriterien werden im folgenden vorgestellt und auf ihre Tauglichkeit hin untersucht. Das sogenannte Backtesting-Verfahren nimmt dabei eine wichtige Rolle ein. Anschliessend wird das Konzept des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht zur Identifikation genauer beziehungsweise ungenauer Modelle erläutert.

Die im folgenden dargestellten Kriterien sind nicht auf die Anwendung bei Value-at-Risk-Schätzungen beschränkt, sondern lassen sich teilweise auf andere Risikomasse übertragen. Aber all diese Kriterien – dies kann nicht deutlich genug betont werden – liefern nur indirekte Hinweise auf das Modellrisiko. Aus einem Wert eines dieser Kriterien kann nicht direkt auf ein hohes oder ein niedriges Modellrisiko geschlossen werden, insbesondere dann nicht, wenn nur ein einzelnes Modell analysiert wird. Erst aus dem Vergleich der Werte eines bestimmten Kriteriums, berechnet für verschiedene Modelle, lassen sich Aussagen über die Modellrisiken der einzelnen Modelle relativ zueinander ableiten.

## 8.1 Ex-ante-Vergleich verschiedener Modelle

Bei Ex-ante-Vergleichen verschiedener Modelle werden Value-at-Risk-Schätzungen direkt miteinander verglichen. Bei Ex-post-Kriterien werden dagegen die Value-at-Risk-Schätzungen zusätzlich mit tatsächlich eingetretenen Marktveränderungen verglichen.

Mit Ex-ante-Massen kann das Modellrisiko eines bestimmten Modells nicht abgeschätzt werden. Vielmehr lassen sich anhand derartiger Masse Fragen beantworten, welches Modell die konservativsten Schätzungen liefert oder wie stark sich die Schätzungen in verschiedenen Modellen voneinander unterscheiden. Bei diesen Vergleichen geht man davon aus, dass die Renditeverteilungen auf dieselbe Art generiert werden, also zum Beispiel mittels Monte-Carlo-Simulationen, und dass derselbe Schätzer für die Schätzung des Value-at-Risk respektive des Quantils verwendet wird, damit sichergestellt ist, dass nur Unterschiede in den Modellen zu Unterschieden in den Value-at-Risk-Schätzungen führen.

Innerhalb eines bestimmten Modells können auch verschiedene Quantilschätzer miteinander verglichen werden.

### 8.1.1 Mittlere relative Abweichung

In welchem Umfang verschiedene Modelle (oder verschiedene Quantilschätzer) vergleichbare Value-at-Risk-Schätzungen liefern, kann durch Berechnung der mittleren relativen Abweichung (Mean Relative Bias, MRB) untersucht werden (vgl. Engel und Gazycki [46], S. 22 f., Hendricks [56], S. 46 f.).

Dazu wird das arithmetische Mittel der relativen Abweichungen einer Value-at-Risk-Schätzung in einem bestimmten Modell vom Mittelwert der Value-at-Risk-Schätzungen aller Modelle über eine bestimmte Beobachtungsperiode bestimmt. Die Beobachtungsperiode umfasst  $t = 1, \dots, T$  Beobachtungen, das heisst Value-at-Risk-Schätzungen. Die mittlere relative Abweichung eines Modells  $i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) wird dann bestimmt durch

$$MRB_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{VaR_{i,t} - \overline{VaR}_t}{\overline{VaR}_t}, \quad (8.1)$$

wobei  $VaR_{i,t}$  den (geschätzten) Value-at-Risk im Modell  $i$  zum Zeitpunkt  $t$  bezeichnet und das arithmetische Mittel  $\overline{VaR}_t$  über alle Modelle gebildet wird:

$$\overline{VaR}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N VaR_{i,t}. \quad (8.2)$$

### 8.1.2 Mittlere quadratische relative Abweichung

Um systematische Abweichungen eines Modells vom Durchschnitt aller Modelle zu erfassen und um die Schwankungshöhe der Schätzungen eines einzelnen Modells zu bestimmen, wird die Wurzel aus den mittleren quadratischen relativen Abweichungen (Root Mean Squared Relative Bias, RMSRB) berechnet (vgl. Engel und Gizycki [46], S. 23 f., Hendricks [56], S. 47 f.).

Der mittlere quadratische relative Abweichung eines Modells  $i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) über verschiedene Zeitpunkte  $t$  wird durch

$$RMSRB_i = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left( \frac{VaR_{i,t} - \overline{VaR}_t}{\overline{VaR}_t} \right)^2} \quad (8.3)$$

bestimmt. Diese Grösse misst den Grad der Variabilität eines spezifischen Modells um einen über verschiedene Modelle gebildeten mittleren Value-at-Risk.

## 8.2 Ex-post-Überprüfung verschiedener Modelle durch Backtesting

Kriterien, die eine Abschätzung des Modellrisikos zulassen, beruhen auf dem als *Backtesting* bezeichneten Verfahren. In diesem Abschnitt wird dieses Verfahren vorgestellt und es werden verschiedene Kriterien zur Abschätzung des Modellrisikos diskutiert.

### 8.2.1 Grundidee des Backtesting

Wie der Begriff *Backtesting* vermuten lässt, werden bei diesem Verfahren Ex-post-Vergleiche angestellt und zwar zwischen den geschätzten, auf einen zukünftigen Zeitraum bezogenen Value-at-Risk-Grössen und den nach Ablauf dieses Zeitraums tatsächlich eingetretenen Renditen respektive Verlusten. So wird für jeden Handelstag einer bestimmten Periode ein Value-at-Risk geschätzt und nach Ablauf der Halteperiode mit den tatsächlich eingetretenen Kursänderungen verglichen: entweder sind die Verluste grösser als der Value-at-Risk oder der Value-at-Risk wird durch die eingetretenen Verluste unterschritten.

Unter *Überschreitung* oder *Ausnahme* wird der Fall verstanden, wenn ein realisierter Verlust den geschätzten Value-at-Risk überschritten hat. Der Begriff *Überschreitung* ist dem Begriff *Ausnahme* vorzuziehen, da Überschreitungen des Value-at-Risk in gewissem Umfang, nämlich mit der bei der Value-at-Risk-Schätzung festgelegten Restwahrscheinlichkeit, vorkommen dürfen. Daher wird im folgenden konsequent von Überschreitungen gesprochen, wenn auch der Basler Ausschuss oder die Eidgenössische Bankenkommission den Begriff Ausnahme verwenden.

### 8.2.2 Verlustfunktion

Mit Hilfe des Konzeptes der Verlustfunktion kann das Verfahren des Backtesting, wie es vom Basler Ausschuss vorgeschlagen ist, und Alternativen dazu in einen gemeinsamen Rahmen gestellt werden. Das Konzept der Verlustfunktion wurde von Lopez entwickelt (vgl. Engel und Gizycki [46], S. 26 ff.). Danach wird auf Basis eines Modells  $i$  ein Value-at-Risk  $VaR_{i,t}$  zum Zeitpunkt  $t$  geschätzt. Dieser Schätzwert wird dann mit einem realisierten Verlust (Gewinn) am Ende der Halteperiode  $t + 1$  der Value-at-Risk-Schätzung verglichen. Der Verlust oder Gewinn ist dabei definiert als  $V_{t+1} \equiv -W_0 r_{t+1} = -W_0 \ln \frac{P_{t+1}}{P_t}$  und stellt für den Fall eines Verlustes eine positive Grösse dar.  $r_{t+1}$  ist die zum Zeitpunkt  $t + 1$  tatsächlich eingetretene Rendite. Je nachdem, ob ein tatsächlich realisierter Verlust grösser oder kleiner als die Value-at-Risk-Schätzung ist, ergeben sich unterschiedliche Konsequenzen. Verluste kleiner als der Value-at-Risk sind abgesichert, Verluste grösser als der Value-at-Risk sind nicht gedeckt.

Diese Zusammenhänge werden nun in einer sogenannten *Verlustfunktion*  $L_{i,t+1}$  für ein bestimmtes Modell  $i$  zusammengefasst:

$$L_{i,t+1} = \begin{cases} f(V_{t+1}, VaR_{i,t}) & \text{falls } V_{t+1} > VaR_{i,t} \\ g(V_{t+1}, VaR_{i,t}) & \text{falls } V_{t+1} \leq VaR_{i,t} \end{cases} \quad (8.4)$$

Die Funktionen  $f$  und  $g$  erfüllen die Bedingung  $f(\cdot) \geq g(\cdot)$  und sollen die verschiedenen Konsequenzen berücksichtigen, je nachdem ob eine Überschreitung stattfindet oder nicht.

Für die Form von  $f$  und  $g$  werden zwei Ansätze vorgeschlagen, die nachfolgend diskutiert werden.

#### Binäre Verlustfunktion

Wird  $f(x) \equiv 1$  und  $g(x) \equiv 0 \forall x$  gewählt, spricht man von *binärer Verlustfunktion*. Die Höhe der Überschreitung spielt bei diesem Ansatz keine Rolle (vgl. Engel und Gizycki [46], S. 26 ff.).

Die binäre Verlustfunktion schreibt sich dann als

$$L_{i,t+1} = \begin{cases} 1 & \text{falls } V_{t+1} > VaR_{i,t} \\ 0 & \text{falls } V_{t+1} \leq VaR_{i,t} \end{cases} \quad (8.5)$$

Wird die binäre Verlustfunktion auf die einzelnen Handelstage einer bestimmten Periode angewendet, so wird gezählt, wie oft ein Verlust eingetreten ist, der höher als die Value-at-Risk-Schätzung war. Damit wird die Anzahl Überschreitungen in dieser Periode gemessen. Die in einem spezifischen Modell ex-post bestimmten Überschreitungszahlen lassen sich mit den theoretisch erwarteten Überschreitungen vergleichen, und können zur Überprüfung dienen, ob die Value-at-Risk-Schätzungen auf Grundlage eines genauen Modells bestimmt wurden.

Ein genaues Modell sollte im Durchschnitt zu genau  $p\%$  Überschreitungen des Value-at-Risk führen. Die Zufallsvariable, die beschreibt, ob eine Kursänderung eine Überschreitung darstellt oder nicht, ist binomialverteilt. Die einzelnen Überschreitungen sind dabei als unabhängig angenommen. Die Nullhypothese  $H_0$  lautet nun: eine Überschreitung des Value-at-Risk-Schätzwertes zum Konfidenzniveau  $p\%$  tritt genau mit der Wahrscheinlichkeit  $p\%$  auf. Für die Alternativhypothese kann diese Wahrscheinlichkeit aus der Stichprobe als relative Häufigkeit der Anzahl beobachteter Überschreitungen  $x$  und dem Stichprobenumfang  $T$  geschätzt werden. Die Modellgüte kann dann mit einem Likelihood-Ratio-Test überprüft werden, wobei der Likelihood-Ratio (LR) durch

$$\lambda = \frac{(1-p)^{T-x} p^x}{(1-\frac{x}{T})^{T-x} (\frac{x}{T})^x} \quad (8.6)$$

gegeben ist (vgl. Kupiec [76], S. 79 f.). Die Grösse  $-2 \ln \lambda$  ist unter  $H_0$  asymptotisch  $\chi^2$ -verteilt mit einem Freiheitsgrad. Nach Festlegung eines Signifikanzniveaus  $\alpha$  kann der Ablehnungsbereich bestimmt werden. Dies ist in Abbildung 8.1 für ein Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$ , ein Konfidenzniveau 95% der Value-at-Risk-Schätzung und  $T = 250$  dargestellt, wobei  $\chi^2_{1,0.95} = 3.841$ . Dieses Vorgehen ergibt die Tabellen 8.1

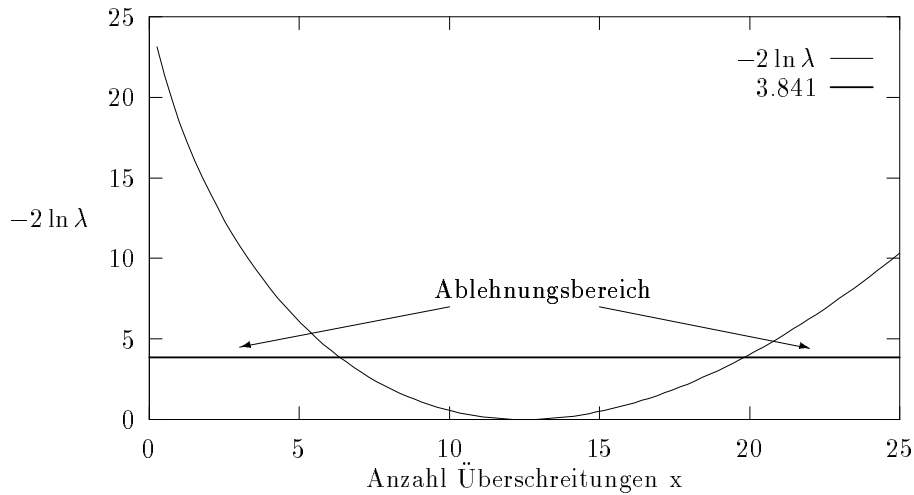


Abbildung 8.1: Ablehnungsbereich beim LR-Test bei Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$ , Konfidenzniveau 95% und  $T = 250$ .

und 8.2, in denen für verschiedene Signifikanzniveaus und Stichprobenumfänge  $T$  bei unterschiedlichen Restwahrscheinlichkeiten der Value-at-Risk-Schätzung die Nicht-ablehnungsbereiche von  $H_0$  eingetragen sind.

$p$	T=250	T=500
0.01	$0 < x < 7$	$1 < x < 10$
0.05	$6 < x < 20$	$16 < x < 36$

Tabelle 8.1: Nichtablehnungsbereich bei Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$ .

$p$	T=250	T=500
0.01	$0 < x < 8$	$0 < x < 12$
0.05	$5 < x < 22$	$13 < x < 39$

Tabelle 8.2: Nichtablehnungsbereich bei Signifikanzniveau  $\alpha = 1\%$ .

Kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden, wird im folgenden ein Modell als genau oder exakt bezeichnet. „Genau“ oder „exakt“ ist damit im folgenden immer im statistischen Sinne der Nichtablehnung zu verstehen.

### Quadratische Verlustfunktion

Um die Höhe einer Überschreitung des Value-at-Risk durch einen tatsächlich eingetretenen Verlust zu berücksichtigen, wird in der Literatur ein weiterer Ansatz diskutiert, eine sogenannte quadratische Verlustfunktion in der Form (vgl. Engel und Gizycki [46], S. 30 f.)

$$L_{i,t+1} = \begin{cases} 1 + \left( \frac{V_{t+1}}{W_0} - \frac{VaR_{i,t}}{W_0} \right)^2 & \text{falls } V_{t+1} > VaR_{i,t} \\ 0 & \text{falls } V_{t+1} \leq VaR_{i,t} \end{cases} \quad (8.7)$$

Die Grösse  $\left( \frac{V_{t+1}}{W_0} - \frac{VaR_{i,t}}{W_0} \right)^2$  ist die quadratische Höhe der Überschreitung des Value-at-Risk-Schätzwertes, gegeben eine Überschreitung ist eingetreten. Hierbei wird also die Überschreitungshöhe im Unterschied zur binären Verlustfunktion mitberücksichtigt und zwar umso stärker je höher die Überschreitung ist. Es ergeben sich bei diesem Ansatz aber interpretatorische Schwierigkeiten. Der Value-at-Risk stellt eine wertmässige Grösse dar, beispielsweise in Schweizer Franken, und ist daher leicht zu interpretieren. Diese leichte Interpretierbarkeit geht bei der Betrachtung quadratischer Überschreitungen verloren.

### 8.2.3 Multiplikator zur Erreichung von genau $p$ Prozent Überschreitungen

Für eine aus dem Backtesting gegebene Stichprobe von Value-at-Risk-Schätzungen und realisierten Verlusten und eine gegebene Restwahrscheinlichkeit  $p$  der Value-at-

Risk-Schätzung lässt sich derjenige *konstante* Multiplikationsfaktor bestimmen, mit dem alle Value-at-Risk-Schätzungen der Stichprobe zu multiplizieren sind, um zu genau  $p\%$  Überschreitungen zu gelangen (vgl. Engel und Gizycki [46], S. 32 f., Hendricks [56], S. 50 f.).

Durch diesen Ansatz versucht man, aus einem eventuell ungenauen Modell ein genaues Modell zu machen. Ergibt ein Modell eine grössere Häufigkeit von Überschreitungen als  $p\%$ , folgt ein Multiplikationsfaktor grösser Eins. Ein Faktor kleiner Eins ergibt sich, wenn auf Grundlage der Modellschätzungen weniger als  $p\%$  Überschreitungen auftreten. Bei der praktischen Bestimmung des Multiplikationsfaktors werden allerdings implizit nur diejenigen Über- oder Unterschreitungen des Value-at-Risk berücksichtigt, die nur wenig vom Value-at-Risk abweichen. Grosse Verluste werden nicht betrachtet, ebensowenig wie die Verteilung der Verluste, die den Value-at-Risk übersteigen, in die Überlegungen einbezogen wird.

#### 8.2.4 Mittlerer ungedeckter Verlust im Verhältnis zum Value-at-Risk

Die mittlere Höhe der Verluste, die nicht durch den Value-at-Risk gedeckt werden, kann durch folgendes Vorgehen berücksichtigt werden. Falls eine Überschreitung des Value-at-Risk-Schätzwertes auftritt, wird der Multiplikator bestimmt, mit dem die Value-at-Risk-Schätzung nachträglich multipliziert werden muss, um den aufgetretenen Verlust decken zu können. Anschliessend wird das arithmetische Mittel der Multiplikationsfaktoren bestimmt (vgl. Engel und Gizycki [46], S. 33 f., Hendricks [56], S. 51 f.). Liegt dieses arithmetische Mittel nahe bei Eins, wird auf ein genaues Modell geschlossen.

Treten bei zwei verschiedenen Modellen zu gleichen Zeitpunkten Überschreitungen auf, so läuft dieses Kriterium auf einen direkten Vergleich von Value-at-Risk-Schätzungen hinaus, da Verluste und nicht Überschreitungshöhen betrachtet werden.

#### 8.2.5 Maximaler Verlust im Verhältnis zum Value-at-Risk

Ein weiteres einfaches Kriterium zur Überprüfung des Modellrisikos besteht darin, bei einer gegebenen Stichprobe von Value-at-Risk-Schätzungen zu Beginn einer Halteperiode und von zugehörigen tatsächlichen Verlusten am Ende dieser Halteperiode das Verhältnis zwischen dem grössten aufgetretenen Verlust und dem zugehörigen Value-at-Risk-Schätzwert zu bestimmen (vgl. Engel und Gizycki [46], S. 35 f.). Es wird angenommen, dass kleinere Verhältnisse für ein genaues Modell sprechen.

Ein Vergleich dieser im Nachhinein berechneten Grösse mit einer theoretisch erwarteten Grösse ist aber nur für Modelle möglich, welche Verteilungen implizieren, die bei einer bestimmten Verlustschwelle gestutzt sind. Das heisst die Wahrscheinlichkeit für

einen Verlust über dieser Schwelle muss Null sein. Für die in Kapitel 4 vorgestellten Modelle ist dies nicht der Fall.

### 8.2.6 Mittlere erwartete und mittlere tatsächliche Überschreitungshöhe

Der Value-at-Risk charakterisiert nur einen einzigen Punkt einer Verlust- oder Renditeverteilung. Die Verwendung von Modellen für diese Verteilungen erlaubt es aber, zusätzlich weitere, in den Modellen erwartete Grössen oder Kennzahlen der Verteilung, mit den tatsächlich realisierten Werten zu vergleichen und so zur Modellvalidierung einzusetzen.

Was der Value-at-Risk-Ansatz nicht berücksichtigt, ist die Höhe einer potentiellen Überschreitung des Value-at-Risk-Wertes. So sind beispielsweise Situationen denkbar, in denen zwei verschiedene Modelle für die Verteilungen der Renditen oder Verluste zu nahezu identischen Value-at-Risk-Schätzungen führen, die Verteilungen der Verluste oder Renditen jenseits des Value-at-Risk aber sehr verschieden sind (vgl. zum Beispiel Abbildung 6.2). Damit sind auch die Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Verluste, die den Value-at-Risk übersteigen, verschieden.

Wünschenswert wäre daher ein Kriterium, welches die Form der Verteilung vor allem in den Enden berücksichtigt. Die Überschreitungshöhe stellt solch ein Kriterium dar. Die in einem bestimmten Modell erwarteten Überschreitungshöhen können dann beim Backtesting-Verfahren mit tatsächlich eingetretenen Überschreitungshöhen verglichen werden.

Dazu wird folgendermassen vorgegangen: zum Zeitpunkt  $t$ , dem Beginn der Halteperiode, wird ein Value-at-Risk geschätzt und eine erwartete Überschreitungshöhe bestimmt. Diese letztere Grösse gibt an, um welchen Betrag der Value-at-Risk überschritten wird, gegeben eine Überschreitung tritt auf. Dies ist eine erwartete Grösse und hängt vom gewählten Modell ab. Am Ende der Halteperiode, zum Zeitpunkt  $t+1$ , wird nun ein Backtesting durchgeführt. Es wird untersucht, wie hoch der eingetretene tatsächliche Verlust ist, ob eine Überschreitung des Value-at-Risk-Schätzwertes eingetreten ist, und wenn ja, um welchen Betrag der Value-at-Risk-Schätzwert überschritten wurde.

Dieses Vorgehen wird nun für alle  $T$  Handelstage einer bestimmten Periode, beispielsweise eines Jahres, wiederholt. Man erhält so  $T$  Value-at-Risk-Schätzungen und  $T$  erwartete Überschreitungshöhen. Das bei der Value-at-Risk-Schätzung vorgegebene Konfidenzniveau wird dann mit der Anzahl tatsächlich eingetretener Überschreitungen verglichen (vgl. Abschnitt 8.2.2). Zusätzlich wird aus den  $T$  erwarteten Überschreitungshöhen das arithmetische Mittel errechnet und mit dem arithmetischen Mittel der tatsächlich eingetretenen Überschreitungshöhen verglichen. Als Überschreitungshöhe kann nun eine absolute und eine relative Grösse betrachtet werden.



### Absolute Überschreitungshöhen

Die absolute Überschreitungshöhe  $UH_{i,t+1}$  im Modell  $i$  zum Zeitpunkt  $t + 1$  des Backtesting-Verfahrens ist definiert durch

$$UH_{i,t+1} = \begin{cases} V_{t+1} - VaR_{i,t} & \text{falls } V_{t+1} > VaR_{i,t} \\ 0 & \text{falls } V_{t+1} \leq VaR_{i,t} \end{cases} \quad (8.8)$$

Dies stellt im Prinzip wieder eine bestimmte Wahl für die in Abschnitt 8.2.2 diskutierten Verlustfunktionen dar.

Bei einem Stichprobenumfang von  $T$  Value-at-Risk-Schätzungen, sei die Anzahl Überschreitungen im Modell  $i$  mit  $x_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) bezeichnet. Damit lässt sich die mittlere tatsächliche Überschreitungshöhe  $\overline{UH}_i$  des Modells  $i$  über

$$\overline{UH}_i = \left( \sum_{t=1}^T UH_{i,t+1} \right) \frac{1}{x_i} \quad (8.9)$$

bestimmen. Diese ex-post bestimmte Grösse kann mit einer in einem spezifischen Modell berechneten Grösse verglichen werden, nämlich dem arithmetischen Mittel der erwarteten Überschreitungshöhen. Die erwartete Überschreitungshöhe  $EUH_{i,t}$  im Modell  $i$  ergibt sich als Differenz zwischen dem bedingten Erwartungswert der Verluste, gegeben eine Überschreitung des Value-at-Risk tritt ein, und dem Value-at-Risk selbst (vgl. J. P. Morgan [65], S. 220 ff.):

$$EUH_{i,t} = E[V_{i,t} | V_{i,t} > VaR_{i,t}] - VaR_{i,t} \quad (8.10)$$

Die Verluste  $V$  sind nun zusätzlich mit  $i$  indexiert, da es sich nicht um realisierte, sondern um in einem gegebenen Modell  $i$  mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit verteilte hypothetische Verluste handelt.

Der bedingte Erwartungswert der Verlustverteilung lässt sich über

$$E[V_{i,t} | V_{i,t} > VaR_{i,t}] = \frac{1}{p} \int_{VaR_{i,t}}^{\infty} V_{i,t} dF(V_{i,t}) \quad (8.11)$$

bestimmen oder bei Verwendung einer Renditeverteilung über

$$E[r_{i,t} | r_{i,t} < r_{i,t}^*] = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{r_{i,t}^*} r_{i,t} dF(r_{i,t}) \quad (8.12)$$

auswerten. Das Konfidenzniveau der Value-at-Risk-Schätzung ist dabei mit  $p$  bezeichnet,  $r_{i,t}^*$  stellt das zum Value-at-Risk  $VaR_{i,t}$  gehörende Quantil der Verteilung der Renditen  $r_{i,t}$  im Modell  $i$  zum Zeitpunkt  $t$  dar. Selbstverständlich sind für  $VaR_{i,t}$  oder  $r_{i,t}^*$  die jeweiligen im Modell  $i$  bestimmten Schätzwerte einzusetzen.

Schliesslich lässt sich die mittlere erwartete Überschreitungshöhe  $\overline{EUH}_i$  berechnen:

$$\overline{EUH}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T EUH_{i,t}. \quad (8.13)$$

Durch den Vergleich von mittlerer erwarteter und mittlerer tatsächlicher Überschreitungshöhe, lässt sich das Verhalten der Modellverteilungen in deren Enden berücksichtigen, zumindest in Form des ersten (bedingten) Moments. Je besser die erwartete Überschreitungshöhe mit der tatsächlichen Überschreitungshöhe übereinstimmt, desto geringer sollte das Modellrisiko des verwendeten Modells sein.

### Relative Überschreitungshöhen

Bisher wurden die Überschreitungshöhen absolut betrachtet, sie lassen sich aber auch in Beziehung zum jeweiligen Value-at-Risk setzen. Die relative tatsächliche Überschreitungshöhe  $RUH_{i,t+1}$  ist dann gegeben durch

$$RUH_{i,t+1} = \begin{cases} \frac{V_{t+1} - VaR_{i,t}}{VaR_{i,t}} & \text{falls } V_{t+1} > VaR_{i,t} \\ 0 & \text{falls } V_{t+1} \leq VaR_{i,t} \end{cases}, \quad (8.14)$$

die relative erwartete Überschreitungshöhe durch

$$REUH_{i,t} = \frac{E[V_{i,t} | V_{i,t} > VaR_{i,t}] - VaR_{i,t}}{VaR_{i,t}}. \quad (8.15)$$

Die jeweiligen arithmetischen Mittel ergeben sich aus

$$\overline{RUH}_i = \left( \sum_{t=1}^T RUH_{i,t+1} \right) \frac{1}{x_i} \quad (8.16)$$

und

$$\overline{REUH}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T REUH_{i,t}. \quad (8.17)$$

Ein Mass, welches sowohl die Anzahl  $x_i$  der Überschreitungen berücksichtigt als auch die Höhe einer solchen Überschreitung, kann als gewichtete Summe von Überschreitungshäufigkeit und tatsächlicher mittlerer relativer Überschreitungshöhe konstruiert werden:

$$KOMB_i = w \frac{x_i}{T} + (1 - w) \overline{RUH}_i. \quad (8.18)$$

Dabei bezeichnet  $w$  den Gewichtungssparameter, wobei  $0 \leq w \leq 1$  gilt. Diese Grösse wird aus den am Ende einer Halteperiode beobachteten Verlusten und Überschreitungen bestimmt. Dieser Grösse steht die entsprechende im Modell  $i$  erwartete Grösse

$$EKOMB_i = w p + (1 - w) \overline{REUH}_i \quad (8.19)$$

gegenüber. Sie wird aus den am Anfang einer Halteperiode berechneten Werten bestimmt.

### 8.2.7 Korrelation zwischen Verlusten oder Gewinnen und den Value-at-Risk-Schätzungen

Steigt die Varianz der Gewinn- und Verlustverteilung respektive einer Renditeverteilung im Zeitablauf aufgrund einer zunehmenden Volatilität der Märkte an, so werden extreme Ereignisse wahrscheinlicher. Damit wird die Frage aufgeworfen, ob die einzelnen Modelle und die auf dieser Grundlage geschätzten Value-at-Risk-Werte dieser Tendenz folgen können.

In den Modellen der Geometrischen Brownschen Bewegung, des Sprung-Diffusions-Prozesses und der hyperbolischen Verteilung werden konstante Varianzen der Renditeverteilungen angenommen. Durch tägliche Neuschätzung der Modellparameter sollten ansteigende Varianzen zumindest zeitverzögert in die Schätzungen einfließen.

Ob dies in ausreichendem Masse stattfindet, lässt sich durch eine Schätzung der zeitlichen Korrelation zwischen Value-at-Risk-Schätzungen und absoluten Werten der eingetretenen Gewinne oder Verluste beziehungsweise Renditen analysieren (vgl. Engel und Gizecki [46], S. 37 ff., Hendricks [56], S. 43 f.). Dazu wird der Rang-Korrelationskoeffizient nach Kendall geschätzt (vgl. Hartung [55], S. 81 ff.). Dieses Vorgehen erfordert keine Kenntnis über die Verteilung der Renditen (Gewinne oder Verluste) und der Value-at-Risk-Schätzungen.

Wird mit  $V_t$  die Zeitreihe der absoluten Gewinne und Verluste und mit  $Var_t$  die Zeitreihe der Value-at-Risk-Schätzungen bezeichnet ( $t = 1, \dots, T$ ), so wird jedem Wert  $V_s$  und  $Var_s$  ( $1 \leq s \leq T$ ) ein Rang zugeordnet, welcher die Stellung des Wertes bezüglich seiner Grösse in der gesamten Reihe angibt. Sei mit  $X_s$  der Rang von  $V_s$  und mit  $Y_s$  derjenige von  $Var_s$  bezeichnet. Für die Schätzung des Korrelationskoeffizienten  $\tau$  nach Kendall ist nun nur die relative Ordnung der Ränge der beiden Zeitreihen zu bestimmen, dass heisst die Werte der beiden Zeitreihen müssen nicht sortiert werden (für Details siehe Press et al. [95], S. 642 ff.).

Unter der Nullhypothese, dass zwischen den Werten der beiden Zeitreihen keine Korrelation besteht, ist der Korrelationskoeffizient  $\tau$  asymptotisch normalverteilt mit Erwartungswert Null und Varianz

$$var[\tau] = \frac{4T + 10}{9T(T - 1)}.$$

Es kann in diesem Zusammenhang erwartet werden, dass die Modelle Phasen mit ansteigender Volatilität noch folgen können, abnehmende Volatilitäten aber nur unzureichend berücksichtigt werden. Der Grund ist darin zu sehen, dass Renditen, die für eine hohe Volatilität verantwortlich waren, noch über einen gewissen Zeitraum in der Stichprobe historischer Renditen, die etwa zur Parameterschätzung verwendet werden, vorhanden sind.

### 8.2.8 Eingesetzte Kriterien

In den in den folgenden Kapiteln durchzuführenden empirischen Studien werden verschiedene der vorgestellten Kriterien zur Abschätzung des Modellrisikos angewendet.

Für einen Vergleich verschiedener Quantilschätzer und für eine erste Gegenüberstellung der verschiedenen Modelle werden die mittleren relativen Abweichungen (MRB) und die Wurzel der mittleren quadratischen Abweichungen (RMSRB) bestimmt. Diese Grössen sind leicht anzuwenden, beruhen aber auf einer ex-ante Betrachtung.

Als Masse, die die Idee des Backtesting ausnutzen, werden die binäre Verlustfunktion, die tatsächliche und erwartete relative Überschreitungshöhe sowie die Korrelationen zwischen absoluten Renditen und Value-at-Risk-Schätzungen angewandt. Auf die quadratische Verlustfunktion wird wegen der mangelnden Interpretierbarkeit verzichtet.

Der Korrelationskoeffizient nach Kendall wird mit Hilfe einer Routine von Numerical Recipes (vgl. Press et al. [95], S. 642 ff.) geschätzt, die als zusätzliche Informationen die Anzahl Standardabweichungen von Null und einen sogenannten *p-Value* zurückgibt. Der *p-Value* gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Testgrösse (hier eines zweiseitigen Tests) einen grösseren Wert annimmt als berechnet wurde. Sehr kleine *p-Values* deuten auf eine Ablehnung der Nullhypothese hin. Die Nullhypothese besteht im vorliegenden Fall aus der Hypothese unkorrelierter Zeitreihen.

Alle übrigen Kriterien, also der Multiplikator zur Erreichung von genau *p* Prozent Überschreitungen, der mittlere ungedeckte Verlust im Verhältnis zum Value-at-Risk und der maximale Verlust im Verhältnis zum Value-at-Risk finden keine Anwendung.

## 8.3 Das Ampelkonzept des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht

Auch bei den Auflagen zum Backtesting-Verfahren orientiert sich die Eidgenössische Bankenkommission am Basler Ausschuss für Bankenaufsicht. Je nach Ausgang des Backtestings wird festgelegt, ob der Multiplikationsfaktor, mit dem die Value-at-Risk-Schätzungen zu multiplizieren sind um zur Eigenkapitalunterlegung zu gelangen, allenfalls erhöht werden muss. Dazu hat der Basler Ausschuss das sogenannte *Ampelkonzept* entwickelt. Als Kriterium für die Identifikation von genauen und ungenauen Modellen und damit für die Gestaltung des Multiplikationsfaktors wird die Anzahl Überschreitungen verwendet, also auf das Konzept der binären Verlustfunktion zurückgegriffen (vgl. Basle Committee on Banking Supervision [10], Eidgenössische Bankenkommission [42]).

Die Rückvergleiche müssen auf einer Stichprobe von 250 historischen Beobachtungen durchgeführt werden. Sehen die Richtlinien für die Value-at-Risk-Schätzungen als

Grundlage für die Eigenkapitalunterlegung eine Halteperiode von zehn Tagen vor, so müssen nun mit eintägiger Halteperiode geschätzte Value-at-Risks herangezogen werden, jeweils bei einem Konfidenzniveau von 99% (vgl. Basle Committee on Banking Supervision [10], S. 2 ff., Eidgenössische Bankenkommision [42], S. 27 ff.). Hier handelt es sich um eine schwer verständliche Regelung. Aufgrund der Backtesting-Resultate, die für eintägige Halteperioden erzielt werden, werden Aussagen über eine mögliche Erhöhung des Multiplikationsfaktors bei zehntägiger Halteperiode abgeleitet. Die statistischen Eigenschaften von Tages- und Zehntagesrenditen sind aber in der Regel deutlich voneinander verschieden (vgl. Kapitel 5).

Mit dem Ampelkonzept wird festgelegt, ob und um wieviel der Multiplikationsfaktor erhöht werden soll. Diese Erhöhung richtet sich nach der Anzahl Überschreitungen der Value-at-Risk-Schätzungen (vgl. Basle Committee on Banking Supervision [10], S. 5 ff., Eidgenössische Bankenkommision [42], S. 28 f.). Tabelle 8.3 gibt die detaillierten Bedingungen wieder. In der grünen Zone wird davon ausgegangen, dass ein

Zone	Anzahl Überschreitungen	Multiplikationsfaktor
grün	0 bis 4	3.00
gelb	5	3.40
	6	3.50
	7	3.65
	8	3.75
	9	3.85
rot	10 und mehr	4.00

Tabelle 8.3: Festlegung des Multiplikators nach dem Ampelkonzept.

Modell genau ist. Konsequenzen sind daher nicht notwendig. Die Interpretation der gelben Zone ist nicht ganz klar. Eine in diese Zone fallende Anzahl von Überschreitungen kann entweder durch ein ungenaues aber auch durchaus durch ein genaues Modell verursacht werden. Zur „Sicherheit“ wird verlangt, dass der Multiplikationsfaktor erhöht wird, und zwar umso stärker je grösser die Anzahl Überschreitungen ist. In der roten Zone wird auf jeden Fall angenommen, dass ein ungenaues Modell vorliegt. Eine Erhöhung des Multiplikators auf den Wert Vier ist die Folge.

Für die Festlegung der Zonen sind statistische Überlegungen zu den Fehlern 1. und 2. Art verantwortlich. Ausgangspunkt dieser Überlegung ist, dass der Value-at-Risk bei einem Konfidenzniveau von 99% geschätzt wird, dass heisst bei einer Restwahrscheinlichkeit von  $p = 1\%$ . Ein genaues Modell sollte also 1% Überschreitungen liefern, ein ungenaues Modell entsprechend mehr. Genauso deutet eine zu geringe Überschreitungszahl auf ein ungenaues Modell hin (vgl. Basle Committee on Banking Supervision [10], Table 1).

Man nimmt zunächst an, dass ein genaues Modell vorliegt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Wert eine Überschreitung darstellt, beträgt  $p = 1\%$ . Die Anzahl der Überschreitungen ist eine binomialverteilte Zufallsvariable (vgl. Abschnitt 8.2.2). Die Wahrscheinlichkeit für  $x$  Überschreitungen ist daher durch

$$\binom{T}{x} p^x (1-p)^{T-x}$$

gegeben, wobei  $T$  den Stichprobenumfang bezeichnet. Tabelle 8.4 gibt in der zweiten Spalte darüber Auskunft, wie gross die Wahrscheinlichkeit für jeweils genau  $x$  Überschreitungen ist, bei einem Stichprobenumfang  $T = 250$ . Die Fehler 1. Art, also die

Anzahl Überschreitungen $x$	Wahrscheinlichkeit	Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art
0	8.1%	100.0%
1	20.5%	91.9%
2	25.7%	71.4%
3	21.5%	45.7%
4	13.4%	24.2%
5	6.7%	10.8%
6	2.7%	4.1%

Tabelle 8.4: Festlegung der Zonen anhand der Fehler 1. Art. Annahme eines genauen Modells mit  $p = 1\%$ . Stichprobenumfang  $T = 250$ .

Wahrscheinlichkeit, dass ein genaues Modell als ungenau eingestuft wird, sind in der dritten Spalte eingetragen. Sie ergeben sich für eine bestimmte Zeile in der dritten Spalte durch Subtraktion der kumulierten Einzelwahrscheinlichkeiten in der zweiten Spalte (exklusive der betrachteten Zeile) von 100%. Wird nun bei einer Anzahl Überschreitungen  $x^*$  die Grenze zwischen einem genauen und einem ungenauen Modell gezogen, was impliziert, dass bei  $x^* - 1$  Überschreitungen noch ein genaues Modell vorliegen soll, gibt die dritte Spalte für diese Grenze Auskunft über die Wahrscheinlichkeit, dass ein Modell als ungenau eingestuft wird, obwohl es genau ist.

Durch Abwägung dieser Fehler 1. Art können die Zonengrenzen bestimmt werden, wobei dazu auch Überlegungen zum Fehler 2. Art einfließen, dem Fehler also, ein ungenaues Modell als genau einzustufen. Dazu nimmt man beispielsweise an, dass ein Modell vorliegt, bei dem in  $p = 2\%$  der Fälle eine Überschreitung auftritt und nicht, wie gefordert, mit der Wahrscheinlichkeit  $p = 1\%$ .

In Tabelle 8.5 sind in der zweiten Spalte die Wahrscheinlichkeiten für genau  $x$  Überschreitungen bei einer angenommenen Restwahrscheinlichkeit  $p = 2\%$  eingetragen. Die dritte Spalte enthält die Fehler 2. Art, sie ergeben sich aus Kumulation der Einzelwahrscheinlichkeiten. Wenn bei  $x^*$  wieder die Grenze gezogen wird, das heisst  $x^* - 1$  Überschreitungen werden zugelassen, um ein genaues Modell zu charakterisieren, kann

Anzahl Überschreitungen $x$	Wahrscheinlichkeit	Wahrscheinlichkeit für Fehler 2. Art
0	0.6%	0.0%
1	3.3%	0.6%
2	8.3%	3.9%
3	14.0%	12.2%
4	17.7%	26.2%
5	17.7%	43.9%
6	14.8%	61.6%

Tabelle 8.5: Festlegung der Zonen anhand der Fehler 2. Art. Annahme eines ungenauen Modells mit  $p = 2\%$ . Stichprobenumfang  $T = 250$ .

in der dritten Spalte abgelesen werden, wie gross bei dieser Grenze die Wahrscheinlichkeit ist, ein ungenaues Modell nicht als solches zu identifizieren.

Die Einteilung der verschiedenen Zonen erfolgt so durch subjektive Abwägung der Fehler 1. und 2. Art. Analoge Überlegungen lassen sich für andere Stichprobenumfänge oder andere Konfidenzniveaus der Value-at-Risk-Schätzungen anstellen, ebenso können die Multiplikationsfaktoren für andere Konfidenzniveaus umgerechnet werden (vgl. Johanning [66], S. 203 f.).





## Kapitel 9

# Langzeitstudie Swiss Market Index

Ziel dieses und des darauffolgenden Kapitels ist eine Abschätzung des Modellrisikos bei verschiedenen expliziten Modellen und der historischen Simulation. Als Bewertungsmaassstab werden die in Kapitel 8 diskutierten Kriterien herangezogen. Im Rahmen der Gesamtzielsetzung dieser Arbeit stellen also die folgenden Untersuchungen den zentralen Bestandteil der Arbeit dar.

Als Grundlage für die empirische Analyse wird der SMI ausgewählt. Er kann als gut diversifiziertes Portfolio der wichtigsten schweizerischen Titel angesehen werden. Für den SMI werden über einen Zeitraum von fünf Jahren tägliche Value-at-Risk-Schätzungen bestimmt.

Die für die Value-at-Risk-Schätzungen notwendigen Renditeverteilungen werden auf unterschiedliche Weise erzeugt. So werden Renditeverteilungen mit Hilfe der historischen Simulation und für die expliziten Modelle mittels Monte-Carlo-Simulationen generiert. Bei den expliziten Modellen werden die Geometrische Brownsche Bewegung, der Sprung-Diffusions-Prozess und das hyperbolischen Modell untersucht. Anschliessend werden die Ergebnisse der expliziten Modelle mit denjenigen des impliziten Modells, welches der historischen Simulation zugrunde liegt, verglichen. Zur Abschätzung des Modellrisikos, werden die in Kapitel 8 ausgewählten Kriterien verwendet. Neben Value-at-Risk-Schätzungen werden zusätzlich auch LPM-Schätzungen analysiert.

Die Gliederung dieses sehr umfassenden Kapitels gestaltet sich folgendermassen. Nach einer Darstellung des Ablaufs der Langzeitstudie werden historische Simulation und Monte-Carlo-Simulationen getrennt voneinander untersucht. Daran schliesst sich ein Vergleich dieser Verfahren an. Abschliessend werden die Ergebnisse zusammengefasst und die sich daraus ergebenden Konsequenzen analysiert.

## 9.1 Ablauf der Langzeitstudie

Bevor auf den Ablauf der Langzeitstudie eingegangen wird, sei nochmals der Unterschied zwischen historischer Simulation und Monte-Carlo-Simulation erläutert. Die historische Simulation verwendet ausschliesslich historische Renditen als Stichprobe für die Value-at-Risk-Schätzung. Eine Änderung der Halteperiode setzt eine Neuberechnung der Renditen voraus. Dies ist bei einer Monte-Carlo-Simulation nicht notwendig. Sind die Modellparameter des Modells, für welches eine Monte-Carlo-Simulation durchgeführt wird, auf Tagesbasis geschätzt, lassen sich Halteperioden von mehr als einem Tag durch Ausführen entsprechend vieler Simulationsschritte berücksichtigen. Die Stichprobe zur Value-at-Risk-Schätzung wird allerdings in ihrem Umfang und in ihrer Zusammensetzung im Rahmen jedes Modells neu generiert und stellt so eine hypothetische Stichprobe dar.

Als Zeitraum für die Studie wurden die Jahre 1992 bis 1998 ausgewählt. Die Schätzung der Modellparameter der expliziten Modelle erfolgt über ein Fenster von 500 Tageskursen (circa zwei Jahre). Diese Fenstergrösse stellt sicher, dass die numerischen Verfahren zur Parameterschätzung in der Regel konvergieren. In der Tat waren nur in Ausnahmefällen keine Schätzungen verfügbar, so dass für diese Tage Schätzgrössen des Vortages als Approximation verwendet wurden. Dieselbe Fensterbreite wurde für die historischen Simulationen verwendet.

Startet man mit dem ersten Handelstag des Jahres 1992, dem 3.1.1992, so erhält man, bei einer Halteperiode von einem Tag, eine erste Value-at-Risk-Schätzung für den 22.12.1993. Wird das Fenster über den gesamten Beobachtungszeitraum geschoben, gewinnt man Schätzwerte (ungefähr) für den Zeitraum 1994 bis 1998. Für die Zeitperiode 1992 bis 1998 stehen für den SMI 1759 Tageskurse zur Verfügung. Aufgrund der Fensterbreite und bei einer eintägigen Halteperiode können 1258 Value-at-Risk-Schätzungen mit den tatsächlich eintretenden Kursänderungen verglichen werden. Eine Verlängerung der Halteperiode reduziert die Anzahl Vergleichsmöglichkeiten entsprechend.

Die Auswirkungen verschiedener Halteperioden werden durch Verwendung eintägiger und zehntägiger Prognosehorizonte untersucht. Der Einfluss verschiedener Konfidenzniveaus auf die Value-at-Risk-Schätzung auf diese Schätzungen wird anhand der  $p$ -Werte 1%, 2.5%, 5% und 7.5 % ermittelt. Damit sind auch die Rahmenbedingungen zur Wahl der Halteperiode und des Konfidenzniveaus des Basler Ausschusses respektive der Eidgenössischen Bankenkommision und die Vorschläge von J. P. Morgan berücksichtigt.

Zur Berechnung des Value-at-Risk wird die Definition (6.4) bezüglich der Anfangsinvestition gewählt, zudem der Einfachheit halber jeweils mit einer Anfangsinvestition in Höhe von  $W_0 = 1$ . Der geschätzte Value-at-Risk-Wert gibt dann die potentielle Verlusthöhe einer Anlage pro investierter Währungseinheit an, die nur noch mit der Restwahrscheinlichkeit  $p\%$  überschritten wird. Es muss kein Erwartungswert der

Renditen geschätzt werden, was die Anwendung der Kriterien zur Abschätzung der Modellrisiken erleichtert.

Bei diesen Kriterien handelt es sich um die mittlere relative Abweichung (MRB) und die Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung (RMSRB) als reine ex-ante Grössen und für ex-post Vergleiche um die binäre Verlustfunktion in Verbindung mit einer Likelihood-Ratio-Statistik nach Kupiec, um den Vergleich von mittlerer tatsächlicher und erwarteter relativer Überschreitungshöhe, um die Kombination der beiden letztgenannten Kriterien und schliesslich um die Schätzung des Rang-Korrelationskoeffizienten nach Kendall.

## 9.2 Historische Simulation

### 9.2.1 Vergleich der Quantilschätzer

Auf Grundlage der historischen Simulation können verschiedene nichtparametrische Quantilschätzer miteinander verglichen werden. Es sind dies die Schätzer auf Grundlage einer geordneten Stichprobe, auf Grundlage von klassierten Daten und schliesslich auf Grundlage einer Kerndichteschätzung (vgl. Abschnitte 7.2 und 7.3).

Die Anzahl Histogrammklassen im Fall einer Quantilschätzung anhand von klassierten Daten beträgt 40, für die Kerndichteschätzung werden 200 Gitterpunkte verwendet. Aufgrund der gewählten Fensterbreite von 500 Tagen beträgt der Stichprobenumfang für Tagesrenditen 499, für Zehntagesrenditen bei überlappender Berechnung 490. Als Vergleichsmassstäbe werden die mittleren relativen Abweichungen und die mittleren quadratischen Abweichungen der einzelnen Verfahren geschätzt. Tabelle 9.1 gibt die Ergebnisse für verschiedene  $p$ -Werte bei eintägiger Halteperiode wieder, die Ergebnisse in Tabelle 9.2 basieren hingegen auf einer Halteperiode von zehn Tagen.

	$p = 1.0\%$		$p = 2.5\%$		$p = 5.0\%$		$p = 7.5\%$	
	MRB	RMSRB	MRB	RMSRB	MRB	RMSRB	MRB	RMSRB
Geordnet	0.0102	0.0159	-0.0098	0.0164	-0.0099	0.0145	-0.0066	0.0147
Klassiert	-0.0107	0.0144	-0.0048	0.0097	-0.0083	0.0130	-0.0028	0.0094
KDS	0.0005	0.0107	0.0147	0.0201	0.0182	0.0226	-0.0095	0.0150

Tabelle 9.1: MRB und RMSRB für VaR-Schätzungen auf Basis einer geordneten Stichprobe, klassierter Daten und Kerndichteschätzung bei verschiedenen  $p$ -Werten und eintägiger Halteperiode.

Die Quantilschätzungen auf Basis der Kerndichteschätzung liefern grössere Value-at-Risk-Schätzungen als der Mittelwert über alle drei Schätzverfahren, die beiden

	$p = 1.0\%$		$p = 2.5\%$		$p = 5.0\%$		$p = 7.5\%$	
	MRB	RMSRB	MRB	RMSRB	MRB	RMSRB	MRB	RMSRB
Geordnet	-0.0068	0.0133	-0.0134	0.0186	-0.0092	0.0155	-0.0108	0.0145
Klassiert	-0.0065	0.0125	-0.0023	0.0112	-0.0079	0.0119	-0.0114	0.0143
KDS	0.0133	0.0192	0.0157	0.0214	0.0172	0.0219	0.0222	0.0249

Tabelle 9.2: MRB und RMSRB für VaR-Schätzungen auf Basis einer geordneten Stichprobe, klassierter Daten und Kerndichteschätzung bei verschiedenen  $p$ -Werten und zehntägiger Halteperiode.

verbleibenden Schätzer hingegen geringere Schätzwerte als der Mittelwert. Die Schätzwerte aller drei Schätzer liegen allerdings sehr nahe beieinander und schwanken auch nur sehr wenig, was durch die RMSRB von maximal rund 2.5% angezeigt wird. Die konservativsten, das heisst die grössten Value-at-Risk-Schätzungen, gleichzeitig auch diejenigen mit den höchsten RMSRB, liefert die Kerndichteschätzung. Dies lässt sich damit erklären, dass die Kerndichteschätzung zu einem leicht oszillierenden Verlauf der Dichte in den Enden der Verteilung führt. Bei der anschliessenden numerischen Integration zur Bestimmung des Quantils, wird als Folge dieser „Oszillationen“ die notwendige Wahrscheinlichkeit schon für kleinere Renditewerte erreicht. Eine konservativere Value-at-Risk-Schätzung ist die Folge.

Wesentliche Unterschiede in den Ergebnissen zwischen ein- und zehntägiger Halteperiode ergeben sich nicht.

### 9.2.2 Ex-post-Kriterien

#### Graphische Darstellung der Resultate

Abbildung 9.1 zeigt für den Zeitraum 1994 bis 1998 tägliche Value-at-Risk-Schätzungen bei einer Halteperiode von einem Tag und einem Konfidenzniveau 95% ( $p = 5\%$ ). In Abbildung 9.2 ist derselbe Sachverhalt bei zehntägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 99% ( $p = 1\%$ ) aufgetragen. Zusätzlich sind bei der letztgenannten Abbildung diejenigen Zeitpunkte eingetragen, bei denen eine Überschreitung des auf Basis der geordneten Stichprobe geschätzten Value-at-Risk-Wertes durch tatsächliche Marktveränderungen eingetreten ist. Auf die Darstellung dieser Punkte wird bei grösseren  $p$ -Werten verzichtet, da die Übersichtlichkeit der Abbildungen durch das viel häufigere Auftreten von Überschreitungen nicht mehr gegeben ist.

Der sehr glatte Verlauf der Value-at-Risk-Schätzungen lässt sich dadurch erklären, dass die Stichprobenwerte, die für die Quantilschätzung bei geordneter Stichprobe verantwortlich sind, nur langsam ausgetauscht werden. Das heisst, die Stichprobe bleibt im relevanten Bereich über längere Zeiträume unverändert. Betrachtet man

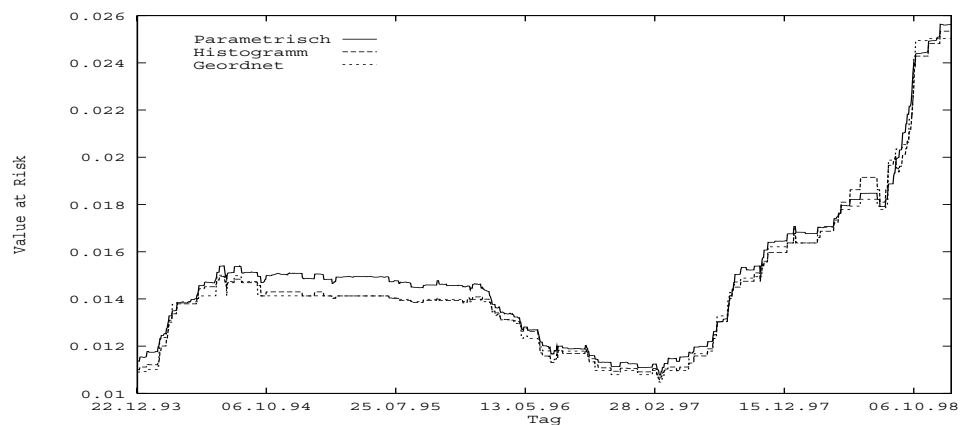


Abbildung 9.1: Tägliche VaR-Schätzungen bei eintägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 95%. Zeitraum 1994–1998.

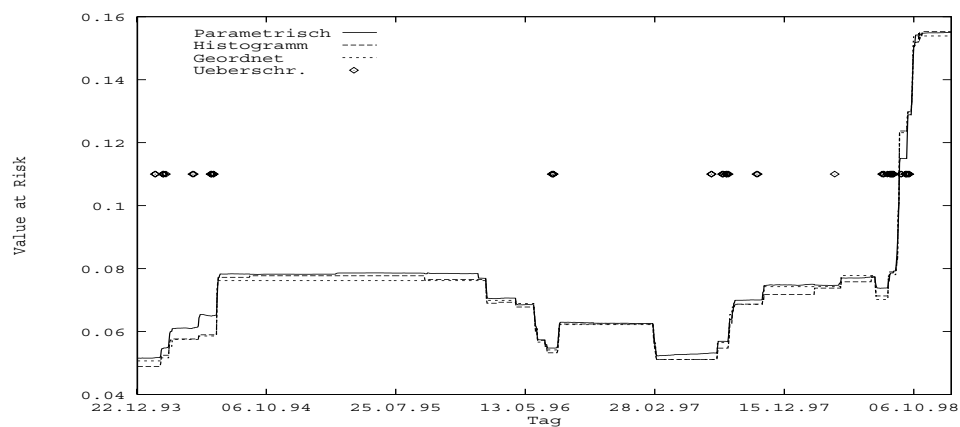


Abbildung 9.2: Tägliche VaR-Schätzungen bei zehntägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 99%. Zeitraum 1994–1998.

die Zeitpunkte der Überschreitung der Value-at-Risk-Schätzungen durch tatsächliche Marktveränderungen, so stellt man fest, dass es sich dabei um Zeitpunkte handelt, die in Phasen ansteigender Value-at-Risk-Werte liegen. Diese Phasen sind auf ansteigende Volatilitäten zurückzuführen. Besonders deutlich ist dies für die zweite Jahreshälfte 1998 zu beobachten. Historische Simulationen können solche Situationen nur unzureichend erfassen.

### Korrelation zwischen tatsächlich eingetretenen Verlusten und Value-at-Risk-Schätzungen

Wie schnell die Value-at-Risk-Schätzungen auf Marktveränderungen reagieren, lässt sich durch die Schätzung des Rang-Korrelationskoeffizienten nach Kendall analysieren. Allerdings werden eher kleine Werte für den Korrelationskoeffizienten erwartet, da die meisten Marktveränderungen in die „Mitte“ der Renditeverteilung fallen, Value-at-Risk-Schätzungen aber ausnahmslos extreme Werte darstellen.

Tabelle 9.3 zeigt die Schätzungen des Korrelationskoeffizienten  $\tau$  für verschiedene  $p$ -Werte der Value-at-Risk-Schätzung und Halteperioden. Zusätzlich lässt sich die Anzahl Standardabweichungen vom Wert Null für  $\tau$  entnehmen und der p-Value für die Nullhypothese unkorrelierter Daten in der vierten Spalte ablesen. Niedrige Werte für diesen p-Value deuten auf korrelierte Daten hin. Die Value-at-Risks wurden auf Grundlage einer geordneten Stichprobe geschätzt. Für eine eintägige Halteperi-

Halteperiode	$p$ [%]	$\tau$	Anzahl Std.Abw.	p-Value
1 Tag	1.0	0.1592	8.4556	0.0000
	2.5	0.1460	7.7583	0.0000
	5.0	0.1335	7.0931	0.0000
	7.5	0.0765	4.0634	0.0001
10 Tage	1.0	0.0072	0.3809	0.7033
	2.5	0.0304	1.6115	0.1071
	5.0	0.0009	0.0461	0.9632
	7.5	-0.0089	-0.4598	0.6456

Tabelle 9.3: Schätzungen des Rang-Korrelationskoeffizienten bei verschiedenen  $p$ -Werten der Value-at-Risk-Schätzung und Halteperioden.

ode ergeben sich signifikante Korrelationen zwischen den tatsächlich eingetretenen Marktveränderungen und den Value-at-Risk-Schätzungen. Daraus kann geschlossen werden, dass die Fensterbreite von 500 Tagen nicht zu lang gewählt wurde, um aktuelle Veränderungen unzureichend zu berücksichtigen. Allerdings sind die Korrelationen zu gering, um in Phasen stark ansteigender Volatilitäten wie Ende 1998 auf Marktveränderungen rechtzeitig reagieren zu können. Mit zunehmenden  $p$ -Werten nehmen zudem die Korrelationen ab.

Ein ganz anderes Bild zeigt sich bei einer zehntägigen Halteperiode. Es ergeben sich grosse  $p$ -Values, was auf eine Nichtablehnung der Nullhypothese unkorrelierter Zeitreihen schliessen lässt und damit eine Unkorreliertheit der tatsächlich eingetretenen Verluste und der Value-at-Risk-Schätzungen vermuten lässt. Es kann daher geschlossen werden, dass ein Prognosehorizont von zehn Tagen zu lang ist, um aktuellen Veränderungen auf den Märkten Rechnung zu tragen.

Schliesslich ist zu bemerken, dass im Beobachtungszeitraum nur in geringem Umfang Phasen mit abnehmender Volatilität auftraten. Dies hat sich auf die Höhe des Korrelationskoeffizienten positiv ausgewirkt (vgl. die Diskussion in Abschnitt 8.2.7).

### **Binäre Verlustfunktion und Likelihood-Ratio-Test nach Kupiec**

Die Ergebnisse des Backtesting bei binärer Verlustfunktion sind in Tabelle 9.4 zusammengetragen, zunächst für eine Halteperiode von einem Tag. Dabei wurde der Gesamtbeobachtungszeitraum zusätzlich in drei Teilperioden untergliedert, um vor allem die letzten 250 hochvolatilen Tage detaillierter untersuchen zu können. Erfasst sind für verschiedene Konfidenzniveaus der Value-at-Risk-Schätzung jeweils die Anzahl Überschreitungen in Prozent der Anzahl Beobachtungen und die Ergebnisse des Likelihood-Ratio-Tests nach Kupiec für die Signifikanzniveaus  $\alpha = 1\%$  und  $\alpha = 5\%$ . Die Value-at-Risks sind auf Grundlage einer geordneten Stichprobe geschätzt. Für den gesamten Beobachtungszeitraum ist auch der Bereich des Likelihood-Ratio-Tests angegeben, bei dem die Nullhypothese eines genauen Modells nicht abgelehnt wird.

Folgende Ergebnisse lassen sich festhalten. So steigt die Wahrscheinlichkeit leicht, dass die Nullhypothese des Likelihood-Ratio-Tests nicht abgelehnt wird, mit wachsender Restwahrscheinlichkeit  $p$  der Value-at-Risk-Schätzung. Ein Grund hierfür könnte darin zu sehen sein, dass bei grösseren  $p$ -Werten die Dichte der Stichprobenwerte im zur Quantilschätzung relevanten Bereich grösser ist als bei Quantilen zu kleinen Wahrscheinlichkeiten. Dies reduziert die Schätzfehler bei der Quantilschätzung. Desweiteren treten bei grösseren  $p$ -Werten mehr Überschreitungen auf, was den Stichprobenumfang für den Likelihood-Ratio-Test erhöht.

Die Hypothese, dass das der historischen Simulation zugrunde liegende implizite Modell ein genaues Modell ist, wird vor allem für die ersten 500 Beobachtungen, also bei eher ruhigem Börsengeschehen, nicht abgelehnt, während dies für das Jahr 1998 nicht mehr der Fall ist. Betrachtet man den gesamten Zeitraum 1994 bis 1998, so liegen die Überschreitungshäufigkeiten nur ganz knapp im Ablehnungsbereich des Likelihood-Ratio-Tests, vor allem was das Signifikanzniveau  $\alpha = 1\%$  betrifft.

Die Ergebnisse des Backtesting bei zehntägiger Halteperiode sind in Tabelle 9.5 wiedergegeben. Auch bei dieser Halteperiode steigt mit wachsendem  $p$  die Wahrscheinlichkeit für eine Nichtablehnung der Nullhypothese des Likelihood-Ratio-Tests. Die Nullhypothese wird jedoch wesentlich öfter abgelehnt als bei eintägiger Halteperiode,

Swiss Market Index	$p = 1.0\%$	$p = 2.5\%$	$p = 5.0\%$	$p = 7.5\%$
22.12.93–13.12.95 ( $T = 500$ ) Anzahl Überschreitungen in %	1.0	2.4	5.6	8.6
14.12.95–15.12.97 ( $T = 500$ ) Anzahl Überschreitungen in %	2.2*	5.0**	7.4*	9.4
16.12.97–30.12.98 ( $T = 258$ ) Anzahl Überschreitungen in %	3.1**	6.6**	10.9**	13.2**
22.12.93–30.12.98 ( $T = 1258$ ) Anzahl Überschreitungen in %	1.9**	4.4**	7.4**	9.9**
Nichtablehnungsbereich des LR-Test: $\alpha = 5\%$ $\alpha = 1\%$	(0.5; 1.7) (0.3; 1.8)	(1.7; 3.4) (1.4; 3.7)	(3.8; 6.3) (3.5; 6.7)	(6.0; 9.1) (5.6; 9.5)
LR-Test: * signifikant bei $\alpha = 5\%$ ** signifikant bei $\alpha = 1\%$				

Tabelle 9.4: Ergebnisse des Backtesting für die VaR-Schätzungen bei historischer Simulation des SMI vom 22.12.1993 bis 30.12.1998 bei unterschiedlichen Konfidenzniveaus und eintägiger Halteperiode.

was besonders für die ersten 500 Beobachtungen auffällig ist.

### Vergleich von mittlerer tatsächlicher und mittlerer erwarteter Überschreitungshöhe

Die Abweichungen zwischen mittlerer tatsächlicher relativer Überschreitungshöhe ( $\overline{RUH}$ ) und mittlerer erwarteter relativer Überschreitungshöhe ( $\overline{REUH}$ ) relativ zu  $\overline{RUH}$  sind in Tabelle 9.6 wiedergegeben, zunächst wieder für eine eintägige Halteperiode. Die Value-at-Risks sind auf Basis einer geordneten Stichprobe geschätzt. Die relativen Abweichungen  $(\overline{RUH} - \overline{REUH})/\overline{RUH}$  liegen zwischen  $-30\%$  und  $+35\%$ . Sie steigen von der ersten Beobachtungsperiode bis zur dritten Periode an, was mit den Ergebnissen der Likelihood-Ratio-Tests konsistent ist. Nur für die ersten 500 Beobachtungen tritt der Fall ein, dass die erwarteten Überschreitungshöhen über den tatsächlichen Überschreitungshöhen liegen. Wird der Gesamtbeobachtungszeitraum betrachtet, steigen die relativen Abweichungen mit wachsenden  $p$ -Werten an, eine Tendenz, die in den Subperioden nicht beobachtet werden kann.

Die Ergebnisse für eine zehntägige Halteperiode, die in Tabelle 9.7 zusammengefasst sind, zeigen dieselbe Tendenz wie die obigen Resultate. Die relativen Abweichungen zwischen  $\overline{RUH}$  und  $\overline{REUH}$  liegen zwischen  $10\%$  und  $60\%$ , was bedeutet, dass die tatsächlichen Überschreitungshöhen im Mittel immer über den erwarteten Überschreitungshöhen liegen. Desweiteren zeigt ein Vergleich zwischen den beiden Haltepe-



Swiss Market Index	$p = 1.0\%$	$p = 2.5\%$	$p = 5.0\%$	$p = 7.5\%$
22.12.93–13.12.95 ( $T = 500$ ) Anzahl Überschreitungen in %	2.6**	5.2**	6.8	9.2
14.12.95–15.12.97 ( $T = 500$ ) Anzahl Überschreitungen in %	3.0**	5.0**	7.6*	9.6
16.12.97–30.12.98 ( $T = 249$ ) Anzahl Überschreitungen in %	8.0**	12.0**	16.9**	21.3**
22.12.93–30.12.98 ( $T = 1249$ ) Anzahl Überschreitungen in %	3.8**	6.5**	9.1**	11.8**
Nichtablehnungsbereich des LR-Test: $\alpha = 5\%$ $\alpha = 1\%$	(0.5; 1.7) (0.3; 1.8)	(1.7; 3.4) (1.4; 3.7)	(3.8; 6.3) (3.5; 6.7)	(6.0; 9.1) (5.6; 9.5)
LR-Test: * signifikant bei $\alpha = 5\%$ ** signifikant bei $\alpha = 1\%$				

Tabelle 9.5: Ergebnisse des Backtesting für die VaR-Schätzungen bei historischer Simulation des SMI vom 22.12.1993 bis 30.12.1998 bei unterschiedlichen Konfidenzniveaus und zehntägiger Halteperiode.

rioden, dass die relativen Abweichungen bei zehntägiger Halteperiode nahezu in jedem der angegebenen Fälle die jeweilige relative Abweichung bei eintägiger Halteperiode übersteigen.

### Kombination von Überschreitungszahlen und Überschreitungshöhen

Als letztes Kriterium zur Beurteilung von Modellrisiken wird die Masszahl *KOMB* (vgl. Gleichung (8.18)) analysiert, die Überschreitungszahlen und Überschreitungshöhen kombiniert. Auch hier werden Abweichungen zwischen tatsächlich eingetretenen und erwarteten Grössen relativ zu den tatsächlichen Grössen betrachtet. Der Gewichtungsfaktor wird auf  $w = 2/3$  festgelegt, das heisst auf die Überschreitungszahlen wird ein grösseres Gewicht gelegt. Diese Wahl ist zwar willkürlich, gleichzeitig aber durchaus gerechtfertigt, da die relativen Überschreitungshöhen numerisch grössere Werte als die prozentualen Überschreitungszahlen annehmen, was bei kleineren Gewichten zu einer Dominanz des Gesamtmasses durch den Anteil der Überschreitungshöhen führen würde.

In den Tabellen 9.8 und 9.9 sind die Ergebnisse für ein- und zehntägige Halteperioden dokumentiert. Es bestätigen sich die Ergebnisse der vorigen Abschnitte. Wiederum sind die relativen Abweichungen bei einer zehntägigen Halteperiode grösser als bei einer eintägigen Halteperiode.

SMI	$p = 1.0\%$	$p = 2.5\%$	$p = 5.0\%$	$p = 7.5\%$
22.12.93 bis 13.12.95	-0.2813	0.0594	-0.0599	0.0529
14.12.95 bis 15.12.97	0.1821	0.0723	0.2708	0.3661
16.12.97 bis 30.12.98	0.1867	0.2512	0.2816	0.3463
22.12.93 bis 30.12.98	0.1155	0.1518	0.2045	0.2994

Tabelle 9.6: Relative Abweichung  $(\overline{RUH} - \overline{REUH})/\overline{RUH}$  bei verschiedenen Konfidenzniveaus und eintägiger Halteperiode.

SMI	$p = 1.0\%$	$p = 2.5\%$	$p = 5.0\%$	$p = 7.5\%$
22.12.93 bis 13.12.95	0.3909	0.1098	0.3209	0.2887
14.12.95 bis 15.12.97	0.0948	0.2837	0.2956	0.3064
16.12.97 bis 30.12.98	0.6061	0.6037	0.4514	0.3933
22.12.93 bis 30.12.98	0.3805	0.3844	0.3793	0.3667

Tabelle 9.7: Relative Abweichung  $(\overline{RUH} - \overline{REUH})/\overline{RUH}$  bei verschiedenen Konfidenzniveaus und zehntägiger Halteperiode.

Die bisherigen Untersuchungen führen bereits zu einer ersten wichtigen Konsequenz. Sie betrifft die Wahl einer geeigneten Halteperiode. Alle in Abschnitt 9.2.2 untersuchten Kriterien zeigen deutlich, dass ein Vorhersagehorizont von zehn Tagen zu lang ist, um sich schnell verändernden Marktsituationen gerecht zu werden. Eintägige Halteperioden sind daher vorzuziehen.

### 9.2.3 Vorgehen bei der Eigenkapitalunterlegung

Zum Schluss sollen die bankrechtlichen Regelungen bezüglich der Eigenmittelunterlegung und die Implikationen des Ampelkonzeptes untersucht werden.

Beim Ampelkonzept wird aufgrund der Überschreitungszahlen bei eintägiger Halteperiode und einem Konfidenzniveau von 99% entschieden, ob der Multiplikator zur Eigenkapitalunterlegung erhöht werden muss, und wenn ja, in welcher Höhe.

In den Jahren 1994 und 1995 hätte nach dem Ampelkonzept keine Erhöhung des Multiplikationsfaktors vorgenommen werden müssen (vgl. Tabelle 9.4, Spalte  $p = 1.0\%$ ), wohl aber jeweils in den Jahren 1996 bis 1998. Hätte man allerdings den Faktor für alle fünf Jahre konstant auf dem Wert Drei gehalten, wäre die Eigenkapitalunterlegung in jedem Fall völlig ausreichend gewesen. Dies bedeutet, dass die Erhöhung des Faktors auf Grund der Backtesting-Resultate überflüssig gewesen wäre. Dieser Sachverhalt

SMI	$p = 1.0\%$	$p = 2.5\%$	$p = 5.0\%$	$p = 7.5\%$
22.12.93 bis 13.12.95	-0.2517	0.0470	-0.0239	0.0736
14.12.95 bis 15.12.97	0.2264	0.1532	0.2812	0.3351
15.12.97 bis 30.12.98	0.2895	0.3322	0.3466	0.3662
22.12.93 bis 30.12.98	0.1620	0.1966	0.2295	0.2862

Tabelle 9.8: Relative Abweichung  $(KOMB - EKOMB)/KOMB$  bei verschiedenen Konfidenzniveaus und eintägiger Halteperiode.

SMI	$p = 1.0\%$	$p = 2.5\%$	$p = 5.0\%$	$p = 7.5\%$
22.12.93 bis 13.12.95	0.4226	0.2139	0.3081	0.2627
14.12.95 bis 15.12.97	0.2140	0.3240	0.3042	0.2912
15.12.97 bis 30.12.98	0.6913	0.6589	0.5289	0.4668
22.12.93 bis 30.12.98	0.3805	0.4374	0.3954	0.3658

Tabelle 9.9: Relative Abweichung  $(KOMB - EKOMB)/KOMB$  bei verschiedenen Konfidenzniveaus und zehntägiger Halteperiode.

geht aus Abbildung 9.3 hervor. Dort sind der tägliche Value-at-Risk, geschätzt bei zehntägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 99%, der 60-Tage-Durchschnitt der Value-at-Risk-Schätzungen und die Eigenkapitalunterlegung als das Maximum von täglicher Value-at-Risk-Schätzung und dem Dreifachen des 60-Tage-Durchschnitts aufgetragen. An allen Tagen wird die Eigenkapitalunterlegung auf Grundlage des 60-Tages-Durchschnitts bestimmt und in keinem Fall anhand des aktuellen Value-at-Risk. Durch Multiplikation des Durchschnitts mit dem Faktor Drei werden die täglichen Value-at-Risk-Schätzungen jeweils deutlich übertroffen. Die negativen Zehntagesrenditen sind als Punkte dargestellt. Diese liegen nie über der Eigenkapitalunterlegung. Das Eigenkapital war also bei einem (konstanten) Faktor Drei über die Beobachtungsperiode ausreichend.

Für eine kritische Diskussion der regulatorischen Vorschriften zur Bestimmung der Eigenkapitalunterlegung werden im folgenden aktuelle Value-at-Risk-Schätzungen mit dem 60-Tage-Durchschnitt der Value-at-Risk-Schätzungen direkt verglichen (vgl. Abbildung 9.3). In Phasen ansteigender Volatilität, also in Phasen, die auf ein erhöhtes Marktrisiko hindeuten, liegt der durchschnittliche Value-at-Risk in diesem Beispiel unterhalb der täglichen Value-at-Risk-Schätzungen. In einem solchen Fall wäre es also sinnvoller, den aktuellen Value-at-Risk mit einem Faktor zu multiplizieren, um zu einer Eigenkapitalunterlegung zu gelangen. In Phasen abnehmender Volatilität,

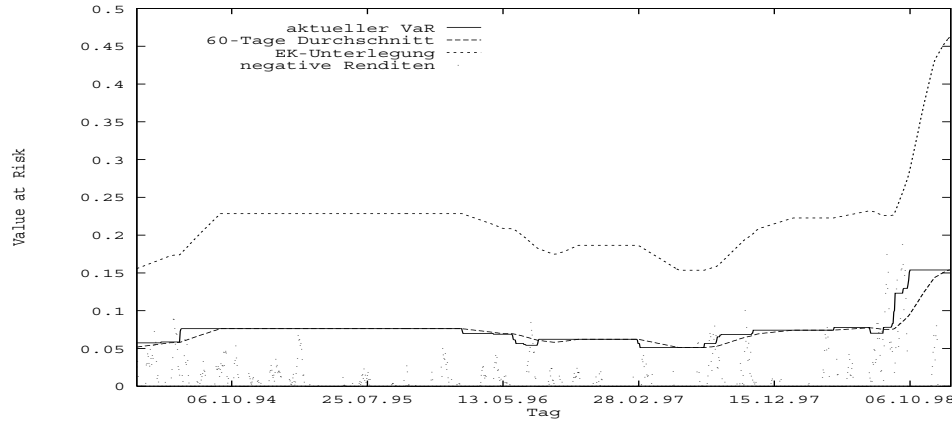


Abbildung 9.3: Vorgehen bei der Bestimmung der Eigenkapitalunterlegung nach den Vorschriften der EBK bei Konfidenzniveau 99% und zehntägiger Halteperiode.

Phasen also die ein geringeres Marktrisiko vermuten lassen, liegen die durchschnittlichen Value-at-Risk-Schätzungen über den aktuellen Value-at-Risk-Schätzungen. Auch hier wäre die Multiplikation des aktuellen Value-at-Risk sinnvoller, damit die Eigenmittelunterlegung nicht zu konservativ und damit kostenintensiv ausfällt. Deshalb ist das in Abschnitt 6.2.4 vorgeschlagene vereinfachte Verfahren zur Bestimmung der Höhe der Eigenmittel, das nur auf den aktuellen Value-at-Risk-Schätzungen beruht, vertretbar. Es wird deshalb in den folgenden Untersuchungen verwendet.

## 9.3 Monte-Carlo-Simulation

### 9.3.1 Vorgehensweise

Mit der Methode der Monte-Carlo-Simulation lassen sich die Modelle der Geometrischen Brownschen Bewegung, des Sprung-Diffusions-Prozesses sowie das hyperbolische Modell detailliert miteinander vergleichen. Durch Backtesting und Analyse der verschiedenen Kriterien zur Abschätzung des Modellrisikos, die in Kapitel 8 vorgestellt und in Abschnitt 9.2 bereits eingesetzt wurden, lässt sich entscheiden, welches der drei Modelle sich als Grundlage für Value-at-Risk-Schätzungen am besten eignet, das heisst bei welchem Modell das Modellrisiko vermutlich am geringsten ist.

Die empirischen Untersuchungen in Kapitel 5 über die Eignung der drei erwähnten Modelle zur Beschreibung von Aktienrenditen haben gezeigt, dass sich empirische Renditeverteilungen im Modell des Sprung-Diffusions-Prozesses und durch die hyperbolische Verteilung besser beschreiben lassen als durch eine Normalverteilung, die

durch Geometrische Brownsche Bewegung impliziert wird. Es ist daher zu erwarten, dass hier der Sprung-Diffusions-Prozess und das hyperbolische Modell ein geringeres Modellrisiko aufweisen als die Geometrische Brownsche Bewegung.

Für den Zeitraum 1994 bis 1998 werden pro Modell insgesamt 1258 Value-at-Risk-Schätzungen bestimmt, sowohl für eine Halteperiode von einem Tag als auch für eine Halteperiode von zehn Tagen. Dies erfordert pro Modell ebensoviele Parameterschätzungen, die auf täglicher Basis durchgeführt werden, also insgesamt 3744 Schätzungen. Dazu muss im hyperbolischen Modell und beim Sprung-Diffusions-Prozess jeweils ein numerisches Verfahren angewendet werden. Dies stellt im Vergleich zur historischen Simulationen *einen* limitierenden Faktor dar.

Als Verfahren zur Quantilschätzung wurden für den Sprung-Diffusions-Prozess und im hyperbolischen Modell geordnete Stichproben und klassierte Daten verwendet, bei der Geometrischen Brownschen Bewegung zusätzlich eine parametrische Schätzung. Da die Geometrische Brownsche Bewegung normalverteilte Renditen impliziert, ist die parametrische Schätzung in diesem Fall einfach durchzuführen (vgl. Abschnitt 7.4). Die unterschiedlichen Quantilschätzer führen in den jeweiligen Modellen zu nahezu identischen Ergebnissen. Aus diesem Grund werden nur die Resultate für die Schätzungen auf Basis der geordneten Stichprobe diskutiert.

Im Prinzip kann der Fehler in den Quantilschätzungen beim Monte-Carlo-Verfahren beliebig gesenkt werden. So beträgt der asymptotische Standardfehler bei Schätzung aus einer geordneten Stichprobe

$$s.e.(\hat{r}^*(p)) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{nf^2(r^*(p))}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Aus diesem Ausdruck geht hervor, dass die Fehler umso kleiner sind, je grösser der Stichprobenumfang ist. Diesem Umstand kann bei Monte-Carlo-Simulationen dadurch Rechnung getragen werden, dass die Anzahl Realisierungen erhöht wird. Durch die Erhöhung des Stichprobenumfangs kann allerdings nur der Schätzfehler reduziert werden, das Modellrisiko bleibt hingegen bestehen. Desweiteren muss beachtet werden, dass für eine Halbierung des Fehlers die Anzahl Realisierungen vervierfacht werden muss.

Bei der gewählten numerischen Umsetzung der Simulation tritt zudem ein Problem mit dem Speicherbedarf auf. In der entwickelten Software „mc“ werden alle drei Modelle parallel simuliert, das heisst die Zeitschritte werden simultan ausgeführt. Dies hat nicht nur den Vorteil, dass insgesamt weniger Schleifen durchlaufen werden müssen, sondern auch, dass bei einem Zeitschritt die gleichen Zufallszahlen verwendet werden können. Dies reduziert die Rechenzeit. Der Nachteil dieses Ansatzes besteht darin, dass die Realisierungen bis zur Anwendung der Schätzroutinen in Feldern gespeichert werden müssen, und zwar gleichzeitig für die einzelnen Modelle. Der verfügbare Speicherplatz für diese Felder determiniert somit die Anzahl Realisierungen.

Um trotzdem die Fehler in den Quantilschätzungen reduzieren zu können, und sich somit vor allem auf das Modellrisiko zu konzentrieren, wird folgendes Verfahren angewandt. Die Monte-Carlo-Simulationen werden  $M$ -mal mit jeweils gleicher Anzahl Realisierungen wiederholt. Dies ergibt  $M$  Quantilschätzungen  $\hat{r}_i^*(p)$  ( $i = 1, \dots, M$ ), woraus sich ein mittleres Quantil

$$\bar{r}^*(p) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{r}_i^*(p) \quad (9.1)$$

schätzen lässt. Letzteres dient als Basis für die Bestimmung des Value-at-Risk. In der vorliegenden Studie werden  $M = 10$  Wiederholungen mit jeweils 2000 Realisierungen generiert.

Die vom Autor entwickelte Software erlaubt es, automatisch für aufeinanderfolgende Tage jeweils die Simulationsrechnungen vorzunehmen und anschliessend Quantile sowie zusätzlich auch Lower-Partial-Moments zu schätzen. Verschiedene Halteperioden lassen sich durch entsprechende Wahl der auszuführenden Zeitschritte berücksichtigen.

### 9.3.2 Ex-post-Kriterien

#### Graphische Darstellung der Resultate

Abbildungen 9.4 bis 9.7 zeigen für ausgewählte  $p$ -Werte und Halteperioden der Value-at-Risk-Schätzung tägliche Value-at-Risk-Werte für den Zeitraum 1994 bis 1998. Erfasst sind ein- und zehntägige Halteperioden mit Konfidenzniveaus von jeweils 95% und 99%. In den Darstellungen der Value-at-Risk-Schätzungen bei Konfidenzniveau 99% sind zusätzlich diejenigen Zeitpunkte eingetragen, bei denen in den einzelnen Modellen eine Überschreitung der auf Grundlage einer geordneten Stichprobe geschätzten Value-at-Risk-Werte durch tatsächliche Marktveränderungen eingetreten ist. Um die Übersichtlichkeit zu gewährleisten, wurde bei den Darstellungen für das Konfidenzniveau 95% auf das Eintragen der Überschreitungszeitpunkte verzichtet. Bei diesem Konfidenzniveau treten wegen der höheren Restwahrscheinlichkeit sehr viel mehr Überschreitungen auf.

Wie aus den Abbildungen 9.4 und 9.6 ersichtlich, treten Überschreitungen der Value-at-Risk-Schätzungen vor allem bei ansteigenden Value-at-Risk-Werten auf. Dieses Ergebnis ist bereits von den historischen Simulationen her bekannt. Ebenso sind die Gründe für das deutliche Ansteigen der Value-at-Risk-Schätzungen in der zweiten Jahreshälfte 1998 diskutiert worden.

In der Regel führen der Sprung-Diffusions-Prozess und das hyperbolische Modell zu höheren Value-at-Risk-Schätzungen als die Geometrische Brownsche Bewegung. Dies ist auf die breiteren Enden der Renditeverteilungen in den beiden erstgenannten Mo-

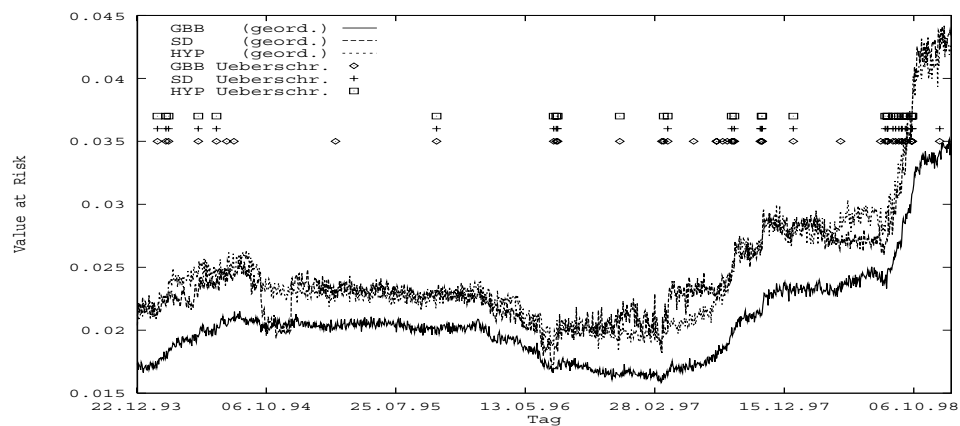


Abbildung 9.4: Tägliche VaR-Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen bei ein tägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 99%. Zeitraum 1994–1998.

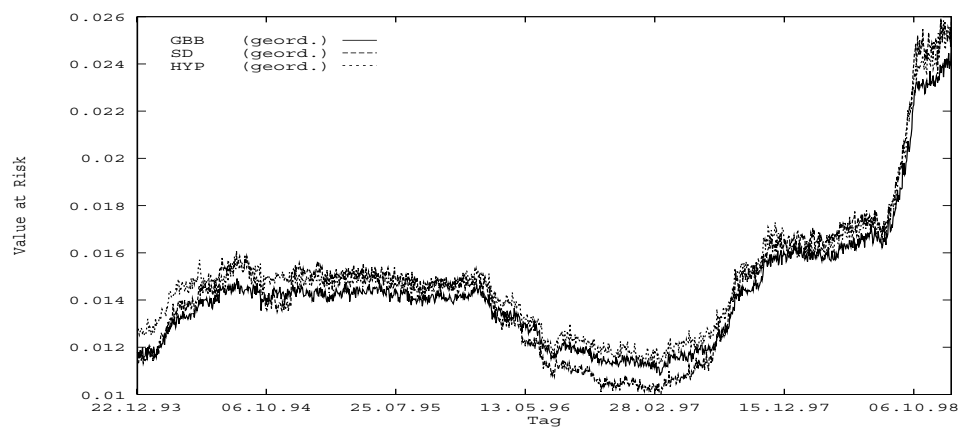
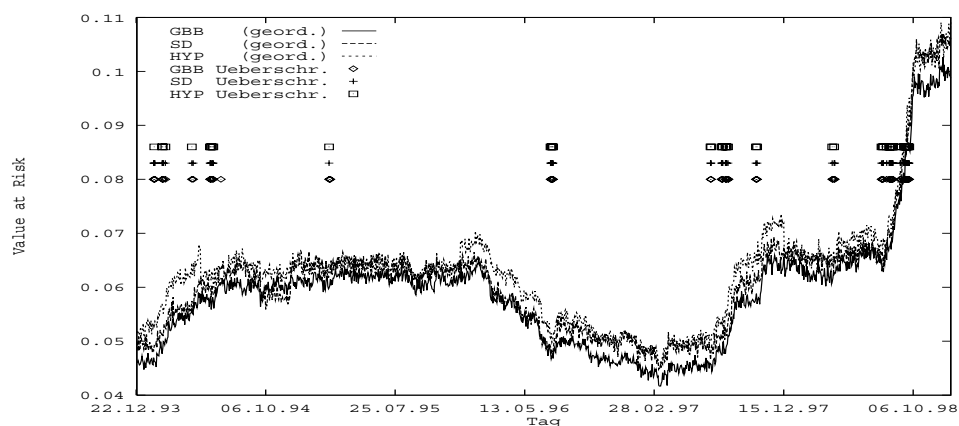
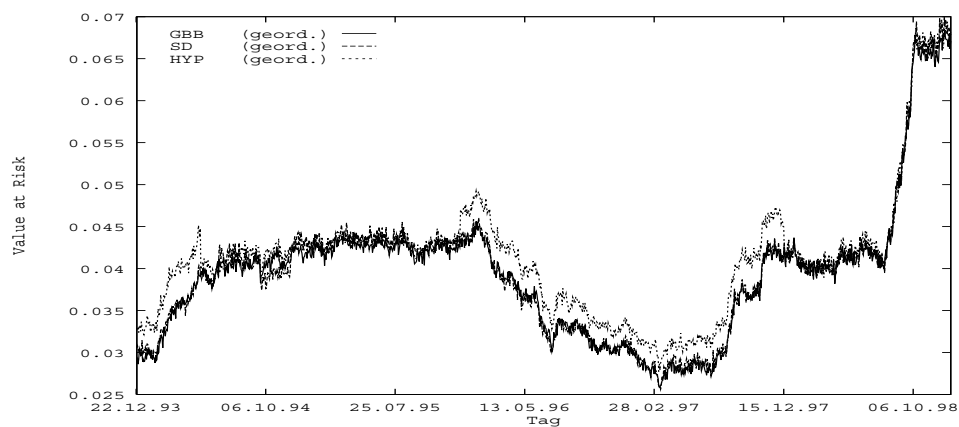


Abbildung 9.5: Tägliche VaR-Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen bei ein tägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 95%. Zeitraum 1994–1998.



Abbildungung 9.6: Tägliche VaR-Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen bei zehntägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 99%. Zeitraum 1994–1998.



Abbildungung 9.7: Tägliche VaR-Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen bei zehntägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 95%. Zeitraum 1994–1998.



dellen zurückzuführen.

Auffallend sind zwei Phänomene. So gleichen sich die Value-at-Risk-Schätzungen mit wachsender Halteperiode einerseits und mit höherer Restwahrscheinlichkeit  $p$  andererseits aneinander an. Diese Phänomene werden durch die Schätzung der mittleren relativen Abweichungen (MRB) und der Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung (RMSRB) bestätigt. Die Resultate für eine eintägige Halteperiode finden sich in Tabelle 9.10, diejenige für eine zehntägige Halteperiode in Tabelle 9.11.

	$p = 1.0\%$		$p = 2.5\%$		$p = 5.0\%$		$p = 7.5\%$	
	MRB	RMSRB	MRB	RMSRB	MRB	RMSRB	MRB	RMSRB
GBB	-0.1085	0.1130	-0.0589	0.0634	-0.0167	0.0267	0.0110	0.0249
SD	0.0499	0.0630	0.0169	0.0392	-0.0084	0.0373	-0.0227	0.0418
HYP	0.0586	0.0644	0.0419	0.0483	0.0251	0.0342	0.0117	0.0249

Tabelle 9.10: MRB und RMSRB für VaR-Schätzungen bei verschiedenen  $p$ -Werten und eintägiger Halteperiode.

	$p = 1.0\%$		$p = 2.5\%$		$p = 5.0\%$		$p = 7.5\%$	
	MRB	RMSRB	MRB	RMSRB	MRB	RMSRB	MRB	RMSRB
GBB	-0.0370	0.0413	-0.0280	0.0330	-0.0222	0.0287	-0.0170	0.0253
SD	0.0029	0.0197	-0.0047	0.0189	-0.0102	0.0215	-0.0176	0.0287
HYP	0.0341	0.0416	0.0328	0.0418	0.0324	0.0445	0.0346	0.0501

Tabelle 9.11: MRB und RMSRB für VaR-Schätzungen bei verschiedenen  $p$ -Werten und zehntägiger Halteperiode.

Für eine Halteperiode von einem Tag und  $p = 1\%$  liefert die Geometrische Brownsche Bewegung kleinere Schätzwerte als das über alle Modelle gebildete Mittel, der Sprung-Diffusions-Prozess und das hyperbolische Modell hingegen grössere Schätzwerte und damit konservativere Schätzungen. Bei  $p = 5\%$  liefert das hyperbolische Modell die konservativsten Schätzungen. Mit wachsender Restwahrscheinlichkeit  $p$  werden die MRB und vor allem die RMSRB kleiner, was auf eine Angleichung der Value-at-Risk-Schätzungen schliessen lässt.

Bei zehntägiger Halteperiode ergibt das hyperbolische Modell wiederum die konservativsten Schätzungen, das heisst die grössten Value-at-Risk-Schätzungen, und zwar für alle untersuchten  $p$ -Werte. In der Regel weisen alle Modelle im jeweiligen Vergleich zur eintägigen Halteperiode kleinere MRB und RMSRB auf, was wieder auf

eine Angleichung der Value-at-Risk-Schätzungen hinweist.

Für die Annäherung der Value-at-Risk-Schätzungen mit wachsender Halteperiode ist der Zentrale Grenzwertsatz verantwortlich. Bei den Simulationen ergeben sich die Zehntagesrenditen als Summe von zehn Tagesrenditen. Da die Tagesrenditen bei den Monte-Carlo-Simulationen unabhängig sind, ist deren Summe mit zunehmender Anzahl Summanden immer mehr als normalverteilte Zufallsvariable anzusehen. Bereits in der Untersuchung über das Verhalten von Zehntagesrenditen in Kapitel 5 konnte festgehalten werden, dass sich Zehntagesrenditen besser durch eine Normalverteilung beschreiben lassen als Tagesrenditen.

Die Angleichung der Schätzwerte mit wachsender Restwahrscheinlichkeit  $p$  vor allem bei eintägiger Halteperiode kann anschaulich erklärt werden. Für eine Illustration dieser Zusammenhänge wird auf historische Tagesrenditen der Jahre 1997 und 1998 zurückgegriffen. Abbildung 9.8 zeigt für diesen Zeitraum die geschätzte empirische Dichte, zusammen mit den Dichtefunktionen der Geometrischen Brownschen Bewegung, des Sprung-Diffusions-Prozesses und des hyperbolischen Modells im Bereich der Schätzwerte des 1%- und des 7.5%-Quantils. Zusätzlich sind Schätzwerte für das 1%- und das 7.5%-Quantil in den einzelnen Modellen eingetragen. Aus der Ab-

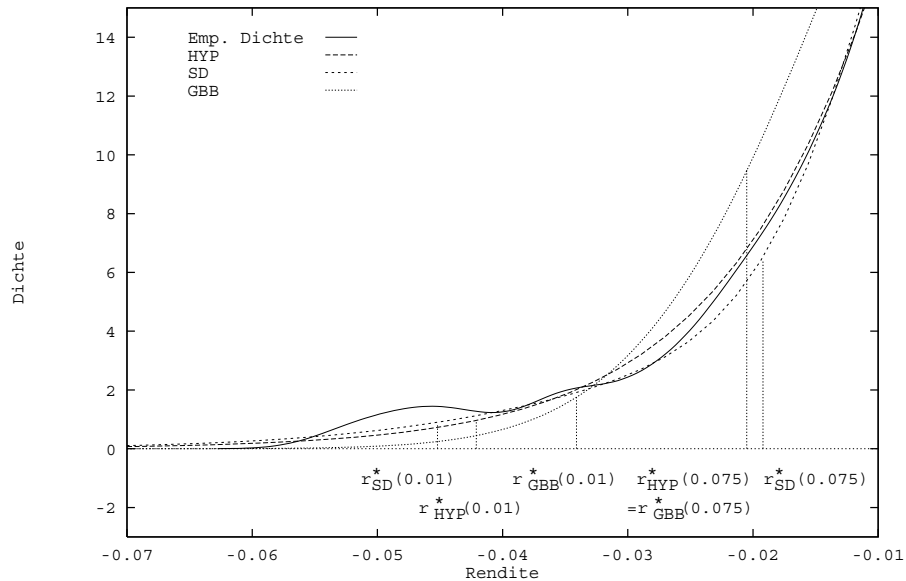


Abbildung 9.8: Vergleich der empirischen Dichte mit den Dichten der Modelle GBB, SD und HYP für den SMI im Zeitraum 1997 bis 1998.

bildung ist die gute Approximationseigenschaft der hyperbolischen Dichte und der Dichte des Sprung-Diffusions-Prozesses an die empirische Dichte im Vergleich zu einer Normalverteilung ersichtlich. Die 1%-Quantile unterscheiden sich daher auch deutlich, vor allem das 1%-Quantil der Normalverteilung im Vergleich zu den beiden anderen Verteilungen. Da die Dichtefunktion der Normalverteilung zunächst unterhalb der empirischen Dichte liegt, muss ein grösserer Wert für das Quantil gewählt werden, um für die Wahrscheinlichkeit  $p = 1\%$  genügend Wahrscheinlichkeitsmasse „aufzusammeln“ zu können. Im weiteren Verlauf liegt die Dichte der Normalverteilung über den Dichten der beiden anderen Modelle, was dazu führt, dass im Bereich des 7.5%-Quantils die Schätzwerte nahezu übereinstimmen. Trotz des deutlich unterschiedlichen Verlaufs der Dichtefunktionen, können bei bestimmten  $p\%$ -Quantilen die Value-at-Risk-Schätzungen zusammenfallen.

### **Korrelation zwischen tatsächlich eingetretenen Verlusten und Value-at-Risk-Schätzungen**

Die Rang-Korrelationskoeffizienten, welche Hinweise darüber geben, wie schnell Value-at-Risk-Schätzungen auf Marktveränderungen reagieren, sind für ein- und zehntägige Halteperioden in Tabelle 9.12 wiedergegeben.

Für eintägige Halteperioden lassen die sehr kleinen p-Values den Schluss zu, dass in allen Modellen signifikante Korrelationen bestehen. Diese Korrelationen fallen für das hyperbolische Modell und den Sprung-Diffusions-Prozess etwas höher aus als für die Geometrische Brownsche Bewegung. Dies ist wiederum auf die breiteren Enden der Renditeverteilungen in beiden erstgenannten Modellen zurückzuführen. Mit wachsender Restwahrscheinlichkeit nehmen zudem die Korrelationen ab.

Bei zehntägiger Halteperiode bestehen in allen Modellen nur für die Wahrscheinlichkeiten  $p = 1\%$  und  $p = 2.5\%$  signifikante Korrelationen.

### **Binäre Verlustfunktion und Likelihood-Ratio-Test nach Kupiec**

Die Tabellen 9.13 und 9.14 zeigen detaillierte Resultate über die Anzahl Überschreitungen beim Backtesting für verschiedene Halteperioden und verschiedene Konfidenzniveaus. Wie bei der Auswertung der historischen Simulationen zeigen die Tabellen sowohl die Ergebnisse für den gesamten Beobachtungszeitraum als auch für verschiedene Subperioden. Die graphisch gefundenen Resultate werden durch diese Ergebnisse bestätigt. So gleichen sich mit wachsender Restwahrscheinlichkeit  $p$  einerseits und wachsender Halteperiode andererseits die Anzahl Überschreitungen in den verschiedenen Modellen an, was auf sich angleichende Value-at-Risk-Schätzungen zurückzuführen ist. Dieses Phänomen wurde bereits diskutiert. Auch ist eine deutliche Zunahme der Überschreitungen gegen Ende des Untersuchungszeitraumes zu beobachten. Dies liegt an der unruhigen Börsensituation im Jahr 1998.

Bei einer Halteperiode von einem Tag ergibt sich folgendes Bild. Das hyperbolische

Modell	Halteperiode	$p$ [%]	$\tau$	Anzahl Std.Abw.	p-Value
GBB	1 Tag	1.0	0.1074	5.7080	0.0000
		2.5	0.1077	5.7209	0.0000
		5.0	0.1117	5.9324	0.0000
		7.5	0.0998	5.3035	0.0000
SD	1 Tag	1.0	0.1565	8.3164	0.0000
		2.5	0.1323	7.0268	0.0000
		5.0	0.1174	6.2372	0.0000
		7.5	0.0909	4.8278	0.0000
HYP	1 Tag	1.0	0.1664	8.8388	0.0000
		2.5	0.1522	8.0840	0.0000
		5.0	0.1262	6.7029	0.0000
		7.5	0.1098	5.8321	0.0000
GBB	10 Tage	1.0	0.0674	3.5703	0.0004
		2.5	0.0384	2.0347	0.0419
		5.0	0.0132	0.7012	0.4832
		7.5	-0.0013	-0.0692	0.9448
SD	10 Tage	1.0	0.0692	3.6613	0.0003
		2.5	0.0394	2.0874	0.0368
		5.0	0.0143	0.7569	0.4491
		7.5	0.0000	0.0022	0.9982
HYP	10 Tage	1.0	0.0962	5.0917	0.0000
		2.5	0.0726	3.8433	0.0001
		5.0	0.0246	1.3022	0.1929
		7.5	0.0052	0.2743	0.7839

Tabelle 9.12: Schätzungen des Rang-Korrelationskoeffizienten bei verschiedenen  $p$ -Werten der Value-at-Risk-Schätzung und Halteperioden.

Swiss Market Index	$p = 1.0\%$			$p = 2.5\%$			$p = 5.0\%$			$p = 7.5\%$		
	GBB	SD	HYP	GBB	SD	HYP	GBB	SD	HYP	GBB	SD	HYP
22.12.93–13.12.95 ( $T = 500$ ) Anzahl Überschreitungen in %	1.8	1.2	1.2	3.2	2.8	2.2	5.8	5.6	5.0	8.4	8.6	8.0
14.12.95–15.12.97 ( $T = 500$ ) Anzahl Überschreitungen in %	3.6**	2.2*	2.4**	5.4**	4.4*	4.2*	7.2*	7.4*	7.2*	8.8	9.6	8.4
16.12.97–30.12.98 ( $T = 258$ ) Anzahl Überschreitungen in %	6.6**	5.8**	5.0**	9.7**	7.0**	7.4**	11.6**	11.6**	11.2**	13.2**	13.2**	13.2**
22.12.93–30.12.98 ( $T = 1258$ ) Anzahl Überschreitungen in %	3.5**	2.5**	2.5**	5.4**	4.3**	4.1**	7.6**	7.6**	7.2**	9.5**	9.9**	9.2*
LR-Test: * signifikant bei $\alpha = 5\%$ ** signifikant bei $\alpha = 1\%$												

Tabelle 9.13: Ergebnisse des Backtesting für die VaR-Schätzungen bei Monte-Carlo-Simulationen des SMI vom 22.12.1993 bis 30.12.1998 bei unterschiedlichen Konfidenzniveaus und eintägiger Halteperiode.

Swiss Market Index	$p = 1.0\%$			$p = 2.5\%$			$p = 5.0\%$			$p = 7.5\%$		
	GBB	SD	HYP	GBB	SD	HYP	GBB	SD	HYP	GBB	SD	HYP
22.12.93–13.12.95 ( $T = 500$ ) Anzahl Überschreitungen in %	3.4**	3.0**	2.2*	6.0**	5.8**	5.6**	8.8**	8.8**	7.8**	11.2**	11.2**	10.4*
14.12.95–15.12.97 ( $T = 500$ ) Anzahl Überschreitungen in %	3.8**	3.2**	3.2**	5.4**	5.4**	5.0**	7.8**	7.6*	6.6	9.2	9.2	8.4
16.12.97–30.12.98 ( $T = 249$ ) Anzahl Überschreitungen in %	10.8**	10.8**	9.6**	13.7**	12.5**	12.9**	19.7**	19.7**	19.3**	22.1**	22.1**	22.1**
22.12.93–30.12.98 ( $T = 1249$ ) Anzahl Überschreitungen in %	5.0**	4.6**	4.1**	7.3**	7.0**	6.8**	10.6**	10.5**	9.6**	12.6**	12.6**	11.9**
LR-Test: * signifikant bei $\alpha = 5\%$ ** signifikant bei $\alpha = 1\%$												

Tabelle 9.14: Ergebnisse des Backtesting für die VaR-Schätzungen bei Monte-Carlo-Simulationen des SMI vom 22.12.1993 bis 30.12.1998 bei unterschiedlichen Konfidenzniveaus und zehntägiger Halteperiode.

Modell führt zu den geringsten Überschreitungszahlen, knapp gefolgt vom Sprung-Diffusions-Prozess, aber deutlich vor der Geometrischen Brownschen Bewegung. Die Nullhypothese des Likelihood-Ratio-Tests nach Kupiec, nämlich dass es sich bei dem der Value-at-Risk-Schätzung zugrundeliegenden Modell um ein genaues Modell handelt, wird vor allem für die ersten 500 Beobachtungen nicht abgelehnt. Die Wahrscheinlichkeit für eine Nichtablehnung steigt mit sinkendem Konfidenzniveau der Value-at-Risk-Schätzung.

Der Likelihood-Ratio-Test ist jedoch nicht in der Lage, zwischen den vorliegenden Modellen zu differenzieren. Wird für ein Modell die Nullhypothese verworfen beziehungsweise nicht verworfen, so trifft in der Regel für die verbleibenden zwei Modelle dasselbe zu. Ebenfalls untersucht wurden kleine  $p$ -Werte von 0.1%, 0.25% und 0.5%. Bei diesen  $p$ -Werten tritt erst für  $p = 0.1\%$  und den Gesamtbeobachtungszeitraum der Fall ein, dass der Likelihood-Ratio-Test zwischen den Modellen unterscheidet. Bei einem derartigen  $p$ -Wert treten aber für alle Modelle in einzelnen Subperioden keine Überschreitungen auf, so dass der Likelihood-Ratio-Test nicht angewendet werden kann. Dieser Umstand tritt auch schon für  $p$ -Werte zwischen 1% und 0.1% ein (vgl. Weber [113]).

Für eine Halteperiode von zehn Tagen lassen sich folgende Aussagen machen. Wieder führt das hyperbolische Modell zu den geringsten Überschreitungszahlen. Die Hypothese eines genauen Modells wird für grössere  $p$ -Werte und für die zweiten 500 Beobachtungen nicht abgelehnt.

### **Vergleich von mittlerer tatsächlicher und mittlerer erwarteter Überschreitungshöhe**

Die Abweichungen zwischen mittlerer tatsächlicher relativer Überschreitungshöhe  $\overline{RUH}$  und mittlerer erwarteter relativer Überschreitungshöhe  $\overline{REUH}$  relativ zu  $\overline{RUH}$  sind für eine eintägige Halteperiode in Tabelle 9.15 wiedergegeben. Die relativen Abweichungen für den Sprung-Diffusions-Prozess und das hyperbolische Modell sind miteinander vergleichbar. Sie liegen für den Gesamtbeobachtungszeitraum zwischen 3% und 30%. Sie sind aber in allen Fällen sehr viel kleiner als die relativen Abweichungen bei der Geometrischen Brownschen Bewegung, die zwischen 50% und 60% liegen.

Die Ergebnisse für die zehntägige Halteperiode sind in Tabelle 9.16 zusammengefasst. Die relativen Abweichungen für die einzelnen Modelle liegen nun alle im Bereich zwischen 50% und 60%. Nur für kleine  $p$ -Werte weisen Sprung-Diffusions-Prozess und hyperbolisches Modell geringere Abweichungen auf. Während diese relativen Abweichungen für die Geometrische Brownsche Bewegung mit denjenigen bei eintägiger Halteperiode vergleichbar sind, liegen sie für die verbleibenden Modelle über den entsprechenden Werten bei eintägiger Halteperiode.

Periode	Modell	$p = 1.0\%$	$p = 2.5\%$	$p = 5.0\%$	$p = 7.5\%$
22.12.93 bis 13.12.95	GBB	0.5099	0.4443	0.3372	0.2656
	SD	-0.0149	0.0655	0.0343	0.0286
	HYP	-0.4500	0.1209	-0.0386	-0.0585
14.12.95 bis 15.12.97	GBB	0.6207	0.5834	0.5689	0.5441
	SD	0.1161	0.1806	0.2506	0.3055
	HYP	0.1623	0.2847	0.2726	0.3655
16.12.97 bis 30.12.98	GBB	0.6275	0.5842	0.6006	0.6008
	SD	0.2984	0.4737	0.3947	0.4054
	HYP	-0.0521	0.3083	0.3450	0.3961
22.12.93 bis 30.12.98	GBB	0.6082	0.5606	0.5338	0.5011
	SD	0.1546	0.2774	0.2644	0.2813
	HYP	0.0289	0.2886	0.2605	0.2968

Tabelle 9.15: Relative Abweichung  $(\overline{RUH} - \overline{REUH})/\overline{RUH}$  bei verschiedenen Konfidenzniveaus und eintägiger Halteperiode.

Periode	Modell	$p = 1.0\%$	$p = 2.5\%$	$p = 5.0\%$	$p = 7.5\%$
22.12.93 bis 13.12.95	GBB	0.4452	0.4559	0.4585	0.4451
	SD	0.3470	0.3892	0.4009	0.4089
	HYP	0.3968	0.2613	0.3633	0.3552
14.12.95 bis 15.12.97	GBB	0.4962	0.5482	0.5188	0.5304
	SD	0.4244	0.4525	0.4642	0.4779
	HYP	0.3028	0.4107	0.4639	0.4610
16.12.97 bis 30.12.98	GBB	0.6913	0.6832	0.6159	0.6166
	SD	0.6324	0.6781	0.5810	0.5877
	HYP	0.6325	0.6372	0.5690	0.5709
22.12.93 bis 30.12.98	GBB	0.6035	0.5980	0.5531	0.5496
	SD	0.5386	0.5545	0.5047	0.5098
	HYP	0.5411	0.5164	0.5084	0.5025

Tabelle 9.16: Relative Abweichung  $(\overline{RUH} - \overline{REUH})/\overline{RUH}$  bei verschiedenen Konfidenzniveaus und zehntägiger Halteperiode.



### Kombination von Überschreitungen und Überschreitungshöhen

Als letztes Kriterium zur Beurteilung des Modellrisikos wird die Masszahl *KOMB* analysiert, die Überschreitungen und relative Überschreitungshöhen kombiniert. Der Gewichtungsfaktor wird wieder auf  $w = 2/3$  festgelegt. In den Tabellen 9.17 und 9.18 sind die Ergebnisse für ein- und zehntägige Halteperioden dokumentiert. Bei

Periode	Modell	$p = 1.0\%$	$p = 2.5\%$	$p = 5.0\%$	$p = 7.5\%$
22.12.93 bis 13.12.95	GBB	0.5031	0.4106	0.2930	0.2225
	SD	0.0051	0.0722	0.0509	0.0557
	HYP	-0.3657	0.0903	-0.0301	-0.0254
14.12.95 bis 15.12.97	GBB	0.6359	0.5751	0.5207	0.4688
	SD	0.1669	0.2182	0.2640	0.2891
	HYP	0.2225	0.3038	0.2794	0.3201
16.12.97 bis 30.12.98	GBB	0.6802	0.6280	0.5930	0.5611
	SD	0.4587	0.5092	0.4357	0.4113
	HYP	0.1992	0.3904	0.3975	0.4040
22.12.93 bis 30.12.98	GBB	0.6242	0.5563	0.4937	0.4380
	SD	0.2254	0.2997	0.2781	0.2734
	HYP	0.1247	0.3035	0.2690	0.2737

Tabelle 9.17: Relative Abweichung  $(KOMB - EKOMB)/KOMB$  bei verschiedenen Konfidenzniveaus und eintägiger Halteperiode.

eintägiger Halteperiode liegen die relativen Abweichungen für den Sprung-Diffusions-Prozess und das hyperbolische Modell sehr nahe beieinander und betragen für den Gesamtbeobachtungszeitraum zwischen 12% und 30%. Diese Abweichungen sind deutlich geringer als bei der Geometrischen Brownschen Bewegung, welche Werte zwischen 44% und 62% verzeichnet.

Für zehntägige Halteperioden gleichen sich die Abweichungen wieder an und liegen nun für den Gesamtbeobachtungszeitraum zwischen 47% und 60%.

### Die Implikationen bei Anwendung des Ampelkonzeptes

Bei *allen* Modellen hätte aufgrund der Backtesting-Resultate der Multiplikationsfaktor erhöht werden müssen (vgl. Tabelle 9.13, Spalte  $p = 1\%$ ). So hätten die Ergebnisse des Jahres 1998 für alle Modelle zu einem Multiplikationsfaktor von Vier geführt, da für alle Modelle mehr als zehn Überschreitungen aufgetreten sind.

Wird das etwas vereinfachte Verfahren zur Bestimmung der Eigenkapitalunterlegung angewendet, bei dem jeweils die aktuellen Value-at-Risk-Schätzungen mit dem Faktor Drei multipliziert werden, so wären bei zehntägiger Halteperiode und 99% Konfi-

Periode	Modell	$p = 1.0\%$	$p = 2.5\%$	$p = 5.0\%$	$p = 7.5\%$
22.12.93 bis 13.12.95	GBB	0.4949	0.4852	0.4520	0.4161
	SD	0.4057	0.4309	0.4087	0.3891
	HYP	0.4165	0.3374	0.3623	0.3357
14.12.95 bis 15.12.97	GBB	0.5401	0.5463	0.4888	0.4711
	SD	0.4657	0.4677	0.4421	0.4279
	HYP	0.3785	0.4280	0.4248	0.3972
16.12.97 bis 30.12.98	GBB	0.7515	0.7184	0.6564	0.6290
	SD	0.7136	0.7065	0.6329	0.6083
	HYP	0.7022	0.6801	0.6220	0.5964
22.12.93 bis 30.12.98	GBB	0.6418	0.6099	0.5470	0.5174
	SD	0.5845	0.5715	0.5090	0.4864
	HYP	0.5775	0.5409	0.5020	0.4733

Tabelle 9.18: Relative Abweichung  $(KOMB - EKOMB)/KOMB$  bei verschiedenen Konfidenzniveaus und zehntägiger Halteperiode.

denzniveau die Eigenmittel in jedem Fall, das heisst für jeden Tag und jedes Modell, völlig ausreichend gewesen. Die Erhöhung des Faktors wäre also nicht notwendig.

### Schätzung von Lower-Partial-Moments

Abschliessend werden die Ergebnisse der LPM-Schätzungen diskutiert. Die Zielrendite wurde auf 0% festgelegt, das heisst es soll zumindest kein Verlust auftreten. Der Exponent  $k$ , welcher die Gewichtung der Abweichungen von der Zielrendite festlegt, wurde auf  $k = 2$  gesetzt. Abbildungen 9.9 und 9.10 zeigen den zeitlichen Verlauf der LPM-Stichprobenschätzungen für ein- und zehntägige Halteperioden. Für die betrachteten Modelle ergibt sich für fast alle Zeitpunkte die Reihenfolge  $LPM_{HYP} > LPM_{SD} > LPM_{GBB}$ . Da sich bei diesen Modellen aufgrund der geschätzten Parameter fast symmetrische und zentrierte Renditeverteilungen ergeben, können die  $LPM_2(0)$  als „halbe Varianz“ interpretiert werden. So berücksichtigen die Lower-Partial-Moments hier vor allem die breiten Enden der Renditeverteilungen des hyperbolischen Modells und des Sprung-Diffusions-Prozesses im Vergleich zur Geometrischen Brownschen Bewegung.

Die höheren LPM-Schätzungen bei längerer Halteperiode erklären sich aus der Dispersion der Dichtefunktionen in Abhängigkeit von der Zeit.

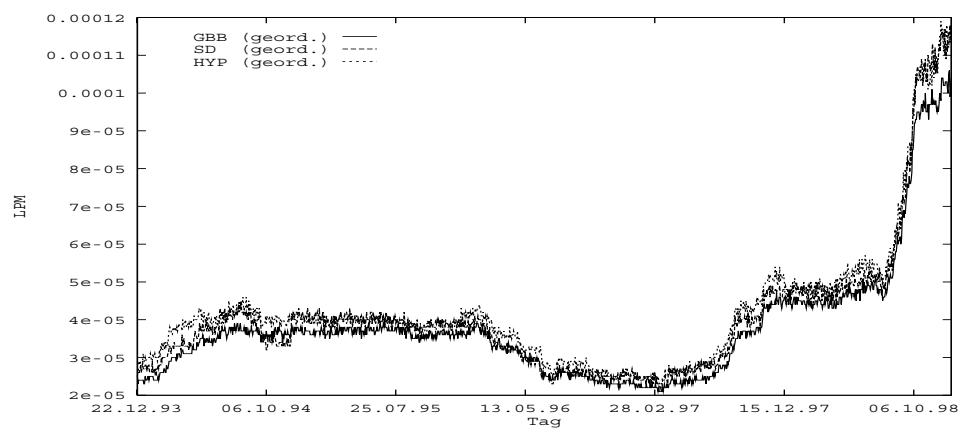


Abbildung 9.9: Tägliche  $LPM_2(0)$ -Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen bei eintägiger Halteperiode. Zeitraum 1994–1998.

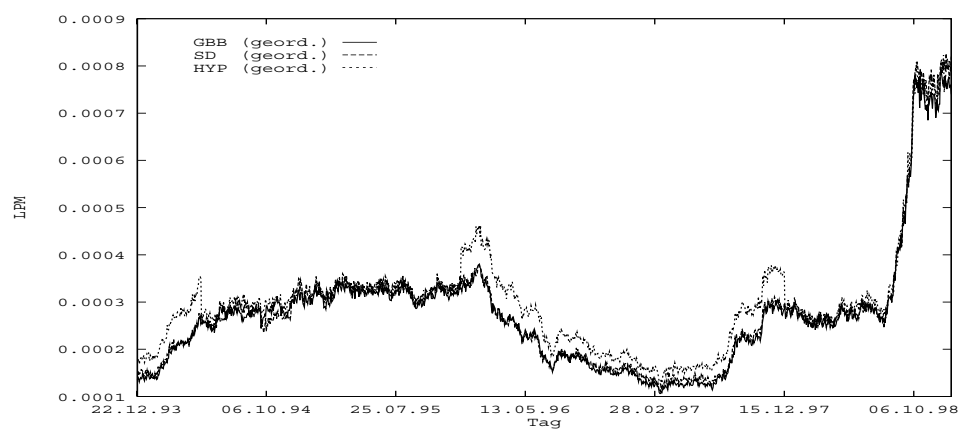


Abbildung 9.10: Tägliche  $LPM_2(0)$ -Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen bei zehntägiger Halteperiode. Zeitraum 1994–1998.

### 9.3.3 Zusammenfassung der Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulationen

Die Untersuchungen in den vorangegangenen Abschnitten dieses Kapitels sollten der Frage nachgehen, welches der expliziten Modelle das geringste Modellrisiko vermuten lässt.

Zunächst ist festzuhalten, dass dieses Modellrisiko auch von den gewählten Parametern der Value-at-Risk-Schätzung abhängt, also von Halteperiode und Konfidenzniveau. Es hat sich herausgestellt, dass allein aufgrund der Überschreitungszahlen die Frage nach dem Modellrisiko nicht beantwortet werden kann. Dazu ist der Likelihood-Ratio-Test nach Kupiec für die vorliegenden Modelle zu wenig trennscharf. Einzig auf der Grundlage geringerer Überschreitungszahlen auf ein „besseres“ Modell zu schließen, ist gefährlich. Geringere Überschreitungszahlen als theoretisch erwartet, bedeuten ebenfalls ein Modellrisiko, welches sich in einer zu konservativen und damit mit hohen Kosten verbundenen Eigenmittelunterlegung niederschlägt. Zudem gleichen sich die Schätzungen und damit die Überschreitungszahlen mit wachsenden Restwahrscheinlichkeiten an. Der Vorteil einer besseren Approximation von empirischen Renditeverteilungen durch bestimmte Modelle geht dann verloren.

Das von den Bankaufsichtsbehörden entwickelte Ampelkonzept basiert auf diesen Überschreitungszahlen und ist daher nur in eingeschränktem Masse geeignet, „bessere“ von „schlechteren“ Modellen zu trennen. Eine Festlegung des Basler Multiplikationsfaktors allein auf Grundlage dieses Kriteriums erscheint unzureichend.

Deshalb wurden für die Beurteilung des Modellrisikos weitere Kriterien analysiert. Die Schätzung des Rang-Korrelationskoeffizienten gibt zwar keinen Hinweis zugunsten des einen oder anderen Modells, zeigt dafür aber deutlich, dass Halteperioden oder Prognosehorizonte von zehn Tagen zu lang sind, um realen Marktveränderungen gerecht zu werden.

Dies wird auch durch die grossen relativen Abweichungen zwischen mittlerer tatsächlicher und mittlerer erwarteter Überschreitungshöhe deutlich. Bei zehntägiger Halteperiode prognostizieren alle drei Modelle die Überschreitungshöhen in sehr ungenügendem Ausmass. Bei eintägiger Halteperiode zeigen der Sprung-Diffusions-Prozess und das hyperbolische Modell dagegen sehr viel geringere Abweichungen als die Normalverteilung, dies zudem für alle untersuchten Konfidenzniveaus (vgl. auch Tabelle 9.15).

Die gleichen Ergebnisse zeigt das Kriterium, welches Überschreitungszahlen und Überschreitungshöhen kombiniert. Es lassen sich so in einer Masszahl mehrere Informationen in einfacher Weise berücksichtigen.

Für eintägige Halteperioden kann also im Sinne der untersuchten Kriterien eine Reduktion des Modellrisikos erzielt werden, wenn statt der Geometrischen Brownschen Bewegung, der Sprung-Diffusions-Prozess oder das hyperbolische Modell zur An-

---

wendung gelangen. Inwieweit sich explizite Modelle und das implizite Modell der historischen Simulation bezüglich ihres Modellrisikos unterscheiden, wird im folgenden Abschnitt diskutiert.

## 9.4 Vergleich von historischer Simulation und Monte-Carlo-Simulation

Beim Vergleich zwischen historischer Simulation und Monte-Carlo-Simulation handelt es sich um die Gegenüberstellung des impliziten Modells, welches der historischen Simulation zugrunde liegt, und von expliziten Modellen, für welche Monte-Carlo-Simulationen durchgeführt werden. Beim Backtesting kann dann mittels verschiedener Kriterien das Modellrisiko abgeschätzt werden.

Ein weiteres Vergleichskriterium, das vor allem in der praktischen Umsetzung eine wichtige Rolle spielt, ist der numerische Aufwand, das heisst die Rechenzeiten bis eine Value-at-Risk-Schätzung vorliegt.

### 9.4.1 Vergleich der Ex-post-Kriterien zur Überprüfung des Modellrisikos

#### Korrelation zwischen Value-at-Risk-Schätzungen und tatsächlich eingetretenen Verlusten

Bei eintägiger Halteperiode sind die Korrelationskoeffizienten für das implizite Modell und die expliziten Modelle, vor allem für den Sprung-Diffusions-Prozesses und das hyperbolische Modell ungefähr gleich gross. Es bestehen signifikante Korrelationen zwischen Value-at-Risk-Schätzungen und tatsächlich eingetretenen Verlusten.

Bei zehntägiger Halteperiode zeigen die expliziten Modelle zumindest für kleine  $p$ -Werte signifikante Korrelationen, während beim impliziten Modell solche Korrelationen nicht bestehen. Dies dürfte darauf zurückzuführen sein, dass bei der Berechnung der Zehntagesrenditen sich überlappende Zeiträume verwendet werden, und so nur noch wenige unkorrelierte Renditen für die Schätzung des Rang-Korrelationskoeffizienten zur Verfügung stehen.

#### Binäre Verlustfunktion und Likelihood-Ratio-Test nach Kupiec

Der Likelihood-Ratio-Test nach Kupiec kann in der Regel nicht zwischen implizitem Modell einerseits und den expliziten Modellen andererseits differenzieren.

Was die Überschreitungszahlen angeht, so führen der Sprung-Diffusions-Prozess und das hyperbolische Modell zu ähnlichen Ergebnissen wie die historische Simulation, mit leicht geringeren Überschreitungszahlen bei der historischen Simulation in der zweiten Jahreshälfte 1998, die durch stark ansteigende Value-at-Risk-Schätzungen charakterisiert war. Dies gilt einheitlich für die verschiedenen Konfidenzniveaus und Halteperioden.

### Vergleich von tatsächlicher und erwarteter Überschreitungshöhe

Auch die relativen Abweichungen zwischen mittlerer tatsächlicher und mittlerer erwarteter Überschreitungshöhe liegen für die historische Simulation, den Sprung-Diffusions-Prozess und das hyperbolische Modell bei eintägiger Halteperiode in der gleichen Grössenordnung. Bei zehntägiger Halteperiode und auf den Gesamtzeitraum bezogen, liegen die Abweichungen bei allen expliziten Modellen zwischen 50% und 60%. Die historische Simulation zeigt hingegen etwas tiefere Werte um 40%.

### Kombination von Überschreitungszeiten und Überschreitungshöhen

In den Abbildungen 9.11 und 9.12 sind die Ergebnisse für das aus relativen Überschreitungszeiten und relativen Überschreitungshöhen gebildete Kriterium für eintägige respektive für zehntägige Halteperioden erfasst. Abgebildet sind für verschiedene Restwahrscheinlichkeiten  $p$  jeweils die relativen Abweichungen zwischen tatsächlichem Wert  $KOMB$  und erwartetem Wert  $EKOMB$  dieses Kriteriums. Bei eintägiger Halteperiode ergibt sich folgendes Bild. Die relativen Abweichungen bei der historischen Simulation steigen mit wachsenden  $p$ -Werten leicht an. Für den Sprung-Diffusions-Prozess und das hyperbolische Modell steigen diese Abweichungen von  $p = 1\%$  auf  $p = 2.5\%$  ebenfalls an, bleiben dann aber nahezu konstant. Desweiteren kommt es zu einer Angleichung der Abweichungen zwischen den beiden letztgenannten Modellen und dem impliziten Modell mit wachsender Restwahrscheinlichkeit, wobei für alle  $p$ -Werte diese Abweichungen in der gleichen Grössenordnung liegen. Bei der Geometrischen Brownschen Bewegung sinken die relativen Abweichungen mit wachsenden  $p$ -Werten, sind aber gegenüber den anderen Modellen jeweils deutlich erhöht.

Bei zehntägiger Halteperiode liegen die relativen Abweichungen für alle Modelle über denjenigen bei eintägiger Halteperiode. Die expliziten Modelle unterscheiden sich nur wenig, die relativen Abweichungen bei der historischen Simulation sind hingegen etwas geringer. Für alle Modelle ist weiter ein leichtes Sinken der Abweichungen mit wachsender Restwahrscheinlichkeit  $p$  zu beobachten.

Bei der historischen Simulation, dem Sprung-Diffusions-Prozess und beim hyperbolischen Modell sind die Abweichungen für eine eintägige Halteperiode und für  $p = 1\%$  am kleinsten.

### 9.4.2 Vergleich der Rechenzeiten

Der numerische Aufwand für beide Verfahren wird darüber abgeschätzt, wie lange die einzelnen Programme in ihrer Ausführung auf demselben Rechner benötigen.

Solch eine Abschätzung kann nur grob sein, da die Programme zur historischen Simulation und zur Monte-Carlo-Simulation völlig andere Strukturen aufweisen. So sind bei den Monte-Carlo-Simulationen die Stichprobenumfänge viel grösser als bei der historischen Simulation, was längere Rechenzeiten bedeutet. Zudem werden beim Monte-Carlo-Verfahren in der vorliegenden Version mehrere Simulationsrechnungen

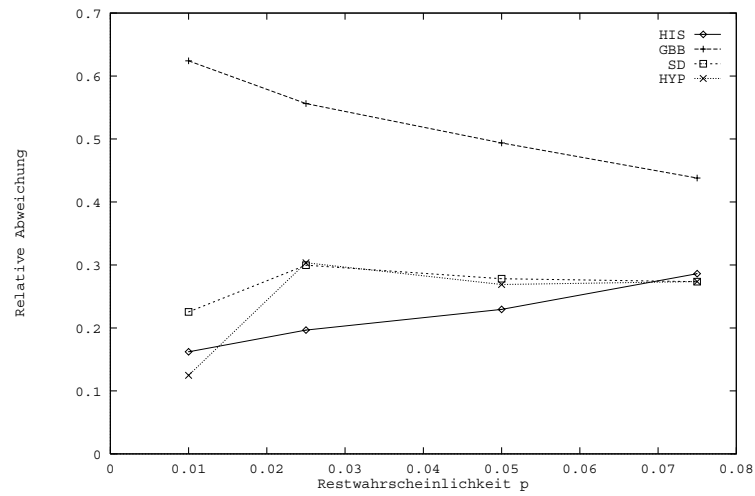


Abbildung 9.11: Relative Abweichung  $(KOMB - EKOMB)/KOMB$  bei verschiedenen Konfidenzniveaus und eintägiger Halteperiode.

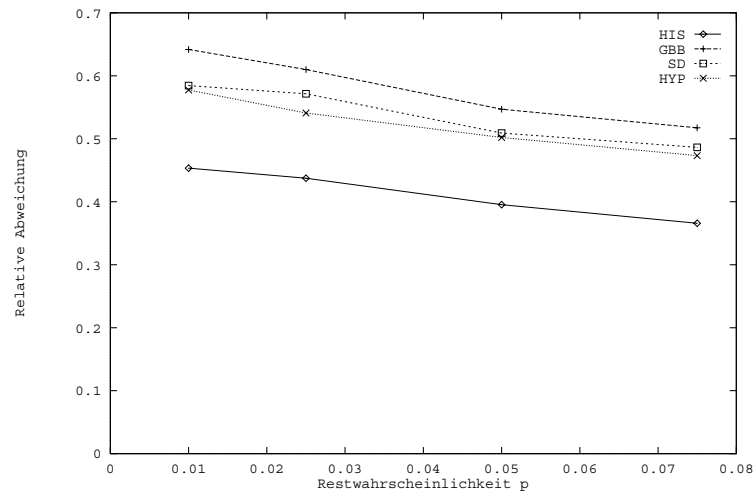


Abbildung 9.12: Relative Abweichung  $(KOMB - EKOMB)/KOMB$  bei verschiedenen Konfidenzniveaus und zehntägiger Halteperiode.



durchgeführt und anschliessend der Mittelwert der Quantile geschätzt. Das Programm für die Monte-Carlo-Simulationen ist dabei so angelegt, dass alle drei Modelle gleichzeitig simuliert werden. Nicht vernachlässigt werden darf schliesslich auch die Rechenzeit für die jeweiligen Parameterschätzungen. Auf der anderen Seite ist beim Programm zur historischen Simulation eine nichtparametrische Quantilschätzung auf Grundlage einer Kerndichteschätzung implementiert, die numerisch sehr aufwendig ist.

Unter diesen Vorbehalten sind die in Tabelle 9.19 zusammengestellten Rechenzeiten zu betrachten. Sie geben die realisierten Zeiten für die 1259 Value-at-Risk-Schätzungen bei einem Konfidenzniveau von 95% an. Berücksichtigt sind Halteperioden von einem und zehn Tagen. Die Simulationsrechnungen wurden auf einem Pentium-II-Prozessor mit 350 MHz Taktfrequenz und 64 MB RAM Arbeitsspeicher ausgeführt. Es zeigt sich, dass die Rechenzeiten der Monte-Carlo-Simulationen gegenüber den historischen Simulationen um ein Vielfaches höher sind. Im besten Fall kann die für

Halteperiode	Monte-Carlo-Simulation	Historische Simulation
1 Tag	539 min	0.75 min
10 Tage	941 min	0.67 min

Tabelle 9.19: Approximative Rechenzeiten für 1259 tägliche Value-at-Risk-Schätzungen bei Monte-Carlo-Simulationen und bei historischen Simulationen.

die Monte-Carlo-Simulation angegebene Zeit durch Drei geteilt werden, um für ein einziges Modell die Ausführungszeit zu erhalten. Um die Rechenzeit zusätzlich zu reduzieren, könnte auf die Bestimmung des arithmetischen Mittels der Quantile aus zehn Wiederholungen verzichtet und die Anzahl Realisierungen auf 500 reduziert werden, was der Anzahl entspricht, die der historischen Simulation als Stichprobe zugrundeliegt.

Entsprechende Simulationsrechnungen wurden durchgeführt. So ergibt sich bei gleichzeitiger Simulation aller drei expliziten Modelle für die 1259 Tage neu eine Rechenzeit von circa 3.5 Minuten bei eintägiger und circa 10.8 Minuten bei zehntägiger Halteperiode. Im besten Fall benötigt ein einzelnes Modell circa 1.05 Minuten respektive 3.6 Minuten zur Ausführung. Die historische Simulation ist daher bezüglich der Rechenzeiten vorzuziehen.

### 9.4.3 Zusammenfassung

Zusammengefasst lässt sich über das Modellrisiko auf Grundlage aller untersuchten Kriterien folgende Aussage machen. Im Rahmen des Value-at-Risk-Konzeptes sind die Modellrisiken der untersuchten expliziten Modelle und des impliziten Modells bei

zehntägiger Halteperiode grösser als bei eintägiger Halteperiode.

Bei eintägiger Halteperiode zeigen die historische Simulation, der Sprung-Diffusions-Prozess und das hyperbolische Modell vergleichbare Modellrisiken, die für  $p = 1\%$  am kleinsten sind. Bei zehntägiger Halteperiode ist hingegen der historischen Simulation das geringste Modellrisiko zuzuschreiben.

## 9.5 Konsequenzen aus der Langzeitstudie

Am Schluss dieses Kapitels über die Langzeitstudie von Value-at-Risk-Schätzungen des SMI sollen die Ergebnisse und die sich daraus ergebenden Konsequenzen zusammengefasst werden:

1. Historische Simulationen lassen sich schnell umsetzen und es lassen sich einfach Value-at-Risk-Werte schätzen. Bei Monte-Carlo-Simulationen können die Fehler in der Quantilschätzung so verringert werden, dass hauptsächlich Approximationsfehler in der expliziten Modellbildung miteinander verglichen werden. Dies erhöht aber die notwendigen Rechenzeiten in grossem Umfang.
2. Der Likelihood-Ratio-Test nach Kupiec ist als Kriterium zur Abschätzung des Modellrisikos im Rahmen des Value-at-Risk-Konzeptes bei den untersuchten Modellen zu wenig aussagekräftig. Es muss durch weitere Kriterien ergänzt werden. Als aussagekräftiges Kriterium hat sich die Kombination aus relativen Überschreitungszahlen und relativen Überschreitungshöhen erwiesen. Bei der Überprüfung des Modellrisikos lassen sich auf diese Weise wesentlich mehr Informationen einer Modellverteilung einbeziehen.
3. Bei allen expliziten Modellen und dem impliziten Modell sind die Modellrisiken bei eintägiger Halteperiode geringer als bei einer Halteperiode von zehn Tagen. Bei eintägiger Halteperiode weisen die historischen Simulationen, der Sprung-Diffusions-Prozess und das hyperbolische Modell ähnliche Modellrisiken auf, die für ein Konfidenzniveau von 99% am geringsten ausfallen.
4. Die Analyse der Vorschriften der Bankaufsichtsbehörden ergibt folgendes Ergebnis. Die Berechnung des 60-Tage-Durchschnitts von Value-at-Risk-Schätzungen als Basis für die Eigenkapitalunterlegung ist wenig sinnvoll. Vielmehr sollten jeweils aktuelle Value-at-Risk-Schätzungen verwendet werden. Ein Multiplikationsfaktor von Drei ist dann völlig ausreichend. Da das Ampelkonzept auf den binären Verlustfunktionen beruht, ist es zur Überprüfung interner Modelle als unzureichend einzustufen.
5. Die Value-at-Risk-Schätzungen werden in der Regel bei zunehmend volatilen Marktsituationen überschritten. Dies bedeutet, dass die einzelnen Verfahren nicht schnell genug auf diese steigenden Volatilitäten reagieren können. Nimmt dagegen nach einer hochvolatilen Phase die Volatilität wieder ab, dürften kaum Überschreitungen auftreten. Die in den historischen Daten inhärenten

Schwankungen sorgen für gewisse zukünftige Perioden für hohe Value-at-Risk-Schätzungen, die dann das Marktrisiko überbewerten. Hohe Eigenkapitalunterlegungen und Kosten sind die Folge.

6. Aufgrund der vorangehenden Punkte wird folgender Vorschlag gemacht: man verwende für die Value-at-Risk-Schätzungen Halteperioden von einem Tag und Konfidenzniveaus von 99%. Zur Überprüfung der (internen) Modelle sollte das aus Überschreitungszahlen und Überschreitungshöhen kombinierte Kriterium verwendet werden. Durchaus überlegenswert ist, ob auf Grundlage dieses Kriteriums auch die Höhe des Multiplikationsfaktors festgelegt werden sollte, mit dem man dann zur Eigenkapitalunterlegung gelangt.



## Kapitel 10

# Value-at-Risk-Schätzungen für verschiedene Aktien

Im vorigen Kapitel wurden für einen Zeitraum von fünf Jahren tägliche Value-at-Risk-Schätzungen für den SMI bestimmt, unter Verwendung von historischen Simulationen und Monte-Carlo-Simulationen. Mit dem Backtesting und verschiedenen Kriterien wurden die zugrundeliegenden Modelle auf ihr Modellrisiko hin untersucht.

Für das Jahr 1998, vor allem für die zweite Jahreshälfte, hat sich ergeben, dass einerseits die Value-at-Risk-Schätzungen stark anstiegen, andererseits die Anzahl Überschreitungen dieser Schätzwerte durch tatsächliche Marktveränderungen stark zunimmt. Das Jahr 1998 stellt daher einen guten Testfall für die einzelnen Modelle dar. Diese müssen sich nicht nur in Phasen bewähren, in denen das Börsengeschehen als ruhig zu bezeichnen ist, sondern gerade auch in turbulenten Zeiten. Dieses Jahr stellt zudem das erste Erfahrungsjahr für Value-at-Risk-Modelle im Bankbereich dar, da die Richtlinien der Eidgenössischen Bankenkommission, die die Verwendung interner Modelle im Rahmen des Value-at-Risk-Konzeptes erlauben, seit dem 31.12.1997 gelten.

Aus diesem Grund wird die Analyse von Kapitel 9 für den SMI nun auf die fünf Titel ABB Inhaberaktie, Namenaktien der Credit-Suisse Group, Novartis und Nestle und sowie auf den Genussschein von Roche jeweils für das Jahr 1998 erweitert.

Im Rahmen dieses Kapitels werden exemplarisch die Ergebnisse für die Credit-Suisse Namenaktie und die Novartis Namenaktie dargestellt. Die Analysen für diese beiden Titel werden zusätzlich zu den für den SMI gewonnen Resultate einige interessante Einsichten bereithalten. Die Ergebnisse für die übrigen Aktien finden sich in Anhang E, fliessen aber in eine Gesamtdiskussion der Ergebnisse ein.

## 10.1 Vorgehensweise

Die Vorgehensweise dieser Analyse ist völlig analog zu derjenigen in der Langzeitstudie. So werden sowohl historische Simulationen als auch Monte-Carlo-Simulationen der Geometrischen Brownschen Bewegung, des Sprung-Diffusions-Prozesses und des hyperbolischen Modells durchgeführt.

Die Schätzung der Modellparameter erfolgt wieder über ein Zeitfenster der jeweils letzten 500 Handelstage. Können in Ausnahmefällen die Parameter eines Modells nicht geschätzt werden, so werden als Schätzungen die Werte des Vortages verwendet.

Die Parameter zur Schätzung des Value-at-Risk respektive der Quantile werden auf die Konfidenzniveaus 99% und 95%, die Halteperiode auf einen Tag und zehn Tage festgelegt. Die Bestimmung des Value-at-Risk erfolgt bezüglich einer Anfangsinvestition von  $W_0 = 1$ . Dies bedeutet, dass die geschätzten Value-at-Risk-Werte den potentiellen Verlust pro in einer Anlage investierter Währungseinheit angeben, der nur mit einer gewissen Restwahrscheinlichkeit überschritten wird.

Bereich	Verfahren/Beschreibung	Einstellungen
Parameterschätzung	Fensterbreite	500 Handelstage
Simulation	Anzahl tägliche VaRs Zeitschritte  Länge des Zeitschrittes Realisierungen Wiederholungen $M$	249 1 für Halteperiode 1 Tag 10 für Halteperiode 10 Tage 1 Tag 2000 10
Quantilschätzung	Geordnete Stichprobe Konfidenzniveau Halteperiode Anfangsinvestition	99%, 95% 1 und 10 Tage $W_0 = 1$

Tabelle 10.1: Rahmenbedingungen für die Monte-Carlo-Simulationen.

Für die Quantilschätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen werden pro Tag  $M = 10$  Simulationsrechnungen mit jeweils 2000 Realisierungen durchgeführt. Das gesuchte Quantil ergibt sich dann als arithmetisches Mittel der in jeder der zehn Simulationsrechnungen geschätzten Quantile. Die Quantile werden sowohl im Rahmen von Monte-Carlo-Simulationen als auch für den Fall von historischen Simulationen auf der Grundlage einer geordneten Stichprobe geschätzt. Durch die Berechnung eines arithmetischen Mittels der Quantile bei Monte-Carlo-Simulationen können Schätzfehler reduziert werden, was es ermöglicht, sich im wesentlichen auf Approximationsfehler in der Modellbildung zu konzentrieren.

Tabelle 10.1 gibt die Rahmenbedingungen für die Monte-Carlo-Simulationen, Tabelle 10.2 diejenigen für die historischen Simulationen wieder. Eine Überprüfung der einzelnen Modelle erfolgt über das Backtesting-Verfahren, wobei wie in Kapitel 9 folgende Kriterien verwendet werden: binäre Verlustfunktion in Verbindung mit Likelihood-Ratio-Test nach Kupiec, Vergleich von mittlerer erwarteter relativer Überschreitungshöhe und mittlerer tatsächlicher relativer Überschreitungshöhe sowie die Kombination aus Überschreitungszahlen und Überschreitungshöhen.

Bereich	Verfahren/Beschreibung	Einstellungen
„Simulation“	Anzahl tägliche VaRs Fensterbreite	249 500 Handelstage
Quantilschätzung	Geordnete Stichprobe Konfidenzniveau Halteperiode Anfangsinvestition	99%, 95% 1 und 10 Tage $W_0 = 1$

Tabelle 10.2: Rahmenbedingungen für die historische Simulationen.

## 10.2 Ergebnisse für die Credit-Suisse Namenaktie

### 10.2.1 Ex-ante-Überprüfung durch $\chi^2$ -Anpassungstests

Für die Durchführung von Monte-Carlo-Simulationen sind zunächst die Parameter des jeweiligen Modells zu schätzen. Danach kann eine erste Überprüfung der Modelle vorgenommen werden. Mit Hilfe eines  $\chi^2$ -Anpassungstests wird überprüft, wie gut die empirische Renditeverteilung für historische Tagesrenditen durch die entsprechenden Modellverteilungen approximiert wird.

Für die Geometrische Brownsche Bewegung, den Sprung-Diffusions-Prozess und für das hyperbolische Modell werden für die Parameterschätzungen jedes zehnten Tages des Jahres 1998 solche  $\chi^2$ -Anpassungstests durchgeführt, jeweils zu den Signifikanzniveaus  $\alpha = 1\%$  und  $\alpha = 5\%$ . Der historische Beobachtungszeitraum beträgt 500 Handelstage. Tabelle 10.3 gibt die Testresultate wieder.

Es stellt sich heraus, dass die Hypothese normalverteilter Renditen, die sich aus der Geometrischen Brownschen Bewegung ergibt, in jedem Fall abgelehnt wird. Beim Sprung-Diffusions-Prozess wird die Nullhypothese für den Zeitraum September bis Dezember in der Regel abgelehnt. Für diesen Zeitraum fließen in immer stärkerem Masse Beobachtungen der sehr volatilen Phase August bis Oktober in die Parameterschätzungen ein. Die Nullhypothese einer Übereinstimmung der empirischen Renditeverteilung mit einer hyperbolischen Verteilung wird praktisch nie abgelehnt. Eine

Monat	Tag	GBB		SD		HYP	
		$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$
Januar	1	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
	10	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
	20	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
Februar	30	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
	40	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
März	50	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
	60	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
April	70	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
	80	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
Mai	90	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
	100	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
Juni	110	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
	120	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
Juli	130	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
	140	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
August	150	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
	160	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(-)
September	170	(-)	(-)	(+)	(-)	(+)	(+)
	180	(-)	(-)	(-)	(-)	n.v.	n.v.
Oktober	190	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
	200	(-)	(-)	(+)	(-)	n.v.	n.v.
November	210	(-)	(-)	(-)	(-)	n.a	n.v.
	220	(-)	(-)	(-)	(-)	(+)	(+)
Dezember	230	(-)	(-)	(-)	(-)	(+)	(+)
	240	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
	249	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)

Tabelle 10.3: Ergebnisse der  $\chi^2$ -Anpassungstests für die Credit-Suisse Namenaktie ( $H_0$  nicht abgelehnt: (+),  $H_0$  abgelehnt: (-)).

Einschränkung ist diesbezüglich jedoch vorzunehmen. Für die erwähnte volatile Phase sind im hyperbolischen Modell teilweise keine Parameterschätzungen verfügbar, so dass Werte der Vortagesschätzung übernommen werden müssen.

### 10.2.2 Graphische Darstellung der Value-at-Risk-Schätzungen

In den Abbildungen 10.1 bis 10.4 sind die täglichen Value-at-Risk-Schätzungen, wie sie sich aus den Monte-Carlo-Simulationen ergeben, für verschiedene Konfidenzniveaus und Halteperioden abgetragen.

Wieder ist ein starkes Ansteigen der Value-at-Risk-Schätzungen ab Mitte des Jahres zu beobachten. Betrachtet man zunächst die eintägige Halteperiode, so fällt auf, dass der Sprung-Diffusions-Prozess und das hyperbolische Modell für die Restwahrscheinlichkeit  $p = 1\%$  zu höheren Value-at-Risk-Schätzungen führen als die Geometrische Brownsche Bewegung. Bei  $p = 5\%$  stellt sich die Situation gerade umgekehrt dar. Bei den Value-at-Risk-Schätzungen des Sprung-Diffusions-Prozesses fällt zudem auf,



dass in etwa für die 50 letzten Tage des Jahres die Schätzwerte stark schwanken. Für eine Halteperiode von zehn Tagen gleichen sich die Schätzwerte der verschiedenen Modelle an. Dieses Phänomen wurde bereits beim SMI beobachtet und diskutiert. Im Unterschied zu den Ergebnissen bei eintägiger Halteperiode, führt die Geometrische Brownsche Bewegung aber für beide  $p$ -Werte zu den höchsten Value-at-Risk-Schätzungen.

### 10.2.3 Ergebnisse des Backtesting

In Tabelle 10.4 sind die Ergebnisse des Backtesting-Verfahrens und der verschiedenen Kriterien für eintägige und zehntägige Halteperioden dargestellt.

Der Likelihood-Ratio-Test nach Kupiec weist weder das implizite Modell der historischen Simulation noch eines der expliziten Modelle als genaues Modell aus. Für eine eintägige Halteperiode weisen hyperbolisches Modell und historische Simulation (HIS) für  $p = 1\%$  identische Überschreitungszahlen auf, die deutlich unter denjenigen der verbleibenden Modelle liegen. Für  $p = 5\%$  zeigen alle Modelle die gleichen Überschreitungszahlen.

Ein Vergleich von mittleren erwarteten relativen und mittleren tatsächlichen relativen Überschreitungshöhen zeigt deutliche Unterschiede zwischen den Modellen. Für eintägige Halteperioden liefert das hyperbolische Modell die geringsten Abweichungen von allen expliziten Modellen, diese liegen jedoch deutlich über denjenigen der historischen Simulation. Für eine zehntägige Halteperiode gleichen sich die relativen Abweichungen bei den expliziten Modellen an, liegen aber immer noch über denjenigen der historischen Simulation. Für alle Modelle sind diese Abweichungen gegenüber einer eintägigen Halteperiode zudem teilweise stark erhöht.

Gerade der Fall einer eintägigen Halteperiode und  $p = 5\%$ , bei welchem in allen Modellen identische Überschreitungszahlen auftreten, zeigt, dass eine Überprüfung der Modelle allein auf Basis einer binären Verlustfunktion zu wenig aussagekräftig ist. Eine Berücksichtigung der Überschreitungshöhe liefert nützliche Zusatzinformationen.

Die Ergebnisse für das aus Überschreitungszahlen und Überschreitungshöhen gebildete Kriterium zeigen im wesentlichen die gleichen Resultate wie oben diskutiert.

Nach dem Ampelkonzept der Bankaufsichtsbehörden hätte in jedem der Modelle eine Erhöhung des Multiplikationsfaktors auf den Wert Vier erfolgen müssen. Eine Absicherung mit dem Faktor Drei war aber für alle Tage und in jedem Modell ausreichend.

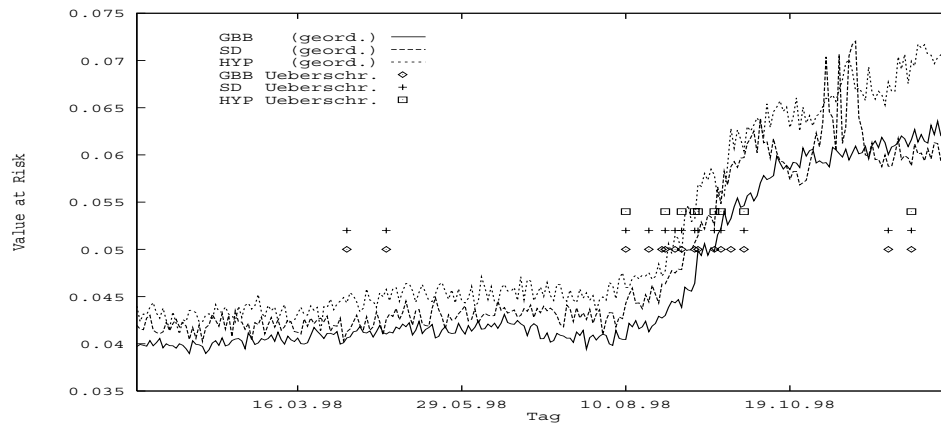


Abbildung 10.1: Tägliche VaR-Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen für die Credit-Suisse Namenaktie bei eintägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 99%. Zeitraum 1998.

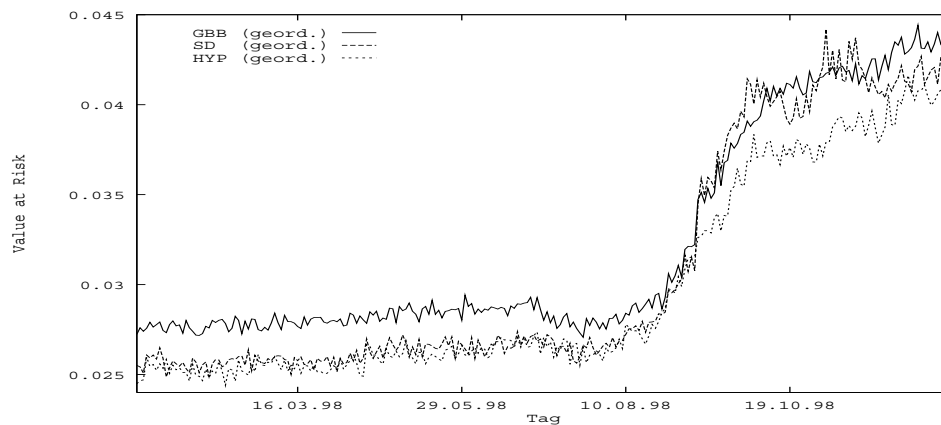


Abbildung 10.2: Tägliche VaR-Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen für die Credit-Suisse Namenaktie bei eintägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 95%. Zeitraum 1998.

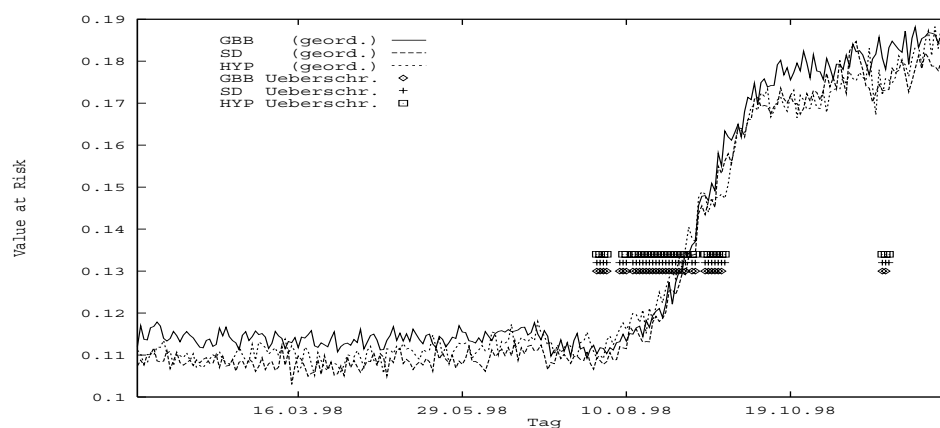


Abbildung 10.3: Tägliche VaR-Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen für die Credit-Suisse Namenaktie bei zehntägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 99%. Zeitraum 1998.

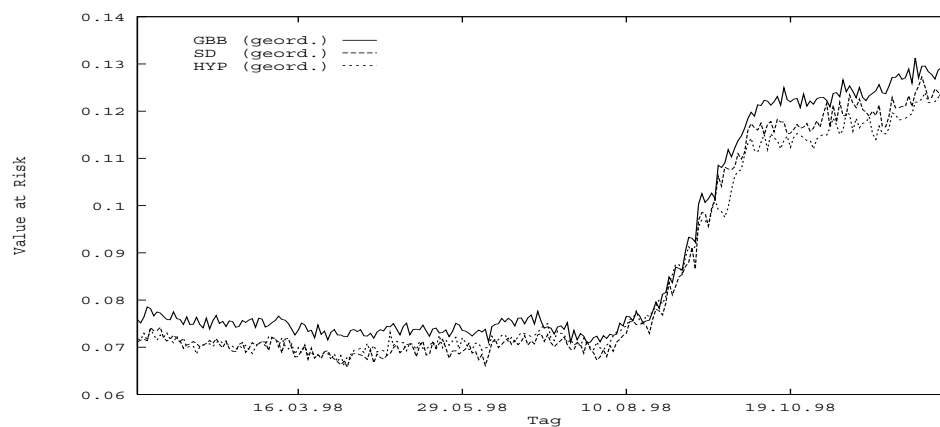


Abbildung 10.4: Tägliche VaR-Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen für die Credit-Suisse Namenaktie bei zehntägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 95%. Zeitraum 1998.

CSN			$p = 1.0\%$				$p = 5.0\%$			
Halteper.	Kriterium	Grösse	HIS	GBB	SD	HYP	HIS	GBB	SD	HYP
1 Tag	Binäre Verlustfunktion	$\frac{\overline{RUH} - \overline{REUH}}{\overline{KOMB} - \overline{EKOMB}}$	4.0**	6.5**	6.0**	4.0**	11.3**	11.3**	11.3**	11.3**
	Rel. Überschreitungshöhen		0.1797	0.7065	0.5720	0.5668	0.3856	0.6398	0.5610	0.4881
	Kombiniertes Kriterium		0.2674	0.7337	0.6255	0.5888	0.4240	0.6211	0.5601	0.5022
10 Tage	Binäre Verlustfunktion	$\frac{\overline{RUH} - \overline{REUH}}{\overline{KOMB} - \overline{EKOMB}}$	9.6**	14.2**	15.1**	15.1**	18.0**	17.6**	18.4**	18.4**
	Rel. Überschreitungshöhen		0.6283	0.7668	0.7508	0.7200	0.5754	0.7682	0.7610	0.7475
	Kombiniertes Kriterium		0.6961	0.8133	0.8057	0.7864	0.6034	0.7573	0.7540	0.7434
	LR-Test: * signifikant bei $\alpha = 5\%$ ** signifikant bei $\alpha = 1\%$									

Tabelle 10.4: Ergebnisse des Backtesting für die VaR-Schätzungen des Jahres 1998 für die Credit-Suisse Namenaktie bei unterschiedlichen Konfidenzniveaus und Halteperioden.

## 10.3 Ergebnisse für die Novartis Namenaktie

### 10.3.1 Ex-ante-Überprüfung durch $\chi^2$ -Anpassungstests

Tabelle 10.5 zeigt die Ergebnisse der  $\chi^2$ -Anpassungstests für Tagesrenditen der Novartis Namenaktie. Hierbei fallen zwei Dinge auf. Zum einen wird Ende des Jahres die Hypothese normalverteilter Renditen nicht abgelehnt, zum anderen sind Schätzungen der Parameter für die hyperbolische Verteilung nicht immer verfügbar, so dass oft Vortageswerte übernommen werden müssen.

Monat	Tag	GBB		SD		HYP	
		$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$
Januar	1	(-)	(-)	(-)	(-)	(+)	(+)
	10	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
	20	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
Februar	30	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
	40	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
	40	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
März	50	(-)	(-)	(+)	(+)	n.v.	n.v.
	60	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
	70	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
April	80	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
	90	(-)	(-)	(+)	(+)	n.v.	n.v.
	100	(-)	(-)	(+)	(+)	n.v.	n.v.
Juni	110	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
	120	(-)	(-)	(-)	(-)	(+)	(+)
	130	(-)	(-)	(+)	(-)	(+)	(+)
Juli	140	(-)	(-)	(+)	(-)	(+)	(+)
	150	(-)	(-)	(+)	(-)	(+)	(+)
	160	(+)	(-)	(+)	(-)	(+)	(+)
August	170	(+)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
	180	(+)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
	190	(+)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
September	200	(+)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
	210	(+)	(+)	(+)	(+)	n.v.	n.v.
	220	(+)	(+)	(+)	(+)	n.v.	n.v.
Oktober	230	(+)	(+)	(+)	(+)	n.v.	n.v.
	240	(+)	(+)	(+)	(+)	n.v.	n.v.
	249	(+)	(+)	(+)	(+)	n.v.	n.v.

Tabelle 10.5: Ergebnisse der  $\chi^2$ -Anpassungstests für die Novartis Namenaktie ( $H_0$  nicht abgelehnt: (+),  $H_0$  abgelehnt: (-)).

### 10.3.2 Graphische Darstellung der Value-at-Risk-Schätzungen

In den Abbildungen 10.5 bis 10.8 sind die täglichen Value-at-Risk-Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen für ein- und zehntägige Halteperioden und für Konfidenzniveaus 99% und 95% aufgetragen. Für die Value-at-Risk-Schätzungen auf Grundlage der Geometrischen Brownschen Bewegung zeigt sich, dass in etwa für die ersten 50 Tage diese Schätzungen bis auf den Fall einer eintägigen Halteperiode und  $p = 1\%$

deutlich über denjenigen der verbleibenden zwei expliziten Modelle liegen und danach stark abfallen.

Der Grund hierfür ist in der Zusammensetzung der historischen Daten zu finden, aus denen die Parameter geschätzt werden. So enthält die Stichprobe für die Parameterschätzung circa für die ersten 50 Tage des Jahres 1998 eine stark positive Rendite von  $r \approx 18\%$ . Die Ursache für diese starke Kurssteigerung war die Fusionsankündigung von Ciba-Geigy und Sandoz zur Novartis am 7.3.1996. Im Modell der Geometrischen Brownschen Bewegung wird die Volatilität  $\sigma$  über den Stichprobenvarianzschätzer ermittelt. Dieser reagiert bekanntlich sehr sensitiv auf Ausreisser. So führt die stark positive Rendite zu einer deutlich erhöhten Volatilität, was sich wiederum, wegen der Symmetrie der unterstellten Renditeverteilung, in hohen Schätzungen für den Value-at-Risk niederschlägt. Dieses Phänomen tritt auf, obwohl es sich bei dem geschilderten Ereignis nicht um eine risikobehaftete Situation, sondern um eine Chance handelt. Bei den beiden anderen expliziten Modellen ist dieser Effekt nicht zu beobachten. Einzige Ausnahme bildet der Sprung-Diffusions-Prozess im Fall einer zehntägigen Halteperiode und  $p = 1\%$ .

### 10.3.3 Ergebnisse des Backtesting

Die Resultate des Backtesting können aus Tabelle 10.6 entnommen werden. Für eintägige Halteperioden werden für beide Konfidenzniveaus der Value-at-Risk-Schätzung der Sprung-Diffusions-Prozess, das hyperbolische Modell sowie die historische Simulation durch den Likelihood-Ratio-Test nach Kupiec als genaue Modelle identifiziert. Für  $p = 5\%$  werden alle expliziten Modelle als genau eingestuft, die historische Simulation dagegen nicht. Bei zehntägiger Halteperiode wird die Hypothese eines genauen Modells sowohl für die drei expliziten Modelle als auch für die historische Simulation abgelehnt.

Die Überschreitungszahlen für die Geometrische Brownsche Bewegung sind wegen dem in 10.3.2 diskutierten Effekt nicht ganz mit denjenigen der übrigen Modelle vergleichbar. Es kann jedoch festgehalten werden, dass sich die Überschreitungszahlen in allen Modellen nur wenig unterscheiden.

Werden die Überschreitungshöhen in die Betrachtungen miteinbezogen, ergibt sich ein differenzierteres Bild. Dabei ergeben sowohl die Vergleiche zwischen erwarteter und tatsächlicher Überschreitungshöhe, als auch das kombinierte Kriterium die gleiche Tendenz. Von allen expliziten Modellen weist der Sprung-Diffusions-Prozess die geringsten relativen Abweichungen auf. Die historische Simulation zeigt vor allem für eine Halteperiode von zehn Tagen hohe relative Abweichungen, während gerade in diesem Fall die Geometrische Brownsche Bewegung tiefere relative Abweichungen als bei eintägiger Halteperiode zeigt.

Eine Besonderheit ergibt sich bei zehntägiger Halteperiode und  $p = 1\%$  für den Sprung-Diffusions-Prozess und das hyperbolische Modell. In diesem Fall wurden

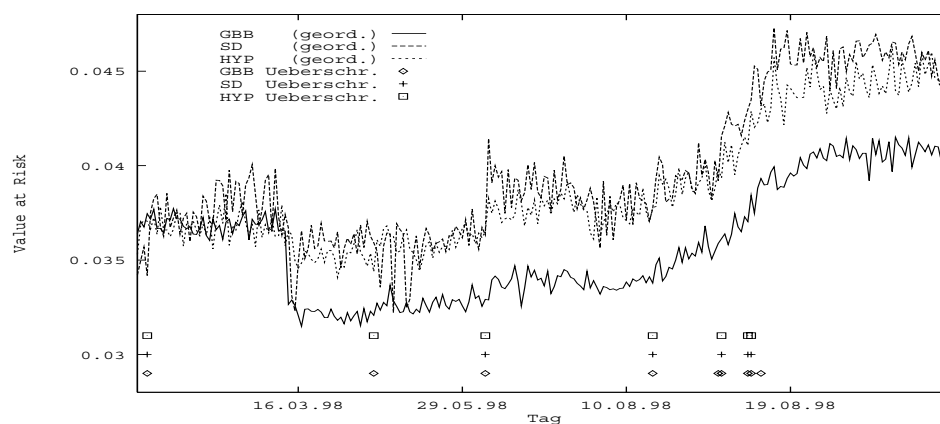


Abbildung 10.5: Tägliche VaR-Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen für die Novartis Namenaktie bei eintägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 99%. Zeitraum 1998.

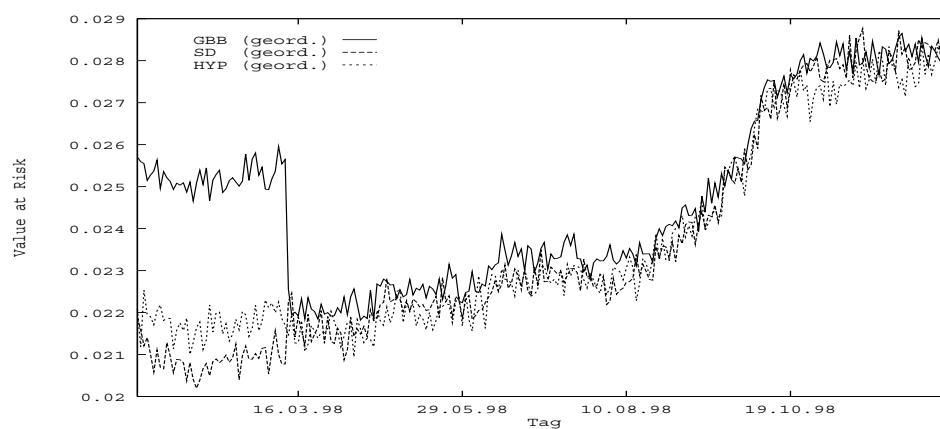


Abbildung 10.6: Tägliche VaR-Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen für die Novartis Namenaktie bei eintägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 95%. Zeitraum 1998.

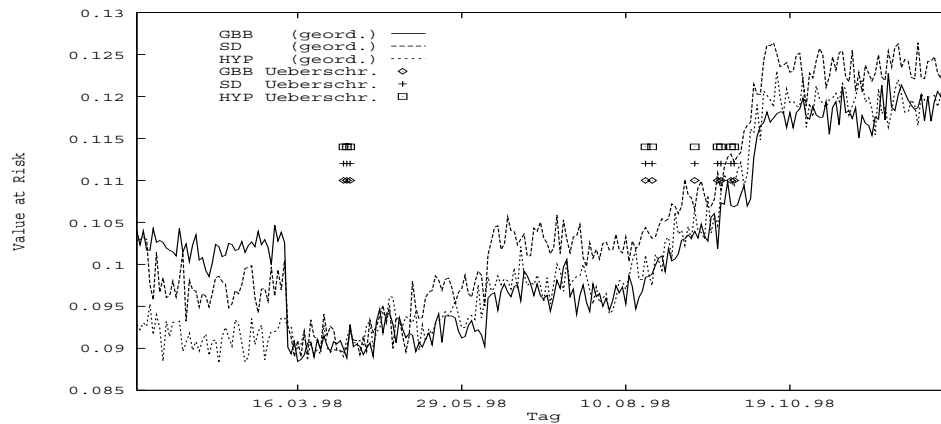


Abbildung 10.7: Tägliche VaR-Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen für die Novartis Namenaktie bei zehntägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 99%. Zeitraum 1998.

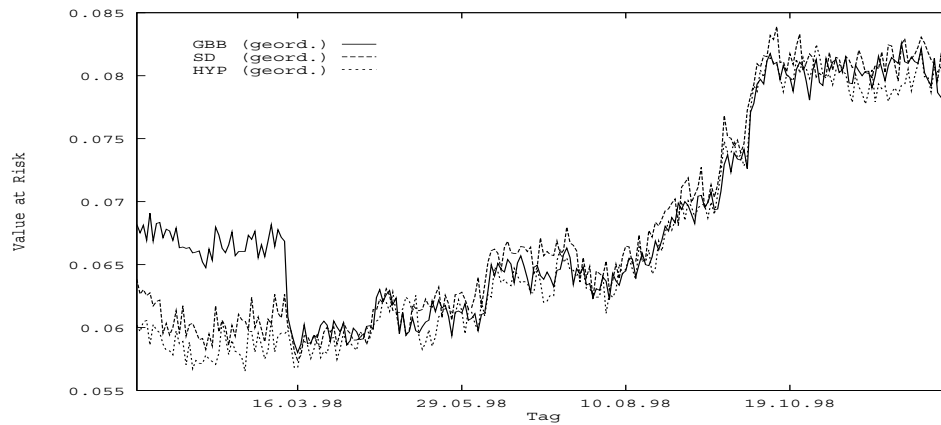


Abbildung 10.8: Tägliche VaR-Schätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen für die Novartis Namenaktie bei zehntägiger Halteperiode und Konfidenzniveau 95%. Zeitraum 1998.



NOVN			$p = 1.0\%$				$p = 5.0\%$			
Halteper.	Kriterium	Grösse	HIS	GBB	SD	HYP	HIS	GBB	SD	HYP
1 Tag	Binäre Verlustfunktion Rel. Überschreitungshöhen Kombiniertes Kriterium	Überschreitungen [%] $\frac{RUH-REUH}{RUH}$ $\frac{KOMB-EKOMB}{KOMB}$	1.6 0.2378 0.2508	3.6** 0.4880 0.5335	2.4 -0.0245 0.0552	2.4 0.2135 0.2650	9.3** 0.0809 0.1879	6.5 0.5285 0.4736	8.1* 0.1643 0.2154	8.1** 0.2197 0.2580
10 Tage	Binäre Verlustfunktion Rel. Überschreitungshöhen Kombiniertes Kriterium	Überschreitungen [%] $\frac{RUH-REUH}{RUH}$ $\frac{KOMB-EKOMB}{KOMB}$	4.2** 0.5374 0.6061	4.2** 0.1135 0.3133	4.2** -0.3278 0.0733	4.2** -0.1009 0.1888	13.4** 0.2939 0.4088	11.7** 0.2904 0.3894	11.7** 0.1876 0.3251	12.6** 0.2037 0.3541
	LR-Test: * signifikant bei $\alpha = 5\%$ ** signifikant bei $\alpha = 1\%$									

Tabelle 10.6: Ergebnisse des Backtesting für die VaR-Schätzungen des Jahres 1998 für die Novartis Namenaktie bei unterschiedlichen Konfidenzniveaus und Halteperioden.

höhere relative Überschreitungshöhen prognostiziert als dann real eingetroffen sind.

Im Hinblick auf die Eigenkapitalunterlegung hätte das Ampelkonzept schliesslich zu einer Erhöhung des Multiplikationsfaktors geführt. Ein Multiplikator von Drei war aber in jedem Fall ausreichend.

## 10.4 Zusammenfassung der Ergebnisse für alle untersuchten Titel

In den vorangegangenen Abschnitten wurden Credit-Suisse Namenaktie und Novartis Namenaktie exemplarisch untersucht. In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse aller untersuchten fünf Titel zusammengefasst.

Insgesamt ergeben alle Untersuchungen in etwa dasselbe Bild, vergleichbar auch mit den Resultaten aus der Langzeitstudie über den SMI. Zusammengefasst lässt sich festhalten:

1. Im Rahmen des Value-at-Risk-Konzeptes und im Sinne der untersuchten Kriterien weisen der Sprung-Diffusions-Prozess und das hyperbolische Modell für eintägige Halteperioden ein geringeres Modellrisiko auf als die Geometrische Brownsche Bewegung. Die verwendeten Kriterien weisen in der Regel bei  $p = 1\%$  und eintägiger Halteperiode auf die geringsten Modellrisiken hin. Bei zehntägiger Halteperiode steigen die Modellrisiken an und gleichen sich zudem unter den verschiedenen Modellen an. Der Likelihood-Ratio-Test nach Kupiec stuft in diesem Fall keines der Modelle für keinen der untersuchten Titel bei zehntägiger Halteperiode als genau ein.
2. Die Historische Simulation weist in der Regel ein geringeres Modellrisiko auf als die expliziten Modelle.
3. Das Ampelkonzept zur Festlegung des Basler Multiplikationsfaktors ist unzureichend. Ein Multiplikator von Drei ist für eine ausreichende Eigenkapitalunterlegung in allen untersuchten Fällen genügend gross.
4. Die Modellrisiken hängen auch von der Wahl der Parameter bei der Value-at-Risk-Schätzung ab. Man wähle daher eintägige Halteperioden und ein Konfidenzniveau von 99%.

## Kapitel 11

# Value-at-Risk-Schätzungen bei Optionen

In diesem Kapitel wird der Frage nachgegangen, wie sich Value-at-Risk-Schätzungen in den Optionspreismodellen der Geometrischen Brownschen Bewegung, des Sprung-Diffusions-Prozesses und des hyperbolischen Modells unterscheiden.

### 11.1 Einleitung

Kapitel 5 hat ergeben, dass alle expliziten Modelle zu ungefähr gleichen Optionspreisen führen. Bei diesen Untersuchungen wurden die Optionspreise in den einzelnen Modellen auf Grundlage eines bekannten, für alle Modelle gleichen Aktienkurses berechnet. Für die Schätzung des Value-at-Risk wird zusätzlich eine prognostizierte Verteilung zukünftiger Optionsrenditen benötigt. Zu ihr gelangt man, indem in einem bestimmten Modell zunächst eine Verteilung von Aktienkursen generiert wird, um dann mit den zugehörigen Optionspreismodellen eine Verteilung der Optionspreise und damit der Optionsrenditen zu berechnen. Da die verschiedenen expliziten Modelle sehr unterschiedliche Verteilungen für Aktienrenditen prognostizieren, vor allem was die Enden einer Verteilung angeht, ist zu erwarten, dass sich die Renditeverteilungen von Optionen in den einzelnen Modellen ebenfalls unterscheiden. Verstärkt wird dieser Effekt zusätzlich durch den nichtlinearen Charakter von Optionen auf Aktien, der sich in nichtlinearen Bewertungsfunktionen ausdrückt.

Folgende vereinfachende Überlegung ist für die Verdeutlichung der Zusammenhänge zwischen den Verteilungen von Aktienrenditen und Optionenrenditen nützlich. Zunächst nimmt man an, dass die prozentuale Abweichung  $x$  des Modellpreises der Option vom Marktpreis für zwei kurz aufeinanderfolgende Zeitpunkte gleich gross ist. Weiter wird angenommen, dass für diese beiden Zeitpunkte  $t$  und  $t + 1$  die Parameter des Optionspreismodells und der risikolose Zinssatz konstant sind. Es ändern sich also nur noch der Basispreis  $S$  und die Restlaufzeit. Für den Modellpreis  $V_{\text{Modell}, t}$  der

Option und den Marktpreis  $V_{\text{Markt},t}$  zum Zeitpunkt  $t$  gilt dann:

$$V_{\text{Markt},t} = V_{\text{Modell},t} (1 + x) .$$

Wird die Rendite vom Zeitpunkt  $t$  bis  $t + 1$  berechnet, ergibt sich

$$\ln \frac{V_{\text{Markt},t+1}}{V_{\text{Markt},t}} = \ln \frac{V_{\text{Modell},t+1} (1 + x)}{V_{\text{Modell},t} (1 + x)} = \ln \frac{V_{\text{Modell},t+1}}{V_{\text{Modell},t}} .$$

Wenn nun zusätzlich alle Modelle zu ungefähr gleichen Optionspreise führen, was grundsätzlich das Ergebnis von Kapitel 5 ist, so sind vor allem unterschiedliche Verteilungen für die Basispreise in den verschiedenen Modellen für unterschiedliche Verteilungen von Optionsrenditen verantwortlich. Für die Value-at-Risk-Schätzungen dürfen daher auch deutliche Unterschiede erwartet werden.

Die historische Simulation ist nicht direkt auf Marktpreise von Optionen anwendbar, da sie auf eine Stichprobe historischer Kurse, hier Optionspreise, angewiesen ist. Für Optionen sind aber nicht für jeden Tag (historische) Kurse vorhanden und die Laufzeiten von Optionen sind teilweise sehr kurz. Die Stichprobenumfänge sind daher in der Regel sehr klein. Ein möglicher Ausweg besteht darin, zunächst eine Stichprobe von historischen Aktienkursen zu ziehen und mit diesen Aktienkursen und einem *expliziten* Optionspreismodell eine Stichprobe von Optionsrenditen zu erzeugen. Die Ergebnisse von Kapitel 5 lassen vermuten, dass die verschiedenen Optionspreismodelle auf Basis der historischen Stichprobe zu fast gleichen Renditeverteilungen für die Option führen. Da die expliziten Optionspreismodelle auf bestimmten Annahmen für die Verteilung der Aktienkursen beruhen, die historische Simulation aber verteilungsfrei ist, ist dieses Vorgehen nicht ganz konsistent.

Deshalb wird im folgenden die Monte-Carlo-Methode verwendet. Für die einzelnen Modelle wird zunächst eine Stichprobe von Kursen beziehungsweise Renditen der Aktien für einen zukünftigen Zeitpunkt generiert. Auf Basis dieser Stichprobe wird dann mit dem zugehörigen Optionspreismodell eine Stichprobe zukünftiger Optionsrenditen berechnet und daraus der Value-at-Risk geschätzt.

Ein Backtesting, wie für Aktienkurse, ist bei den Optionspreisen nicht möglich. Die Gründe sind im Prinzip die gleichen, die gegen eine Anwendung der historischen Simulation auf Optionspreise sprechen: da nicht für jeden Tag Marktoptionspreise vorhanden sind, können keine täglichen Rückvergleiche vorgenommen werden. Aufgrund der oft sehr kurzen Laufzeiten sind zudem die Stichprobenumfänge für statistisch signifikante Aussagen zu klein.

Die verschiedenen Modelle können also nur bezüglich ihrer Value-at-Risk-Schätzungen und aufgrund erwarteter Grössen, wie etwa die erwartete Überschreitungshöhe, miteinander verglichen werden.

## 11.2 Vorgehensweise

Als Grundlage für die Value-at-Risk-Schätzungen werden Monte-Carlo-Simulationen für verschiedene Call-Optionen auf die Credit-Suisse Namenaktie mit Parameterschätzungen für den 18.12.1998 durchgeführt. Dass nur eine einzige Parameterkonstellation betrachtet wird, liegt daran, dass die Simulation der Optionsrenditen in den einzelnen Modellen sehr aufwendig und rechenintensiv ist. Auf diese Problematik wird später genauer eingegangen.

Für den 18.12.1998 werden verschiedene Call-Optionen untersucht. So werden für diesen Tag Ausübungsverhältnisse  $S/K$  zwischen 0.9 und 1.10 gewählt. Als Restlaufzeiten, bezogen auf den 18.12.1998, werden bei eintägigem Prognosehorizont 10, 15 und 20 Tage, bei zehntägigem Prognosehorizont 20 und 30 Tage analysiert. Die Restlaufzeiten am Ende des Prognosehorizonts betragen dann 9, 14 und 19 Tage, beziehungsweise 10 und 20 Tage. Als risikoloser Zinssatz wird der 1-Monats LIBOR-CHF-Satz für den 18.12.1998 verwendet. Er beträgt  $r = 0.015$  (p.a.). Die Parameterschätzungen der einzelnen Modelle sind in Tabelle 11.1 wiedergegeben. Bei diesen Parameterschätzungen wird die Hypothese normalverteilter Renditen durch einen  $\chi^2$ -Anpassungstest bei Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$  abgelehnt, die Hypothese hyperbolisch und gemäss Sprung-Diffusions-Prozess verteilter Renditen wird hingegen nicht abgelehnt.

Modell	Parameter	Schätzung
GBB	$\hat{\mu}$	-0.000036
	$\hat{\sigma}^2$	0.000991
SD	$\hat{\mu}_B$	0.001985
	$\hat{\sigma}_B^2$	0.000270
	$\hat{\mu}_J$	-0.005600
	$\hat{\sigma}_J^2$	0.001976
	$\hat{\lambda}$	0.360945
HYP	$\hat{\alpha}$	47.031100
	$\hat{\delta}$	4.78e-09
	$\hat{\beta}$	-1.768980
	$\hat{\mu}$	0.001566

Tabelle 11.1: Parameterschätzungen für die einzelnen Modelle am 18.12.98.

Für die Value-at-Risk-Schätzungen werden Konfidenzniveaus 95% und 99% verwendet, bei ein- und zehntägiger Halteperiode. Die Anfangsinvestition beträgt  $W_0 = 1$ . Bei der Monte-Carlo-Simulation werden wieder  $M = 10$  Simulationsrechnungen mit jeweils 2000 Realisierungen durchgeführt. Anschliessend wird wiederum ein arithmeti-

sches Mittel der in jedem Simulationslauf geschätzten Quantile berechnet (vgl. Kapitel 9.3.1).

Die Monte-Carlo-Simulationen für die Geometrische Brownsche Bewegung und den Sprung-Diffusions-Prozess werden gemeinsam in einem Programm durchgeführt, das hyperbolische Modell wird hingegen in einem eigenen Programm simuliert. Tabelle 11.2 gibt die Rechenzeiten der beiden Programme für 2000 Realisierungen bei unterschiedlicher Anzahl Zeitschritte wieder. Sie beziehen sich auf einen Pentium-II-Prozessor mit 350 MHz Taktfrequenz und 64 MB RAM Arbeitsspeicher. Für die

Zeitschritte	GBB und SD	HYP
1	$\sim 13$ min	$\sim 34$ min
10	$\sim 14$ min	$\sim 39$ min

Tabelle 11.2: Approximative Rechenzeiten für eine Value-at-Risk-Schätzung in den unterschiedlichen Modellen.

Simulationen von zehn Wiederholungen mit jeweils 2000 Realisierungen ergibt dies für die Simulation einer Renditeverteilung pro Ausgestaltung der Call-Option eine Rechenzeit von rund acht Stunden bei einem Zeitschritt und rund neun Stunden bei zehn Zeitschritten, und damit für alle untersuchten Konstellationen eine Rechenzeit von circa 8.5 Tagen, ununterbrochene Nutzung des Prozessors vorausgesetzt.

### 11.3 Diskussion der Ergebnisse

Abbildung 11.1 zeigt die Dichtefunktionen der Optionsrenditen, die sich bei einem Ausübungsverhältnis  $S/K = 1.00$  und Restlaufzeit  $\tau = 20$  zu Beginn der Halteperiode am Ende der Halteperiode von einem Tag ergeben. Diese Dichtefunktionen beruhen auf einer Kerndichteschätzung auf Basis von 2000 simulierten Realisierungen. Abbildung 11.2 gibt die Dichtefunktionen bei zehntägiger Halteperiode und einer Restlaufzeit  $\tau = 30$  zu Beginn der Halteperiode wieder. Zusätzlich sind in Tabelle 11.3 Schätzungen einiger statistischer Kenngrößen der Verteilungen dieser Optionsrenditen erfasst.

Wie aus den Abbildungen und Tabellen ersichtlich, ergeben sich asymmetrische, links-schiefe und leptokurtische Verteilungen. Bei eintägiger Halteperiode ist der unterschiedliche Verlauf der Dichtefunktionen für stark negative Renditen zu beachten. Dies impliziert unterschiedliche Quantil- und damit Value-at-Risk-Schätzungen. Bei zehntägiger Halteperiode fallen die Dichten nahezu aufeinander. Dies war zu erwarten, da sich die Renditeverteilungen der Aktien mit zunehmender Halteperiode aneinander angleichen (vgl. Abschnitt 5.2.2), was bei ungefähr gleichen Optionspreisen in den

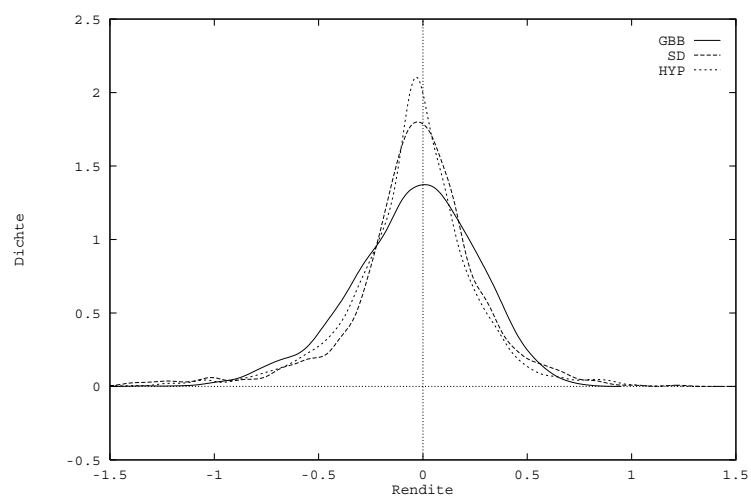


Abbildung 11.1: Dichteschätzungen für Verteilungen der Optionsrenditen bei eintägiger Halteperiode und unterschiedlichen Modellannahmen.

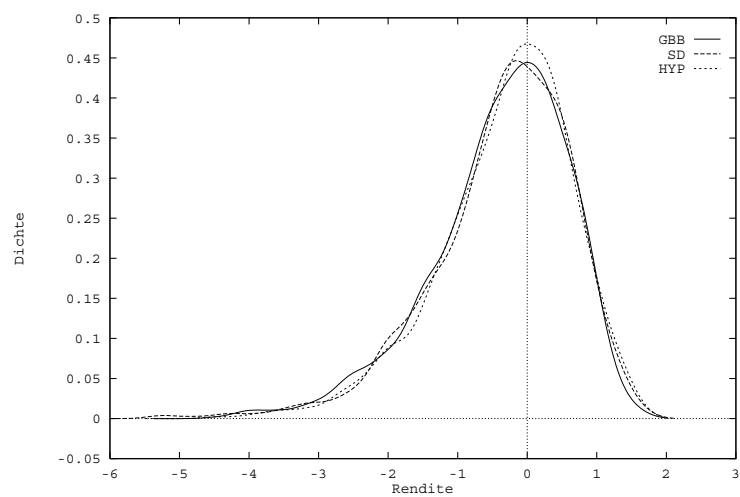


Abbildung 11.2: Dichteschätzungen für Verteilungen der Optionsrenditen bei zehntägiger Halteperiode und unterschiedlichen Modellannahmen.

Halteperiode	Modell	Erwartungswert	Varianz	Schiefe	Kurtosis
1 Tag	GBB	-0.0409	0.0910	-0.4243	3.2550
	SD	-0.0319	0.1002	-0.8373	6.3907
	HYP	-0.0536	0.0932	-0.7541	7.1753
10 Tage	GBB	-0.3856	0.9612	-0.8657	3.9182
	SD	-0.3621	1.0387	-1.1344	5.5874
	HYP	-0.3095	0.9104	-0.8124	3.9636

Tabelle 11.3: Schätzungen für statistische Kenngrößen der Modellverteilungen von Optionsrenditen.

verschiedenen Modellen zu ähnlichen Verteilungen der Optionsrenditen führt.

In Tabelle 11.4 sind für die ermittelten Dichten Schätzungen der Quantile  $r^*(p)$  bei unterschiedlichen  $p$ -Werten sowie die zugehörigen erwarteten relativen Überschreitungshöhen erfasst. Geschätzt wurden diese Größen nichtparametrisch auf Grundlage der vorliegenden Kerndichteschätzungen.

Haltep.	Modell	$p = 1.0\%$		$p = 2.5\%$		$p = 5.0\%$		$p = 7.5\%$	
		$\hat{r}^*(p)$	$\widehat{REUH}$	$\hat{r}^*(p)$	$\widehat{REUH}$	$\hat{r}^*(p)$	$\widehat{REUH}$	$\hat{r}^*(p)$	$\widehat{REUH}$
1 Tag	GBB	-0.8482	0.1490	-0.7215	0.1867	-0.5919	0.2749	-0.5039	0.3586
	SD	-1.1585	0.1481	-0.8266	0.3598	-0.5837	0.5433	-0.4552	0.6979
	HYP	-1.0362	0.2803	-0.7474	0.4018	-0.5738	0.4791	-0.4747	0.5576
10 Tage	GBB	-3.3784	0.1325	-2.7371	0.2205	-2.2853	0.2765	-1.9617	0.3508
	SD	-3.6057	0.2573	-2.7736	0.3334	-2.1895	0.3986	-1.9195	0.4190
	HYP	-3.1692	0.1619	-2.5558	0.2335	-2.1159	0.2913	-1.8356	0.3501

Tabelle 11.4: Quantilschätzungen der Modellverteilungen bei unterschiedlichen Konfidenzniveaus und Halteperioden.

Bei eintägiger Halteperiode und den  $p$ -Werten 1% und 2.5% zeigen Sprung-Diffusions-Prozess und das hyperbolische Modell konservativere Schätzungen als die Geometrische Brownsche Bewegung. Ab dem 5%-Quantil verkehrt sich diese Situation ins Gegenteil, nun liefert die Geometrische Brownsche Bewegung die konservativsten Value-at-Risk-Schätzungen. Dieses Phänomen resultiert wieder aus den unterschiedlichen Verläufen der Dichtefunktionen in den Modellen relativ zueinander (vgl. die Diskussion für Aktienrenditen in Abschnitt 9.3.2). Bei zehntägiger Halteperiode sind die Abweichungen zwischen den Quantilschätzungen geringer.



Was die Überschreitungshöhe betrifft, weist die Geometrische Brownsche Bewegung bei eintägiger Halteperiode und für alle  $p$ -Werte die geringsten relativen Überschreitungshöhen auf. Diese Tendenz ist auch bei zehntägiger Halteperiode zu erkennen, wenn auch die Schätzwerte wesentlich weniger voneinander abweichen.

In Tabelle 11.5 sind Schätzungen für die Lower-Partial-Moments  $LPM_1$  und  $LPM_2$  erfasst. Als Zielrendite wurden 0% und die in den einzelnen Modellen erwartete Rendite ausgewählt. Für die Schätzungen von  $LPM_1$  bei eintägiger Halteperiode zeigt die Geometrische Brownsche Bewegung die grössten Werte. Beim  $LPM_2$  dagegen zeigt die Geometrische Brownsche Bewegung die niedrigsten Schätzwerte. Dies kann durch den Verlauf der Dichtefunktionen erklärt werden. Die Dichte der Optionsrenditen bei der Geometrischen Brownschen Bewegung zeigt weniger ausgeprägte Enden als die Dichten für die Optionspreismodelle im Fall des Sprung-Diffusions-Prozesses oder des hyperbolischen Modells. Dafür sind die Wahrscheinlichkeiten für Verluste in einem „mittleren“ Renditebereich  $r \approx -0.5$  grösser (vgl. Abbildung 11.1). Werden die Abweichungen von der Zielrendite nur linear gewichtet wie beim  $LPM_1$ , so kommt es vor allem auf den Bereich einer Verteilung an, in dem die Werte mit den hohen Wahrscheinlichkeiten liegen. Die Enden einer Verteilung spielen eine untergeordnete Rolle. Werden aber Abweichungen quadratisch gewichtet, so spielen grosse Abweichungen eine wichtige Rolle, so dass Verteilungen mit breiten Enden zu grösseren Werten für  $LPM_2$  führen.

Halteperiode	Modell	$LPM_1(0)$	$LPM_2(0)$	$LPM_1(E[r])$	$LPM_2(E[r])$
1 Tag	GBB	0.1420	0.0633	0.1216	0.0526
	SD	0.1280	0.0674	0.1121	0.0597
	HYP	0.1362	0.0678	0.1085	0.0547
10 Tage	GBB	0.5931	0.9850	0.3908	0.6097
	SD	0.5805	1.0215	0.3935	0.6722
	HYP	0.5360	0.8458	0.3777	0.5653

Tabelle 11.5: LPM-Schätzungen für die Modellverteilungen von Optionsrenditen.

Für zehntägige Halteperioden gleichen sich die Lower-Partial-Moment-Schätzungen der verschiedenen Modelle wieder an.

Im folgenden werden Value-at-Risk-Schätzungen für verschiedene Ausübungsverhältnisse, Restlaufzeiten, Halteperioden und Konfidenzniveaus miteinander verglichen. Abbildungen 11.3 und 11.4 zeigen bei eintägiger Halteperiode die Value-at-Risk-Schätzungen für Konfidenzniveaus 99% und 95%.

Mit steigendem Ausübungsverhältnis  $S/K$  und wachsenden Restlaufzeiten sinken die

Value-at-Risk-Werte. Höhere Ausübungsverhältnisse zu Beginn der Halteperiode bedeuten, dass die Wahrscheinlichkeit für die Call-Option, am Ende der Halteperiode „im Geld zu liegen“ höher ist und damit das Risiko geringer. Je länger die Restlaufzeit einer Option, desto grösser sind die Chancen, am Verfall „im Geld“ zu sein, was wieder ein geringeres Risiko zur Folge hat.

Bei einem Konfidenzniveau von 99% ergibt der Sprung-Diffusions-Prozess die konservativsten, das heisst die höchsten Value-at-Risk-Schätzungen, die Geometrische Brownsche Bewegung die kleinsten. Für ein Konfidenzniveau von 95% fallen die Schätzungen nahezu zusammen, trotz deutlich unterschiedlichen Verläufen der Dichtefunktionen.

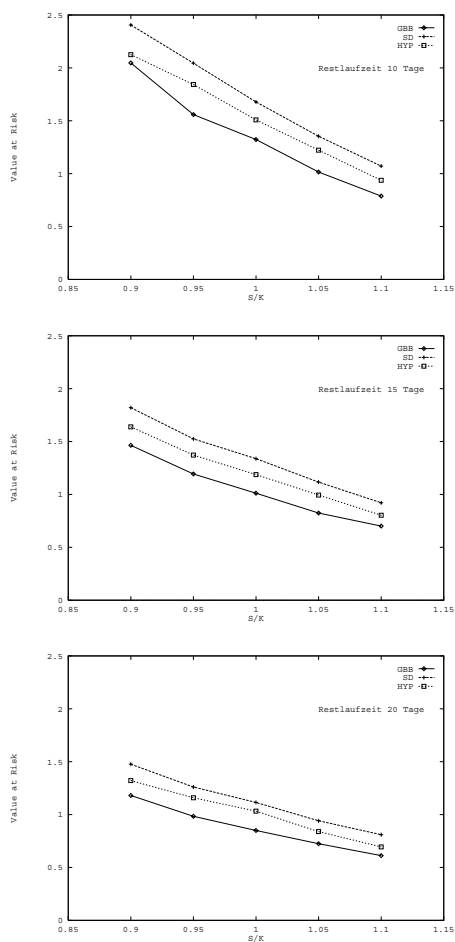
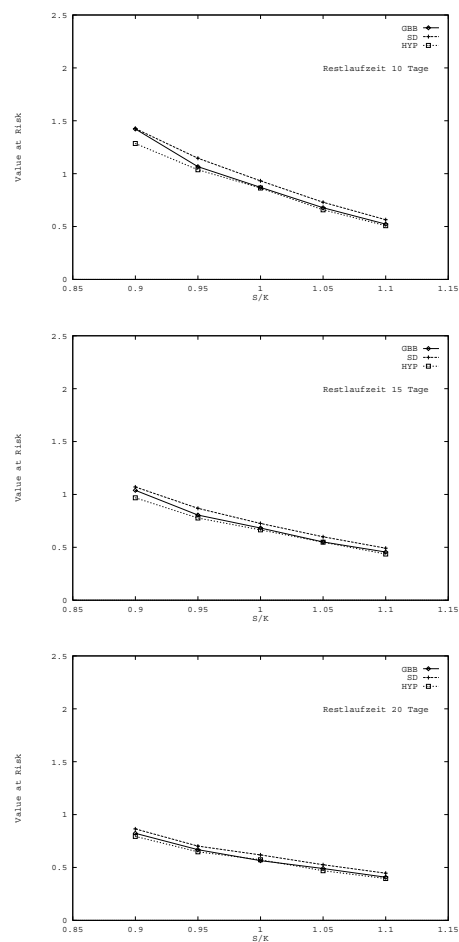
Die Value-at-Risk-Schätzungen für zehntägige Halteperioden sind den Abbildungen 11.5 und 11.6 zu entnehmen, wieder bei 99% respektive 95% Konfidenzniveau. Nur für kleine Ausübungsverhältnisse sind unterschiedliche Value-at-Risk-Schätzungen zu beobachten. Das Optionspreismodell der Geometrischen Brownschen Bewegung zeigt dann die konservativsten Schätzungen. Insgesamt ergeben sich aber geringere Unterschiede zwischen den Modellen als bei eintägiger Halteperiode.

## 11.4 Zusammenfassung

Für die Value-at-Risk-Schätzung bei Optionen ist der Verlauf der Dichtefunktion vor allem in den Enden der Verteilung der Optionsrenditen von Bedeutung. Da bei gleichen Basispreisen alle untersuchten Optionspreismodelle zu vergleichbaren Optionspreisen führen, sind für einen unterschiedlichen Verlauf der Dichten von Optionsrenditen vor allem die Dichten der Aktienrenditen verantwortlich. Da diese Verteilungen der Aktienrenditen beim Sprung-Diffusions-Prozess und dem hyperbolischen Modell breitere Enden aufweisen als bei der Geometrischen Brownschen Bewegung, ergibt sich für die unterschiedlichen Modellverteilungen der Optionsrenditen ein ähnliches Bild wie für Aktienrenditen.

Die Untersuchungen über die Value-at-Risk-Schätzungen bei Aktien haben gezeigt, dass das Modellrisiko beim Sprung-Diffusions-Prozess und beim hyperbolischen Modell geringer ist als bei der Geometrischen Brownschen Bewegung und dass dieses Modellrisiko bei eintägiger Halteperiode kleiner als bei zehntägiger Halteperiode ist. Die obigen Überlegungen lassen den Schluss zu, dass sich dies auch auf Optionen übertragen lässt.

Da bei eintägiger Halteperiode die Value-at-Risk-Schätzungen bei einer Restwahrscheinlichkeit  $p = 5\%$  trotz unterschiedlichen Verläufen der Dichtefunktionen zusammenfallen, sollten kleinere Restwahrscheinlichkeiten gewählt werden. Das Optionspreismodell im Sprung-Diffusions-Prozess ergibt dann bei  $p = 1\%$  die konservativsten Value-at-Risk-Schätzungen. Aus numerischer Sicht ist dieses Modell dem hyperbolischen Modell vorzuziehen, da die Simulationszeiten für die Generierung einer

Abbildung 11.3: VaR-Schätzungen bei eintägiger Halteperiode und  $p = 0.01$ .Abbildung 11.4: VaR-Schätzungen bei eintägiger Halteperiode und  $p = 0.05$ .

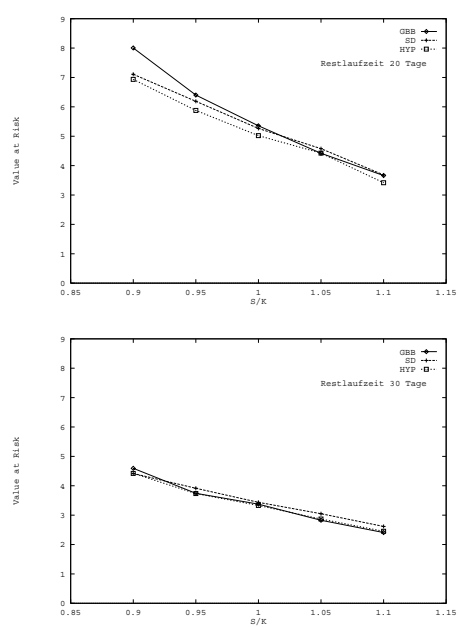


Abbildung 11.5: VaR-Schätzungen bei zehntägiger Halteperiode und  $p = 0.01$ .

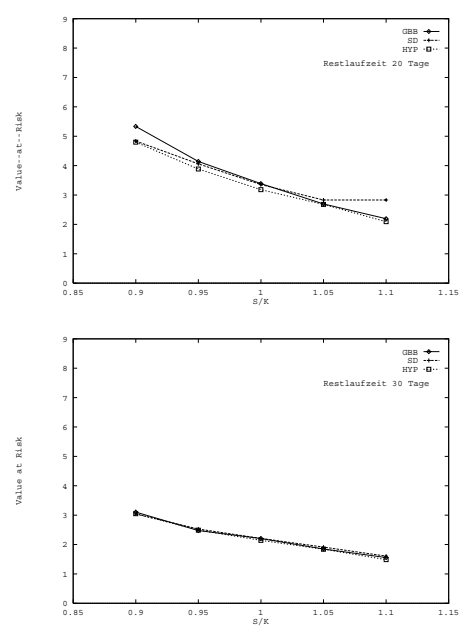


Abbildung 11.6: VaR-Schätzungen bei zehntägiger Halteperiode und  $p = 0.05$ .

---

Verteilung von Optionsrenditen viel kleiner sind.



# Zusammenfassung

Werden Risikomasse zur Quantifizierung von Marktrisiken bestimmt, so sind bei diesem Vorgehen drei Risikoarten zu berücksichtigen. Da Risikomasse auf der Grundlage von Modellen zur Beschreibung des Untersuchungsgegenstandes bestimmt werden, ist ein Risiko mit der Wahl des „richtigen“ Modells verbunden. Es besteht ein *Modellrisiko*. Risikomasse können nur geschätzt werden und unterliegen daher dem *Schätzrisiko*. Ein *Parameterisiko* besteht schliesslich deshalb, da die Wahl einer Kenngrösse als Risikomasse eventuell nicht alle risikorelevanten Eigenschaften erfasst.

Das Modellrisiko stellt unter diesen drei Risikoarten das zentrale Risiko dar. Die vorliegende Arbeit ging daher der Fragestellung nach, wie gross das Modellrisiko verschiedener Modelle als Grundlage für die Messung von Marktrisiken ist. Als Konzept zur Risikomessung wurde dabei im wesentlichen der Value-at-Risk verwendet. Das Modellrisiko ist letztlich eine unbekannte Grösse. Deshalb wurden die Modelle und die ihnen zugrundeliegenden Annahmen empirisch überprüft, indirekte Kriterien zur Abschätzung des Modellrisikos bei Value-at-Risk-Schätzungen eingeführt und ebenfalls empirisch untersucht.

Teil I der Arbeit befasste sich mit Modellen zur Beschreibung der Kursdynamik von Aktien und der Verteilung von Aktienrenditen. Die Modellierung des Aktienkurses als zeitabhängige Zufallsvariable hat sich hierbei als geeignetes Konzept erwiesen. Der entsprechende theoretische Rahmen wurde in Kapitel 1 erarbeitet.

Im Anschluss wurden einige häufig getroffene, allgemeine Annahmen über Aktienrenditen vorgestellt, Instrumente zu deren Überprüfung eingeführt und anhand von Daten des schweizerischen Aktienmarktes analysiert. Die Hypothese unabhängig und identisch verteilter Renditen wurde mittels BDS-Test, empirischer Autokorrelationsfunktionen und Q-Statistiken untersucht. Q-Statistik und BDS-Test ergeben dabei kein einheitliches Bild. Die Ergebnisse des BDS-Tests lassen allerdings den Schluss zu, dass zumindest für bestimmte längere Zeiträume die *i.i.d.*-Hypothese haltbar ist. Daneben sind allerdings auch Strukturbrüche und Effekte wie das Volatilitätsclustering zu beobachten. Diese Effekte lassen sich mit einem Recurrence Plot trennscharf entdecken. Wird die Hypothese von unabhängig und identisch verteilten Renditen nicht verworfen, so kann daraus auch geschlossen werden, dass kein deterministisch chaotisches Verhalten zugrunde liegt. Die Schätzung der empirischen Excessfunktion

ergibt schliesslich, dass Renditeverteilungen schweizerischer Aktien fat-tailed sind.

Kapitel 3 hatte einen kurzen Überblick über Ansätze zur Modellierung von Kursprozessen und Renditeverteilungen zum Inhalt. Jeder dieser Ansätze versucht dabei, bestimmte empirische Befunde möglichst gut nachzubilden. Aus diesen Modellen wurde eine Modellauswahl getroffen und begründet. Ausgewählt wurden die Geometrische Brownsche Bewegung, der Sprung-Diffusions-Prozess und das hyperbolische Modell. Diese Modelle stellten die Grundlage für alle nachfolgenden Untersuchungen dar.

Die ausgewählten Modelle wurden in Kapitel 4 ausführlich diskutiert. Besonderer Schwerpunkt war dabei die Darstellung der zugehörigen Optionspreismodelle. In Kapitel 5 wurden diese Modelle anhand von Daten des schweizerischen Aktien- und Optionenmarktes mit Hilfe geeigneter statistischer Tests überprüft. Es konnte festgestellt werden, dass sich die Verteilungen von Aktienrenditen mit der hyperbolischen Verteilung und der Renditeverteilung, die sich aus dem Sprung-Diffusions-Prozess ergibt, besser beschreiben lassen als mit einer Normalverteilung, die durch die Geometrische Brownsche Bewegung impliziert wird. Dies gilt insbesondere für die Enden der Renditeverteilungen. Diese Ergebnisse übertragen sich allerdings *nicht* auf die Untersuchung der Optionspreismodelle. In diesem Zusammenhang ist festzuhalten, dass *alle* Modelle annähernd gleiche Optionspreise berechnen. Die Geometrische Brownsche Bewegung und der Sprung-Diffusions-Prozess ergeben aber eine leicht bessere Beschreibung der Marktpreise von Optionen als das hyperbolische Modell.

Der zweite Teil der Arbeit beschäftigte sich mit der Messung von Marktrisiken auf Grundlage der im Teil I ausgewählten Modelle. Dazu wurde in Kapitel 6 das Value-at-Risk-Konzept zur Messung von Marktrisiken eingeführt. Begriffe wie Risiko, Modell-, Parameter- und Schätzrisiko wurden definiert. Im Vordergrund stand dabei der Begriff des Modellrisikos. Im Zusammenhang mit dem Value-at-Risk wurden Verfahren zur Generierung von Renditeverteilungen ebenso dargestellt wie die Richtlinien des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht und der Eidgenössischen Bankenkommission zur Anwendung des Value-at-Risk. Daneben wurden die Lower-Partial-Moments als alternative Risikomasse vorgestellt. Sie ergeben sich zusammen mit dem Value-at-Risk aus der viel allgemeineren Klasse der Stoneschen Risikomasse.

Kapitel 7 hatte dann verschiedene statistische Schätzverfahren zur Schätzung des Value-at-Risk und von Lower-Partial-Moments zum Inhalt.

In den darauffolgenden Kapiteln stand das Modellrisiko im Mittelpunkt des Interesses. Der Parameter, der das Modellrisiko beschreibt, ist zwar bekannt, aber der Wert dieses Parameters ist unbekannt. In Kapitel 8 wurden aus diesem Grund indirekte Kriterien vorgestellt, die zumindest eine Abschätzung des Modellrisikos zulassen. Als Kriterien wurden der Rang-Korrelationskoeffizient nach Kendall, die binäre Verlustfunktion und der Vergleich von tatsächlichen mit erwarteten Überschreitungshöhen der Value-at-Risk-Schätzungen ausgewählt, die im Rahmen des Backtesting zur Anwendung gelangen.



In Kapitel 9 und Kapitel 10 wurden Untersuchungen für den Swiss Market Index der Jahre 1994 bis 1998 und für Aktien des Jahres 1998 vorgenommen. Die drei expliziten Modelle wurden mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode simuliert, um Verteilungen von Aktienrenditen als Grundlage für Value-at-Risk-Schätzungen zu generieren. Zusätzlich wurde die historische Simulation eingesetzt, der eine implizite Modellbildung zugrundeliegt. Value-at-Risk-Schätzungen wurden für verschiedene Halteperioden und Konfidenzniveaus durchgeführt. Beim Backtesting wurden die erwähnten Kriterien eingesetzt. Daneben wurden auch Lower-Partial-Moments geschätzt.

Bezüglich des Modellrisikos lassen sich nun folgende Aussagen machen. Die Renditeverteilungen im Modell des Sprung-Diffusions-Prozess und des hyperbolischen Modells beschreiben empirische Renditeverteilungen besser als die Normalverteilung im Modell der Geometrischen Brownschen Bewegung. Dies ist ein erstes Indiz für ein geringeres Modellrisiko des Sprung-Diffusions-Prozesses und des hyperbolischen Modells. In Kapitel 9 und Kapitel 10 wurden zusätzlich Value-at-Risk-Schätzungen auf Grundlage von Monte-Carlo-Simulationen und der historischen Simulation miteinander verglichen. Die verwendeten Kriterien zur Abschätzung des Modellrisikos ergaben dabei folgendes Bild: das implizite Modell, welches der historischen Simulation zugrunde liegt, weist das geringste Modellrisiko auf, gefolgt von Sprung-Diffusions-Prozess und hyperbolischem Modell. Die Geometrische Brownsche Bewegung weist in diesem Vergleich das höchste Modellrisiko auf. Dieses Risiko ist zudem bei allen Modellen bei kürzeren Halteperioden und in der Regel bei kleineren  $p$ -Werten geringer. Als Kriterium zur Abschätzung des Modellrisikos hat sich dabei die binäre Verlustfunktion in Verbindung mit Likelihood-Ratio-Tests nach Kupiec als zu wenig aussagekräftig erwiesen. Es wurde daher um die Analyse der Überschreitungshöhen ergänzt.

Ein Multiplikationsfaktor von Drei zur Berechnung der Eigenkapitalunterlegung hat sich auch in den Fällen als ausreichend erwiesen, in denen das Ampelkonzept der Bankaufsichtsbehörden eigentlich eine Erhöhung dieses Faktors zur Folge gehabt hätte.

Als abschliessende Untersuchung wurden Schätzungen des Value-at-Risk und von Lower-Partial-Moments für ein ausgesuchtes Beispiel einer Aktienoption vorgenommen. Verglichen wurden die drei expliziten Modelle. Da alle drei Optionsmodelle ähnliche Optionspreise berechnen, kommt der Verteilung der Preise des Basisinstrumentes eine zentrale Rolle zu. Da zudem die Modellrisiken bei der Modellierung von Aktienrenditen beim Sprung-Diffusions-Prozess und beim hyperbolischen Modell geringer sind als bei der Geometrischen Brownschen Bewegung, wurde argumentiert, dass das Modellrisiko bei der Value-at-Risk-Schätzung von Optionen beim Sprung-Diffusions-Prozess und dem hyperbolischen Modell geringer ist als bei der Geometrischen Brownschen Bewegung.

Insgesamt wird folgendes abschliessendes Fazit gezogen. Von den drei Modellen eignet sich der Sprung-Diffusions-Prozess am besten als Grundlage für Value-at-Risk-Schätzungen. Er weist gegenüber der Geometrischen Brownschen Bewegung ein ge-

ringeres Modellrisiko auf. Im Vergleich mit dem hyperbolischen Modell ergeben sich etwas bessere Optionsmodellpreise. Der Sprung-Diffusions-Prozess ist zudem deutlich einfacher und vor allem schneller zu simulieren als das hyperbolische Modell, was vor allem bei der Monte-Carlo-Simulation von Optionsrenditen ins Gewicht fällt. Zusätzlich ist die Kursdynamik ökonomisch anschaulich interpretierbar.

Aus diesen Ausführungen lassen sich zudem Vorschläge zur Änderung der Richtlinien der Eidgenössischen Bankenkommision ableiten. Die zehntägige Halteperiode sollte durch eine eintägige Halteperiode ersetzt werden. Das Konfidenzniveau von 99% der Value-at-Risk-Schätzung sollte allerdings nicht verändert werden. Beim Einsatz des Backtestingverfahrens wird empfohlen, die binäre Verlustfunktion um die Analyse von Überschreitungshöhen zu ergänzen.

## Anhang A

# Generierung von Zufallszahlen

Für die Monte-Carlo-Simulation der einzelnen Modelle müssen (Pseudo-) Zufallszahlen generiert werden. So müssen für die Geometrische Brownsche Bewegung normalverteilte Zufallszahlen, für den Sprung-Diffusions-Prozess normalverteilte und poissonverteilte und für das hyperbolische Modell hyperbolisch verteilte Zufallsvariablen erzeugt werden. Die nachfolgenden Abschnitte erläutern die dazu eingesetzten Routinen.

### A.1 Gleichverteilte Zufallszahlen

Die Methoden zur Generierung von Zufallszahlen gemäss einer bestimmten Verteilung greifen auf gleichverteilte Zufallszahlen zurück. Zu deren Erzeugung wird ein Park-Miller-Algorithmus mit zusätzlichem Bays-Durham-Shuffle eingesetzt. Numerical Recipes stellt hierfür mit der Routine „ran1.c“ einen entsprechenden Algorithmus zur Verfügung (vgl. Press et al. [95], S. 267 ff.).

Der Park-Miller-Algorithmus beruht auf der *linearen Kongruenzmethode*, nach der eine Reihe von Zufallszahlen  $r_n \in \mathbb{N}$  iterativ nach der Vorschrift

$$r_{n+1} = (a r_n + b) \bmod m \tag{A.1}$$

berechnet werden. Die so erzeugten Zahlen sind gleichverteilt im Intervall  $(0, m]$ . Eine Zufallszahl  $\eta$  aus  $(0, 1]$  ergibt sich durch Division mit  $m$ :  $\eta = r_n/m$ . Gleiche Folgen von Pseudozufallszahlen erhält man, wenn jedesmal mit dem gleichen Anfangswert gestartet wird. Deshalb ist zunächst der Zufallszahlengenerator zu initialisieren, indem man den Startwert der Rekursion von der Systemzeit des Rechners abhängen lässt. So lassen sich immer neue Folgen generieren. Nach spätestens  $m$  Zahlen wiederholen sich die Elemente der Reihe  $r_n$ , so dass  $m$  möglichst gross gewählt werden sollte. Die

Routine „ran1.c“ verwendet folgende Parametereinstellungen

$$(a, b, m) = (7^5, 0, 2^{31} - 1) .$$

Aufgrund der rekursiven Berechnung der Zufallszahlen, weisen diese eine Korrelation auf. Um diese Korrelationen zu verringern, wird ein sogenannter Shuffle-Algorithmus verwendet, hier das Bays-Durham-Shuffle (vgl. Press et al. [95], S. 271 f.). Dieses Verfahren verläuft in mehreren Schritten. Zunächst wird ein Vektor von 32 gleichverteilten Zufallszahlen nach dem obigem iterativen Schema erzeugt. Danach wird eine weitere gleichverteilte Zufallszahl generiert, mit deren Hilfe aus dem Vektor eine bestimmte Zufallszahl gezogen wird. Diese gezogene Zahl wird einerseits dazu verwendet, in einer weiteren Ziehung aus dem Vektor der 32 Zufallszahlen auszuwählen, andererseits stellt sie den Output des Verfahrens dar. Die durch die Ziehung entstandene „Lücke“ im Vektor wird durch eine Zufallszahl, berechnet nach der Iterationsvorschrift, wieder aufgefüllt.

## A.2 Normalverteilte Zufallszahlen

Für die Monte-Carlo-Simulation der Geometrischen Brownschen Bewegung werden normalverteilte Zufallszahlen benötigt.

Normalverteilte Zufallsvariablen lassen sich mit Hilfe der sogenannten *Koordinatentransformationsmethode* (vgl. Honerkamp [58], S. 21) erzeugen. Dazu zieht man zunächst zwei Zufallszahlen  $(x_1, x_2)$ , jeweils gleichverteilt in  $(0, 1]$ . Daraus bildet man die beiden Werte

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{-2 \ln x_1} \cos(2\pi x_2) , \\ y_2 &= \sqrt{-2 \ln x_1} \sin(2\pi x_2) , \end{aligned} \tag{A.2}$$

die dann Realisierungen einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen darstellen. Man nennt diese Methode auch *Box-Müller-Verfahren*.

## A.3 Verwerfungsmethode

Zur Generierung von poissonverteilten Zufallszahlen für die Simulation der Sprung-Ereignisse im Sprung-Diffusions-Prozess und von hyperbolisch verteilten Zufallszahlen im hyperbolischen Modell wird die *Verwerfungsmethode* verwendet. Sie wird zunächst allgemein dargestellt (vgl. Honerkamp [58], S. 26 f. und Press et al. [95], S. 281 ff.).

Ziel ist die Generierung einer Zufallszahl in einem Intervall  $[a, b]$ , welche eine Realisierung einer bestimmten Verteilung mit Dichte  $f(x)$  darstellt. Dazu verwendet man

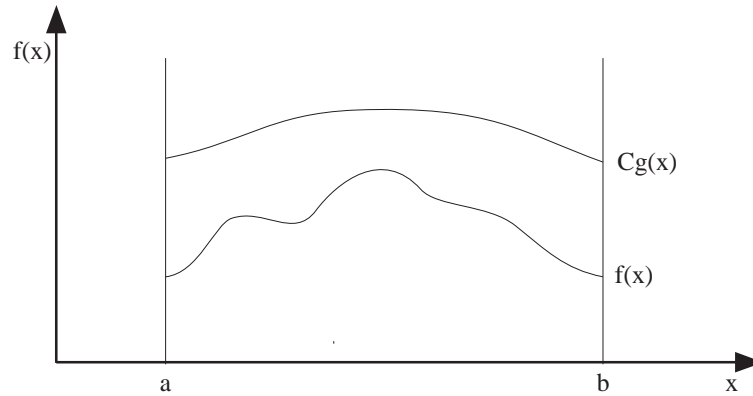


Abbildung A.1: Grundidee der Verwerfungsmethode.

eine Dichtefunktion  $g(x)$ , für welche sich Realisierungen leicht berechnen lassen und für die im Intervall  $[a, b]$  mit einer Konstanten  $C$  gilt (vgl. Abbildung A.1):

$$C g(x) \geq f(x). \quad (\text{A.3})$$

Im Gebiet unterhalb der Funktion  $C g(x)$  werden nun Paare von Zufallszahlen  $(x_0, y_0)$  nach folgender Vorschrift erzeugt:

1. Generiere eine Zufallszahl  $x_0$  gemäss der Dichte  $g(x)$ .
2. Generiere eine Zufallszahl  $y_0$  gleichverteilt in  $[0, C g(x_0))$ .

Dieses Paar  $(x_0, y_0)$  wird akzeptiert, falls  $y_0 \leq f(x_0)$ , ansonsten muss ein neues Paar erzeugt werden. Die auf diese Weise generierten Zufallszahlen  $x_0$  besitzen schliesslich die gewünschte Verteilung gemäss der Dichte  $f(x)$ .

### A.3.1 Poissonverteilte Zufallszahlen

Sollen mit der Verwerfungsmethode poissonverteilte Zufallszahlen generiert werden, stellt sich das Problem, dass es sich bei der Poisson-Verteilung um eine diskrete Verteilung handelt. Ein Vergleich mit einer stetigen Verteilung ist daher zunächst nicht möglich. Die Idee besteht nun darin, die diskrete Verteilung zu einer stetigen Funktion zu erweitern. Dazu wird der Wert der Wahrscheinlichkeitsfunktion an einer bestimmten Stelle  $j$  auf das ganze Intervall von  $j$  bis  $j + 1$  ausgedehnt. Abbildung A.2 stellt dieses Vorgehen graphisch dar. Man erhält so eine stetige Funktion, die sich zur Anwendung der Verwerfungsmethode eignet. Die erzeugten Zufallszahlen sind zunächst Elemente der reellen Zahlen und werden durch Abrunden auf die nächst kleinere natürliche Zahl zu Realisierungen einer diskreten Zufallsvariablen (vgl. Press et al. [95], S. 283 f.).

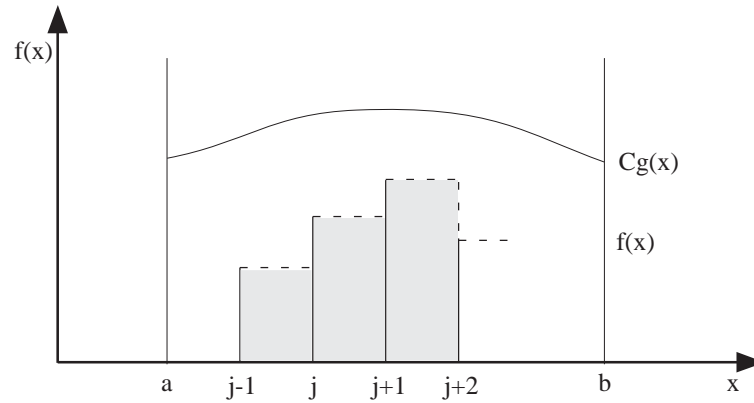


Abbildung A.2: Erweiterung einer diskreten zu einer stetigen Funktion zur Anwendung der Verwerfungsmethode.

Numerical Recipes stellt mit der Routine „poidev.c“ einen Algorithmus bereit, der poissonverteilte Zufallszahlen nach dem beschriebenen Verfahren erzeugt.

### A.3.2 Hyperbolisch verteilte Zufallszahlen

Zur Erzeugung hyperbolisch verteilter Zufallszahlen wird als Hilfsverteilung  $g(x)$  für die Verwerfungsmethode die Normalverteilung verwendet. Dabei ist vor allem darauf zu achten, dass in den Enden der Verteilung die Dichte der gewählten Hilfsverteilung multipliziert mit dem Faktor  $C$  überhalb der Dichte der hyperbolischen Verteilung liegt. Für die Implementierung der Verwerfungsmethode müssen in diesem Fall die Parameter der Normalverteilung  $\mu$  und  $\sigma$  sowie der konstante Faktor  $C$  angegeben werden.

## Anhang B

# Annahmen über Renditeverteilungen und empirische Befunde

### B.1 BDS–Statistiken

Die Nullhypothese von unabhängig und identisch verteilten Renditen wird mit Hilfe des BDS–Tests überprüft. In den nachfolgenden Tabellen sind die Werte der Testgrößen, welche unter  $H_0$  asymptotisch standardnormalverteilt sind, sowie die Testergebnisse dargestellt.

Titel Periode Beobachtungen $n$	SMI			Titel Periode Beobachtungen $n$	ABBI		
	1989-1998 2506	1989-1993 1253	1994-1998 1252		1989-1998 2491	1989-1993 1243	1994-1998 1247
$m$ $\delta$				$m$ $\delta$			
2   0.5	0.4288	0.2012	0.3576	2   0.5	0.5512	0.3163	0.4791
3   0.5	0.4371	0.2379	0.3457	3   0.5	0.5322	0.2758	0.5097
4   0.5	0.3002	0.1643	0.2314	4   0.5	0.3819	0.1773	0.4011
5   0.5	0.1736	0.0950	0.1349	5   0.5	0.2389	0.1099	0.2632
2   1.0	0.9907	0.4775	0.8132	2   1.0	1.1403	0.6447	0.9552
3   1.0	1.7545	0.9160	1.3925	3   1.0	1.9282	0.9795	1.7699
4   1.0	2.0864*	1.1118	1.6327	4   1.0	2.2996*	1.1076	2.1940*
5   1.0	2.1062*	1.1263	1.6426	5   1.0	2.3582*	1.1208	2.2891*
2   1.5	1.0100	0.4929	0.7956	2   1.5	1.0194	0.5872	0.8519
3   1.5	2.2350*	1.1221	1.7663	3   1.5	2.1900*	1.1273	1.9705*
4   1.5	3.2961**	1.6952	2.5855*	4   1.5	3.2431**	1.6283	2.9749**
5   1.5	4.1250**	2.1459*	3.2180**	5   1.5	4.0657**	1.9967*	3.8002**
2   2.0	0.7495	0.4099	0.5729	2   2.0	0.6137	0.3656	0.4845
3   2.0	1.8293	0.9678	1.4292	3   2.0	1.5671	0.8619	1.2992
4   2.0	2.9461**	1.5351	2.3331*	4   2.0	2.6123**	1.4030	2.2078*
5   2.0	4.0516**	2.0898*	3.2427**	5   2.0	3.6218**	1.8793	3.1413**
*   signifikant bei $\alpha = 5\%$ ** signifikant bei $\alpha = 1\%$				*   signifikant bei $\alpha = 5\%$ ** signifikant bei $\alpha = 1\%$			



Titel Periode Beobachtungen $n$	NESN			Titel Periode Beobachtungen $n$	NOVN		
	1989-1998 2491	1989-1993 1243	1994-1998 1247		1989-1998 2491	1989-1993 1243	1994-1998 1247
$m \quad \delta$				$m \quad \delta$			
2 0.5	0.5331	0.4087	0.2966	2 0.5	0.2735	0.1989	0.1989
3 0.5	0.5314	0.3995	0.2944	3 0.5	0.2955	0.1905	0.2394
4 0.5	0.3641	0.2686	0.1992	4 0.5	0.2099	0.1126	0.1965
5 0.5	0.2130	0.1592	0.1124	5 0.5	0.1226	0.0554	0.1271
2 1.0	1.0313	0.7056	0.6715	2 1.0	0.5839	0.4360	0.3923
3 1.0	1.7042	1.0723	1.1657	3 1.0	1.0267	0.6891	0.7681
4 1.0	1.9386	1.1849	1.3311	4 1.0	1.2290	0.7265	1.0138
5 1.0	1.9038	1.1689	1.3078	5 1.0	1.1786	0.6190	1.0480
2 1.5	0.9347	0.5486	0.6998	2 1.5	0.5630	0.4463	0.3618
3 1.5	1.9217	1.0259	1.4822	3 1.5	1.1965	0.9007	0.8143
4 1.5	2.7002**	1.3971	2.0816*	4 1.5	1.7817	1.2343	1.3034
5 1.5	3.3035**	1.6645	2.5705*	5 1.5	2.1410*	1.3590	1.6741
2 2.0	0.6805	0.3463	0.5491	2 2.0	0.3867	0.2874	0.2532
3 2.0	1.5114	0.7088	1.2319	3 2.0	0.9142	0.6659	0.6177
4 2.0	2.3228*	1.0584	1.8971	4 2.0	1.5033	1.0218	1.0904
5 2.0	3.1701**	1.3961	2.6115**	5 2.0	2.0071*	1.2580	1.5545
* signifikant bei $\alpha = 5\%$ ** signifikant bei $\alpha = 1\%$				* signifikant bei $\alpha = 5\%$ ** signifikant bei $\alpha = 1\%$			

Titel		ROG		
Periode		1989–1998	1989–1993	1994–1998
Beobachtungen $n$		2491	1243	1247
$m$	$\delta$			
2	0.5	0.3572	0.3353	0.1551
3	0.5	0.3795	0.3829	0.1610
4	0.5	0.2810	0.2836	0.1213
5	0.5	0.1786	0.1786	0.0877
2	1.0	0.6681	0.5920	0.3072
3	1.0	1.2458	1.1194	0.5684
4	1.0	1.6001	1.4131	0.7645
5	1.0	1.6828	1.4604	0.8338
2	1.5	0.5690	0.5570	0.2314
3	1.5	1.3849	1.2968	0.6197
4	1.5	2.1756*	1.9428	1.0711
5	1.5	2.7607**	2.3767*	1.4386
2	2.0	0.4210	0.4457	0.1474
3	2.0	1.0983	1.0754	0.4688
4	2.0	1.8150	1.6904	0.8686
5	2.0	2.4845*	2.2170*	1.2834
* signifikant bei $\alpha = 5\%$				
** signifikant bei $\alpha = 1\%$				

## B.2 Q–Statistiken

Die Nullhypothese von verschwindenden Autokorrelationen der Renditen wird mit Hilfe der Q–Statistiken von Box–Pierce und Box–Ljung überprüft. Für die Berechnung der Testgrößen wurden  $m = 15$  Autokorrelationen berücksichtigt. In den nachfolgenden Tabellen sind die Werte der Testgrößen, welche unter  $H_0$   $\chi^2$ –verteilt mit  $m$  Freiheitsgraden sind, sowie die Testergebnisse dargestellt.

SMI				
Zeitraum	Q–Statistik	$r$	$r^2$	$ r $
1989–1998	Box–Pierce	22.4797	441.010**	1347.30**
	Box–Ljung	22.5661	442.425**	1351.98**
1989–1993	Box–Pierce	23.1473	55.5175**	194.797**
	Box–Ljung	23.3702	55.7463**	195.832**
1994–1998	Box–Pierce	21.3739	1206.42**	1329.86**
	Box–Ljung	21.5323	1215.08**	1339.73**
* signifikant bei $\alpha = 5\%$				
** signifikant bei $\alpha = 1\%$				

ABBI				
Zeitraum	Q-Statistik	$r$	$r^2$	$ r $
1989–1998	Box–Pierce	82.2259**	707.077**	989.422**
	Box–Ljung	82.4131**	709.793**	992.931**
1989–1993	Box–Pierce	38.6578**	139.402**	189.365**
	Box–Ljung	38.8446**	140.126**	190.324**
1994–1998	Box–Pierce	55.9773**	563.354**	935.785**
	Box–Ljung	56.2729**	567.979**	943.229**
* signifikant bei $\alpha = 5\%$ ** signifikant bei $\alpha = 1\%$				

NESN				
Zeitraum	Q-Statistik	$r$	$r^2$	$ r $
1989–1998	Box–Pierce	54.0561**	439.458**	949.485**
	Box–Ljung	54.2057**	440.805**	952.746**
1989–1993	Box–Pierce	21.0448	56.7600**	184.330**
	Box–Ljung	21.2309	56.9902**	185.440**
1994–1998	Box–Pierce	50.7252**	673.990**	692.863**
	Box–Ljung	51.0147**	678.570**	697.785**
* signifikant bei $\alpha = 5\%$ ** signifikant bei $\alpha = 1\%$				

NOVN				
Zeitraum	Q-Statistik	$r$	$r^2$	$ r $
1989–1998	Box–Pierce	15.1238	88.1844**	284.472**
	Box–Ljung	15.1879	88.3065**	285.252**
1989–1993	Box–Pierce	9.87607	103.301**	78.9959**
	Box–Ljung	9.95396	103.563**	79.2896**
1994–1998	Box–Pierce	15.5672	16.2593	344.654**
	Box–Ljung	15.6920	16.3581	347.033**
* signifikant bei $\alpha = 5\%$ ** signifikant bei $\alpha = 1\%$				

ROG				
Zeitraum	Q-Statistik	$r$	$r^2$	$ r $
1989–1998	Box–Pierce	45.4832**	298.971**	519.409**
	Box–Ljung	45.6401**	299.943**	521.143**
1989–1993	Box–Pierce	24.7741	169.697**	253.524**
	Box–Ljung	24.9811	170.779**	254.946**
1994–1998	Box–Pierce	34.6105	139.773**	294.896**
	Box–Ljung	34.8136	140.748**	297.212**
* signifikant bei $\alpha = 5\%$				
** signifikant bei $\alpha = 1\%$				

## Anhang C

# Parameterschätzungen und Testergebnisse für Aktienrenditen

### C.1 Tagesrenditen

In den nachfolgenden Tabellen sind die Ergebnisse der Parameterschätzungen für die einzelnen Modelle dargestellt. Die Nullhypothese von gemäss einem bestimmten Modell verteilter Renditen wird mit verschiedenen Tests überprüft. „\*“ bedeutet signifikant bei Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$ ; „\*\*“ bedeutet signifikant bei Signifikanzniveau  $\alpha = 1\%$ .

SMI		1-jährig		5-jährig		10-jährig
Modell		97	98	89-93	94-98	89-98
GBB	$\hat{\mu}$	0.001872	0.000451	0.000560	0.000696	0.000633
	$\hat{\sigma}^2$	0.000154	0.000304	0.000108	0.000134	0.000121
	Schiefe	-0.481878	-0.218181	-1.438211	-0.255429	-0.751422
	Kurtosis	4.166645	4.847729	21.325534	6.905310	12.707527
	$\chi^2$ -Test		**	**	**	**
	KS-Test	*	**	**	**	**
	LQ-Test	**	**	**	**	**
SD	$\hat{\mu}_B$	0.004888	0.003076	0.000720	0.001436	0.001058
	$\hat{\sigma}_B^2$	0.000053	0.000138	0.000053	0.000065	0.000058
	$\hat{\mu}_J$	-0.003434	-0.007944	-0.001767	-0.003270	-0.002600
	$\hat{\sigma}_J^2$	0.000103	0.000452	0.000554	0.000295	0.000360
	$\hat{\lambda}$	0.878352	0.330483	0.090512	0.226296	0.163667
	$\chi^2$ -Test					
HYP	$\hat{\alpha}$	157.463259	101.866072	164.186660	136.684468	147.587797
	$\hat{\delta}$	0.011124	0.011802	0.004048	0.004376	0.003963
	$\hat{\beta}$	-35.849655	-17.810864	-10.070848	-11.918593	-10.710101
	$\hat{\mu}$	0.006979	0.005523	0.001464	0.002210	0.001792
	$\chi^2$ -Test			*		**

SMI		2-jährig				
Modell		89-90	91-92	93-94	95-96	97-98
GBB	$\hat{\mu}$	-0.000117	0.000858	0.000427	0.000828	0.001197
	$\hat{\sigma}^2$	0.000145	0.000097	0.000080	0.000055	0.000230
	Schiefe	-1.712059	-0.854481	-0.304072	0.210838	-0.346708
	Kurtosis	21.792646	16.125369	3.378509	7.893820	5.208026
	$\chi^2$ -Test	**	**		**	**
	KS-Test	**	**	*	**	**
	LQ-Test	**	**	*	**	**
SD	$\hat{\mu}_B$	0.000045	0.000760	0.002009	0.001089	0.003280
	$\hat{\sigma}_B^2$	0.000061	0.000049	0.000061	0.000035	0.000113
	$\hat{\mu}_J$	-0.001622	0.000979	-0.010500	-0.003046	-0.007356
	$\hat{\sigma}_J^2$	0.000788	0.000445	0.000011	0.000218	0.000364
	$\hat{\lambda}$	0.099922	0.100294	0.150607	0.085672	0.283197
	$\chi^2$ -Test					
HYP	$\hat{\alpha}$	140.799701	172.924410	348.078188	237.386686	117.000831
	$\hat{\delta}$	0.003505	0.004473	0.020285	0.005075	0.009692
	$\hat{\beta}$	-4.904548	-1.728433	-87.483387	-22.189443	-22.523766
	$\hat{\mu}$	0.000446	0.001002	0.006888	0.001971	0.005982
	$\chi^2$ -Test					

ABBI		1-jährig		5-jährig		10-jährig
Modell		97	98	89-93	94-98	89-98
GBB	$\hat{\mu}$	0.000620	-0.000520	0.000608	0.000383	0.000506
	$\hat{\sigma}^2$	0.000305	0.000614	0.000225	0.000249	0.000238
	Schiefe	-1.474911	-0.391111	-0.353785	-0.786482	-0.587532
	Kurtosis	11.149393	6.888112	8.222717	12.213275	10.442429
	$\chi^2$ -Test	**	**	**	**	**
	KS-Test	**	**	**	**	**
	LQ-Test	**	**	**	**	**
SD	$\hat{\mu}_B$	0.001740	0.000539	0.000605	0.005066	0.001029
	$\hat{\sigma}_B^2$	0.000019	0.000341	0.000110	0.000077	0.000090
	$\hat{\mu}_J$	-0.000757	-0.009676	0.000019	-0.002900	-0.001753
	$\hat{\sigma}_J^2$	0.000177	0.002413	0.000651	0.000397	0.000460
	$\hat{\lambda}$	1.479589	0.109413	0.176212	0.387236	0.298258
	$\chi^2$ -Test					**
HYP	$\hat{\alpha}$	n.v.	n.v.	101.254883	96.787031	98.876826
	$\hat{\delta}$	n.v.	n.v.	0.003478	0.001796	0.002872
	$\hat{\beta}$	n.v.	n.v.	2.732345	-7.722534	-2.772913
	$\hat{\mu}$	n.v.	n.v.	0.000030	0.002091	0.001109
	$\chi^2$ -Test					**

ABBI		2-jährig				
Modell		89-90	91-92	93-94	95-96	97-98
GBB	$\hat{\mu}$	0.000730	-0.000075	0.000979	0.000846	0.000065
	$\hat{\sigma}^2$	0.000298	0.000213	0.000134	0.000086	0.000459
	Schiefe	-0.312733	-0.435596	0.070094	-0.326911	-0.728726
	Kurtosis	8.107511	6.839448	3.486414	4.252071	8.609178
	$\chi^2$ -Test	**	**		**	**
	KS-Test	**	**	*	**	**
	LQ-Test	**	**	*	**	**
SD	$\hat{\mu}_B$	0.000183	0.000425	-0.001171	0.001626	0.003283
	$\hat{\sigma}_B^2$	0.000074	0.000116	0.000033	0.000060	0.000130
	$\hat{\mu}_J$	0.001123	-0.003050	0.000874	-0.004304	-0.005792
	$\hat{\sigma}_J^2$	0.000438	0.000577	0.000041	0.000129	0.000512
	$\hat{\lambda}$	0.486913	0.163883	2.459254	0.181136	0.555476
	$\chi^2$ -Test					
HYP	$\hat{\alpha}$	85.801915	106.422687	211.493521	215.658648	68.569495
	$\hat{\delta}$	4.08e-11	0.005153	0.020443	0.010070	0.000228
	$\hat{\beta}$	2.684204	-1.046365	20.805155	-33.691438	-5.747719
	$\hat{\mu}$	4.90e-11	0.000139	-0.001780	0.003644	0.002529
	$\chi^2$ -Test					

NESN		1-jährig		5-jährig		10-jährig
Modell		97	98	89-93	94-98	89-98
GBB	$\hat{\mu}$	0.001789	0.001193	0.000607	0.000745	0.000678
	$\hat{\sigma}^2$	0.000155	0.000380	0.000118	0.000164	0.000141
	Schiefe	-0.086636	-0.407469	-0.816198	-0.258011	-0.470657
	Kurtosis	4.120717	3.757916	13.770437	5.642890	8.630182
	$\chi^2$ -Test			**	**	**
	KS-Test			**	**	**
	LQ-Test			**	**	**
SD	$\hat{\mu}_B$	0.002229	0.004077	0.000650	0.000885	0.000745
	$\hat{\sigma}_B^2$	0.000105	0.000023	0.000069	0.000085	0.000074
	$\hat{\mu}_J$	-0.002270	-0.088408	-0.000588	-0.000613	-0.000420
	$\hat{\sigma}_J^2$	0.000253	0.000377	0.000645	0.000350	0.000412
	$\hat{\lambda}$	0.193924	0.343062	0.073556	0.227198	0.158480
	$\chi^2$ -Test			**		**
HYP	$\hat{\alpha}$	164.156098	109.503886	134.985117	123.410957	n.v.
	$\hat{\delta}$	0.015347	0.023474	2.11e-11	0.005790	n.v.
	$\hat{\beta}$	-3.576932	-21.766382	5.519311	1.467076	n.v.
	$\hat{\mu}$	0.002337	0.008994	2.30e-11	0.000509	n.v.
	$\chi^2$ -Test			**	*	

NESN		2-jährig				
Modell		89-90	91-92	93-94	95-96	97-98
GBB	$\hat{\mu}$	0.000142	0.001134	0.000242	0.000419	0.001533
	$\hat{\sigma}^2$	0.000157	0.000079	0.000133	0.000068	0.000268
	Schiefe	-1.166177	-0.098811	-0.058707	-0.177606	-0.389290
	Kurtosis	15.303194	11.856542	3.697147	5.001036	4.500428
	$\chi^2$ -Test	**	**			**
	KS-Test	**	**		*	**
	LQ-Test	**	**		**	**
SD	$\hat{\mu}_B$	0.000246	0.000875	0.000442	0.000528	0.002810
	$\hat{\sigma}_B^2$	0.000066	0.000048	0.000112	0.000047	0.000142
	$\hat{\mu}_J$	-0.000765	0.003959	-0.002883	-0.000846	-0.004073
	$\hat{\sigma}_J^2$	0.000631	0.000443	0.000314	0.000162	0.000389
	$\hat{\lambda}$	0.135930	0.065358	0.062213	0.128804	0.313539
	$\chi^2$ -Test	*	*			
HYP	$\hat{\alpha}$	123.454603	179.531096	240.882081	219.960842	110.021232
	$\hat{\delta}$	1.23e-10	0.002746	0.025280	0.007275	0.013288
	$\hat{\beta}$	1.085191	19.001919	6.907636	-0.461783	-11.583924
	$\hat{\mu}$	-2.88e-11	-0.000221	-0.000668	0.000450	0.004545
	$\chi^2$ -Test					



NOVN		1-jährig		5-jährig		10-jährig
Modell		97	98	89-93	94-98	89-98
GBB	$\hat{\mu}$	0.002039	0.000500	0.000729	0.000994	0.000863
	$\hat{\sigma}^2$	0.000285	0.000349	0.000237	0.000228	0.000233
	Schiefe	-0.043644	0.005604	-1.321936	1.259220	-0.068256
	Kurtosis	4.078810	4.826793	24.295154	19.759430	22.181096
	$\chi^2$ -Test		*	**	**	**
	KS-Test			**	**	**
	LQ-Test		n.v.	**	**	**
SD	$\hat{\mu}_B$	0.001726	n.v.	0.000642	0.000850	0.000854
	$\hat{\sigma}_B^2$	0.000201	n.v.	0.000076	0.000122	0.000093
	$\hat{\mu}_J$	0.001749	n.v.	0.000218	0.000851	0.000026
	$\hat{\sigma}_J^2$	0.000464	n.v.	0.000343	0.000549	0.000380
	$\hat{\lambda}$	0.178992	n.v.	0.399214	0.169892	0.318972
	$\chi^2$ -Test					*
HYP	$\hat{\alpha}$	n.v.	100.346085	97.594541	106.532131	103.277572
	$\hat{\delta}$	n.v.	0.017242	6.73e-11	0.005845	0.004112
	$\hat{\beta}$	n.v.	-11.058928	3.467180	-0.902861	-0.416199
	$\hat{\mu}$	n.v.	0.004238	-5.78e-11	0.001183	0.000950
	$\chi^2$ -Test			**		

NOVN		2-jährig				
Modell		89-90	91-92	93-94	95-96	97-98
GBB	$\hat{\mu}$	-0.000087	0.001214	0.000244	0.001629	0.001299
	$\hat{\sigma}^2$	0.000319	0.000208	0.000148	0.000173	0.000317
	Schiefe	-1.838836	-0.384167	-0.152836	4.805584	-0.032250
	Kurtosis	28.463202	11.089715	3.948755	68.346210	4.570538
	$\chi^2$ -Test	**	**	*	**	
	KS-Test	**	**	**	**	
	LQ-Test	**	**	n.v.	**	n.v.
SD	$\hat{\mu}_B$	0.000361	-0.000356	n.v.	0.001423	n.v.
	$\hat{\sigma}_B^2$	0.000081	0.000046	n.v.	0.000065	n.v.
	$\hat{\mu}_J$	-0.001052	0.002083	n.v.	0.001438	n.v.
	$\hat{\sigma}_J^2$	0.000440	0.000193	n.v.	0.000511	n.v.
	$\hat{\lambda}$	0.426227	0.754106	n.v.	0.143060	n.v.
	$\chi^2$ -Test					
HYP	$\hat{\alpha}$	88.246430	101.045150	152.556977	135.319509	n.v.
	$\hat{\delta}$	5.90e-10	2.05e-11	0.011654	0.003293	n.v.
	$\hat{\beta}$	-0.341329	6.177009	-12.239243	8.868669	n.v.
	$\hat{\mu}$	5.03e-10	2.27e-11	0.002049	0.000541	n.v.
	$\chi^2$ -Test					

ROG		1-jährig		5-jährig		10-jährig
Modell		97	98	89-93	94-98	89-98
GBB	$\hat{\mu}$	0.001303	0.000561	0.001325	0.000810	0.001086
	$\hat{\sigma}^2$	0.000241	0.000251	0.000171	0.000166	0.000169
	Schiefe	0.056055	-0.072057	-1.041412	-0.151905	-0.607247
	Kurtosis	4.309097	3.133058	13.035266	4.732844	8.998945
	$\chi^2$ -Test			**	**	**
	KS-Test			**	**	**
	LQ-Test		n.v.	**	n.v.	**
SD	$\hat{\mu}_B$	0.001176	n.v.	0.001796	n.v.	0.001662
	$\hat{\sigma}_B^2$	0.000194	n.v.	0.000061	n.v.	0.000071
	$\hat{\mu}_J$	0.002080	n.v.	-0.001677	n.v.	-0.001672
	$\hat{\sigma}_J^2$	0.000766	n.v.	0.000358	n.v.	0.000259
	$\hat{\lambda}$	0.061260	n.v.	0.280783	n.v.	0.355360
	$\chi^2$ -Test			**		**
HYP	$\hat{\alpha}$	152.197345	255.069761	114.347518	132.636963	119.716383
	$\hat{\delta}$	0.025693	0.057177	4.19e-12	0.009127	0.004430
	$\hat{\beta}$	-8.691619	-20.226760	8.616394	-9.606200	-4.310918
	$\hat{\mu}$	0.003367	0.005586	-7.32e-13	0.002394	0.001762
	$\chi^2$ -Test			**		**

ROG		2-jährig				
Modell		89-90	91-92	93-94	95-96	97-98
GBB	$\hat{\mu}$	0.000840	0.001644	0.000834	0.001053	0.000982
	$\hat{\sigma}^2$	0.000235	0.000149	0.000145	0.000072	0.000246
	Schiefe	-1.175478	-0.698650	-0.528843	-0.230279	-0.015521
	Kurtosis	11.790082	12.949142	4.871507	4.846335	3.704146
	$\chi^2$ -Test	**	**	**		
	KS-Test	**	**	**	**	
	LQ-Test	**	**	n.v.	**	
SD	$\hat{\mu}_B$	0.001722	0.001615	n.v.	0.001932	0.001068
	$\hat{\sigma}_B^2$	0.000069	0.000069	n.v.	0.000035	0.000204
	$\hat{\mu}_J$	-0.002159	0.000212	n.v.	-0.001561	-0.001011
	$\hat{\sigma}_J^2$	0.000361	0.000554	n.v.	0.000063	0.000400
	$\hat{\lambda}$	0.408424	0.138444	n.v.	0.562988	0.103938
	$\chi^2$ -Test					
HYP	$\hat{\alpha}$	97.602743	122.451089	128.265918	215.889129	170.061494
	$\hat{\delta}$	2.49e-10	3.37e-11	0.004972	0.007504	0.032299
	$\hat{\beta}$	4.002366	12.204579	-8.699459	-21.148542	-8.427376
	$\hat{\mu}$	2.80e-10	1.83e-11	0.002102	0.002547	0.003020
	$\chi^2$ -Test		**	*		

## C.2 Zehntagesrenditen

Die Nullhypothese, dass Zehntagesrenditen normalverteilt sind, wird mit Hilfe eines  $\chi^2$ -Anpassungstests überprüft. In nachfolgender Tabelle sind die entsprechenden Testresultate dargestellt.

Zeitraum	SMI	ABBI	CSN	NESN	NOVN	ROG
1997	**	*	**			
1998	**		**			
1989–1990	**	**	*	**		
1991–1992	**	*	**	*		
1993–1994	*		**	*		**
1995–1996	**	*	**	*	**	**
1997–1998	**	**	**	**	*	
1989–1993	**	**	**	**		**
1994–1998	**	**	**	**	**	**
1989–1998	**	**	**	**	**	**
* signifikant bei $\alpha = 5\%$ ** signifikant bei $\alpha = 1\%$						



## Anhang D

# Ergebnisse der Überprüfung der Optionsmodelle

In den nachfolgenden Tabellen sind die mittleren relativen Abweichungen zwischen Marktpreisen und theoretischen Optionspreisen der Optionen für verschiedene Ausübungsverhältnisse  $S/K$  und Restlaufzeiten  $\tau$  aufgeführt. Fett gedruckt ist jeweils die Zahl, welche die geringste Abweichung darstellt. Negative Abweichungen stellen eine Überbewertung durch einen theoretischen Optionspreis dar.

ABBI	Januar bis Juli 1998				
$S/K$	$\tau$	GBB	SD	HYP	M
$S/K \leq 0.85$	41 bis 80	<b>0.261722</b>	0.373806	0.409366	5
	81 bis 120	<b>0.510114</b>	0.572873	0.603540	1
	> 161	<b>0.266724</b>	0.353783	0.360030	9
$0.85 < S/K \leq 0.95$	1 bis 10	<b>0.528551</b>	0.596025	0.601848	10
	11 bis 20	<b>0.100222</b>	0.200718	0.252833	17
	21 bis 40	<b>0.134660</b>	0.212037	0.258559	56
	41 bis 80	<b>0.171311</b>	0.237000	0.271574	55
	81 bis 120	<b>0.203575</b>	0.257306	0.287455	10
	120 bis 160	<b>0.184156</b>	0.226163	0.248040	2
	> 160	<b>0.140602</b>	0.222928	0.235146	8
$0.95 < S/K \leq 1.00$	1 bis 10	-0.091487	<b>0.003452</b>	0.042106	43
	11 bis 20	<b>-0.005305</b>	0.055460	0.092385	51
	21 bis 40	<b>0.060334</b>	0.107629	0.139491	80
	41 bis 80	<b>0.097263</b>	0.139072	0.161888	29
	81 bis 120	<b>0.065389</b>	0.102996	0.131442	8
	121 bis 160	<b>0.198442</b>	0.224992	0.262133	1
	> 160	<b>0.112426</b>	0.151906	0.171965	5
$1.00 < S/K \leq 1.05$	1 bis 10	-0.012758	<b>0.004075</b>	0.020985	38
	11 bis 20	-0.021371	<b>0.002094</b>	0.020175	28
	21 bis 40	<b>0.031438</b>	0.055912	0.077860	19
	41 bis 80	<b>0.055548</b>	0.080282	0.097080	11
	81 bis 120	<b>0.058758</b>	0.088132	0.108685	5
$1.05 < S/K \leq 1.15$	1 bis 10	<b>0.009192</b>	0.009883	0.011909	26
	11 bis 20	<b>0.014382</b>	0.018842	0.022856	15
	21 bis 40	<b>0.021081</b>	0.027419	0.033043	16
	41 bis 80	<b>0.038812</b>	0.051070	0.059928	8
	> 160	<b>0.072729</b>	0.098095	0.120330	1
$1.15 < S/K$	1 bis 10	-0.003108	<b>-0.002958</b>	-0.003094	11
	11 bis 20	-0.005351	-0.005355	<b>-0.005306</b>	6
	21 bis 40	<b>0.002809</b>	0.003646	0.005108	7
	41 bis 80	<b>0.035174</b>	0.038470	0.041118	1
	81 bis 120	<b>0.018743</b>	0.025143	0.031897	2
	> 160	<b>0.015049</b>	0.019862	0.023132	3

ABBI	August bis Dezember 1998				
$S/K$	$\tau$	GBB	SD	HYP	M
$S/K \leq 0.85$	11 bis 20	0.890969	<b>0.869136</b>	0.906599	8
	21 bis 40	<b>0.749690</b>	0.753268	0.804037	9
	41 bis 80	<b>0.686878</b>	0.730829	0.761011	19
	81 bis 120	<b>0.515921</b>	0.598122	0.602654	25
	121 bis 160	<b>0.725271</b>	0.756868	0.800346	2
$0.85 < S/K \leq 0.95$	1 bis 10	0.474281	<b>0.322332</b>	0.467505	5
	11 bis 20	<b>0.441111</b>	0.458341	0.505598	27
	21 bis 40	<b>0.360717</b>	0.401526	0.438295	41
	41 bis 80	<b>0.315631</b>	0.351370	0.387090	39
	81 bis 120	<b>0.237389</b>	0.300086	0.309118	9
$0.95 < S/K \leq 1.00$	1 bis 10	<b>0.196041</b>	0.268576	0.288127	23
	11 bis 20	<b>0.233410</b>	0.264849	0.292497	20
	21 bis 40	<b>0.233811</b>	0.270244	0.287359	21
	41 bis 80	<b>0.263921</b>	0.288987	0.314584	11
	81 bis 120	<b>0.242700</b>	0.272150	0.293348	4
$1.00 < S/K \leq 1.05$	1 bis 10	<b>0.048638</b>	0.073865	0.083867	11
	11 bis 20	<b>0.186972</b>	0.208570	0.222400	14
	21 bis 40	<b>0.127927</b>	0.160527	0.172186	9
	41 bis 80	<b>0.200319</b>	0.222991	0.229065	3
	81 bis 120	<b>0.158252</b>	0.202507	0.209049	2
$1.05 < S/K \leq 1.15$	1 bis 10	<b>0.006948</b>	0.008330	0.009180	6
	11 bis 20	<b>0.101106</b>	0.108808	0.115191	4
	21 bis 40	<b>0.086739</b>	0.106295	0.110575	6
	41 bis 80	<b>0.087569</b>	0.116155	0.123012	2
	81 bis 120	<b>0.130989</b>	0.155241	0.157857	2
$1.15 < S/K$	81 bis 120	<b>0.102487</b>	0.118727	0.115997	1

NESN	Januar bis Juli 1998				
$S/K$	$\tau$	GBB	SD	HYP	M
$S/K \leq 0.85$	11 bis 20	0.915108	<b>0.890420</b>	0.908117	1
	81 bis 120	0.388038	<b>0.386789</b>	0.399381	1
	121 bis 160	0.233348	<b>0.225326</b>	0.322184	1
	> 160	<b>0.207259</b>	0.208324	0.235369	11
$0.85 < S/K \leq 0.95$	1 bis 10	0.553654	<b>0.474424</b>	0.580928	5
	11 bis 20	0.192722	<b>0.177194</b>	0.222753	30
	21 bis 40	0.102497	<b>0.101884</b>	0.133794	28
	41 bis 80	0.155267	<b>0.151534</b>	0.185968	27
	81 bis 120	0.189014	<b>0.186441</b>	0.220045	9
	121 bis 160	0.221320	<b>0.217172</b>	0.272539	14
	> 160	<b>0.192219</b>	0.194091	0.209723	27
$0.95 < S/K \leq 1.00$	1 bis 10	-0.146774	-0.142892	<b>-0.112768</b>	59
	11 bis 20	-0.108721	-0.106113	<b>-0.077426</b>	64
	21 bis 40	-0.002412	<b>0.000180</b>	0.020485	102
	41 bis 80	<b>0.040327</b>	0.041642	0.064809	63
	81 bis 120	0.119042	<b>0.117795</b>	0.148753	7
	121 bis 160	0.189459	<b>0.189364</b>	0.216192	6
	> 160	<b>0.153105</b>	0.154747	0.164062	4
$1.00 < S/K \leq 1.05$	1 bis 10	-0.008219	-0.005718	<b>-0.000886</b>	57
	11 bis 20	-0.025738	-0.024746	<b>-0.019119</b>	33
	21 bis 40	<b>0.018149</b>	0.019420	0.029305	50
	41 bis 80	<b>0.062762</b>	0.063594	0.074966	25
	81 bis 120	<b>0.083548</b>	0.083795	0.108013	3
	121 bis 160	<b>0.137307</b>	0.138385	0.143684	10
$1.05 < S/K \leq 1.15$	1 bis 10	-0.002822	-0.002948	<b>-0.002693</b>	36
	11 bis 20	<b>-0.001160</b>	-0.001540	-0.000246	21
	21 bis 40	0.016348	<b>0.016343</b>	0.018554	24
	41 bis 80	<b>0.030585</b>	0.030642	0.034346	19
	81 bis 120	<b>0.112499</b>	0.113893	0.115122	1
	121 bis 160	<b>0.081622</b>	0.082830	0.096957	3
	> 160	<b>0.094163</b>	0.094635	0.100437	6
$1.15 < S/K$	1 bis 10	0.009961	0.009978	<b>0.009957</b>	22
	11 bis 20	<b>-0.006451</b>	-0.006464	-0.006454	8
	21 bis 40	-0.001163	-0.001192	<b>-0.000949</b>	8
	41 bis 80	-0.004208	-0.004338	<b>-0.004160</b>	13
	81 bis 120	<b>0.004960</b>	0.005173	0.005269	1
	121 bis 160	<b>0.017829</b>	0.018146	0.019386	2
	> 160	0.043704	<b>0.043565</b>	0.044831	4



NESN	August bis Dezember 1998				
$S/K$	$\tau$	GBB	SD	HYP	M
$S/K \leq 0.85$	1 bis 10	0.998986	<b>0.996550</b>	0.997479	2
	21 bis 40	<b>0.701005</b>	0.703098	0.717429	11
	41 bis 80	<b>0.505181</b>	0.517712	0.557055	16
	81 bis 120	0.452618	<b>0.451897</b>	0.459515	10
	121 bis 160	0.426747	<b>0.420947</b>	0.426410	1
	> 160	-0.082236	-0.074159	<b>0.012531</b>	1
$0.85 < S/K \leq 0.95$	1 bis 10	0.692108	<b>0.688137</b>	0.711712	24
	11 bis 20	<b>0.337587</b>	0.358005	0.379367	47
	21 bis 40	<b>0.303106</b>	0.313003	0.334847	73
	41 bis 80	<b>0.327386</b>	0.333121	0.355864	90
	81 bis 120	<b>0.227378</b>	0.230147	0.245656	27
	121 bis 160	0.391087	<b>0.389665</b>	0.397290	3
$0.95 < S/K \leq 1.00$	1 bis 10	<b>0.171937</b>	0.187883	0.199170	34
	11 bis 20	<b>0.179943</b>	0.186384	0.205856	47
	21 bis 40	<b>0.217675</b>	0.219911	0.233317	62
	41 bis 80	<b>0.280194</b>	0.280746	0.291389	30
	81 bis 120	0.227485	<b>0.227160</b>	0.234627	7
	121 bis 160	<b>0.185059</b>	0.185653	0.203633	1
$1.00 < S/K \leq 1.05$	1 bis 10	0.017757	<b>0.017090</b>	0.025676	20
	11 bis 20	<b>0.087646</b>	0.087905	0.098043	27
	21 bis 40	<b>0.169009</b>	0.169411	0.175924	22
	41 bis 80	0.231212	<b>0.231053</b>	0.244423	13
	81 bis 120	<b>0.140307</b>	0.140601	0.145841	4
$1.05 < S/K \leq 1.15$	1 bis 10	0.003436	<b>0.002244</b>	0.003376	8
	11 bis 20	0.035829	<b>0.033489</b>	0.040156	9
	21 bis 40	0.072768	<b>0.071574</b>	0.076438	12
	41 bis 80	0.133033	<b>0.132349</b>	0.139116	11
	81 bis 120	<b>0.136793</b>	0.137156	0.137001	1
$1.15 < S/K$	1 bis 10	<b>0.001389</b>	<b>0.001389</b>	<b>0.001389</b>	2
	11 bis 20	-0.033155	-0.033646	<b>-0.033128</b>	2
	21 bis 40	0.132513	<b>0.130938</b>	0.134810	1
	41 bis 80	0.062823	<b>0.062014</b>	0.066235	3
	81 bis 120	0.068763	<b>0.068082</b>	0.070008	3

NOVN	Januar bis Juli 1998				
$S/K$	$\tau$	GBB	SD	HYP	M
$S/K \leq 0.85$	11 bis 20	0.604446	<b>0.532947</b>	0.562842	1
	21 bis 40	0.653889	<b>0.621102</b>	0.660597	2
	41 bis 80	0.216422	<b>0.195721</b>	0.244954	2
	121 bis 160	0.282885	<b>0.281077</b>	0.300250	10
	> 160	0.089627	<b>0.087196</b>	0.113585	21
$0.85 < S/K \leq 0.95$	1 bis 10	0.205069	<b>0.052698</b>	0.182045	36
	11 bis 20	-0.169323	-0.190774	<b>-0.150333</b>	50
	21 bis 40	-0.065461	-0.069773	<b>-0.038103</b>	98
	41 bis 80	<b>0.045290</b>	0.045355	0.063452	89
	81 bis 120	<b>0.159864</b>	0.160530	0.169198	32
	121 bis 160	<b>0.171048</b>	0.171161	0.185907	16
	> 160	<b>0.138374</b>	0.138374	0.155722	21
$0.95 < S/K \leq 1.00$	1 bis 10	-0.184778	-0.195154	<b>-0.158967</b>	88
	11 bis 20	-0.257256	-0.251416	<b>-0.237106</b>	76
	21 bis 40	-0.087986	-0.084890	<b>-0.069983</b>	115
	41 bis 80	<b>0.033465</b>	0.035120	0.047989	87
	81 bis 120	<b>0.121184</b>	0.121729	0.128732	12
	121 bis 160	<b>0.168603</b>	0.169183	0.178919	2
	> 160	<b>0.090561</b>	0.090717	0.099889	6
$1.00 < S/K \leq 1.05$	1 bis 10	-0.004184	<b>0.000988</b>	0.002098	60
	11 bis 20	-0.053383	-0.049144	<b>-0.045502</b>	51
	21 bis 40	-0.010109	-0.007441	<b>-0.001311</b>	69
	41 bis 80	<b>0.044237</b>	0.045938	0.053506	34
	81 bis 120	<b>0.075265</b>	0.075930	0.084244	2
	121 bis 160	<b>0.096170</b>	0.096924	0.105488	1
	> 160	<b>0.098894</b>	0.099711	0.105723	3
$1.05 < S/K \leq 1.15$	1 bis 10	0.012281	0.011993	<b>0.005607</b>	42
	11 bis 20	<b>0.001814</b>	0.002745	0.003605	30
	21 bis 40	<b>0.002245</b>	0.003635	0.006437	28
	41 bis 80	<b>0.048186</b>	0.049366	0.053430	14
	81 bis 120	<b>0.082873</b>	0.083579	0.086266	7
	121 bis 160	<b>0.086351</b>	0.086818	0.090715	1
	> 160	<b>0.041809</b>	0.042623	0.047906	6
$1.15 < S/K$	1 bis 10	-0.009652	-0.009652	<b>-0.009649</b>	5
	11 bis 20	<b>-0.139473</b>	-0.139540	-0.139526	3
	21 bis 40	0.056682	0.056696	<b>0.056640</b>	1
	> 160	<b>0.023836</b>	0.024146	0.025878	7

NOVN	August bis Dezember 1998				
$S/K$	$\tau$	GBB	SD	HYP	M
$S/K \leq 0.85$	1 bis 10	<b>0.996165</b>	0.996679	0.996525	3
	11 bis 20	<b>0.937406</b>	0.947013	0.950205	3
	21 bis 40	<b>0.632463</b>	0.650392	0.677182	4
	41 bis 80	<b>0.623260</b>	0.646992	0.676884	24
	81 bis 120	<b>0.550785</b>	0.563647	0.594261	12
$0.85 < S/K \leq 0.95$	1 bis 10	<b>0.468130</b>	0.471272	0.493375	15
	11 bis 20	<b>0.419407</b>	0.446608	0.466499	42
	21 bis 40	<b>0.277044</b>	0.290619	0.312779	86
	41 bis 80	<b>0.282196</b>	0.291951	0.317470	123
	81 bis 120	<b>0.262762</b>	0.268587	0.293712	33
	121 bis 160	<b>0.328873</b>	0.334231	0.359990	3
	> 160	<b>0.192345</b>	0.194476	0.215917	3
$0.95 < S/K \leq 1.00$	1 bis 10	-0.036809	<b>0.002340</b>	0.006581	48
	11 bis 20	<b>0.132218</b>	0.145167	0.164053	56
	21 bis 40	<b>0.131281</b>	0.138488	0.156931	83
	41 bis 80	<b>0.173614</b>	0.178138	0.197665	59
	81 bis 120	<b>0.162778</b>	0.165483	0.181910	16
$1.00 < S/K \leq 1.05$	1 bis 10	-0.057399	-0.056593	<b>-0.049144</b>	29
	11 bis 20	<b>0.087143</b>	0.090123	0.101189	33
	21 bis 40	<b>0.108329</b>	0.110321	0.121807	44
	41 bis 80	<b>0.116198</b>	0.117625	0.130987	20
	81 bis 120	<b>0.137036</b>	0.138644	0.150821	6
	121 bis 160	<b>0.196785</b>	0.197970	0.214513	2
$1.05 < S/K \leq 1.15$	1 bis 10	-0.087140	-0.088975	<b>-0.087008</b>	15
	11 bis 20	0.047203	<b>0.045491</b>	0.050085	21
	21 bis 40	0.078635	<b>0.077932</b>	0.083478	29
	41 bis 80	0.088622	<b>0.088404</b>	0.096590	11
	81 bis 120	-0.222357	-0.221796	<b>-0.208846</b>	5
$1.15 < S/K$	1 bis 10	<b>0.013167</b>	<b>0.013167</b>	<b>0.013168</b>	1
	11 bis 20	0.015210	<b>0.014805</b>	0.015368	5
	21 bis 40	0.025591	<b>0.025054</b>	0.026254	4
	41 bis 80	0.015683	<b>0.015114</b>	0.017491	4
	81 bis 120	0.059483	<b>0.058954</b>	0.062498	4

ROG	Januar bis Juli 1998			
$S/K$	$\tau$	GBB	HYP	M
$S/K \leq 0.85$	1 bis 10	0.999976	<b>0.999874</b>	1
	11 bis 20	<b>0.893652</b>	0.937971	2
	21 bis 40	<b>0.820558</b>	0.881819	3
	41 bis 80	<b>0.580635</b>	0.822237	2
	121 bis 160	<b>0.543911</b>	0.651691	16
	> 160	<b>0.517888</b>	0.684054	12
$0.85 < S/K \leq 0.95$	1 bis 10	<b>0.742257</b>	0.687347	24
	11 bis 20	<b>0.321909</b>	0.486232	40
	21 bis 40	<b>0.320847</b>	0.438237	46
	41 bis 80	<b>0.279873</b>	0.424992	47
	81 bis 120	<b>0.324129</b>	0.422786	21
	121 bis 160	<b>0.362741</b>	0.446595	21
	> 160	<b>0.222216</b>	0.337325	38
$0.95 < S/K \leq 1.00$	1 bis 10	<b>0.121842</b>	0.267551	104
	11 bis 20	<b>0.057451</b>	0.172646	103
	21 bis 40	<b>0.100790</b>	0.185465	135
	41 bis 80	<b>0.163887</b>	0.226627	83
	81 bis 120	<b>0.138872</b>	0.214640	19
	121 bis 160	<b>0.277903</b>	0.407764	8
	> 160	<b>0.146500</b>	0.241203	18
$1.00 < S/K \leq 1.05$	1 bis 10	<b>0.001341</b>	0.041796	50
	11 bis 20	<b>0.019618</b>	0.068219	33
	21 bis 40	<b>0.057213</b>	0.108818	54
	41 bis 80	<b>0.109458</b>	0.160847	24
	81 bis 120	<b>0.182703</b>	0.259718	1
	121 bis 160	<b>0.202064</b>	0.250220	4
	> 160	<b>0.118187</b>	0.184248	12
$1.05 < S/K \leq 1.15$	1 bis 10	<b>0.009595</b>	0.010540	21
	11 bis 20	<b>0.006554</b>	0.013641	17
	21 bis 40	<b>0.027934</b>	0.039980	17
	41 bis 80	<b>0.038644</b>	0.061341	6
	81 bis 120	<b>0.182466</b>	0.238029	1
	121 bis 160	<b>0.132297</b>	0.153680	1
	> 160	<b>0.077929</b>	0.126990	11
$1.15 < S/K$	1 bis 10	<b>0.001025</b>	0.001028	10
	11 bis 20	<b>0.018458</b>	0.018673	2
	21 bis 40	<b>0.017115</b>	0.018822	6
	41 bis 80	<b>0.025274</b>	0.025274	1
	> 160	<b>0.024527</b>	0.043303	6

ROG	August bis Dezember 1998			
$S/K$	$\tau$	GBB	HYP	M
$S/K \leq 0.85$	41 bis 80 81 bis 120	<b>0.778932</b> <b>0.606327</b>	0.900847 0.778966	17 4
$0.85 < S/K \leq 0.95$	1 bis 10 11 bis 20 21 bis 40 41 bis 80 81 bis 120 > 160	<b>0.392264</b> <b>0.544517</b> <b>0.445576</b> <b>0.439371</b> <b>0.376388</b> <b>0.280213</b>	0.483475 0.652903 0.546483 0.546720 0.488055 0.292724	4 40 68 93 27 1
$0.95 < S/K \leq 1.00$	1 bis 10 11 bis 20 21 bis 40 41 bis 80 81 bis 120 > 160	<b>0.225031</b> <b>0.231520</b> <b>0.285952</b> <b>0.294657</b> <b>0.256302</b> <b>0.222050</b>	0.313644 0.305800 0.367352 0.358152 0.336177 0.239464	71 94 152 79 18 1
$1.00 < S/K \leq 1.05$	1 bis 10 11 bis 20 21 bis 40 41 bis 80 81 bis 120	<b>0.089041</b> <b>0.118023</b> <b>0.194457</b> <b>0.191893</b> <b>0.175851</b>	0.118437 0.149304 0.242929 0.244056 0.265777	43 38 45 35 4
$1.05 < S/K \leq 1.15$	1 bis 10 11 bis 20 21 bis 40 41 bis 80 81 bis 120 > 160	<b>0.006957</b> <b>0.046222</b> <b>0.098333</b> <b>0.122443</b> <b>0.137834</b> <b>0.149782</b>	0.008364 0.051668 0.111947 0.135604 0.156969 0.155176	7 11 15 5 2 1
$1.15 < S/K$	1 bis 10 11 bis 20 21 bis 40 41 bis 80 81 bis 120 > 160	<b>-0.027565</b> -0.006604 <b>0.008815</b> <b>0.087791</b> <b>0.091469</b> <b>0.114484</b>	-0.027567 <b>-0.006575</b> 0.011171 0.099883 0.107589 0.118008	1 1 5 1 2 1



## Anhang E

# Value-at-Risk-Schätzungen und Backtesting

In den nachfolgenden Tabellen sind die Ergebnisse der Value-at-Risk-Schätzungen und des Backtesting für verschiedene Aktien im Jahr 1998 aufgeführt. Der Value-at-Risk-Schätzung liegen ein- und zehntägige Halteperioden sowie  $p$ -Werte von 1% und 5% zugrunde. Als Kriterien beim Backtesting werden binäre Verlustfunktion, relative Überschreitungshöhen und das aus Überschreitungszahlen und Überschreitungshöhen gebildete kombinierte Kriterium eingesetzt. Bei der binären Verlustfunktion kann die Nullhypothese, dass die Value-at-Risk-Schätzungen auf Basis eines genauen vorgenommen wurden, überprüft werden. Dazu dient der Likelihood-Ratio-Test nach Kupiec.





[illegible]



## Anhang F

# Beigelegte Software

Insgesamt sind dieser Arbeit fünf Programme auf Diskette beigelegt. Mit ihrer Hilfe wurde ein Grossteil der empirischen Untersuchungen durchgeführt. Programmiert sind sie in der Programmiersprache C auf einem C++ Compiler der Firma Borland, wobei Routinen von Numerical Recipes [95] eingebunden wurden, um mathematische Teilprobleme zu lösen. Die ausführbaren Programme finden sich im Ordner „Ausführbare Programme“, wobei diese erst noch dekomprimiert werden müssen.

Bei der Programmierung wurde auf ein hohes Mass an Benutzerfreundlichkeit zugunsten einer möglichst fehlerfreien und stabilen Implementierung der Algorithmen verzichtet. Die Programme werden daher in MS-DOS-Fenstern ausgeführt.

Nachfolgend werden einige eher allgemeine Ausführungen zu den einzelnen Programmen gegeben. Details sind den Programmen jeweils in einer Datei im Postscript- und im PDF-Format beigelegt.

Das Programm „iafm“ dient zur Analyse von Annahmen über Renditeverteilungen. Integriert ist der BDS-Test, der Recurrence Plot, eine Routine zur Schätzung der Autokorrelationsfunktion, Q-Statistiken nach Box-Pierce und Box-Ljung, eine Routine zur Schätzung der Excessfunktion sowie die Möglichkeit zur Erstellung einer Compass Rose. Der BDS-Test wird vom Programm als externe Routine aufgerufen, die von Dechert zur Verfügung gestellt wird:

W. D. Dechert  
Departement of Economics  
University of Houston/USA  
<http://dechert.econ.uh.edu/software>

Im Ordner „iafm“ finden sich die entsprechenden Dateien. Details sind der Datei „iafm.ps“ respektive „iafm.pdf“ zu entnehmen.

Das Programm „est2“ dient in erster Linie zur Behandlung der drei ausgewählten Modelle, das heisst der Geometrischen Brownschen Bewegung, des Sprung-Diffusions-Prozess und des hyperbolischen Modells. So sind für die einzelnen Modelle Routinen zur Parameterschätzung, zur Berechnung der Dichtefunktionen der Renditen und deren graphischen Darstellung, statistische Tests wie Kolmogorov-Smirnov-Test,  $\chi^2$ -Anpassungstest und Likelihood-Quotienten-Test zur Überprüfung von Verteilungshypothesen und schliesslich Algorithmen zur parametrischen Schätzung von Quantilen und Lower-Partial-Moments integriert. Die Parameterschätzung beim Sprung-Diffusions-Prozess wird mit Hilfe des Newton-Raphson-Verfahrens durchgeführt. Zur Schätzung der Parameter im hyperbolischen Modell wird eine externe Routine aufgerufen, die von Blæsild und Sørensen [12] zur Verfügung gestellt wird.

P. Blæsild, M. Sørensen  
Departement of Theoretical Statistics  
Institute of Mathematics  
University of Aarhus/DK  
<ftp://imf.au.dk/pub/dist/hyperbolic>

Darüber hinaus bietet das Programm die Möglichkeit zur Schätzung von Quantilen und Lower-Partial-Moments auf der Basis geordneter Stichproben und auf der Basis von Histogrammen.

Im Ordner „est2“ finden sich die entsprechenden Dateien. Details sind der Datei „est2.ps“ respektive „est2.pdf“ zu entnehmen.

Kerndichteschätzungen können mit dem Programm „kernel“ vorgenommen werden. Die Funktionsweise richtet sich dabei nach den in Abschnitt 7.3 geschilderten Schritten. Darüber hinaus sind Routinen implementiert, die eine Schätzung von Quantilen und Lower-Partial-Moments auf Basis der geschätzten Dichte zulassen. Im Ordner „kernel“ finden sich die entsprechenden Dateien. Details sind der Datei „kernel.ps“ respektive „kernel.pdf“ zu entnehmen.

Eine Monte-Carlo-Simulation der Geometrischen Brownschen Bewegung, des Sprung-Diffusions-Prozesses und des hyperbolischen Modell ist mit dem Programm „mc“ möglich. Die Parameterschätzungen müssen dabei als externe Files ins Programm eingelesen werden. Als Ausgabe liefert die Routine Quantil- und Lower-Partial-Moment-Schätzungen sowie Schätzungen für den Erwartungswert derjenigen Renditen, welche die Quantilschätzungen unterschreiten. Im Ordner „mc“ finden sich die entsprechenden Dateien. Details sind der Datei „mc.ps“ respektive „mc.pdf“ zu entnehmen.

Mit dem Programm „option“ lassen sich schliesslich theoretische Optionspreise europäischer Call-Optionen in den drei Modellen berechnen. Eine Eingabe verschiedener Restlaufzeiten und Ausübungsverhältnisse ist dabei möglich. Im Ordner „option“ finden sich die entsprechenden Dateien. Details sind der Datei „option.ps“ respektive

„option.pdf“ zu entnehmen.

Als Graphik-Routine wird „gnuplot“ von den einzelnen Programmen im Bedarfsfall aufgerufen. Eine Ausgabe der Graphiken auf einen Drucker ist somit ebenfalls möglich. Mit dem Befehl „exit“ gelangt man anschliessend wieder zum Hauptprogramm zurück. Bei dieser Graphik-Routine handelt es sich um ein Public-Domain-Produkt, welches in der Regel auf ftp-Servern von Universitäten zu finden ist. Auf der beigelegten Diskette befindet sich mit der Datei „gnuplot32.zip“ eine komprimierte Version dieses Programms.

Kursdaten werden im Format

TT.MM.JJ    Kurswert

eingelassen, wobei anschliessend in logarithmische Renditen umgerechnet wird, Renditedaten werden im Format

ldf. Nr.    Rendite

eingelassen. Ausgaben in Dateien erfolgen im Text-Format mit Tabulatorabständen als Spaltenabgrenzung. Dadurch wird eine Weiterverarbeitung in Standardsoftware möglich.



# Literaturverzeichnis

- [1] Alexander, C.: *The handbook of risk management and analysis*. New York: John Wiley & Sons 1996.
- [2] Abramowitz, M., Stegun, I. A.: *Handbook of mathematical functions*. New York: Dover Publications 1970.
- [3] Bachelier, L.: Théorie de la spéculation. Reprint in Cootner, P. (Hrsg.): *The random character of stock market prices*, 17–78, Cambridge/Mass.: MIT Press 1964.
- [4] Ball, C., Torous, W.: On Jumps in Common Stock Prices and Their Impact on Call Option Pricing. *Journal of Finance*, **40**, 155–173 (1985).
- [5] Barndorff-Nielsen, O.: Normal inverse Gaussian processes and the modelling of stock returns. *Research Report No. 300, Departement of Theoretical Statistics*, University of Aarhus 1995.
- [6] Barndorff-Nielsen, O., Blæsild, P.: Hyperbolic Distribution. In Kotz, S., Johnson, N.L. (Hrsg.): *Encyclopedia of Statistical Sciences*, Vol. 7, 700–707, New York: John Wiley & Sons 1983.
- [7] Barndorff-Nielsen, O., Blæsild, P., Jensen, J.L., Sørensen, M.: The Fascination of Sand. In Atkinson, A. C., Fienberg, S. E. (Hrsg.): *A Celebration of Statistics*, 57–87, New York: Springer 1985.
- [8] Basle Committee on Banking Supervision: Supervisory Lessons to be Drawn from the Asian Crisis. *Working Paper No. 2*, Bank for International Settlement, Basle 1999.
- [9] Basle Committee on Banking Supervision: *Overview of the amendment to the capital accord to incorporate market risks*. Basle 1996.
- [10] Basle Committee on Banking Supervision: *Supervisory Framework for the Use of "Backtesting" in Conjunction with the Internal Models Approach to Market Risk Capital Requirements*. Basle 1996.
- [11] Black, F., Scholes, M.: The pricing of options and other corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**, 637–659 (1973).

- [12] Blæsild, P. Sørensen, M.: „hyp“ – a computer program analyzing data by means of the hyperbolic distribution. *Research Report No. 248, Departement of Theoretical Statistics*, University of Aarhus 1992.
- [13] Blattberg, R., Gonedes, N.: A comparison of Stable and Student Distributions as Statistical Models for Stock Prices. *Journal of Business*, **47**, 244–280 (1974).
- [14] Bollerslev, T.: A Conditional Heteroscedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return. *Review of Economics and Statistics*, **69**, 542–547 (1987).
- [15] Bollerslev, T.: Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327 (1986).
- [16] Brachinger, H. W.: A Unified Perspective on Standardized Risk Measures. In Gaul, W., Locarek–Junge, H. (Hrsg.): *Classification in the Information Age*, 91–99, Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1999.
- [17] Brachinger, H. W.: Das Parameterrisiko von Risikomanagement-Systemen. *Der Schweizer Treuhänder*, **10**, 1015–1022 (1998).
- [18] Brachinger, H. W., Weber, M.: Risk as a primitive: a survey on measures of perceived risk. *OR Spektrum*, **19**, 235–250 (1997).
- [19] Brock, W. A., Hsieh, D. A., LeBaron, B.: *Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability*. Cambridge/Mass., London: MIT Press 1992.
- [20] Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A.: *Taschenbuch der Mathematik*. Thun und Frankfurt a.M.: Verlag Harri Deutsch 1989.
- [21] Bruand, M.: The jump diffusion process in Swiss stock returns and its influence on option valuation. *Finanzmarkt und Portfolio Management*, **1**, 75–98 (1996).
- [22] Bryson, M. C.: Heavy-tailed distributions. In Kotz, S., Johnson, N. L. (Hrsg.): *Encyclopedia of Statistical Sciences, Vol. 3*, 598–601, New York: John Wiley & Sons 1983.
- [23] Bühler, W., Korn, O., Schmidt, A.: Ermittlung von Eigenkapitalanforderungen mit „Internen Modellen“ – Eine empirische Studie zur Messung von Zins-, Währungs- und Optionsrisiken mit Value-at-Risk Ansätzen. *Die Betriebswirtschaft*, **58**, 64–85 (1998).
- [24] Bühler, W., Schmidt, A.: Bank-Risikomanagement mit internen Modellen. *Working Paper 97–11*, Universität Mannheim 1997.
- [25] Butler, J. S., Schachter, B.: Estimating Value-at-Risk with a Precision Measure by Combinig Kernel Estimation with Historical Simulation. *Review of Derivatives Research*, **1**, 371–390 (1998).



- [26] Campbell, J. Y., Lo, A. W., MacKinlay, A. C.: *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton: Princeton University Press (1997).
- [27] Chen, S-H., Lux, T., Marchesi, M.: Testing for Non-Linear Structure in an Artificial Financial Market. *Working Paper*, Universität Bonn 1999.
- [28] Chhikara, R. S., Folks, J. L.: *The Inverse Gaussian Distribution*. New York: Dekker 1989.
- [29] Committee on the Global Financial System: *A Review of Financial Market Events in Autumn 1998*. Basle: Bank for International Settlement 1999.
- [30] Coopers & Lybrand: *generally accepted risk principles*. Coopers & Lybrand 1996.
- [31] Cox, J. C., Ingersoll, J. E., Ross, S.A.: A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, **53**, 385–407 (1985).
- [32] Crouhy, M., Galai, D., Mark, R.: Overview: Model Risk. In Gibson, R. (Hrsg.): *Model Risk – Concepts, Calibration and Pricing*. London: Risk Books 2000.
- [33] Danielsson, J., Hartmann, P.: The Cost of Conservatism: Extreme Returns, Value-at-Risk, and the Basle 'Multiplication Factor'. *Risk*, **11**, 101–103 (1998).
- [34] Danielsson, J., de Vries, C.: Value at Risk and Extreme returns. *Financial Markets Group Discussion Paper, no. 273*, London School of Economics 1997.
- [35] Danielsson, J., de Vries, C.: Beyond the Sample: Extreme Quantile and Probability Estimation. *Working Paper*, Tinbergen Institute, Rotterdam 1997.
- [36] Davis, C. E., Steinberg S. M.: Quantile estimation. In DeGroot, M. H., Ferber, R., Frankel, M. R., Seneta, E., Watson, G. S. (Hrsg.): *Encyclopedia of Statistical Sciences, Vol. 7*, 408–409, New York: John Wiley & Sons 1986.
- [37] Duffie, D., Pan, J.: An Overview of Value at Risk, *Journal of Derivatives*, **4**, 7–49 (1997).
- [38] Eberlein, E.: Moderne Finanzmathematik. *FDM-Preprint-Reihe Nr. 51*, Universität Freiburg i.Br. 1998.
- [39] Eberlein, E., Jacod, J.: On the Range of Options Prices. *FDM-Preprint-Reihe Nr. 18*, Universität Freiburg i.Br. 1995.
- [40] Eberlein, E., Keller, U.: Hyperbolic Distributions in Finance. *Bernoulli*, **1**, 281–299 (1994).
- [41] Eberlein, E., Keller, U., Prause, K.: New insights into smile, mispricing and value at risk: the hyperbolic model. *FDM-Preprint-Reihe Nr. 39*, Universität Freiburg i.Br. 1997.

- [42] Rundschreiben der Eidgenössische Bankenkommission: *Richtlinien zur Eigenmittelunterlegung von Marktrisiken Art. 121–12p BankV*, 22. Oktober 1997 mit Änderungen vom 1. Oktober 1999.
- [43] Embrechts, P., Klüppelberg, C., Mikosch, T.: *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1999.
- [44] Emerging Markets Committee: *Causes, Effects and Regulatory Implications of Financial and Economic Turbulence in Emerging Markets*. The International Organization of Securities Commissions (IOSCO) 1998.
- [45] Emmer, S., Klüppelberg, C., Trüstedt, M.: VaR – ein Mass für das extreme Risiko. *Solutions*, **1**, 53–63 (1998).
- [46] Engel, J., Gizycki, M.: Conservatism, Accuracy and Efficiency: Comparing Value-at-Risk Models, *Working Paper*, Australian Prudential Regulation Authority 1999.
- [47] Engle, R. F., Gonzales–Rivera, G.: Semiparametric ARCH–Models. *Journal of Business and Economic Statistics*, **9**, 345–359 (1991).
- [48] Engle, R. F.: Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, **50**, 987–1007 (1982).
- [49] Eurex: *Produkt Broschüre*. Frankfurt 1999.
- [50] Gardiner, C. W.: *Handbook of Stochastic Methods*. New York: Springer 1985.
- [51] Gehrig, G., Zimmermann, H.: *Fit for Finance*. Zürich: Verlag NZZ, 1997.
- [52] Göing, A.: Estimation in Financial Models. *Working Paper*. ETH Zürich 1996.
- [53] Gouriéroux, C.: *ARCH Models and Financial Applications*. New York: Springer 1997.
- [54] Hamilton, J. D.: *Time Series Analysis*. Princeton: Princeton University Press 1994.
- [55] Hartung, J.: *Statistik*. München: Oldenbourg 1995.
- [56] Hendricks, D.: Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data. *Federal Reserve Bank of New York, Economic Policy Review*, 39–69 (1996).
- [57] Heston, S. L.: A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Application to Bond and Currency Options. *The Review of Financial Studies*, **2**, 327–343 (1993).
- [58] Honerkamp, J.: *Stochastische Dynamische Systeme*. Weinheim: VCH 1990.
- [59] Hsieh, D.: Implications of Nonlinear Dynamics for Financial Risk Management. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **28**, 41–64 (1993).

- 
- [60] Hull, J. C.: *Options, Futures and other Derivatives*. London: Prentice-Hall International 1997.
- [61] Hull, J., White, A.: Value at Risk when Daily Changes in Market Variables are not Normally Distributed. *Journal of Derivatives*, **5**, 9–19 (1998).
- [62] Hull, J., White, A.: An Analysis of the Bias in Option Pricing Caused by a Stochastic Volatility. *Advances in Futures and Options Research*, **3**, 27–61 (1988).
- [63] Hull, J., White, A.: The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *Journal of Finance*, **42**, 281–300 (1987).
- [64] Huschens, S.: Historische Simulation. *Dresdner Beiträge zu Quantitativen Verfahren Nr. 19*, TU Dresden 1998.
- [65] J. P. Morgan: *RiskMetrics – Technical Document, Fourth Edition*. New York: J. P. Morgan 1996.
- [66] Johanning, L.: *Value-at-Risk zur Marktrisikosteuerung und Eigenkapitalallokation*. Bad Soden: Uhlenbruch 1998.
- [67] Johanning, L.: VaR–Limite zur Steuerung des Marktrisikos. *Die Bank*, **1**, 46–50 (1998).
- [68] Jorion, P.: *Value at Risk. The New Benchmark for Controlling Derivatives Risk*. Chicago: Irwin 1997.
- [69] Jorion, P.: On jump processes in the foreign exchange and stock markets. *Review of Financial Studies*, **1**, 427–445 (1988).
- [70] Karatzas, I., Shreve, S. E.: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. New York: Springer 1988.
- [71] Khindanova, I., Svetlozar, R., Schwartz, E.: Stable Modeling of Value at Risk. *Working Paper*, University of California 1999.
- [72] Kloeden, P. E., Platen, E.: *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1992.
- [73] Kon, S.: Models of stock returns – A comparison. *Journal of Finance*, **39**, 147–165 (1984).
- [74] Krämer, W., Runde, R.: Chaos and the Compass Rose. Vortragsmanuskript, Jahrestagung des Vereins für Socialpolitik, September 1997.
- [75] Küchler, U., Neumann, K., Sørensen, M., Streller, A.: Stock Returns and Hyperbolic Distributions. *Discussion Paper 23*, SFB 373, Humboldt–Universität Berlin 1994.
- [76] Kupiec, P. H.: Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models. *Journal of Derivatives*, **2**, 73–84 (1995).

- 
- [77] Lorenz, H.-W.: *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer 1997.
- [78] Lux, T.: The Limiting Extremal Behaviour of Speculative Returns: An Analysis of Intra-Daily Data from the Frankfurt Stock Exchange. *Volkswirtschaftliche Diskussionsbeiträge Nr.80*, Universität Bamberg 1997.
- [79] Maier A.: Von Verkaufswelle zu Verkaufswelle – Dollarschwäche belastet. *Finanz und Wirtschaft*, 12.9.1998.
- [80] Maier A., Heusser-Bachmann, C.: Die schwarzen Freitage häufen sich – Auch Nobelpreise schützen nicht vor Fehlprognosen. *Finanz und Wirtschaft*, 26.9.1998.
- [81] Maier A., Schmocker, A.: Der Hedge-Fund-Schock sitzt tief – Angst vor weiteren Finanzdebakeln. *Finanz und Wirtschaft*, 30.9.1998.
- [82] Malliaris, A. G., Stein, J. L. Financial Modelling: From Stochastics to Chaotics and Back to Stochastics. In Bertocchi, M., Cavalli, E., Kanlosi, S. (Hrsg.): *Modeling Techniques for Financial Markets and Bank Management*, 2–16, Heidelberg: Physica 1996.
- [83] Mandelbrot, B.: The Variance of Certain Speculative Prices. *Journal of Business*, **36**, 394–419 (1963).
- [84] Merton, R. C.: *Continuous-Time Finance*. Oxford: Blackwell 1993.
- [85] Merton, R. C.: Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, **4**, 141–183 (1973).
- [86] Mikosch, T.: *Elementary Stochastic Calculus*. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific 1998.
- [87] Neftci, S. N.: *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, San Diego, London: Academic Press 1996.
- [88] Nelson, D. B.: Conditional Heteroskedasticity in Asset Return: A New Approach. *Econometrica*, **59**, 347–370 (1991).
- [89] ohne Verfasser: EBK schliesst LTCM-Untersuchungen ab. *Neue Zürcher Zeitung*, 6.7.1999.
- [90] ohne Verfasser: Der Bankverein verbietet Hypotheken. *Neue Zürcher Zeitung*, 28.5.1998.
- [91] ohne Verfasser: Geldfrage – Wie gefährlich ist die Krise in Russland tatsächlich? *Handelszeitung*, 2.9.1998.
- [92] ohne Verfasser: Derivative Products: Call-Warrants „ABBVT“ auf ABB AG Inhaberaktien. Inserat der Bank J. Vontobel & Co. AG. *Neue Zürcher Zeitung*, 1./2.11.1997.

- [93] Portmann, T., Wegmann, P.: Lower Partial Moments und Value-at-Risk: Eine Synthese. *Finanzmarkt und Portfolio Management*, **3**, 326–341 (1998).
- [94] Prause, K.: Modelling financial data using generalized hyperbolic distributions. *FDM-Preprint-Reihe Nr. 48*, Universität Freiburg i.Br. 1997.
- [95] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P.: *Numerical Recipes in FORTRAN – The Art of Scientific Computing*. New York: Cambridge University Press 1992.
- [96] Read, O.: Interne Risikomodelle und Bankenaufsicht. *Working Paper*, Universität Köln 1998.
- [97] Read, O.: Historische Simulation und Monte Carlo Simulation. *Working Paper*, Universität Köln 1997.
- [98] Resnick, S.I.: *Adventures in Stochastic Processes*. Boston: Birkhäuser 1994.
- [99] Ridder, T.: Basics of Statistical VaR-Estimation. *Working Paper*, SGZ-Bank AG 1997.
- [100] Ridder, T.: Nichtparametrische Schätzung des Value-at-Risk von Zinsswaps. In Schröder, M. (Hrsg.): *Quantitative Verfahren im Finanzmarktbereich*, 99–132, Baden-Baden: Nomos 1996.
- [101] Rinne, H.: *Taschenbuch der Statistik*. Frankfurt a.M.: Harri Deutsch 1995.
- [102] Rydberg, T. H.: Generalized Hyperbolic Diffusions with Applications towards finance. *Research Report No. 342, Departement of Theoretical Statistics*, University of Aarhus 1996.
- [103] Rydberg, T. H.: The Normal Gaussian Lévy Process: Simulation and Approximation. *Research Report No. 344, Departement of Theoretical Statistics*, University of Aarhus 1996.
- [104] Schierenbeck, H.: *Risiko Controlling auf Basis des Value at Risk-Ansatzes*. Basel: WWZ 1997.
- [105] Schröder, M.: Ein verallgemeinerter Value-at-Risk-Ansatz. In Schröder, M. (Hrsg.): *Quantitative Verfahren im Finanzmarktbereich*, 81–98, Baden-Baden: Nomos 1996.
- [106] Shimko, D. C.: *Finance in Continuous Time*. Miami: Kolb 1992.
- [107] Silverman, B. W.: *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. London und New York: Chapman & Hall 1986.
- [108] Stix, G.: A Calculus of Risk. *Scientific American*, May 1998.
- [109] Stone, B. K.: A General Class of Three-Parameter Risk Measures. *Journal of Finance*, **28**, 675–685 (1973).

- [110] Tucker, A. L.: A Reexamination of Finite- and Infinite-Variance Distributions as Models of Daily Stock Returns. *Journal of Business and Economic Statistics*, **1**, 73–81 (1992).
- [111] Venkataraman, S.: Value at risk for a mixture of normal distributions: The use of quasi-Bayesian estimation techniques. *Economic Perspectives*, Federal Reserve Bank of Chicago, 3–13, March/April 1997.
- [112] Wasserfallen, W.: Forecasting Volatility in Swiss Financial Markets. *Finanzmarkt und Portfolio Management*, **1**, 62–76 (1997).
- [113] Weber, F.: Modellrisiko bei Value-at-Risk-Schätzungen: ein Vergleich zwischen Normalverteilung und hyperbolischer Verteilung. *Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik*, **1**, 99–121 (2000).
- [114] Wegman, E. J.: Density estimation. In Kotz, S., Johnson, N. L. (Hrsg.): *Encyclopedia of Statistical Sciences*, Vol. 2, 309–315, New York: John Wiley & Sons 1983.
- [115] Wegman, E. J.: Kernel estimators. In Kotz, S., Johnson, N. L. (Hrsg.): *Encyclopedia of Statistical Sciences*, Vol. 4, 606–613, New York: John Wiley & Sons 1983.
- [116] Wilmott, P., Howison, S., Dewynne, J.: *The Mathematics of Financial Derivatives*. Cambridge: Cambridge University Press 1995.
- [117] Zimmermann, H.: Zeithorizont, Risiko und Performance: Eine Übersicht. *Finanzmarkt und Portfolio Management*, **2**, 164–181 (1991).

# Danksagung

Der erste Dank gilt meinem akademischen Lehrer und Doktorvater, Herrn Prof. Dr. Hans Wolfgang Brachinger, für die fachlichen Ratschläge bei der Erstellung dieser Arbeit. Herrn Prof. Dr. Christoph Kaserer danke ich für die Übernahme des Zweitgutachtens.

Herzlich bedanken möchte ich mich bei allen meinen Kollegen vom Seminar für Statistik sowie vom Seminar für Ökonometrie der Universität Freiburg insbesondere bei Dr. Björn Schmolck und Manrico Glauser. Sie standen jederzeit für hilfreiche fachliche Diskussionen und Fragen sowie für persönliche Gespräche bereit. Ebenso danke ich meinen Kollegen im Portfolio Management RTC der UBS AG für die gute Arbeitsatmosphäre, welche die Doppelbelastung aus Beruf und Promotion sehr erleichtert hat.

Der Deutschen Börse AG, Frankfurt und der SOFFEX, Zürich danke ich ebenso wie Datastream für die grosszügige Bereitstellung von Börsendaten.

Einen sehr grossen Anteil haben meine Familie und insbesondere meine Eltern, die mir im Studium und der Promotion immer die notwendige Unterstützung zukommen liessen. Meiner Freundin Sara Carnazzi möchte ich den grössten Dank aussprechen für die in den vergangenen Jahren gewährte Liebe und Unterstützung sowie für die wertvollen fachlichen Ratschläge.

Freiburg in der Schweiz, im Winter 2001

Frithjof Weber