

Messung von Marktrisiken unter Verwendung von Copulafunktionen

Eine empirische Studie für den Schweizer Aktienmarkt

Dissertation

zur Erlangung der Würde eines
Doktors der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften,
vorgelegt der Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Freiburg in der Schweiz

von

Manrico Glauser

aus Krauchthal / BE

★ ★ ★

Genehmigt von der Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät
am 9. Oktober 2003 auf Antrag von
Herrn Prof. Dr. Hans Wolfgang Brachinger (erster Referent) und
Herrn Prof. Dr. Christoph Kaserer (zweiter Referent)

Freiburg 2003

Mit der Annahme einer Dissertation beabsichtigt die Wirtschafts- und Sozialwissenschaftliche Fakultät der Universität Freiburg nicht, zu den darin enthaltenen wissenschaftlichen Meinungen des Verfassers Stellung zu nehmen (Fakultätsbeschluss vom 23. Januar 1990).

Meinen Eltern

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Seminar für Statistik der Universität Freiburg Schweiz.

Ein besonderer Dank gilt Prof. Dr. Hans Wolfgang Brachinger für die Leitung dieses Dissertationsprojektes. Seine zahlreichen Anregungen und wertvollen fachlichen Ratschläge haben diese Arbeit entscheidend beeinflusst. Prof. Dr. Christoph Kaserer danke ich für die Übernahme des Zweitgutachtens.

Die Idee, sich mit Copulafunktionen im Rahmen der Messung von Risiken im Finanzbereich zu befassen, geht auf eine Anregung von Dr. Frithjof Weber zurück, dem ich auch für diverse konstruktive Hinweise sehr herzlich danke.

Ferner bedanke ich mich bei Prof. Dr. Paul-André Monney, Dr. Jean-François Emmenegger und Dr. Uwe Steinhauser. Sie standen jederzeit für hilfreiche fachliche Diskussionen bereit.

Ein herzlicher Dank gebührt Michael Beer für die gründliche Durchsicht meines Manuskriptes, die unermüdliche Diskussionsbereitschaft und die vielen Hilfeleistungen sowie inhaltlichen Verbesserungsvorschläge.

Weiter bedanke ich mich bei meinen Arbeitskollegen des Departements für Quantitative Wirtschaftsforschung der Universität Freiburg, insbesondere des Seminars für Statistik. Sie waren stets wertvolle Ansprechpartner.

Grossen Dank spreche ich meiner Familie und insbesondere meinen Eltern, Margrit und Marius Glauser, aus. Sie liessen mir während meiner gesamten Ausbildung stets ihre vollste Unterstützung zukommen. Von ganzem Herzen danke ich schliesslich meiner Ehefrau, Sandha Glauser-Rolf, für ihre Liebe sowie ihre Unterstützung in den vergangenen Jahren.

Freiburg, im Herbst 2003

Manrico Glauser

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
I Traditionelle Messung von Marktrisiken	5
1 Risikobegriff und Arten von Risiken	7
1.1 Risikobegriff	7
1.2 Finanzielle Risiken	8
1.3 Statistische Risiken	11
2 Value-at-Risk	15
2.1 Einleitung	15
2.2 Definition des Value-at-Risk	17
2.3 Schätzung des Value-at-Risk	22
2.4 Backtesting im Rahmen des Value-at-Risk-Konzepts	25
2.5 Quantitative Bestimmungsgrößen für den Value-at-Risk	26
3 Generierung von Realisierungen einer Verteilung	31
3.1 Einleitung	31
3.2 Historische Simulation	32
3.2.1 Darstellung der historischen Simulation	32
3.2.2 Würdigung der historischen Simulation	34
3.3 Monte-Carlo-Simulation	36

3.3.1	Darstellung der Monte-Carlo-Simulation für einen einzelnen Vermögenswert	36
3.3.2	Darstellung der Monte-Carlo-Simulation für ein Portfolio . .	38
3.3.3	Würdigung der Monte-Carlo-Simulation	41
II	Einbezug von Copulafunktionen zur Messung von Marktrisiken	45
4	Kovarianz und Korrelation – Mögliche Fehlschlüsse	47
4.1	Vorteile	47
4.2	Nachteile und mögliche Fehlschlüsse	51
5	Copulafunktionen	57
5.1	Einleitung	57
5.2	Satz von Sklar	58
5.3	Eigenschaften von Copulafunktionen	61
5.4	Multivariate Copulafunktionen	65
6	Copulabasierte Zusammenhangsmasse	69
6.1	Perfekte Abhängigkeit	69
6.2	Konkordanz	71
6.2.1	Rangkorrelation von Kendall	72
6.2.2	Rangkorrelation von Spearman	75
6.2.3	Vergleich der Rangkorrelation von Kendall und Spearman mit der Korrelation	79
6.3	Randabhängigkeit	81
7	Schätzung von Copulafunktionen	87
7.1	Parametrische Schätzverfahren	87
7.1.1	(Exakte) Maximum-Likelihood-Methode	88
7.1.2	Methode der Inferenzfunktionen für Randverteilungen . . .	90

7.1.3	Momentenmethode	92
7.1.4	Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse	94
7.2	Semiparametrische Schätzverfahren	96
7.3	Weiterführende Überlegungen zur konkreten Schätzung	96
8	Simulation von Copulafunktionen	99
9	Ausgewählte parametrische Copulafamilien	101
9.1	Elliptische Copulafamilie	102
9.1.1	Normal-Copula	102
9.1.2	Students t -Copula	108
9.2	Farlie-Gumbel-Morgenstern-Copulafamilie	118
9.3	Archimedische Copulafamilie	126
10	MC-Simulation unter Verwendung von Copulafunktionen	147
III	Empirische Studie für den Schweizer Aktienmarkt	151
11	Datengrundlage	153
11.1	Der Schweizer Aktienmarkt in den Jahren 1999 bis 2001	153
11.2	Annahme unabhängiger und identisch verteilter Renditen	157
11.2.1	Wald-Wolfowitz'scher Iterationstest	157
11.2.2	Brock-Dechert-Scheinkmann-Test	159
11.2.3	Überprüfung der Annahme unabhängiger und identisch verteilter Renditen für den Schweizer Aktienmarkt	162
12	Kriterien zur Abschätzung des Modellrisikos	167
12.1	Abschätzung des Modellrisikos bei Value-at-Risk-Schätzungen . . .	168
12.1.1	Mittlere relative Abweichung	168
12.1.2	Allgemeines Konzept der Verlustfunktion	169
12.1.3	Binäre Verlustfunktion	170

12.1.4	Ampelkonzept des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht . . .	171
12.1.5	Multiplikator zur Erreichung von $\alpha \cdot 100\%$ Überschreitungen	175
12.1.6	Mittlere relative Abweichung skalierteter VaR-Schätzungen . . .	176
12.1.7	Mittlerer Überschreitungsverlust relativ zum Value-at-Risk . . .	177
12.1.8	Maximaler Überschreitungsverlust relativ zum Value-at-Risk	179
12.2	Univariate Anpassungstests	180
12.2.1	χ^2 -Anpassungstest	180
12.2.2	Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstest	181
13	Abschätzung des Modellrisikos von Copulafunktionen	185
13.1	Überblick über die empirische Studie	186
13.2	Untersuchung der Portfoliorenditen auf Normalverteilttheit	191
13.3	Normalverteilte Randverteilungen	193
13.3.1	Auswertung der Kriterien zur Modellrisikoabschätzung . . .	194
13.3.2	Vergleich der Rechenzeiten	210
13.3.3	Zusammenfassung und weiterführende Betrachtungen	213
13.4	Untersuchung der einzelnen Aktienrenditen auf Normalverteilttheit .	218
13.5	Empirische Randverteilungen	220
13.5.1	Auswertung der Kriterien zur Modellrisikoabschätzung . . .	220
13.5.2	Zusammenfassung und weiterführende Betrachtungen	232
	Zusammenfassung und Ausblick	237
	Anhang	245
A	Nach der Portfoliogrösse differenzierte Abbildungen	245
B	Beigelegte Software	265

Literaturverzeichnis

269

Index

284

Abbildungsverzeichnis

2.1	Konzept des Value-at-Risk.	19
2.2	Zusammenhang zwischen Preisen, Gewinnen und Verlusten einer Vermögensposition und den darauf basierenden VaR-Schreibweisen.	21
2.3	Tägliche VaR-Schätzungen und tatsächlich eingetretene Tagesverluste für ein Portfolio aus zwei im SMI gelisteten Titeln.	26
3.1	Grundidee der historischen Simulation.	33
3.2	Grundidee der Monte-Carlo-Simulation.	38
4.1	Dichtefunktion und Iso-Dichte-Kurven der bivariaten Standardnormalverteilung.	49
4.2	Dichtefunktion und Iso-Dichte-Kurven der bivariaten Normalverteilung mit $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{pmatrix}$	50
4.3	Simulierte Daten zweier bivariater Verteilungen mit unterschiedlicher Zusammenhangsstruktur.	53
4.4	ρ_{\max} und ρ_{\min} in Abhängigkeit von σ	55
5.1	Verteilungsfunktion G und eine Quasi-Inverse von G	61
5.2	Dreidimensionale Graphen der Copulas C^- , C^\perp und C^+	64
5.3	Konturdiagramme der Copulas C^- , C^\perp und C^+	64
6.1	Obere Randabhängigkeit.	83
9.1	Simulierte Daten mit durch die Normal- beziehungsweise t -Copula modellierter Zusammenhangsstruktur.	112
9.2	Log-Likelihoodfunktion in Abhängigkeit von ρ und ν , bei wahren Parameterwerten ρ_0 von -0.4 und ν_0 von $2, 4$ und 7	115

9.3	Log-Likelihoodfunktion in Abhängigkeit von ρ und ν , bei wahren Parameterwerten ρ_0 von 0 und ν_0 von 2, 4 und 7.	116
9.4	Log-Likelihoodfunktion in Abhängigkeit von ρ und ν , bei wahren Parameterwerten ρ_0 von 0.7 und ν_0 von 2, 4 und 7.	117
9.5	Simulierte Daten mit durch die Farlie-Gumbel-Morgenstern-Copula modellierter Zusammenhangsstruktur.	122
9.6	Strikte und nicht-strikte Generatorfunktionen.	128
9.7	Simulierte Daten mit durch die Normal-, die Gumbel-, die Kimeldorf-Sampson- beziehungsweise die Nelsen-Copula modellierter Zusammenhangsstruktur.	142
11.1	Tagesschlussstände und einfache Tagesrenditen des SMI in den Jahren 1999 bis 2001.	155
13.1	Grundschema eines Box-Plots.	195
13.2	Mittlere relative Abweichungen bei normalverteilten Randverteilungen.	196
13.3	Anzahl Überschreitungen bei normalverteilten Randverteilungen.	198
13.4	Multiplikatoren zur Erreichung von $\alpha \cdot 100\%$ Überschreitungen bei normalverteilten Randverteilungen.	205
13.5	Mittlere relative Abweichungen skalierteter VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen.	206
13.6	Mittlere Überschreitungsverluste relativ zu den jeweiligen VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen.	208
13.7	Maximale Überschreitungsverluste relativ zu den jeweiligen VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen.	209
13.8	Mittlere relative Abweichungen bei empirischen Randverteilungen.	221
13.9	Anzahl Überschreitungen bei empirischen Randverteilungen.	223
13.10	Multiplikatoren zur Erreichung von $\alpha \cdot 100\%$ Überschreitungen bei empirischen Randverteilungen.	228
13.11	Mittlere relative Abweichungen skalierteter VaR-Schätzungen bei empirischen Randverteilungen.	229
13.12	Mittlere Überschreitungsverluste relativ zu den jeweiligen VaR-Schätzungen bei empirischen Randverteilungen.	231

13.13	Maximale Überschreitungsverluste relativ zu den jeweiligen VaR-Schätzungen bei empirischen Randverteilungen.	232
A.1	Mittlere relative Abweichungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit zwei Aktien.	246
A.2	Mittlere relative Abweichungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit drei Aktien.	246
A.3	Mittlere relative Abweichungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit vier Aktien.	247
A.4	Mittlere relative Abweichungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit fünf Aktien.	247
A.5	Mittlere relative Abweichungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit zehn Aktien.	248
A.6	Anzahl Überschreitungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit zwei Aktien.	249
A.7	Anzahl Überschreitungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit drei Aktien.	249
A.8	Anzahl Überschreitungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit vier Aktien.	250
A.9	Anzahl Überschreitungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit fünf Aktien.	250
A.10	Anzahl Überschreitungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit zehn Aktien.	251
A.11	Multiplikatoren zur Erreichung von $\alpha \cdot 100\%$ Überschreitungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit zwei Aktien.	252
A.12	Multiplikatoren zur Erreichung von $\alpha \cdot 100\%$ Überschreitungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit drei Aktien.	252
A.13	Multiplikatoren zur Erreichung von $\alpha \cdot 100\%$ Überschreitungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit vier Aktien.	253
A.14	Multiplikatoren zur Erreichung von $\alpha \cdot 100\%$ Überschreitungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit fünf Aktien.	253
A.15	Multiplikatoren zur Erreichung von $\alpha \cdot 100\%$ Überschreitungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit zehn Aktien.	254
A.16	Mittlere relative Abweichungen skalierteter VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit zwei Aktien.	255

A.17	Mittlere relative Abweichungen skalierteter VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit drei Aktien.	255
A.18	Mittlere relative Abweichungen skalierteter VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit vier Aktien.	256
A.19	Mittlere relative Abweichungen skalierteter VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit fünf Aktien.	256
A.20	Mittlere relative Abweichungen skalierteter VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit zehn Aktien.	257
A.21	Mittlere Überschreitungsverluste relativ zu den VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit zwei Aktien.	258
A.22	Mittlere Überschreitungsverluste relativ zu den VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit drei Aktien.	258
A.23	Mittlere Überschreitungsverluste relativ zu den VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit vier Aktien.	259
A.24	Mittlere Überschreitungsverluste relativ zu den VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit fünf Aktien.	259
A.25	Mittlere Überschreitungsverluste relativ zu den VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit zehn Aktien.	260
A.26	Maximale Überschreitungsverluste relativ zu den VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit zwei Aktien.	261
A.27	Maximale Überschreitungsverluste relativ zu den VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit drei Aktien.	261
A.28	Maximale Überschreitungsverluste relativ zu den VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit vier Aktien.	262
A.29	Maximale Überschreitungsverluste relativ zu den VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit fünf Aktien.	262

A.30	Maximale Überschreitungsverluste relativ zu den VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit zehn Aktien.	263
------	---	-----

Tabellenverzeichnis

1.1	Spektakuläre Verlustfälle im Zusammenhang mit Marktrisiken. . .	9
2.1	Konfidenzintervalle bei Unkenntnis der wahren Verteilung für Quantilschätzer bei einer geordneten Stichprobe.	25
6.1	Bestimmung des empirischen Rangkorrelationskoeffizienten von Kendall für die Tagesschlusskurse der Namenaktien der <i>CS Group</i> und der <i>Swiss Re</i>	75
6.2	Bestimmung des empirischen Rangkorrelationskoeffizienten von Spearman für die Tagesschlusskurse der Namenaktien der <i>Swatch</i> <i>Group</i> und der <i>Zurich Financial Services</i>	78
6.3	Bestimmung des empirischen Rangkorrelationskoeffizienten von Spearman für die Tagesschlusskurse der Namenaktien der <i>CS</i> <i>Group</i> und der <i>Swiss Re</i>	79
9.1	Werte von λ_O für die Students t -Copula für unterschiedliche Werte von ν und ρ	111
9.2	Anzahl Operationen und Funktionen in Abhängigkeit der Dimen- sion, die in Dichtefunktionen von Copulas verschiedenen Typs ent- halten sind.	143
11.1	In der empirischen Studie verwendete Aktien.	156
11.2	Resultate des Wald-Wolfowitz- und des Brock-Dechert-Scheink- mann-Tests für die Jahre 1999 bis 2001.	163
11.3	Detaillierte Resultate des Brock-Dechert-Scheinkmann-Tests für die ABB Namenaktie im Zeitraum von 1999 bis 2001 für verschie- dene Werte von m und δ	164
12.1	Nichtablehnungsbereiche für n bei einem Signifikanzniveau von 5%.171	

12.2	Nichtablehnungsbereiche für n bei einem Signifikanzniveau von 1%.	171
12.3	Festlegung des Multiplikationsfaktors nach dem Ampelkonzept. . .	172
12.4	Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten von Überschreitungen und für den Fehler 1. Art in einem adäquaten Modell.	174
12.5	Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten von Überschreitungen und für den Fehler 2. Art in zwei inadäquaten Modellen.	175
12.6	Approximative kritische Werte für den Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstest bei bekannten Verteilungsparametern.	182
12.7	Approximative kritische Werte für den Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstest auf Normalverteilung mit unbekannten Parametern. .	183
13.1	Anzahl untersuchter Portfolios.	187
13.2	Untersuchte Modelle.	188
13.3	Verwendete quantitative Bestimmungsgrößen für den Value-at-Risk im Rahmen des Backtesting.	191
13.4	Überprüfung der Nullhypothese normalverteilter Tagesportfoliorenditen. Resultate des χ^2 - und des Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstests für Portfolios mit zwei Titeln im Zeitraum von 1999 bis 2001.	192
13.5	Ablehnungsanteile der Nullhypothese normalverteilter Tagesportfoliorenditen für den χ^2 - und den Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstest für die Jahre 1999 bis 2001.	193
13.6	Statistiken zur Anzahl Überschreitungen bei normalverteilten Randverteilungen differenziert nach der Portfoliogrösse.	199
13.7	Ablehnungsanteile des Likelihood-Quotienten-Tests nach Kupiec bei einem Signifikanzniveau von 0.01 und normalverteilten Randverteilungen.	201
13.8	Mittlerer Multiplikationsfaktor nach dem Ampelkonzept des Basler Ausschusses bei normalverteilten Randverteilungen.	202
13.9	Durchschnittliche Rechenzeiten in Stunden für die Erzeugung einer Backtestingstichprobe vom Umfang 250.	211
13.10	Gesamtrechenzeiten für alle untersuchten Portfolios in Tagen. . . .	212
13.11	Auszug aus der Rangkorrelationsmatrix von Kendall für die Tagesrenditen der untersuchten 24 Schweizer Aktien der Jahre 1999 bis 2001.	217

13.12	Resultate des χ^2 - und des Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstests für einzelne Aktien im Zeitraum von 1999 bis 2001.	219
13.13	Ablehnungsanteile des Likelihood-Quotienten-Tests nach Kupiec bei einem Signifikanzniveau von 0.01 und empirischen Randverteilungen.	224
13.14	Mittlerer Multiplikationsfaktor nach dem Ampelkonzept des Basler Ausschusses bei empirischen Randverteilungen.	225
13.15	Statistiken zur Anzahl Überschreitungen bei empirischen Randverteilungen differenziert nach der Portfoliogrösse.	227

Einleitung

Risikomanagement im Finanzsektor

Immer mehr Erwerbstätige sind in modernen Volkswirtschaften im Finanzsektor beschäftigt. Zudem steigt allgemein der Anteil dieses Sektors an der gesamtwirtschaftlichen Produktion. In der Schweiz etwa hat sich die Anzahl der Erwerbstätigen im Kredit- und Versicherungsgewerbe seit 1970 mehr als verdreifacht. Heute beschäftigt diese Branche mehr als 5% der Schweizer Erwerbstätigen (vgl. BUNDESAMT FÜR STATISTIK [43]). Der Anteil der Finanzinstitute und Versicherungsunternehmen am Schweizer Bruttoinlandprodukt ist zwischen 1990 und 2000 von 5.8% auf 10.9% gewachsen (vgl. BUNDESAMT FÜR STATISTIK [44], S. 223). Damit wird knapp jeder neunte Franken der Bruttowertschöpfung durch den Finanzsektor erbracht.

Als Anbieter verschiedenster Finanzdienstleistungen sowie als Mittler zwischen Kreditnehmern und Geldgebern nimmt gerade der Bankensektor eine Schlüsselrolle für die Entwicklung der Gesamtwirtschaft eines Landes ein.

Die Tätigkeiten der Banken beinhalten diverse Risiken. Gerade wegen der zentralen Rolle des Bankensektors wird die Risikovorsorge nicht nur der Eigenverantwortung der einzelnen Institute überlassen, sondern es wurden vom so genannten Basler Ausschuss international anerkannte Aufsichtsregeln geschaffen, die Mindestanforderungen für das Risikomanagement von Banken setzen.

Marktrisikomessung für Portfolios

Eine massgebliche Risikoart im Bankgeschäft ist das so genannte Marktrisiko von eingegangenen Vermögenspositionen. Solche Marktrisiken sind zu bewerten, zu steuern und zu kontrollieren. Dies setzt eine geeignete Risikomessung voraus. Nun verwalten Finanzinstitute im Rahmen ihrer Tätigkeit eine Vielzahl risikobehafteter Vermögenswerte. Dies erhöht einerseits zwar die Komplexität, weist aber andererseits auch einen gewichtigen Vorteil auf. So hat MARKOWITZ, der als Begründer der modernen Portfoliotheorie gilt, in den Arbeiten [116] von 1952

und [117] von 1959 gezeigt, dass durch die Kombination von Finanzmarktanlagen mit ungleichen Kursverläufen substantiell Risiken vernichtet werden können, ohne dass dadurch Einbussen in der erwarteten Rendite verursacht werden. Bei der Marktrisikomessung eines Portfolios von Vermögenswerten ist somit nicht nur das mit jeder einzelnen Position verbundene Marktrisiko von Bedeutung, sondern auch Art und Ausmass des Zusammenhangs der einzelnen Vermögenswerte im Portfolio spielen eine zentrale Rolle.

Zur Schätzung des Marktrisikos eines Portfolios werden vom Basler Ausschuss drei mögliche Verfahren vorgesehen. Eines ist die so genannte Monte-Carlo-Simulation, die in ihrer standardmässig verwendeten Form von einer gemeinsamen Normalverteilung der Renditen der Vermögenswerte in einem Portfolio ausgeht. Diese Annahme impliziert, dass der Zusammenhang zwischen den Renditen der betrachteten Vermögenswerte durch die Kovarianz beziehungsweise durch eine normierte Form der Kovarianz, die Korrelation, modelliert wird.

In jüngster Zeit ist die Frage aufgeworfen worden, inwieweit dieser Ansatz der Zusammenhangsmodellierung im Rahmen der Risikomessung angemessen ist. So wurde aufgezeigt, dass Kovarianz und Korrelation Nachteile aufweisen, die in gewissen Situationen zu Fehlschlüssen verleiten, die gerade im Rahmen des Risikomanagements problematisch sind, da sie zu unzutreffenden Risikoschätzungen führen können.

Ein allgemeineres Konzept zur Modellierung von Zusammenhängen stellen die so genannten Copulafunktionen dar. In der einschlägigen Literatur weisen verschiedene Autoren bereits auf Einsatzmöglichkeiten dieses Konzepts bei der Risikomessung im Finanzbereich hin. Die praktische Brauchbarkeit wird aber kaum empirisch überprüft. Genau hier setzt die vorliegende Arbeit an.

Ziel der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit ist die empirische Überprüfung, inwieweit Copulafunktionen im Rahmen der Messung von Marktrisiken für die Zusammenhangsmodellierung der Renditen von Vermögenswerten geeignet sind. Dazu werden diverse Copulafunktionen anhand verschiedener für den Anwendungsbereich adäquater Zielkriterien bewertet. Im Rahmen eines Bewertungsproblems wird demnach der Frage nachgegangen, ob die Marktrisikomessung von Finanzportfolios durch den Einsatz von Copulafunktionen im Sinne gewisser Zielkriterien verbessert werden kann. Falls diese Frage bejaht werden kann, stellt sich im Anschluss die Frage, zu welchem Preis in Form von zusätzlichem Rechenaufwand eine Amelioration erreicht werden kann. Diese Fragestellungen werden anhand von Daten des Schweizer Aktienmarktes analysiert.

Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in drei Hauptteile. In *Teil I* werden im Wesentlichen die im Rahmen der Messung von Marktrisiken standardmässig verwendeten Konzepte dargestellt. Dabei wird einleitend in *Kapitel 1* geklärt, was unter dem Begriff „Risiko“ verstanden werden soll. Weiter werden verschiedene Arten von finanziellem und so genanntem statistischem Risiko unterschieden. In *Kapitel 2* wird mit dem Value-at-Risk das für die Messung von Marktrisiken zentrale Risikomass dargestellt. Es wird auf alternative Schreibweisen des Value-at-Risk, die Schätzung dieses Risikomasses und das so genannte Backtesting im Rahmen des Value-at-Risk-Konzeptes eingegangen. Die Schätzung des Value-at-Risk setzt stets Realisierungen einer Verteilung von Kursen oder Renditen des interessierenden Finanztitels oder Portfolios voraus. In *Kapitel 3* werden mit der historischen Simulation und der Monte-Carlo-Simulation zwei Verfahren zur Generierung von Realisierungen einer solchen Verteilung präsentiert.

In *Teil II* der vorliegenden Arbeit wird das Copulakonzept ausführlich dargestellt und es wird erläutert, wie Copulafunktionen im Rahmen der Messung von Marktrisiken zur Zusammenhangsmodellierung der Renditen von Vermögenswerten eingesetzt werden können. Standardmässig wird der Zusammenhang von Vermögenspositionen in der Finanzliteratur und -praxis durch die Kovarianz beziehungsweise die Korrelation modelliert. In *Kapitel 4* werden kurz Vor- und Nachteile dieser beiden Zusammenhangsmasse aufgezeigt und es wird auf mögliche Fehlschlüsse hingewiesen. Diese sind besonders für die Risikomessung problematisch, da sie zu verzerrten Risikoschätzungen führen können. Mit dem Konzept der Copulafunktion wird in *Kapitel 5* ein Ansatz zur Zusammenhangsmodellierung dargestellt, der das Umgehen der angedeuteten Probleme von Kovarianz und Korrelation erlaubt. Es wird auf den wichtigen Satz von Sklar hingewiesen und es werden die wesentlichen Eigenschaften von Copulafunktionen besprochen. Zu Beginn wird der zweidimensionale Fall betrachtet. Dann wird die multivariate Erweiterung präsentiert. In *Kapitel 6* werden mit der perfekten Abhängigkeit, der Rangkorrelation von Kendall, der Rangkorrelation von Spearman sowie der Randabhängigkeit verschiedene weitere Zusammenhangsmasse dargestellt. Es wird aufgezeigt, dass diese Zusammenhangsmasse als Funktionale von Copulafunktionen betrachtet werden können. Die wahre Copulafunktion ist in praktischen Anwendungen stets unbekannt und muss deshalb geschätzt werden. Die Schätzung von Copulafunktionen ist Thema des *Kapitels 7*. Es werden parametrische und semiparametrische Schätzverfahren dargestellt. In *Kapitel 8* wird ein allgemein gültiger Algorithmus zur Zufallszahlengenerierung von Copulafunktionen erläutert. In *Kapitel 9* werden ausgewählte parametrische Copulafamilien präsentiert. Für sämtliche Familien werden einzelne der zuvor eingeführten Zusammenhangsmasse betrachtet und es wird auf Schätzung und Simulation der betrachteten Copulafunktionen

eingegangen. Dabei werden im Hinblick auf die empirische Studie jeweils Hinweise zur konkreten Umsetzung gegeben. In *Kapitel 10*, das Teil II beschliesst, wird aufgezeigt, wie Copulafunktionen im Rahmen der Monte-Carlo-Simulation zur Zusammenhangsmodellierung der Renditen von Vermögenswerten eingesetzt werden können.

Im abschliessenden Teil der vorliegenden Arbeit, *Teil III*, werden die Resultate der empirischen Studie für den Schweizer Aktienmarkt präsentiert. In *Kapitel 11* wird die verwendete Datengrundlage besprochen. Dabei handelt es sich um Tagesschlusskurse der Jahre 1999 bis 2001 von im Swiss Market Index gelisteten Aktien. Nach einem kurzen Abriss der Gesamtentwicklung des Schweizer Aktienmarktes in dieser Periode werden zwei statistische Tests eingeführt, mit denen im Anschluss die Annahme überprüft wird, ob die Tagesrenditen der betrachteten Aktien im erwähnten Zeitraum als Realisierungen eines unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvektors betrachtet werden können. Im Anschluss werden in *Kapitel 12* so genannte Backtestingkriterien dargestellt, welche die Abschätzung des Modellrisikos von Copulafunktionen ermöglichen. In *Kapitel 13* schliesslich erfolgt die konkrete Eignungsbeurteilung der verwendeten Copulafunktionen anhand dieser Backtestingkriterien. Dabei werden zwei Untersuchungen durchgeführt. In der ersten werden die Renditeverteilungen der einzelnen Aktien als normalverteilt angenommen, in der zweiten werden diese mit Hilfe der empirischen Verteilungsfunktion modelliert.

Eine Zusammenfassung der Ergebnisse und ein Ausblick auf weitere Forschungsfragen schliessen die Arbeit ab.

Entwicklung geeigneter Software

Für die Untersuchungen in dieser Arbeit stand keine Standardsoftware zur Verfügung. Aus diesem Grund wurden die zur Schätzung und Simulation der betrachteten Copulafunktionen notwendigen Programme und weitere benötigte Prozeduren im Rahmen dieser Dissertation entwickelt. Diese Routinen wurden in der Programmierumgebung GAUSSTM der Firma Aptech Systems, Inc. realisiert. Dabei konnte auf die in dieser Software enthaltene Programmbibliothek und das Zusatzpaket Constrained Maximum Likelihood zurückgegriffen werden, das Algorithmen für die numerische Maximum-Likelihood-Schätzung unter Berücksichtigung von Parameterrestriktionen bereitstellt. In Anhang B wird eine Übersicht über die entwickelten Programme gegeben, die allesamt auf der beigelegten CD zur Verfügung gestellt werden.

Teil I

Traditionelle Messung von Marktrisiken

Kapitel 1

Risikobegriff und Arten von Risiken

1.1 Risikobegriff

Der Begriff „Risiko“ wird in mancherlei Kontext verwendet. Eine allgemein gültige Auslegung dieses Terms existiert dabei keineswegs. Bei BRACHINGER [35], S. 1016 f., und [36], S. 91 ff., werden verschiedene empirische Studien betrachtet, die sich mit dem intuitiven Risikobegriff von Managern befassen. Dabei gelingt es, zwei Dimensionen zu identifizieren, die für den Begriff des Risikos grundlegend sind. So liegt *Risiko* vor, wenn ein mögliches Ergebnis, das mit dem Ergreifen einer Handlungsalternative verbunden ist, durch folgende zwei Eigenschaften gekennzeichnet ist (vgl. BRACHINGER [35], S. 1017):

1. das Ergebnis wird als *negativ* empfunden, und
2. das Eintreten dieses Ergebnisses ist *unsicher*.

Wird von einem negativen Ergebnis gesprochen, so ist dies stets in Bezug auf ein bestimmtes Referenzergebnis zu verstehen. Ein Ergebnis ist dann negativ, wenn es schlechter als das Referenzergebnis ist.

Der Aspekt der Unsicherheit des Eintretens eines Ergebnisses sagt weiter etwas über den Zeitpunkt der Betrachtung aus. So macht es nur Sinn, von Risiko zu sprechen, wenn das Ergebnis aus dem Ergreifen einer Handlungsalternative noch nicht eingetreten ist. Betrachtet man ein solches Ergebnis *ex post*, so ist es nicht mehr unsicher.

Eine Handlungsalternative gilt nach dieser Auffassung als umso riskanter, je negativer die möglichen Ergebnisse empfunden werden und je wahrscheinlicher das Eintreten eines negativen Ergebnisses ist.

Dieser Risikobegriff wird in der vorliegenden Arbeit verwendet. In dieser Arbeit ist Risiko in zweierlei Hinsicht bedeutsam. Einerseits bildet die Messung finanzieller Risiken den Untersuchungsgegenstand dieser Arbeit, andererseits sind die statistischen Verfahren zur Messung solcher finanzieller Risiken selbst „risikobehaftet“. Diese beiden Aspekte des Begriffs „Risiko“ sollen in der Folge erörtert werden.

1.2 Finanzielle Risiken

Zunächst sollen die beiden Dimensionen des oben eingeführten Risikobegriffs im Kontext finanzieller Risiken erläutert werden. Im Rahmen solcher Risiken müssen die möglichen Ergebnisse aus dem Ergreifen einer Handlungsalternative in Geldeinheiten gemessen werden können. Ein negatives Ergebnis – es wird etwa von „finanziellem Schaden“ oder „finanziellem Verlust“ gesprochen – entspricht demnach einem monetär bezifferbaren Ergebnis, das unterhalb eines vorgegebenen Referenzergebnisses zu liegen kommt. Ein solches Referenzergebnis kann dabei beispielsweise der finanzielle Status quo, eine Auszahlung in einer gewissen Höhe oder das in einer Entscheidungssituation unter bestimmten Gesichtspunkten bestmögliche finanzielle Ergebnis sein. Weiter muss das Eintreten des Ergebnisses aus dem Ergreifen einer Handlungsalternative unsicher sein und somit in der Zukunft liegen.

In der Finanzliteratur und -praxis werden mehrere Arten von finanziellem Risiko unterschieden. Eine einheitliche Kategorisierung existiert jedoch nicht. Darstellungen finanzieller Risikoarten finden sich etwa bei JORION [98], S. 15 ff., bei ZUBERBÜHLER [166], S. 93 ff., in BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION [27], S. 3, in der Verordnung des Bundesrats über die Banken und Sparkassen [158], Art. 9 Abs. 2, oder in SCHWEIZERISCHE BANKIERVEREINIGUNG [149]. Eine in all den genannten Quellen aufgeführte Art von finanziellem Risiko ist das so genannte Marktrisiko. Unter *Marktrisiko* wird das Risiko von möglichen Verlusten in Handelspositionen aufgrund von Änderungen der Marktpreise verstanden. Dem Marktrisiko werden insbesondere das Zinsänderungsrisiko, das Währungsrisiko und das Kursrisiko von Aktien, Edelmetallen, Rohstoffen etc. sowie den zugehörigen Derivaten zugerechnet (vgl. BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION [18]).

Die Messung von Marktrisiken bildet den Untersuchungsgegenstand der vorliegenden Arbeit. Die Fokussierung auf diese Art von finanziellem Risiko wird durch deren zunehmende Bedeutung gerechtfertigt. Ein Grund hierfür ist sicherlich in der

rasanten Entwicklung von Derivatemärkten zu sehen (vgl. JORION [98], S. 12 ff.). Derivate, die ihren Preis aus jenem des jeweils zugrunde liegenden Basiswerts ableiten, ermöglichen den Transfer von unerwünschten Risiken auf risikobereite Marktteilnehmer und liefern so eine Möglichkeit zur Steuerung finanzieller Risiken. Es gehört zu den Charakteristiken derivativer Finanzinstrumente, dass bereits mit verhältnismässig kleinen Investitionen grössere Beträge des jeweiligen Basiswerts kontrolliert werden können (vgl. JORION [98], S. 12). Aufgrund dieser so genannten Hebelwirkung sind Derivate selbst einem erhöhten Marktrisiko ausgesetzt, weshalb diese sorgfältig zu kontrollieren sind.

Weiter haben verschiedene spektakuläre Verlustfälle im Zusammenhang mit Marktpreisänderungen dazu beigetragen, die Problematik von Marktrisiken in den Vordergrund zu rücken. Einen kurzen Überblick über einige der wichtigsten dieser Fälle liefert Tabelle 1.1. Für eine Beschreibung der jeweiligen Hintergründe sei auf JORION [98], S. 31 ff., und im Fall des Kollapses der Barings Bank speziell auf den umfassenden Bericht von RAWNSLEY [130] und die weniger neutral ausfallenden Schilderungen des Hauptakteurs LEESON [107] verwiesen.

Unternehmung	Art der Unternehmung	Instrument	Jahr	Verlust in Mrd. USD
Metall- gesellschaft	1993 vierzehntgrösste Industriegruppe in Deutschland mit 58'000 Beschäftigten	Futures auf Öl	1993	1.34
Orange County	Verwaltungsbezirk in Kalifornien, USA; Verwaltung öffentlicher Mittel	Zinsspekulation mit Finanzinstru- menten verschie- dener Fälligkeit	1994	1.81
Barings	über 200 Jahre alte britische Bank	Futures auf japanische Aktien	1995	1.33
Daiwa	1995 zwölftgrösste japanische Bank	US Treasury Bonds	1995	1.10

Tabelle 1.1: Einige spektakuläre Verlustfälle im Zusammenhang mit Marktrisiken (vgl. JORION [98], S. 33).

Auch Schweizer Firmen haben in jüngerer Vergangenheit namhafte, durch Marktpreisänderungen verursachte Verluste erlitten, die das öffentliche Interesse erregt haben. So sah sich die UBS Financial Services Group gezwungen, auf ihrer Investition in den amerikanischen Hedge Fund „Long Term Capital Management“ (LTCM), der im November 1998 beinahe kollabierte, negative Wertberichtigungen im Betrag von rund 950 Mio. CHF vorzunehmen (vgl. PELDA [126]). Diese Summe war auch nach der erfolgreichen Sanierung des Hedge Funds durch ein Gläubigerkonsortium von sechzehn international führenden Finanzinstituten mit einer

Kapitalspritze von gut 3.5 Mrd. USD unwiderbringlich verloren (vgl. TZERMIA [156]). Besagter Hedge Fund war auf Zinsarbitrage spezialisiert. Zur Absicherung von Positionen von weniger liquiden Obligationen wurden US-Staatsanleihen leer verkauft. In der Folge wurde das Management von LTCM durch eine ungewöhnlich starke Kurssteigerung dieser Papiere überrascht. Dieser Preisanstieg führte bei der Erfüllung der Kontrakte aus den Leerverkäufen zu erheblichen Verlusten, die nicht aufgefangen werden konnten, da kaum Eigenmittel vorhanden waren. Im Sommer 1998 standen einem Wertpapierbestand von 125 Mrd. USD nur gerade Eigenmittel von 2.2 Mrd. USD gegenüber, was einem Verschuldungsgrad von 98.24% entspricht (vgl. TZERMIA [157]). Als pikantes Detail des LTCM-Debakels gilt, dass nebst dem als Finanzgenie gefeierten Gründer des Hedge Funds, John Meriwether, ein ehemaliger Vizevorsitzender des US-amerikanischen Federal Reserve Board, David Mullins Jr., und zwei Wirtschaftsnobelpreisträger, Myron Scholes und Robert Merton, für die Führung des Hedge Funds verantwortlich zeichneten (vgl. TZERMIA [156]).

Ein weiterer durch Marktpreisänderungen verursachter Verlustfall erregte im August 2002 Aufsehen. So sah sich die BZ Gruppe Holding des Schweizer Bankiers Martin Ebner gezwungen, ihre vier börsenkotierten Beteiligungsgesellschaften zu verkaufen. Ebners Strategie, seine Investitionen auf wenige Firmen zu konzentrieren und mittels grosser Positionen Einfluss auf die Geschäftsführung der einzelnen Aktiengesellschaften zu nehmen, hatte sich in der anhaltenden Börsenbaisse als zu anfällig erwiesen. Repräsentierten die Beteiligungen der Holding im Herbst 2000 noch einen Wert von rund 30 Mrd. CHF, so wurde das Portfolio im August 2002 gerade noch auf 3 Mrd. CHF veranschlagt; durch den rapiden Kurszerfall an den Aktienmärkten schrumpfte der Wert allein im Juli 2002 um 710 Mio. CHF (vgl. BRENNER [40] und PFIFFNER [127]). Die zu geringe Diversifikation und die Fehleinschätzung der Kursentwicklung strategischer Anlagen der Portfolios führten dazu, dass die vier Beteiligungsgesellschaften weit mehr als die herangezogenen Vergleichsindizes verloren (vgl. RASCH [129]). Wie bereits im zuvor geschilderten Fall der UBS waren die Investitionen der BZ Gruppe Holding zu weiten Teilen fremdfinanziert (vgl. GALLAROTTI [76]), was den Verkauf der Beteiligungen im Börsentief unumgänglich machte.

Diese sechs Beispiele weisen darauf hin, dass insbesondere Banken einem hohen Marktrisiko ausgesetzt sind, dass aber auch nicht im Finanzbereich tätige Körperschaften mit Marktrisiko konfrontiert sein können. Weiter zeigt diese Auswahl, dass nicht nur Derivate sondern durchaus auch klassische Finanzinstrumente hohe finanzielle Verluste verursachen können.

Nicht zuletzt aufgrund solcher Verlustfälle haben verschiedene internationale Organisationen wie die Group of Thirty (G-30), die Global Association of Risk Professionals (GARP) oder der Basler Ausschuss für Bankenaufsicht, auf dessen Rolle

in Abschnitt 2.1 noch genauer eingegangen wird, Anstrengungen für einen verbesserten Umgang mit Marktrisiken unternommen.¹ Als besondere Initiative eines privaten Unternehmens in diesem Kontext ist die Entwicklung von RiskMetrics™, einer Gesamtlösung zur Messung finanzieller Risiken, durch die RiskMetrics Group (RMG), die frühere Risk Management Products and Research Group der Investmentbank J.P. Morgan, zu nennen.²

Diese Ausführungen verdeutlichen die Wichtigkeit von Marktrisiken und rechtfertigen die Fokussierung auf diese Art von finanziellem Risiko in der vorliegenden Arbeit. Die durchgeführte empirische Studie beschränkt sich zudem auf die Untersuchung und Messung von Aktienkursrisiken, weil der Aktienmarkt nach wie vor der bedeutendste Markt für Finanzinstrumente ist und weil das Datenmaterial von Aktienmärkten umfangreich und leicht zugänglich ist. Die Arbeit beschränkt sich dabei nicht auf die Untersuchung isolierter Titel, sondern es werden Aktienportfolios betrachtet.

1.3 Statistische Risiken

Wie im vorangehenden Abschnitt erläutert wurde, ist der Gegenstand dieser Arbeit die Kursrisikomessung von Aktienportfolios. Da das wahre Risiko eines Aktienportfolios nie bekannt ist, kann dessen Quantifizierung nur mit Hilfe statistischer Modelle erfolgen. Wird dabei ein bestimmtes statistisches Modell als Referenzmodell betrachtet, dann entspricht in der Terminologie des oben eingeführten Risikobegriffs die Wahl eines im Vergleich zu diesem Referenzmodell inadäquateren Modells einem negativen Ergebnis. Da a priori nie bekannt ist, ob ein Modell adäquater oder inadäquater als ein anderes ist, ist das Eintreten dieses Ergebnisses zudem unsicher. Das Arbeiten mit statistischen Modellen unterliegt folglich selbst stets einem Risiko, das in der Folge als *statistisches Risiko* bezeichnet wird. Am Beispiel der Kursrisikomessung eines Aktienportfolios sollen nachfolgend verschiedene Arten von statistischem Risiko unterschieden werden (vgl. BRACHINGER [35], S. 1017 f.).

Statistische Modelle beruhen wie alle Modelle auf Annahmen (vgl. hierzu etwa BRACHINGER [34] und [37] sowie KLEINWEFERS und JANS [100]). Im Rahmen der Kursrisikomessung eines Aktienportfolios bedeutet dies im Wesentlichen, dass zunächst eine Annahme über die theoretische gemeinsame Verteilung der

¹Für detaillierte Informationen über diese Organisationen sei auf die Websites <http://www.group30.org/>, <http://www.garp.com/> und <http://www.biz.org/bcbs/> [Stand 2003-08-08] verwiesen.

²Für detaillierte Informationen sei auf die Website der RiskMetrics Group <http://www.riskmetrics.com/> [Stand 2003-08-08] verwiesen.

Kurse der in einem Portfolio gehaltenen Aktien zu treffen ist. Eine angenommene gemeinsame Verteilung stimmt mit der unbekannten wahren gemeinsamen Verteilung jeweils mehr oder weniger gut überein. Mit der Wahl eines bestimmten statistischen Verteilungsmodells geht man demnach immer das Risiko ein, den relevanten Ausschnitt der Realität inadäquat zu beschreiben. Dies ist das so genannte *Modellrisiko*.

Geht man sodann von einem bestimmten statistischen Modell für die gemeinsame Verteilung der Kurse der betrachteten Aktien aus, dann ist das zu bestimmende Kursrisiko des Aktienportfolios eine Eigenschaft, das heisst eine Funktion der Parameter dieser gewählten gemeinsamen Verteilung. Eine solche Funktion der Parameter einer Verteilung, die das in einer Verteilung enthaltene Risiko erfassen soll, wird in der Folge als *Risikomass* bezeichnet. Für eine umfassende Darstellung verschiedener Risikomasse sei auf BRACHINGER und WEBER [39] sowie BRACHINGER [38] verwiesen. Im Rahmen der Risikomessung ist jeweils eine bestimmte Funktion der Parameter einer Verteilung als Risikomass zu wählen. Da jede solche Funktion immer nur spezielle Eigenschaften einer Verteilung erfasst, besteht bei dieser Wahl immer das Risiko, dass gewisse im betrachteten Kontext relevante Eigenschaften einer Verteilung unberücksichtigt bleiben. Dieses Risiko wird in Anlehnung an BRACHINGER [35], S. 1017 f., nachfolgend als *Parameterisiko* bezeichnet.

Ein gewähltes Risikomass ist zunächst eine theoretische Grösse, die nicht beobachtbar ist. Bei der Kursrisikomessung eines Aktienportfolios ist ein Risikomass aus beobachteten Aktienkursen zu schätzen und hängt folglich von der betrachteten Stichprobe ab. Mit der Wahl eines Schätzverfahrens sowie einer Stichprobe ist demnach stets das Risiko verbunden, den wahren Wert des gewählten Risikomasses unzutreffend zu schätzen. Dieses Risiko ist das so genannte *Schätzrisiko*.

In Kapitel 5 der vorliegenden Arbeit wird das Konzept der so genannten Copulafunktion dargestellt. Es wird aufgezeigt, wie mit Hilfe einer Copulafunktion ausgehend von univariaten Verteilungen eine gemeinsame Verteilung generiert werden kann, wie sie im Rahmen der Kursrisikomessung eines Aktienportfolios benötigt wird. Die Wahl einer spezifischen Copulafunktion trägt so zur Charakterisierung der resultierenden gemeinsamen Verteilung bei. Damit entspricht das Ziel der Arbeit, nämlich die Überprüfung, inwieweit die Messung von Aktienkursrisiken durch den Einsatz von Copulafunktionen verbessert werden kann, einer Untersuchung des Modellrisikos von Copulafunktionen.

Genau wie jede wahre gemeinsame Verteilung stets unbekannt ist, ist auch die einer wahren Verteilung zugrunde liegende Copulafunktion stets unbekannt. Folglich kann nie abschliessend beurteilt werden, wie gut eine angenommene Copulafunktion mit einer solchen „wahren“ Copulafunktion übereinstimmt. Das Modellrisiko einer Copulafunktion kann somit nie direkt beziffert werden. Um dennoch

Aussagen über das Modellrisiko von angenommenen Copulafunktionen machen zu können, werden in Kapitel 12 entsprechende Kriterien dargestellt.

Oben wurde ausgeführt, dass im Rahmen der Risikomessung stets ein spezifisches Risikomass zu wählen ist. Im folgenden Kapitel wird mit dem so genannten Value-at-Risk dasjenige Risikomass dargestellt, das sich als Standardmass zur Messung von Marktrisiken und damit zur Messung von Aktienkursrisiken etabliert hat.

Kapitel 2

Value-at-Risk

2.1 Einleitung

Der Value-at-Risk stellt heute das Standardrisikomass zur Messung von Marktrisiken dar. Dies liegt vor allem daran, dass dieses Konzept Eingang in die massgeblichen Aufsichtsregeln für Banken gefunden hat. Als zentrale Institution beim Erlass solcher Richtlinien gilt der Basler Ausschuss für Bankenaufsicht, der im Jahre 1974 von den Zentralbankpräsidenten der G-10-Staaten ins Leben gerufen wurde und heute die Mitgliedsländer Belgien, Deutschland, Frankreich, Grossbritannien, Italien, Japan, Kanada, Luxemburg, Niederlande, Schweden, Schweiz, Spanien und die USA umfasst. Obwohl die Aufsichtsregeln des Basler Ausschusses keinerlei Rechtskraft besitzen, haben sie sich nicht nur in den Mitgliedstaaten des Basler Ausschusses zum anerkannten Kapitalstandard für Banken entwickelt, sondern prägen heute eine Vielzahl an nationalen und supranationalen Risikobegrenzungsnormen.

In der Folge soll, mit Fokus auf den Value-at-Risk, ein kurzer Überblick über die Entstehung dieser Richtlinien und über momentane Aktivitäten des Basler Ausschusses gegeben werden. Im Jahre 1988 hat der Basler Ausschuss mit der Basler Eigenkapitalvereinbarung (vgl. BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION [16]) ein Regelwerk präsentiert, das die Mindestkapitalausstattung von Banken mit Blick auf das Kreditrisiko festlegt, wobei die auf dieser Basis formulierten Eigenkapitalanforderungen implizit auch andere Risiken abdecken sollen. Angesichts der wachsenden Bedeutung der Handelsaktivitäten der Banken ist im Jahr 1996 eine Änderung dieser Eigenkapitalvereinbarung in Kraft getreten, die das Marktrisiko in die Kapitalunterlegungspflicht einbezieht und mit eigenen Eigenkapitalquoten versieht (vgl. BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION [18] und [19]). Während im Basler Akkord von 1988 für die Bemessung des Kreditrisikos im Wesentlichen nur ein Verfahren vorgesehen ist, ist auf Wunsch des Kredit-

gewerbes in der Änderung von 1996 zur Bemessung des Marktrisikos erstmals die Wahlmöglichkeit zwischen einer Standardmethode und eigens entwickelten internen Modellen („Internal Models Approach“) vorgesehen, wobei diese internen Modelle den Value-at-Risk als Risikomass verwenden müssen. In der Schweiz wurden die Vorschläge des Basler Ausschusses nahezu unverändert aufgegriffen und in Richtlinien der Eidgenössischen Bankenkommission (EBK) zur Eigenmittelunterlegung von Marktrisiken umgesetzt (vgl. EIDGENÖSSISCHE BANKENKOMMISSION [138]). Diese Vorschriften, die am 31. Dezember 1997 in Kraft getreten sind, sehen ebenfalls die Verwendung eines Standardverfahren oder von internen Modellen vor, wobei letztere von der Eidgenössischen Bankenkommission als Modellverfahren bezeichnet werden, einer Bewilligungspflicht unterliegen und ebenfalls auf dem Value-at-Risk-Konzept aufbauen müssen.

Im Juni 1999 hat der Basler Ausschuss den Entwurf einer Neuen Basler Eigenkapitalvereinbarung (Basel II) veröffentlicht, die den Akkord von 1988 ersetzen soll. Im überarbeiteten Regelwerk wird dem Umstand Rechnung getragen, dass die ausschliessliche Ausrichtung der Eigenkapitalanforderungen am Kredit- und Marktrisiko nicht dem tatsächlichen Gesamtrisikoprofil einer Bank entspricht. Neu wird auch das operationelle Risiko explizit mit Kapital zu unterlegen sein (vgl. BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION [22]). Sieht der Vorschlag für die Bemessung des Marktrisikos gegenüber der Änderung von 1996 keine Modifizierung vor, werden für die Bemessung des Kreditrisikos neu und für die Bemessung des operationellen Risikos von Beginn weg verschiedene Berechnungsvarianten vorgeschlagen, womit die in der Änderung von 1996 begonnene Entwicklung fortgesetzt wird. Für eine Übersicht der Berechnungsvarianten sei auf BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION [27] verwiesen. Sowohl der „Internal Ratings-Based Approach“ zur Messung des Kreditrisikos wie auch der „Internal Measurement Approach“ zur Messung des operationellen Risikos nehmen das in der Änderung von 1996 im Rahmen der Marktrisikomessung vorgeschlagene Value-at-Risk-Konzept in jeweils adaptierter Form auf (vgl. BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION [26], S. 34 und 93 ff. und [22], S. 11 und 26). Nachdem dieser Entwurf aufgrund der vielen Rückmeldungen aus der Bankpraxis mehrmals überarbeitet wurde, soll die finale Version von Basel II am Ende des Jahres 2003 präsentiert und bis Ende 2006 von den Finanzinstituten umgesetzt und von den nationalen Aufsichtsbehörden angewendet werden (vgl. BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION [30]).

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass der Value-at-Risk seit der Aufnahme in die Änderung der Basler Eigenkapitalvereinbarung von 1996 das Standardrisikomass zur Messung von Marktrisiken ist. Mit Basel II ist weiter anzunehmen, dass dieses Konzept auch in den Bereichen des Kredit- und des operationellen Risikos weite Verbreitung erfahren wird. Aufgrund dessen wird in der vorliegen-

den Arbeit ausschliesslich mit dem Value-at-Risk gearbeitet. An dieser Stelle sei jedoch erwähnt, dass sich in der Literatur durchaus auch kritische Stimmen zu diesem Risikomass finden (vgl. etwa ARTZNER et al. [10], BRACHINGER [35] und [36], GUTHOFF et al. [81] sowie JOHANNING [95], S. 46 ff.). Als Alternativen zum Value-at-Risk werden dabei etwa der so genannte Expected Shortfall (vgl. beispielsweise ACERBI et al. [1] sowie ACERBI und TASCHE [2] und [3]) und die so genannten Lower Partial Moments (vgl. etwa FISHBURN [72], BRACHINGER [35] und [36], ALBRECHT et al. [4] sowie GUTHOFF et al. [81]) vorgeschlagen.

2.2 Definition des Value-at-Risk

In Abschnitt 1.2 wurde ausgeführt, dass unter Marktrisiko das Risiko von möglichen Verlusten in Handelspositionen aufgrund von Änderungen der Marktpreise verstanden wird. Bei der Messung von Marktrisiken im Allgemeinen und bei der Bestimmung des Value-at-Risk im Speziellen wird häufig nicht direkt mit Marktpreisen, sondern mit daraus abgeleiteten Grössen wie Renditen, Gewinnen und Verlusten gearbeitet. Diese Grössen werden nachfolgend dargestellt und wie üblich als Zufallsvariablen modelliert.

Es bezeichne P_t den Preis einer Vermögensposition zum Zeitpunkt t . In der Finanzliteratur und -praxis werden zwei alternative Renditedefinitionen verwendet. Die so genannte *einfache Rendite* einer Vermögensposition zwischen dem Zeitpunkt $t - 1$ und t wird als arithmetische Wachstumsrate

$$R_t = R_{t-1,t} = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (2.1)$$

berechnet. Demgegenüber wird die so genannte *Log-Rendite* einer Vermögensposition zwischen dem Zeitpunkt $t - 1$ und t als geometrische Wachstumsrate

$$R_t = R_{t-1,t} = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} \quad (2.2)$$

bestimmt.

Als Vorteil des Konzepts der einfachen Rendite gilt, dass die Rendite eines Portfolios, das N Vermögenspositionen umfasst, als gewichtete Summe der Einzelrenditen R_t^n ($n = 1, \dots, N$) der enthaltenen Vermögenspositionen geschrieben werden kann:

$$R_t^{\text{Portfolio}} = \sum_{n=1}^N w_{t-1}^n R_t^n. \quad (2.3)$$

Hierbei bezeichnet

$$w_{t-1}^n = \frac{P_{t-1}^n}{\sum_{\nu=1}^N P_{t-1}^\nu}$$

den relativen Wert der Vermögensposition n am Wert des Portfolios zum Zeitpunkt $t - 1$, womit $\sum_{n=1}^N w_{t-1}^n = 1$ gilt. Da der Logarithmus einer Summe nicht gleich der Summe der Logarithmen ist, kann im Gegensatz dazu eine Portfoliorendite bei Verwendung des Konzepts der Log-Rendite nicht einfach als gewichtete Summe von Einzelrenditen geschrieben werden. In dieser Arbeit, in der die Betrachtung von Aktienportfolios im Mittelpunkt steht, wird aufgrund dieses Vorzugs einfacher Renditen dieses Renditekonzept verwendet.

Gewinne und Verluste sind stets in Bezug auf ein bestimmtes Referenzergebnis zu sehen. Nachfolgend bezeichne P_t^{Ref} einen spezifischen Referenzpreis zum Zeitpunkt t . Ein Gewinn zum Zeitpunkt t liegt dann vor, wenn der tatsächliche Preis P_t einer Vermögensposition über dem gewählten Referenzpreis P_t^{Ref} zu liegen kommt. Damit berechnet sich ein Gewinn G_t als

$$G_t = P_t - P_t^{\text{Ref}}. \quad (2.4)$$

Im Gegensatz dazu wird von einem Verlust zum Zeitpunkt t gesprochen, wenn der Preis P_t einer Vermögensposition unterhalb des gewählten Referenzpreises P_t^{Ref} zu liegen kommt. Damit entspricht ein Verlust V_t gerade einem negativen Gewinn und berechnet sich als

$$V_t = -G_t = P_t^{\text{Ref}} - P_t. \quad (2.5)$$

Häufig wird der Value-at-Risk in Abhängigkeit von Verlusten definiert. Für einen vorgegebenen Zeithorizont und ein vorgegebenes Konfidenzniveau $1 - \alpha$ versteht man unter dem *Value-at-Risk* (VaR) denjenigen Verlust einer Vermögensposition, der innerhalb des betrachteten Zeithorizonts nur mit der Restwahrscheinlichkeit α überschritten wird (vgl. JORION [98], S. 22).

Besagter Zeithorizont wird in der Regel als Haltedauer bezeichnet, da angenommen wird, dass die Vermögensposition über diese Zeitperiode gehalten wird. Sowohl diese Haltedauer als auch das Konfidenzniveau $1 - \alpha$ können im Rahmen des VaR-Konzepts grundsätzlich frei gewählt werden. In Abschnitt 2.5 werden die in den massgeblichen Aufsichtsregeln vorgesehenen Werte besprochen.

Der Value-at-Risk zum Zeitpunkt t kann laut oben stehender Definition implizit als

$$\mathbb{P}[V_t > \text{VaR}_t] = 1 - \mathbb{P}[V_t \leq \text{VaR}_t] = \alpha \quad (2.6)$$

geschrieben werden (vgl. BRACHINGER [35], S. 1020 f., und [36], S. 95 f.). Das VaR-Konzept wird in Abbildung 2.1 illustriert. Diese zeigt die Dichtefunktion $f(V_t)$ der Verluste zum Zeitpunkt t und gibt die Restwahrscheinlichkeit α als

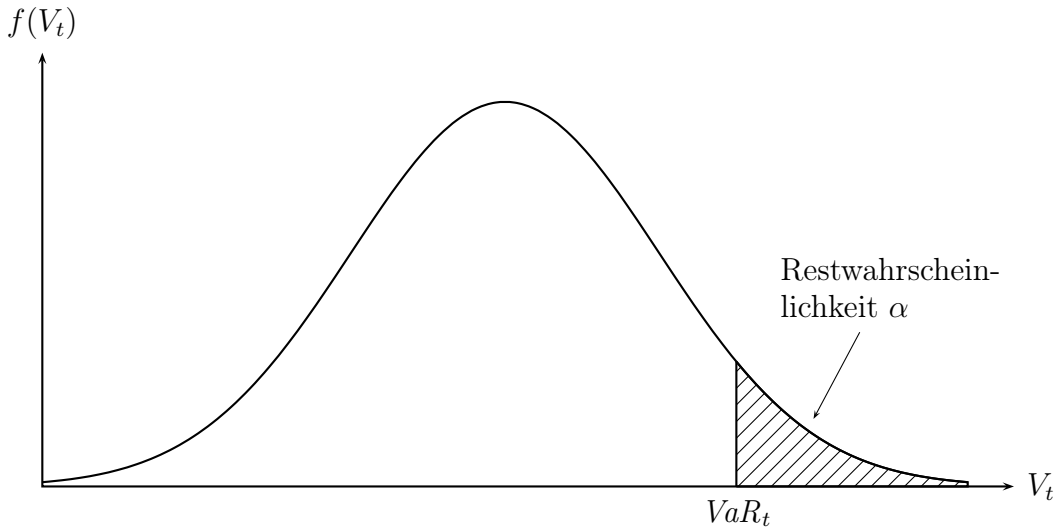


Abbildung 2.1: Konzept des Value-at-Risk.

schraffierte Fläche unter dieser Dichte an. Der Value-at-Risk ist nun genau derjenige Wert, der den schraffierten vom nicht schraffierten Bereich trennt. Die Wahrscheinlichkeit für einen Verlust, der den VaR übersteigt, beträgt demnach genau α .

Aus (2.6) wird ersichtlich, dass der Value-at-Risk zum Zeitpunkt t nichts anderes als das $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ -Quantil der Verteilung der betrachteten Verlustvariable V_t ist. Dieses Quantil wird nachfolgend mit $V_{t,1-\alpha}$ bezeichnet. Wird weiter mit F_{V_t} die Verteilungsfunktion von V_t bezeichnet, so kann mittels der Inversen $F_{V_t}^{-1}$ dieser Verteilungsfunktion eine explizite Definition des Value-at-Risk zum Zeitpunkt t gegeben werden (vgl. JORION [98], S. 110, sowie BRACHINGER [35], S. 1020 f., und [36], S. 95 f.):

$$VaR_t = V_{t,1-\alpha} = F_{V_t}^{-1}(1 - \alpha). \quad (2.7a)$$

Der VaR kann auch in Abhängigkeit von Gewinnen angegeben werden. Da wie oben ausgeführt ein Gewinn gerade einem negativen Verlust entspricht, ergibt sich der VaR zum Zeitpunkt t als mit -1 multipliziertes $\alpha \cdot 100\%$ -Quantil $G_{t,\alpha}$ der Verteilung einer betrachteten Gewinnvariable G_t . Sei F_{G_t} die Verteilungsfunktion von G_t mit der Inversen $F_{G_t}^{-1}$, dann kann der VaR zum Zeitpunkt t geschrieben werden als

$$VaR_t = -G_{t,\alpha} = -F_{G_t}^{-1}(\alpha). \quad (2.7b)$$

Sei $F_{P_t}^{-1}$ die Inverse der Verteilungsfunktion einer Preisvariable P_t und $P_{t,\alpha}$ das $\alpha \cdot 100\%$ -Quantil dieser Verteilung. Dann kann der VaR weiter auf Basis von (2.7b) und (2.4) als Differenz zwischen dem Referenzpreis P_t^{Ref} und dem Quantil

$P_{t,\alpha}$ geschrieben werden:

$$VaR_t = P_t^{\text{Ref}} - P_{t,\alpha} = P_t^{\text{Ref}} - F_{P_t}^{-1}(\alpha). \quad (2.7c)$$

Als weitere Variante kann der VaR in Abhängigkeit von Renditegrössen notiert werden. Gemäss (2.1) lässt sich der Preis einer Vermögensposition zum Zeitpunkt t als

$$P_t = P_{t-1}(1 + R_t) \quad (2.8)$$

schreiben. Als Referenzrendite R_t^{Ref} wird nachfolgend derjenige Renditewert bezeichnet, der die Beziehung

$$P_t^{\text{Ref}} = P_{t-1}(1 + R_t^{\text{Ref}}) \quad (2.9)$$

erfüllt. Sei weiter $R_{t,\alpha}$ das $\alpha \cdot 100\%$ -Quantil der Verteilung einer Renditevariable R_t . Aus (2.8) folgt unmittelbar

$$P_{t,\alpha} = P_{t-1}(1 + R_{t,\alpha}). \quad (2.10)$$

Durch Einsetzen von (2.9) und (2.10) in (2.7c) erhält man für den VaR den Ausdruck

$$VaR_t = P_{t-1}(R_t^{\text{Ref}} - R_{t,\alpha}) = P_{t-1}(R_t^{\text{Ref}} - F_{R_t}^{-1}(\alpha)). \quad (2.7d)$$

wobei $F_{R_t}^{-1}$ die Inverse der Verteilungsfunktion von R_t bezeichnet.

Für Preise, Gewinne und Verluste werden die unterschiedlichen Schreibweisen des Value-at-Risk in Abbildung 2.2 veranschaulicht. Der oberste Graph zeigt die Verteilung der Preise P_t einer Vermögensposition zum Zeitpunkt t . Der VaR bestimmt sich wie in (2.7c) angegeben als Differenz zwischen dem Referenzpreis P_t^{Ref} und dem $\alpha \cdot 100\%$ -Quantil $P_{t,\alpha}$. Die Gewinnverteilung der betrachteten Vermögensposition, die in der Mitte der Abbildung 2.2 abgetragen ist, resultiert aus der Werteverteilung durch eine entsprechende Verschiebung des Graphen um $-P_t^{\text{Ref}}$ entlang der Abszisse. Der VaR auf Basis dieser Gewinnverteilung bestimmt sich gemäss (2.7b) als Differenz zwischen null und dem $\alpha \cdot 100\%$ -Quantil $G_{t,\alpha}$. Der unterste Graph in Abbildung 2.2 zeigt die Verlustverteilung der Vermögensposition. Da ein Verlust gerade einem negativen Gewinn entspricht, ergibt sich der Graph dieser Verteilung als Spiegelung des Graphen der Gewinnverteilung an der Achse $G_t = 0$. Der VaR bestimmt sich nun wie in (2.7a) angegeben als $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ -Quantil $V_{t,1-\alpha}$ dieser Verlustverteilung.

Bisher wurde jeweils allgemein von Referenzpreis oder Referenzrendite gesprochen. Üblicherweise wird als Referenzpreis entweder der zum Zeitpunkt t erwartete Preis $E(P_t)$ oder der bekannte Marktpreis P_{t-1} zu Beginn einer Haltedauer herangezogen. Der erste Fall entspricht gemäss $E(P_t) = P_{t-1}(1 + E(R_t))$ der Wahl

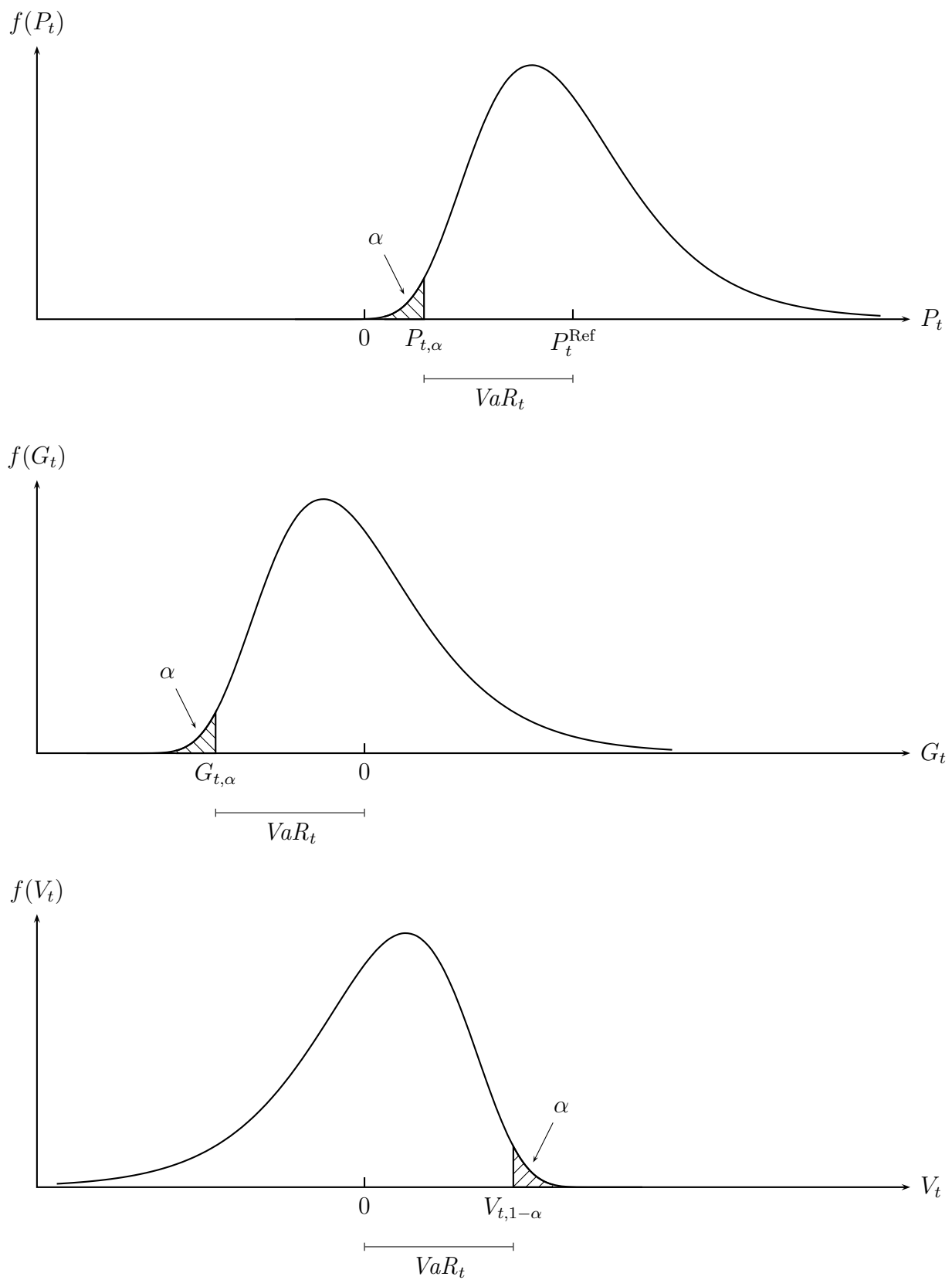


Abbildung 2.2: Zusammenhang zwischen Preisen, Gewinnen und Verlusten einer Vermögensposition und den darauf basierenden VaR-Schreibweisen.

der zum Zeitpunkt t erwarteten Rendite $E(R_t)$ als Referenzrendite. Im zweiten Fall wird faktisch eine Referenzrendite von null angesetzt. Wird bei der Bestimmung des Value-at-Risk als Referenzniveau der erwartete Preis beziehungsweise die erwartete Rendite verwendet, dann spricht man vom *relativen Value-at-Risk*. Gelangt hingegen der Marktpreis P_{t-1} beziehungsweise die Nullrendite zum Einsatz, dann spricht man vom *absoluten Value-at-Risk*. Da bei der Bestimmung des absoluten VaR im Gegensatz zum relativen VaR die Bestimmung des erwarteten Preises beziehungsweise der erwarteten Rendite entfällt, wird in der vorliegenden Arbeit das Konzept des absoluten Value-at-Risk verwendet.

2.3 Schätzung des Value-at-Risk

Für die konkrete Bestimmung des Value-at-Risk einer Vermögensposition zu einem Zeitpunkt t ist gemäss den im vorangehenden Abschnitt eingeführten alternativen Schreibweisen (2.7a) bis (2.7d) von VaR_t stets ein Quantil der Verteilung der betrachteten Verlust-, Gewinn, Preis- oder Renditevariable zu schätzen. Dies kann grundsätzlich auf zwei Arten geschehen. Bei der ersten Möglichkeit, dem so genannten nichtparametrischen Ansatz, werden Quantile direkt anhand der beobachteten Daten geschätzt, ohne dass eine Annahme über die den Daten zugrunde liegende Verteilung getroffen wird. Im Gegensatz hierzu ist die zweite Möglichkeit, der so genannte parametrische Ansatz, dadurch charakterisiert, dass Quantile auf der Basis einer für die Daten angenommenen Verteilung geschätzt werden. In der Folge wird mit der so genannten Quantilschätzung bei einer geordneten Stichprobe dasjenige nichtparametrische Schätzverfahren dargestellt, das bei der in Kapitel 13 dargestellten empirischen Studie zur Anwendung gelangt.

Quantilschätzung bei einer geordneten Stichprobe

Es bezeichne $x_{[1]}, x_{[2]}, \dots, x_{[n]}$ eine aufsteigend geordnete Stichprobe einer Zufallsvariablen X . Der Schätzer \hat{x}_p des $p \cdot 100\%$ -Quantils, $0 < p < 1$, trennt eine solche Stichprobe so in zwei Teile, dass mindestens $p \cdot 100\%$ der Daten kleiner oder gleich und mindestens $(1 - p) \cdot 100\%$ der Daten grösser oder gleich \hat{x}_p sind. Damit gilt für den Schätzer des $p \cdot 100\%$ -Quantils

$$\begin{aligned} \hat{x}_p &= x_{[\lfloor np \rfloor + 1]}, & \text{falls } np \text{ nicht ganzzahlig ist, und} \\ \hat{x}_p &\in [x_{[np]}, x_{[np+1]}], & \text{falls } np \text{ ganzzahlig ist.} \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\lfloor np \rfloor$ die grösste ganze Zahl, die kleiner oder gleich np ist. Es fällt auf, dass für ganzzahlige Werte von np bei der Festlegung eines konkreten Quantilschätzwertes Wahlfreiheit besteht. So erfüllt jeder Wert im Intervall

$[x_{[np]}, x_{[np+1]}]$ die Anforderungen an einen Quantilschätzer. In der Literatur finden sich verschiedene Vorschläge für die Wahl von \hat{x}_p , wenn np eine ganze Zahl ist. So nennen etwa DAVIS und STEINBERG [53] die untere Intervallgrenze $x_{[np]}$ und HARTUNG et al. [82], S. 34, das arithmetische Mittel der unteren und der oberen Intervallgrenze $x_{[np]}$ und $x_{[np+1]}$. In der vorliegenden Arbeit wird der Vorschlag von RINNE [132], S. 365, aufgegriffen, der bei ganzzahligen Werten von np die Verwendung der oberen Intervallgrenze $x_{[np+1]}$ postuliert. Damit wird der Schätzer des $p \cdot 100\%$ -Quantils sowohl für ganzzahlige als auch nicht ganzzahlige Werte von np durch

$$\hat{x}_p = x_{[\lfloor np \rfloor + 1]}. \quad (2.11)$$

definiert. Folglich wird für \hat{x}_p stets der grösstmögliche Wert gewählt, der die oben geschilderten Anforderungen an ein Quantil erfüllt. Da in der nachfolgend präsentierten empirischen Studie der Value-at-Risk auf der Basis einer Verlustverteilung geschätzt wird, entspricht diese Definition des $p \cdot 100\%$ -Quantils einer konservativen Schätzung des VaR. Dieser Umstand liefert nebst der Einfachheit von (2.11) die Begründung für die getroffene Wahl.

Für den Stichprobenquantilschätzer (2.11) gilt asymptotisch (vgl. RINNE [132], S. 365)

$$\hat{x}_p \stackrel{L}{\sim} N\left(X_p, \frac{p(1-p)}{n f^2(X_p)}\right), \quad (2.12)$$

wobei f die Dichtefunktion der Zufallsvariablen X und X_p das $p \cdot 100\%$ -Quantil der Verteilung von X bezeichnet. Damit lässt sich für X_p ein asymptotisches Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$ mit

$$\left[\hat{x}_p \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n f^2(X_p)}} \right] \quad (2.13)$$

angeben, wobei $z_{1-\alpha/2}$ das $(1 - \alpha/2) \cdot 100\%$ -Quantil der Standardnormalverteilung bezeichnet. Da man die Dichtefunktion f und das Quantil X_p in (2.13) in der Regel nicht kennt, ist die Angabe des entsprechenden Konfidenzintervalls im Allgemeinen nicht möglich.

Alternativ kann ein approximatives Konfidenzintervall hergeleitet werden, das ohne die Kenntnis der Dichtefunktion f und des Quantils X_p auskommt (vgl. RIDDER [131], S. 165 ff.). Es werden ganze Zahlen u und o ($u < o$) gesucht, so dass

$$P[x_{[u]} \leq X_p \leq x_{[o]}] = 1 - \alpha \quad (2.14)$$

gilt, wobei $x_{[u]}$ und $x_{[o]}$ das u -te und das o -te Element einer geordneten Stichprobe vom Umfang n bezeichnen. Sei weiter M die Anzahl der Beobachtungen, die

grösser gleich X_p sind, das heisst

$$M = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{[X_p, \infty)}(x_i).$$

Dann ist M eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Erfolgswahrscheinlichkeit $1 - p$. Eine äquivalente Schreibweise von (2.14) lautet demnach

$$P[n - o + 1 \leq M \leq n - u] = \sum_{j=n-o+1}^{n-u} \binom{n}{j} (1-p)^j p^{n-j} = 1 - \alpha. \quad (2.15)$$

In der Regel wird es nicht möglich sein, Werte für u und o zu finden, für die (2.15) exakt erfüllt ist, so dass zur Bestimmung dieser Grössen ein aus zwei Forderungen bestehendes Entscheidungskriterium formuliert wird:

1. $(n - u) - (n - o + 1)$ soll möglichst klein sein, was genau dann gegeben ist, wenn $o - u$ möglichst klein ist, und
2. $\sum_{j=n-o+1}^{n-u} \binom{n}{j} (1-p)^j p^{n-j}$ soll möglichst nahe bei $1 - \alpha$ aber immer grösser gleich $1 - \alpha$ sein.

Damit wird das Konfidenzintervall mit kleinstmöglicher Breite gewählt, das X_p mindestens mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ enthält.

Die Bestimmung eines Konfidenzintervalls für X_p bei Unkenntnis der wahren Verteilung soll anhand eines Beispiels veranschaulicht werden. Hierzu wurden gemäss (2.15) für verschiedene Werte von n und p die Intervallgrenzen u und o entsprechender Konfidenzintervalle bei einem Konfidenzniveau von approximativ 95% berechnet. Wie bereits erwähnt wurde, kann (2.15) in der Regel nicht exakt gelöst werden. Aus diesem Grund ist nebst den Intervallgrenzen u und o auch der aus dem genannten Entscheidungskriterium resultierende Wert von $P[x_u \leq X_p \leq x_o]$ in Tabelle 2.1 angegeben.

Es fällt auf, dass die Werte für u , o und $P[x_u \leq X_p \leq x_o]$ bei $n = 250$ und $p = 0.99$ nicht ausgewiesen sind. Dies begründet sich durch die Tatsache, dass in dieser Situation selbst das grösstmögliche Konfidenzintervall $[x_{[1]}, x_{[250]}]$ nur eine Wahrscheinlichkeitsmasse von 0.9189 auf sich vereint, was nicht dem geforderten Wert von 0.95 entspricht. Hier offenbart sich ein Problem dieser nichtparametrischen Schätzmethode, wenn ein VaR für ein extrem grosses Konfidenzniveau mit einer verhältnismässig kleinen Stichprobe geschätzt werden soll.

n	p	u	o	$P \mid x_{[u]} \leq X_p \leq x_{[o]}$
250	0.99	—	—	—
250	0.975	239	249	0.9621
250	0.95	230	244	0.9538
1000	0.99	983	996	0.9575
1000	0.975	964	984	0.9505
1000	0.95	937	964	0.9504

Tabelle 2.1: Konfidenzintervalle bei Unkenntnis der wahren Verteilung für Quantilschätzer bei einer geordneten Stichprobe.

2.4 Backtesting im Rahmen des Value-at-Risk-Konzepts

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Überprüfung, inwieweit die Messung von Aktienkursrisiken durch den Einsatz von Copulafunktionen verbessert werden kann. Dies bedingt eine Bewertung der einzelnen betrachteten Copulafunktionen hinsichtlich ihrer Eignung im genannten Anwendungsbereich. In diesem Kontext ist das so genannte Backtesting von Interesse. Die Grundidee des Backtesting im Rahmen des Value-at-Risk-Konzepts wird nachfolgend dargestellt.

Backtesting im Rahmen des Value-at-Risk-Konzepts bedeutet, dass die für jeden gewählten Zeitpunkt eines bestimmten Beobachtungszeitraums prognostizierten VaR-Werte einer Vermögensposition im Nachhinein mit den an diesen Zeitpunkten tatsächlich beobachteten Verlusten dieser Vermögensposition verglichen werden. Anhand der Abbildung 2.3 soll dies illustriert werden. Man betrachtet ein aus einer Inhaberaktie Holcim (HOL) und einer Namenaktie ABB (ABBN) bestehendes Portfolio. Abbildung 2.3 zeigt für das Jahr 2001 einerseits die als durchgezogene Linie eingetragenen täglichen VaR-Prognosen für ein Konfidenzniveau von 99% und andererseits die durch Punkte gekennzeichneten tatsächlich eingetretenen Tagesverluste. Beim Backtesting werden nun für jeden Tag die VaR-Prognosen und die tatsächlichen Verluste miteinander verglichen, wobei ein Verlust, der über der VaR-Prognose für den korrespondierenden Zeitpunkt zu liegen kommt, als *Überschreitung* bezeichnet wird.

Da der VaR von seiner Konzeption her diejenige Verlusthöhe darstellt, die nur mit einer vorgegebenen Restwahrscheinlichkeit überschritten wird, würde man bei den VaR-Prognosen in Abbildung 2.3 für ein Konfidenzniveau von 99% gerade 1% Überschreitungen erwarten. Die vorliegende Stichprobe zeigt nun aber, dass an 5 von 250 Tagen die tatsächlichen Verluste über den entsprechenden VaR-Prognosen zu liegen kommen, was gerade doppelt so viel ist, wie zu erwarten wäre. Wie eine

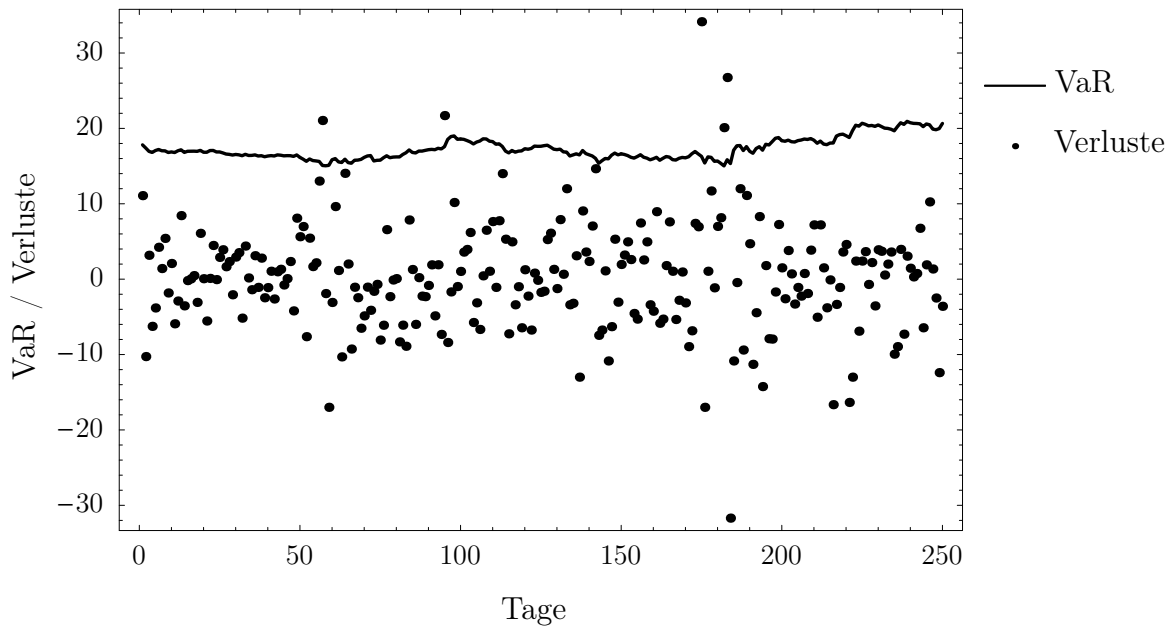


Abbildung 2.3: Tägliche VaR-Schätzungen und tatsächlich eingetretene Tagesverluste für ein Portfolio aus zwei im SMI gelisteten Titeln für das Jahr 2001.

solche Beobachtung einzuordnen ist und bewertet werden kann, wird in Kapitel 12 detailliert dargestellt.

2.5 Quantitative Bestimmungsgrößen für den Value-at-Risk

Wie in Abschnitt 2.2 erläutert wurde, sind für die Bestimmung des Value-at-Risk vorgängig insbesondere zwei Größen festzulegen, nämlich das Konfidenzniveau $1 - \alpha$ und die Haltedauer. Da die Wahl dieser beiden Größen den Wert des VaR massgeblich beeinflusst, werden diese und weitere quantitative Mindestanforderungen in den entsprechenden Richtlinien des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht festgeschrieben (vgl. BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION [18], [19] und [20]). Diese von der Eidgenössischen Bankenkommision unverändert in ihre Richtlinien zur Eigenmittelunterlegung von Marktrisiken übernommenen Vorgaben (vgl. EIDGENÖSSISCHE BANKENKOMMISSION [138]) werden in der Folge aufgeführt und im Lichte der VaR-Schätzung und des Backtesting im Rahmen des VaR-Konzepts kritisch betrachtet.

Konfidenzniveau

Das Konfidenzniveau $1 - \alpha$ wird in den genannten Richtlinien mit 99% vorgegeben. Dies entspricht dem Bestreben der Aufsichtsbehörden nach einer vorsichtigen und konservativen Risikobezifferung. Aus statistischer Sicht sind aber durchaus Vorbehalte gegen diese Wahl anzumelden. So liegt es in der Natur einer Verteilung, dass für die Schätzung eines solcherart extremen Quantils nur mehr wenige Beobachtungen zur Verfügung stehen, was erhebliche Schätzfehler provozieren kann. Im Hinblick auf das Backtesting bedeutet ein Konfidenzniveau von 99%, dass lediglich jede hundertste Beobachtung den VaR überschreiten sollte. Folglich müssen Rückvergleiche zwischen VaR-Schätzungen und tatsächlichen Verlusten über eine lange Zeitperiode erfolgen, damit eine verlässliche Einschätzung der Anzahl eingetretener Überschreitungsverluste und somit der Validität eines Modells vorgenommen werden kann.

Haltedauer

Für die Haltedauer sehen die genannten Aufsichtsbehörden im Hinblick auf die Eigenkapitalunterlegung und das Backtesting verschiedene Werte vor. Für die Eigenkapitalunterlegung ist der VaR für eine Haltedauer von zehn Handelstagen zu schätzen, für das Backtesting ist eine Haltedauer von einem Tag zu unterstellen.

Der VaR-Ansatz geht davon aus, dass die betrachteten Vermögenspositionen über die Haltedauer unverändert bestehen bleiben. Die effektive Halteperiode diverser Vermögenswerte dürfte in der Praxis je nach Anlageziel und Liquidität der entsprechenden Märkte jedoch stark differieren. So wird etwa die Haltedauer von Optionen sehr viel kürzer als diejenige von Immobilien sein. Die vorgeschriebene zehntägige Halteperiode im Zusammenhang der Eigenkapitalunterlegung muss somit als Kompromisswert aufgefasst werden, der zugunsten der Vergleichbarkeit für alle Vermögenspositionen gleich gesetzt wird. Im Einzelfall kann es aber durchaus vorkommen, dass der VaR für eine Vermögensposition bestimmt wird, die am Ende der Haltedauer so nicht mehr besteht, was für das Backtesting ein Problem darstellt. In diesem Lichte ist die Wahl einer kurzen, sprich eintägigen Haltedauer in diesem Kontext als durchaus sinnvoll zu bezeichnen.

Die unterschiedlichen Regelungen der Haltedauer im Hinblick auf die Eigenkapitalunterlegung und das Backtesting dürften der Grund dafür sein, dass die zitierten Aufsichtsregeln ebenfalls explizit eine Transformation von eintägigen in zehntägige Halteperioden vorsehen. So darf der für die Bestimmung der Eigenkapitalunterlegung verwendete VaR-Wert auf der Basis einer eintägigen Haltedauer geschätzt und durch Multiplikation mit $\sqrt{10}$ in einen VaR umgerechnet werden,

der einer Haltedauer von zehn Tagen entspricht (vgl. EIDGENÖSSISCHE BANKKOMMISSION [138], S. 24).

Diese Transformation ist kritisch zu beurteilen, da diese Umrechnung implizit davon ausgeht, dass die Verteilung, die der VaR-Schätzung zugrunde liegt, durch eine Normalverteilung approximiert werden kann (vgl. JORION [98], S. 121 f.). In diversen Studien wurde jedoch aufgezeigt, dass die Normalverteilung meist nur als unzureichende Näherung für im Finanzbereich relevante empirische Verteilungen betrachtet werden kann (vgl. hierzu etwa FAMA [70], DOWD [55], S. 87 f., JOHANNING [95], S. 29 f., und WEBER [161]). Dieser Tatbestand wird ebenfalls in den Abschnitten 13.2 und 13.4 des empirischen Teils der vorliegenden Arbeit bestätigt.

Periodizität, historischer Beobachtungszeitraum und Aktualisierung

Weitere quantitative Vorgaben betreffen die Periodizität der Schätzungen, den Datenumfang und die Datenaktualisierung. Gemäss den genannten Aufsichtsregeln ist der VaR täglich zu schätzen. Die zur Schätzung verwendete Datenreihe muss einen Beobachtungszeitraum von mindestens einem Jahr abdecken. Diese Formulierung eröffnet Spielraum. Bei der Wahl des Datenumfangs ist zu berücksichtigen, dass lange Datenreihen auf der einen Seite zwar die statistischen Qualitäten einer Schätzung verbessern, dass diese aber auf der anderen Seite zu einer für Prognosezwecke zu starken Berücksichtigung der Vergangenheit führen können. Weiter wurde in Tabelle 2.1 in Abschnitt 2.3 auf die Problematik von kurzen Datenreihen im Zusammenhang mit extrem hohen Konfidenzniveaus aufmerksam gemacht.

Das Backtesting muss für eine Stichprobe von 250 historischen Beobachtungen durchgeführt werden. Dieser kleine Stichprobenumfang ist im Zusammenhang mit dem vorgeschriebenen Konfidenzniveau von 99% als kritisch zu beurteilen. So sollten bei einem adäquaten Modell exakt 2.5 der 250 tatsächlich beobachteten Verluste den jeweils entsprechenden geschätzten VaR übersteigen. Abgesehen davon, dass die Anzahl dieser Überschreitungsverluste stets ganzzahlig sein wird, kann man sich bei einem derart kleinen Wert durchaus vorstellen, dass rein zufallsbedingt ein adäquates Modell als inadäquat aber auch ein inadäquates Modell als adäquat eingestuft wird.

Die Datenreihen und die darauf basierenden Schätzungen müssen mindestens quartalsweise, falls es die Marktbedingungen erfordern jedoch unverzüglich aktualisiert werden. Diese Formulierung lässt einiges an Interpretationsspielraum zu. Im Sinne einer möglichst unverzüglichen Anpassung an die Marktgegebenheiten sollte eine tägliche Aktualisierung angestrebt werden.

Wegen der genannten Kritikpunkte an den regulatorisch vorgeschriebenen quantitativen Bestimmungsgrößen für den VaR kann es für interne Zwecke sinnvoll sein, mit abweichenden Werten zu arbeiten. Hierbei ist lediglich zu beachten, dass die Vergleichbarkeit und Konsistenz über die Zeit gewährleistet bleibt. Eine bekannte alternative Festlegung stammt etwa von der Investmentbank J.P. Morgan, die ein Konfidenzniveau von 95% und eine eintägige Halteperiode vorschlägt (vgl. J.P. MORGAN [99]).

An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, dass die vorgestellten quantitativ orientierten Aufsichtsregeln durch verschiedene qualitative Vorgaben ergänzt werden (vgl. BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION [18], S. 39 ff., und EIDGENÖSSISCHE BANKENKOMMISSION [138]), S. 25 ff.). Diese betreffen vorwiegend die Organisation des Risikomanagements und spielen damit für diese Arbeit keine Rolle.

In Abschnitt 2.1 wurde erwähnt, dass gemäss Basler Ausschuss und Eidgenössischer Bankenkommision bei der Marktrisikomessung die Wahlmöglichkeit zwischen einer Standardmethode und internen Modellen besteht, wobei diese internen Modelle den VaR als Risikomass verwenden müssen. Beim Einsatz interner Modelle ist weiter die benötigte Eigenmittelunterlegung zu einem Zeitpunkt t aus dem grösseren der beiden folgenden Beträge zu bestimmen (vgl. BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION [18], S. 45, und EIDGENÖSSISCHE BANKENKOMMISSION [138], S. 21):

1. der am Tag vor t ermittelten Value-at-Risk-Prognose für den Zeitpunkt t ,
2. dem Durchschnitt der Value-at-Risk-Prognosen für den jeweils nachfolgenden Tag der 60 dem Zeitpunkt t unmittelbar vorangegangenen Handelstage, multipliziert mit einem institutsspezifisch festgelegten Faktor von mindestens drei.

Ein Rechtfertigungsversuch für die minimale Höhe dieses Multiplikationsfaktors von drei findet sich bei JORION [98], S. 120. Dieser Faktor kann bei als ungenügend eingestufte Prognosegenauigkeit eines verwendeten Modells auf einen maximalen Wert von vier erhöht werden. In Abschnitt 12.1.4 wird darauf im Detail eingegangen.

Die Gegenüberstellung des am Vortag ermittelten Value-at-Risk und des mit dem minimalen Faktor von drei multiplizierten Durchschnittswertes der 60 vorangegangenen Tage führt im Allgemeinen dazu, dass für die Ermittlung der Eigenmittelunterlegung nur in absoluten Ausnahmefällen auf die aktuelle VaR-Schätzung abgestützt wird. Dies kann sich nachteilig auswirken. Gerade wenn der aktuelle VaR-Wert über dem Durchschnittswert liegt, deutet dies auf eine Erhöhung

des Marktrisikos hin. Im Sinne eines vorsichtigen Vorgehens wäre es somit durchaus sinnvoll, die aktuelle VaR-Schätzung mit einem Faktor zu multiplizieren, um die Eigenkapitalunterlegung festzulegen. Auch wenn die aktuelle VaR-Schätzung kleiner als der Durchschnittswert der 60 vorangegangenen Tage ist, kann für eine Verwendung des aktuellen VaR-Wertes zur Bestimmung des risikobedingten Eigenkapitals argumentiert werden. Da eine solche Konstellation eine Abnahme des Marktrisikos vermuten lässt, würde dadurch erreicht, dass die Eigenmittelunterlegung nicht zu konservativ und damit zu kostenintensiv ausfällt.

Auf der anderen Seite garantiert die Verwendung des Durchschnittes der VaR-Schätzungen der 60 vorangegangenen Tage eine gewisse Kontinuität. So ist es sicherlich als Vorteil zu werten, dass nicht jeder kurzfristige Ausreisser eine gross angelegte Anpassung der Eigenkapitalunterlegung notwendig macht.

Für die Risikomanagementpraxis bedeutet die oben vorgestellte Regelung zur Berechnung der Eigenkapitalanforderung auf alle Fälle, dass dem Multiplikationsfaktor eine besondere Bedeutung zukommt. Das Ziel wird es sein, mit Modellen zu arbeiten, die einen Multiplikator möglichst nahe bei drei zur Folge haben, damit nicht übermässig viele Mittel zum Zwecke der Risikoabsicherung gebunden werden.

In diesem Kapitel wurde dargestellt, wie der Value-at-Risk einer betrachteten Vermögensposition auf der Grundlage der Verteilung von Verlusten, Gewinnen, Preisen oder Renditen dieser Vermögensposition ermittelt und basierend auf Realisierungen solcher Verteilungen geschätzt werden kann. Im folgenden Kapitel werden Verfahren zur Generierung von Realisierungen solcher Verteilungen dargestellt.

Kapitel 3

Generierung von Realisierungen einer Verteilung

3.1 Einleitung

Der Basler Ausschuss für Bankenaufsicht und die Eidgenössische Bankenkommision sehen zur Generierung von Realisierungen einer Verteilung explizit drei Verfahren vor, die Varianz-Kovarianz-Methode, die historische Simulation und die Monte-Carlo-Simulation (vgl. BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION [18], S. 44, und EIDGENÖSSISCHE BANKENKOMMISSION [138], S. 24).

Da Copulafunktionen einzig im Rahmen der Monte-Carlo-Simulation eingesetzt werden können, wird im Anschluss schwergewichtig dieses Verfahren besprochen. Wie nachfolgend aufgezeigt wird, handelt es sich bei der historischen Simulation um ein nichtparametrisches Verfahren. Im Rahmen der in Kapitel 13 dargestellten empirischen Studie werden die aus der Anwendung dieser Methode resultierenden VaR-Prognosen als eine Art „nichtparametrische Referenzwerte“ zu Vergleichszwecken hinzugezogen. Die Varianz-Kovarianz-Methode wird in der vorliegenden Arbeit nicht eingesetzt, weshalb auf eine Beschreibung dieses Verfahrens verzichtet wird. Für eine entsprechende Darstellung sei etwa auf DOWD [55], S. 63 ff., JORION [98], S. 206 ff., oder MARRISON [118], S. 104 ff., verwiesen.

Bevor die historische Simulation und die Monte-Carlo-Simulation besprochen werden, ist der Begriff der Risikofaktoren und deren Bedeutung kurz zu beleuchten. Bei der Marktrisikomessung geht es um die Bezifferung des Risikos von Verlusten in Vermögenspositionen. Diese entstehen aufgrund von Änderungen von Marktpreisen wie etwa Aktienkursen, Zinssätzen, Wechselkursen etc., die deshalb auch

Risikofaktoren genannt werden. Der Preis $P_t^{\text{Portfolio}}$ eines Portfolios zum Zeitpunkt t kann nun als eine Funktion h der Werte der relevanten Risikofaktoren $f_{t,k}$ ($k = 1, \dots, K$) geschrieben werden:

$$P_t^{\text{Portfolio}} = h(f_{t,1}, \dots, f_{t,K}).$$

Hierbei soll angenommen werden, dass die Funktion h über die Zeit konstant bleibt.

In der in Kapitel 13 beschriebenen empirischen Studie werden ausschliesslich Portfolios inländischer Aktien betrachtet. Da in diesem Spezialfall der Preis eines Portfolios ausschliesslich von den gewichteten Preisen der einzelnen Aktien im Portfolio abhängt, sind diese Aktienpreise gerade die relevanten Risikofaktoren. Der Preis $P_t^{\text{Portfolio}}$ eines Portfolios bestehend aus N Positionen inländischer Aktien mit der jeweiligen Anzahl Titel m_n ($n = 1, \dots, N$) ergibt sich als

$$P_t^{\text{Portfolio}} = \sum_{n=1}^N m_n P_t^n,$$

wobei P_t^n den Preis der n -ten Aktie im Portfolio zum Zeitpunkt t bezeichnet. In diesem einfachen Fall gilt somit gerade $K = N$. Man beachte jedoch, dass allgemein keine zwingende Relation zwischen der Anzahl der Risikofaktoren und der Anzahl der Portfoliopositionen besteht. Die Verfahren zur Generierung von Realisierungen einer Verteilung werden nachfolgend für den Spezialfall eines solchen inländischen Aktienportfolios dargestellt. Für eine umfassende Beschreibung der Bewertung komplexerer Finanzinstrumente auf der Basis von Risikofaktoren sei etwa auf HULL [89] und ELLER und DEUTSCH [60] verwiesen.

3.2 Historische Simulation

3.2.1 Darstellung der historischen Simulation

Die Idee der historischen Simulation ist es, in der Vergangenheit beobachtete Werte als Schätzungen für Realisierungen einer zu prognostizierenden Verteilung heranzuziehen. In der Folge werden Renditen einer Vermögensposition betrachtet. Man unterscheidet im Rahmen der historischen Simulation den Portfolio- und den Faktoransatz (vgl. HUSCHENS [91], S. 5 ff.). Beim Portfolioansatz werden Realisierungen einer zukünftigen Renditeverteilung direkt für ein Portfolio geschätzt, indem das betrachtete Portfolio zu historischen Preisen bewertet und auf dieser Basis Portfoliorenditen ermittelt werden. Beim Faktoransatz werden dagegen zunächst für jeden involvierten Vermögenswert einzeln aus historischen

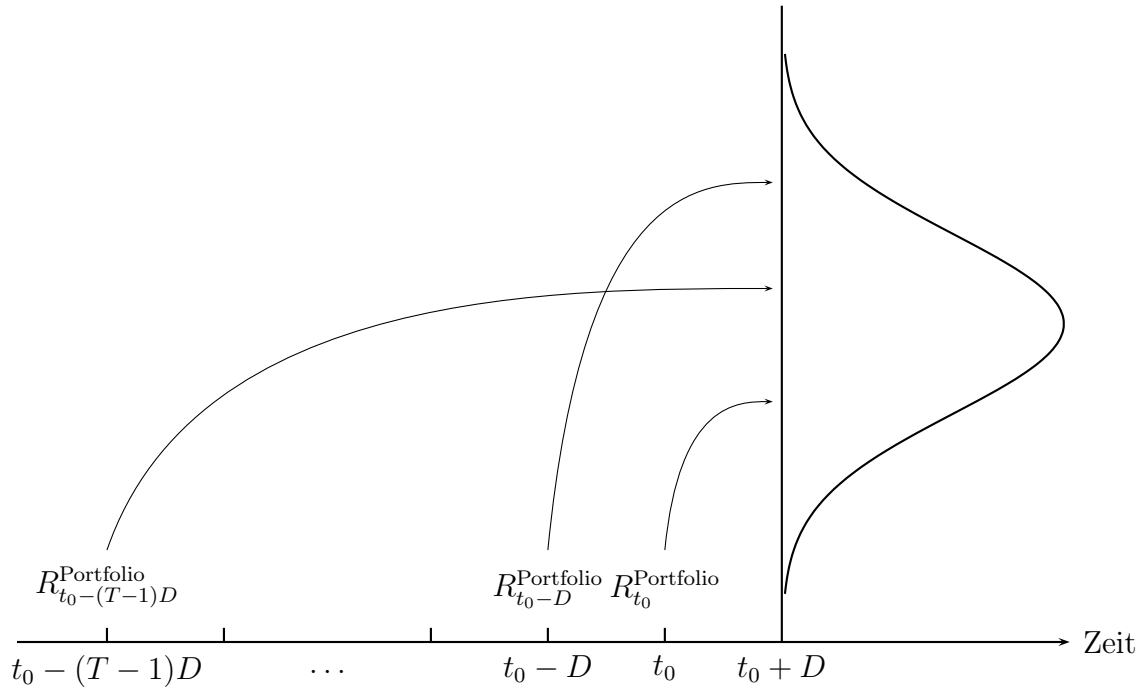


Abbildung 3.1: Grundidee der historischen Simulation.

Daten Realisierungen entsprechender Renditeverteilungen geschätzt, worauf aus der Gesamtheit dieser Renditen Realisierungen der zukünftigen Renditeverteilung des betrachteten Portfolios abgeleitet werden. In der Folge wird der Faktoransatz vorgestellt, der als Standardansatz betrachtet werden kann (vgl. HUSCHENS [91], S. 12).

Die historische Simulation geht von der Annahme aus, dass die Renditen einer Vermögensposition unabhängig und identisch verteilt sind (vgl. HUSCHENS [91], S. 17, und JOHANNING [95], S. 32). In Abbildung 3.1 wird die Grundidee der historischen Simulation illustriert. Es bezeichne t_0 den letzten Zeitpunkt, für den die Preise einer betrachteten Vermögensposition bekannt sind und w_t^n ($n = 1, \dots, N$; $\sum_{n=1}^N w_t^n = 1$) die relativen Werte der N Vermögenswerte in einem Portfolio zu diesem Zeitpunkt. Weiter sei $t_0 + D$ der Zielzeitpunkt, für den Realisierungen einer Verteilung von Portfoliorenditen zu schätzen sind, wobei D gerade der gewählten Haltedauer entspricht. Ausgehend von t_0 werden nun $T - 1$ Zeitschritte der Länge D in die Vergangenheit unternommen. Zusammen mit t_0 verfügt man so über T Zeitpunkte, an denen zunächst die einfachen Renditen $R_{t_0-t.D}^n$ ($t = 0, \dots, T - 1$) der N Titel im Portfolio bestimmt werden. Im Anschluss daran kann für jeden dieser Zeitpunkte die Portfoliorendite $R_{t_0-t.D}^{\text{Portfolio}}$ gemäss

$$R_{t_0-t.D}^{\text{Portfolio}} = \sum_{n=1}^N w_{t_0}^n R_{t_0-t.D}^n, \quad t = 0, \dots, T - 1 \quad (3.1)$$

berechnet werden. Diese T historischen Portfoliorenditen werden als Realisierungen der Renditeverteilung des betrachteten Portfolios für den Zeitpunkt $t_0 + D$ aufgefasst. Diese Stichprobe kann wie in Abschnitt 2.3 beschrieben zur Ermittlung eines Prognosewerts für den Zeitpunkt $t_0 + D$ des VaR eines betrachteten Portfolios verwendet werden.

3.2.2 Würdigung der historischen Simulation

Wie diese Darstellung zeigt, handelt es sich bei der historischen Simulation um ein einfaches Konzept, das leicht zu implementieren ist. Der mit dem Verfahren verbundene Rechenaufwand ist zudem sehr bescheiden, da lediglich Renditen und gewichtete Summen zu berechnen sind. Der Umstand, dass keine Parameter geschätzt werden müssen, ist darauf zurückzuführen, dass keine expliziten Modellannahmen, weder über Verteilungen noch über Abhängigkeitsstrukturen, getroffen werden. Vielmehr wird davon ausgegangen, dass sämtliche Eigenschaften der Renditen der einzelnen Titel und die Zusammenhänge zwischen den Renditen der Titel in einem Portfolio in den historischen Daten enthalten sind und so implizit berücksichtigt werden. Zudem kommt dieser nichtparametrische Ansatz ohne die in der Praxis häufig verletzte Normalverteilungsannahme für Renditeverteilungen aus. In den Untersuchungen von MAHONEY [115] und JACKSON et al. [92] sowie in der in Kapitel 13 präsentierten empirischen Studie wird aufgezeigt, dass vor allem bei dem extremen von den massgeblichen Aufsichtsbehörden geforderten Konfidenzniveau von 99% das Konzept der historischen Simulation denjenigen Konzepten überlegen ist, die normalverteilte Portfoliorenditen unterstellen.

Neben diesen Vorteilen weist das Konzept der historischen Simulation auch Nachteile auf. So ist die totale Abhängigkeit der Resultate von einem spezifischen historischen Datensatz kritisch zu bewerten. Es wird davon ausgegangen, dass eine auf der Grundlage eines historischen Zeitraums geschätzte Renditeverteilung exakt die Verteilung zukünftiger Renditen beschreibt. Dies dürfte jedoch lediglich in Ausnahmefällen zutreffen. So verfügt die historische Simulation beispielsweise über keinerlei Möglichkeit, zukünftige Geschehnisse „vorauszusehen“, die nicht schon im historischen Beobachtungszeitraum vorgekommen sind. Genauso können die historischen Daten aber auch Einzelereignisse enthalten, die in Zukunft nicht wieder eintreten werden und dennoch für die Dauer des gewählten Beobachtungszeitraums in den historischen Daten verweilen, bevor sie dann plötzlich von einem Zeitschritt auf den nächsten ausscheiden. Weiter werden permanente Änderungen und Strukturbrüche nur allmählich in eine Prognoseverteilung aufgenommen, da über eine längere Zeitspanne weiterhin Werte im verwendeten Datensatz verbleiben, die vor einer bestimmten Veränderung beobachtet wurden. Eine Möglichkeit den Problemen bei der Aufnahme und Aussonderung von Ereignissen zu bege-

nen, bietet der leicht modifizierte Ansatz der gewichteten historischen Simulation. Hierbei wird den Daten ein Gewicht zugeordnet, das immer mehr abnimmt, je weiter die Daten in der Vergangenheit liegen, und das schliesslich beim Austritt eines Ereignisses aus dem Beobachtungszeitraum den Wert null annimmt (vgl. DOWD [55], S. 103).

Ein weiterer Nachteil ergibt sich aus dem in Abschnitt 2.5 dargelegten Umstand, dass der Basler Ausschuss und die Eidgenössische Bankenkommission VaR-Schätzungen für zwei unterschiedliche Haltedauern D fordern, eine zehntägige für die Eigenkapitalunterlegung und eine eintägige für das Backtesting. Dies erfordert eine gesonderte Berechnung der Renditen für die unterschiedlichen Halteperioden, was den Datenumfang und somit den Aufwand der Datenhaltung und -pflege erheblich erhöht.

Besonders zum Tragen kommt bei der historischen Simulation die Problematik der Wahl des Beobachtungszeitraums. Einerseits hat man das Problem, dass eine zu lange Historie meist nicht geeignet ist, die Zukunft zu beschreiben. Andererseits fällt bei einem kurzen Beobachtungszeitraum der Umfang der Prognosestichprobe entsprechend klein aus. Werden beispielsweise ein Beobachtungszeitraum von 250 Handelstagen und eine zehntägige Haltedauer verwendet, womit die Anforderungen der massgeblichen Aufsichtsbehörden erfüllt sind, verfügt man lediglich über eine Stichprobe von 24 sich nicht überlappenden Renditen. Es ist klar, dass dies zu grossen Schätzfehlern bei der Ermittlung von darauf basierenden Risikomas- sen führen kann. Um den Stichprobenumfang zu erhöhen, kann bei der Renditeberechnung mit sich überlappenden Zeiträumen gearbeitet werden, womit diese Renditen jedoch korreliert sind und die getroffene Unabhängigkeitsannahme verletzt ist (vgl. HUSCHENS [91], S. 14). Eine weitere Möglichkeit der Erhöhung des Stichprobenumfangs bietet die so genannte Bootstrap-Methode (vgl. DOWD [55], S. 105). Hierbei wird durch zufälliges Ziehen mit Zurücklegen von Werten aus der ursprünglichen Prognosestichprobe eine beliebig grosse neue Prognosestichprobe generiert (vgl. DAVIDSON und MACKINNON [52], S. 763 ff.).

Für das Ziel der vorliegenden Arbeit, nämlich die Beurteilung der Zusammenhangsmodellierung zwischen Anlagewerten mittels Copulafunktionen, ist die historische Simulation ebenfalls ungeeignet, da keine expliziten Annahmen über Abhängigkeitsstrukturen eingebracht werden können. Gerade aber weil hier die Zusammenhänge implizit über die historischen Daten modelliert werden, werden unter Verwendung der historischen Simulation geschätzte VaR-Werte in der nachfolgend präsentierten empirischen Studie jeweils zu Vergleichszwecken herangezogen und bilden so eine Art „nichtparametrische Referenzwerte“.

3.3 Monte-Carlo-Simulation

In diesem Abschnitt soll das Verfahren der Monte-Carlo-Simulation (MC-Simulation) zur Generierung von Realisierungen einer Verteilung dargestellt werden. Es wird das im Finanzbereich in diesem Zusammenhang verwendete Standardmodell eingeführt, wobei zunächst einzelne Vermögenswerte und im Anschluss Portfolios betrachtet werden.

3.3.1 Darstellung der Monte-Carlo-Simulation für einen einzelnen Vermögenswert

Bei Verwendung der Monte-Carlo-Simulation im Rahmen der Marktrisikoermessung ist zu Beginn ein Modell zu wählen, mit dem das Verhalten des Preises eines betrachteten Vermögenswertes über die Zeit geeignet beschrieben werden kann. Hierzu fasst man den Preis als von der Zeit abhängige Zufallsvariable auf, die nachfolgend als $P(t)$ notiert wird. Die mathematische Beschreibung der zeitlichen Dynamik einer solchen Zufallsvariable erfolgt in der Regel über eine stochastische Differentialgleichung, wobei sich im Finanzbereich in diesem Zusammenhang die geometrische brownische Bewegung als Standardmodell etabliert hat (vgl. DOWD [55], S. 114 f., HULL [89], S. 226, und JORION [98], S. 292 ff.). Für eine anschauliche Herleitung sei nebst den genannten Werken auf ELLER und DEUTSCH [60], S. 15 ff., verwiesen. Die *geometrische brownische Bewegung* kann als

$$dP(t) = \mu P(t) dt + \sigma P(t) \sqrt{dt} Z(t) \quad (3.2)$$

geschrieben werden, wobei $Z(t) \stackrel{L}{\sim} N(0, 1)$ gilt und dt einen infinitesimal kleinen Zeitschritt bezeichnet. Die zeitliche Änderung des Kurses $dP(t)$ – hierbei steht $dP(t)$ für $P(t+dt) - P(t)$ – setzt sich demnach aus einem so genannten Driftanteil $\mu P(t) dt$ und einem so genannten Diffusionsanteil $\sigma P(t) \sqrt{dt} Z(t)$ mit konstanten Parametern μ und σ zusammen. Der Driftanteil stellt den zeitlichen Trend dar, der Diffusionsanteil überlagert diesen Trend mit zufälligen Schwankungen.

Da die geometrische brownische Bewegung zeitkontinuierlich ist, kann sie für die konkrete Simulation nicht direkt verwendet werden. Es wird eine diskrete Approximation benötigt. Die einfachste Näherung dieser Art ist die so genannte Euler-Approximation (vgl. KLOEDEN et al. [101], S. 91 ff.), bei der zunächst die Dauer vom Startzeitpunkt t_0 bis zum Endzeitpunkt der Simulation $t_0 + D$ gemäss

$$\Delta t = D/L \quad (3.3)$$

in L äquidistante Stücke eingeteilt wird. Es ergibt sich so eine Folge von äquidistanten Zeitpunkten $t_0 + l \cdot \Delta t$ ($l = 0, \dots, L$). Als diskrete Approximation für die

kontinuierliche geometrische brownsche Bewegung (3.2) ergibt sich so

$$\Delta P_t = P_{t+\Delta t} - P_t = \mu P_t \Delta t + \sigma P_t \sqrt{\Delta t} Z_t \quad (3.4)$$

beziehungsweise

$$R_{t+\Delta t} = \frac{P_{t+\Delta t} - P_t}{P_t} = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_t, \quad (3.5)$$

wobei $Z_t \stackrel{L}{\sim} N(0, 1)$ gilt. Als lineare Funktion von Z_t ist die Rendite $R_{t+\Delta t}$ normalverteilt.

Mit (3.4) lässt sich nun aus dem bekannten Preis eines Finanzinstruments zum Zeitpunkt t und einer Realisierung einer standardnormalverteilten Zufallsvariable der Preis des Assets zum darauf folgenden Zeitpunkt $t + \Delta t$ bestimmen. Alternativ kann gemäss (3.5) direkt eine einfache Rendite $R_{t+\Delta t}$ zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ simuliert werden.

Nimmt Δt in (3.5) den Wert 1 an, so ergibt sich $E(R_{t+1}) = \mu$ und $\text{Var}(R_{t+1}) = \sigma^2$. Entsprechend können die Parameter μ und σ mit Hilfe des arithmetischen Mittels beziehungsweise der Standardabweichung von historischen für eine Zeitdauer $\Delta t = 1$ ermittelten Renditedaten geschätzt werden (vgl. CAMPBELL et al. [45], S. 356 ff., und WEBER [161], S. 72 ff.). Im Folgenden wird diese gemäss (3.3) ermittelte Zeitdauer Δt in Tagen gemessen. Weiter werden der Erwartungswert μ und die Volatilität σ auf einen Tag bezogen und explizit mit μ_{Tag} beziehungsweise σ_{Tag} bezeichnet, wenn dies für das Verständnis von Vorteil ist. Unter der Annahme, dass die Renditen einer Vermögensposition unabhängig und identisch verteilt sind, können zur Umrechnung des Tageserwartungswerts oder der Tagesvolatilität auf andere in Tagen gemessene Periodenlängen folgende Gleichungen verwendet werden (vgl. JORION [98], S. 102 f.):

$$\mu_{\text{Periode}} = \mu_{\text{Tag}} \Delta t, \quad (3.6)$$

$$\sigma_{\text{Periode}} = \sigma_{\text{Tag}} \sqrt{\Delta t}. \quad (3.7)$$

Nachdem das Modell zur Abbildung der zeitlichen Dynamik der Preise des Finanztitels gewählt, die Modellparameter μ und σ geschätzt und die Werte für L und Δt bestimmt wurden, kann ausgehend von einem Startpreis P_0 die konkrete Simulation von möglichen Preis- beziehungsweise Renditeverläufen angegangen werden. Nachfolgend sollen Renditen betrachtet werden. Das Vorgehen wird in Abbildung 3.2 illustriert. Ausgehend vom Preis P_0 zum Zeitpunkt t_0 wird mit Hilfe einer Realisierung einer standardnormalverteilten Zufallszahl gemäss (3.5) eine Rendite für den Zeitpunkt $t_0 + \Delta t$ generiert. Ausgehend von diesem Wert wird dieses Vorgehen für jeden der folgenden Zeitpunkte $t_0 + l \cdot \Delta t$ ($l = 2, \dots, L$)

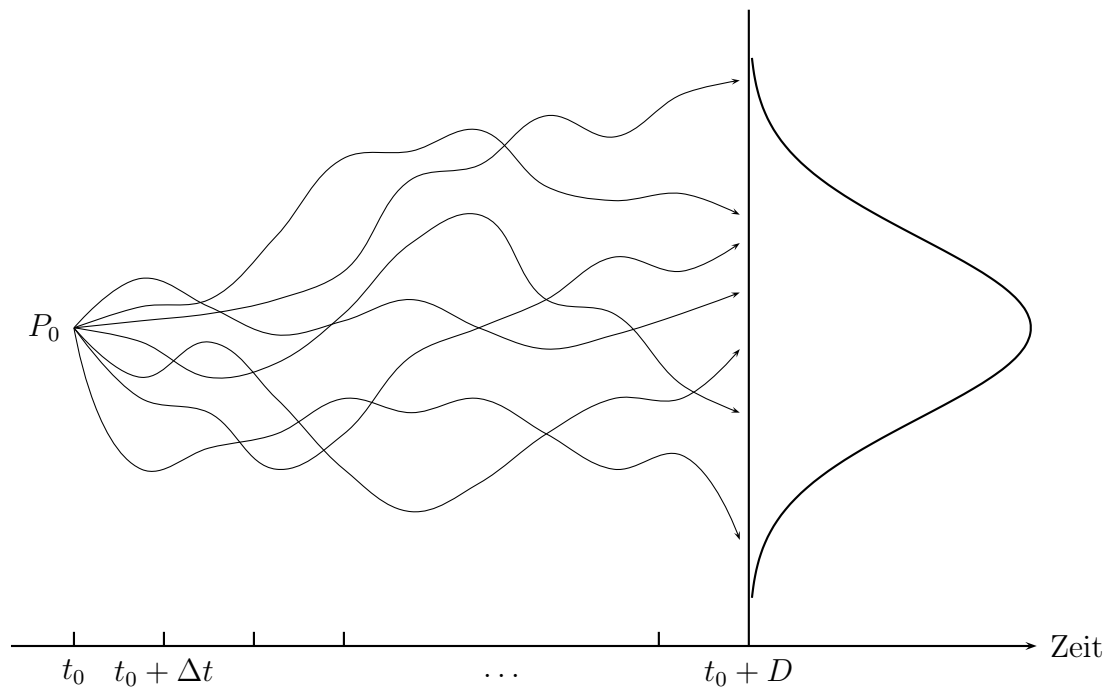


Abbildung 3.2: Grundidee der Monte-Carlo-Simulation.

wiederholt, bis schliesslich eine Rendite zum Zeitpunkt $t_0 + D$ und somit ein erster Zeitpfad vorliegt. In der Folge wird analog eine Anzahl von M Zeitpfaden simuliert, was eine Stichprobe einer Verteilung von Renditewerten zum Zeitpunkt $t_0 + D$ liefert. Diese Stichprobe kann wie in Abschnitt 2.3 beschrieben zur Ermittlung eines Prognosewerts für den Zeitpunkt $t_0 + D$ des VaR eines betrachteten Vermögenswertes verwendet werden.

3.3.2 Darstellung der Monte-Carlo-Simulation für ein Portfolio

Es soll nun die Monte-Carlo-Methode für ein Finanzportfolio dargestellt werden. Seien μ_1, \dots, μ_N die Erwartungswerte und $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ die Standardabweichungen der Eintagesrenditen der N Vermögenswerte in einem Portfolio und bezeichne Δt weiterhin die gemäss (3.3) berechnete in Tagen gemessene Dauer zwischen zwei Simulationszeitpunkten. Seien weiter die Renditen der betrachteten N Vermögenswerte unabhängig, dann kann die diskretisierte geometrische brownsche

Bewegung in Anlehnung an (3.5) für alle Vermögenswerte simultan als

$$\begin{pmatrix} R_{t+\Delta t}^1 \\ \vdots \\ R_{t+\Delta t}^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_N \end{pmatrix} \Delta t + \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_N \end{pmatrix} \sqrt{\Delta t} \begin{pmatrix} Z_{t1} \\ \vdots \\ Z_{tN} \end{pmatrix}$$

oder kurz als

$$\mathbf{R}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{\mu} \Delta t + \mathbf{S} \sqrt{\Delta t} \mathbf{Z}_t \quad (3.8)$$

geschrieben werden, wobei $\mathbf{Z}_t \stackrel{L}{\sim} N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ gilt. Als lineare Funktion von \mathbf{Z}_t ist der Vektor $\mathbf{R}_{t+\Delta t}$ multivariat normalverteilt und die im Vektor $\mathbf{R}_{t+\Delta t}$ enthaltenen Einzelrenditen $R_{t+\Delta t}^n$ ($n = 1, \dots, N$) sind univariat normalverteilt. Diese Annahmen über die Renditen von Vermögenswerten sind charakteristisch für die geometrische brownsche Bewegung.

In aller Regel sind die Renditen der einzelnen Vermögenswerte in einem Portfolio nicht unabhängig, womit Art und Ausmass ihrer Zusammenhänge modelliert werden müssen. Unter der Annahme multivariat normalverteilter Renditen, von der die geometrische brownsche Bewegung wie oben aufgezeigt ausgeht, sind diese Zusammenhänge zwischen den Vermögenswerten zwingend durch zu schätzende Kovarianzen beziehungsweise Korrelationen zu modellieren.

Die *Kovarianz* zweier Zufallsvariablen X und Y ist definiert als

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \sigma_{XY} = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\ &= E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)], \end{aligned} \quad (3.9)$$

wobei $E(X) = \mu_X$ und $E(Y) = \mu_Y$ die Erwartungswerte von X und Y bezeichnen. Die Kovarianz ist unbeschränkt in dem Sinne, dass sie sowohl beliebig grosse als auch beliebig kleine Werte annehmen kann.

Die *Korrelation* ist eine normierte Form der Kovarianz und ist für zwei Zufallsvariablen X und Y definiert als

$$\text{Corr}(X, Y) = \rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{\sigma_X^2 \cdot \sigma_Y^2}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}. \quad (3.10)$$

Durch die Division der Kovarianz mit der Wurzel aus dem Produkt der Varianzen $\text{Var}(X) = \sigma_X^2$ und $\text{Var}(Y) = \sigma_Y^2$ von X und Y wird erreicht, dass die Korrelation nur Werte zwischen -1 und 1 annehmen kann, also auf dieses Intervall normiert ist.

Für eine Stichprobe (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, wird die Kovarianz mittels

$$\text{Cov}(x, y) = s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (3.11)$$

geschätzt, wobei \bar{x} und \bar{y} die arithmetischen Mittel der Beobachtungen x_1, \dots, x_n beziehungsweise y_1, \dots, y_n bezeichnen. Die Korrelation zweier Zufallsvariablen wird auf der Grundlage von Beobachtungen (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, üblicherweise mittels des *Korrelationskoeffizienten von Bravais-Pearson* geschätzt (vgl. RODRIGUEZ [133], S. 194). Für Beobachtungen (x_i, y_i) ist dieser definiert als

$$r(x, y) = r_{xy} = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sqrt{s_x^2 \cdot s_y^2}} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (3.12)$$

wobei s_x^2 und s_y^2 die empirischen Varianzen von x_1, \dots, x_n beziehungsweise y_1, \dots, y_n bezeichnen.

Für einen Zufallsvektor

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)'$$

mit Erwartungswertvektor

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_N)'$$

ist weiter die *Varianz-Kovarianz-Matrix* definiert durch

$$\text{Cov}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

mit $\sigma_{ij} = \mathbf{E}((X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j))$ für alle $i, j = 1, \dots, N$. Diese Matrix fasst die Varianzen eines Zufallsvektors \mathbf{X} in und die paarweisen Kovarianzen ober- und unterhalb der Diagonalen der Matrix zusammen. Die *Korrelationsmatrix* eines Zufallsvektors \mathbf{X} ist definiert durch

$$\text{Corr}(\mathbf{X}) = \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1N} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \rho_{N2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

mit $\rho_{ij} = \sigma_{ij}/(\sigma_i \sigma_j)$. Es gilt offenbar $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ und $\rho_{ij} = \rho_{ji}$. Varianz-Kovarianz-Matrizen und Korrelationsmatrizen sind folglich stets symmetrisch.

Mit Hilfe der zu schätzenden Korrelationsmatrix \mathbf{R} der Eintagesrenditen der Vermögenspositionen in einem Portfolio ergibt sich das Modell der geometrischen brownischen Bewegung für den Fall von abhängigen Vermögenswerten, indem in (3.8) der Zufallsvektor \mathbf{Z}_t durch einen Zufallsvektor

$$\mathbf{X}_t \stackrel{\text{L}}{\sim} N(\mathbf{0}, \mathbf{R}) \quad (3.15)$$

ersetzt wird. Als lineare Funktion des multivariat normalverteilten Vektors \mathbf{X}_t gilt für den Renditevektor $\mathbf{R}_{t+\Delta t}$ (vgl. GREENE [80], S. 88)

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{t+\Delta t} &= \boldsymbol{\mu} \Delta t + \mathbf{S} \sqrt{\Delta t} \mathbf{X}_t \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} N(\boldsymbol{\mu} \Delta t, \mathbf{S} \mathbf{R} \mathbf{S}' \Delta t) \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{\sim} N(\boldsymbol{\mu} \Delta t, \boldsymbol{\Sigma} \Delta t).\end{aligned}\quad (3.16)$$

Hierbei bezeichnet $\boldsymbol{\mu}$ den Erwartungswertvektor und $\boldsymbol{\Sigma}$ die Varianz-Kovarianz-Matrix der Eintagesrenditen der betrachteten N Vermögenswerte und Δt die gemäss (3.3) berechnete in Tagen gemessene Dauer zwischen zwei Simulationszeitpunkten.

Die im Vektor $\mathbf{R}_{t+\Delta t}$ enthaltenen Einzelrenditen $R_{t+\Delta t}^n$ ($n = 1, \dots, N$) können in Anlehnung an (2.3) gemäss

$$R_{t+\Delta t}^{\text{Portfolio}} = \sum_{n=1}^N w_{t_0}^n R_{t+\Delta t}^n \quad (3.17)$$

zur gesuchten Portfoliorendite zusammengefasst werden, wobei $w_{t_0}^n$ ($\sum_{n=1}^N w_{t_0}^n = 1$) weiterhin die relativen Werte der N Vermögenswerte im Portfolio zum Zeitpunkt t_0 bezeichnen.

Die Simulation eines Zeitpfades einer Portfoliorendite zwischen t_0 und $t_0 + D$ mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode und unter Verwendung der geometrischen brownischen Bewegung entspricht folglich im Wesentlichen der wiederholten Generierung eines multivariat normalverteilten Zufallsvektors mit den entsprechenden in (3.15) aufgeführten Parametern, der Transformation gemäss (3.16) und der Zusammenfassung der transformierten Zufallszahlen gemäss (3.17). Durch die Simulation von M solchen Zeitpfaden erhält man schliesslich eine Stichprobe einer Verteilung von Portfoliorenditen zum Zeitpunkt $t_0 + D$. Diese Stichprobe kann wie in Abschnitt 2.3 beschrieben zur Ermittlung eines Prognosewerts für den Zeitpunkt $t_0 + D$ des VaR eines betrachteten Portfolios verwendet werden.

Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass auch die Ein-Perioden-Portfoliorendite gemäss (3.17) als Linearkombination von normalverteilten Zufallsvariablen normalverteilt ist. Im Sinne eines Portfolioansatzes könnte somit auch direkt die Portfoliorendite generiert werden. In dieser Arbeit wird jedoch der oben beschriebene Faktoransatz verfolgt, der als Standardansatz betrachtet werden kann (vgl. DOWD [55], S. 110 ff., und JORION [98], S. 302 ff.).

3.3.3 Würdigung der Monte-Carlo-Simulation

Im direkten Vergleich zur historischen Simulation können verschiedene Vorteile der Monte-Carlo-Methode angegeben werden. So können mit dem letztgenannten Ver-

fahren beliebig grosse Stichproben einer Verteilung generiert werden. Dies führt zu einer Verringerung der Schätzfehler bei der Ermittlung von darauf basierenden Risikomassen. Weiter stellt bei der Monte-Carlo-Methode auch die Handhabung von verschiedenen Haltedauern kein Problem dar, da ausgehend vom gegenwärtigen Zeitpunkt jeweils gerade so viele Zeitschritte simuliert werden können, wie zum Erreichen des Endes der Halteperiode notwendig sind. Auf eine gesonderte Berechnung der Renditen für die unterschiedlichen Haltedauern und eine entsprechend aufwändige Datenhaltung kann im Gegensatz zur historischen Simulation verzichtet werden. Im Hinblick auf die Richtlinien des Basler Ausschusses und der Eidgenössischen Bankenkommission scheint das Arbeiten mit Tagesrenditen sinnvoll. So genügt die Simulation von einem Zeitschritt zur Generierung einer Prognoseverteilung im Rahmen des Backtesting und von zehn Zeitschritten im Hinblick auf die Eigenkapitalunterlegung.

Als Nachteil der Monte-Carlo-Simulation ist zu nennen, dass diese Methode rechen- und damit zeitintensiver ist als etwa die historische Simulation. Da man im Rahmen des praktischen Risikomanagements auf eine möglichst rasche Risikobezifferung von eingegangenen Positionen angewiesen ist, kann dies trotz steigender Computerleistung bei fallenden Kosten nach wie vor ein Problem darstellen. Des Weiteren ist die Implementierung der Monte-Carlo-Methode und der Betrieb eines entsprechenden Systems als komplexer einzustufen als etwa bei der historischen Simulation.

In Abschnitt 3.3.2 wurde ausgeführt, dass das im Rahmen der Monte-Carlo-Methode standardmässig verwendete Modell der geometrischen brownischen Bewegung von der Annahme multivariat normalverteilter Renditen der Vermögenswerte in einem Portfolio ausgeht. Diese Annahme schreibt zwingend vor, dass der Zusammenhang zwischen den Renditen über die Varianz-Kovarianz- beziehungsweise die Korrelationsmatrix modelliert wird. Wie bereits erwähnt wurde, haben diverse empirische Studien gezeigt, dass Renditen im Allgemeinen nicht normalverteilt sind. Weiter ist in jüngster Zeit die Frage aufgeworfen worden, inwieweit die Modellierung des Zusammenhangs zwischen Renditen von Vermögenswerten über die Varianz-Kovarianz- beziehungsweise die Korrelationsmatrix angemessen ist. Zunehmend wird deutlich, dass Kovarianz und Korrelation in gewissen Situationen zu Fehlschlüssen verleiten, die gerade im Rahmen des Risikomanagements problematisch sind und in einer unzutreffenden Risikomessung resultieren können. Dieser Punkt wird in Kapitel 4 genauer ausgeführt. In diesem Sinne ist die Annahme multivariat normalverteilter Renditen und die damit zwingend verbundene Art der Zusammenhangsmodellierung als kritisch zu bewerten.

Ein allgemeineres Konzept zur Modellierung von Zusammenhängen, welches das Konzept der Kovarianz und der Korrelation als Spezialfall beinhaltet, stellen die so genannten Copulafunktionen dar. Werden diese im Rahmen der Monte-Carlo-

Methode eingesetzt, so eröffnen sich Freiheitsgrade sowohl betreffend der gemeinsamen Verteilung der Renditen von Vermögenswerten als auch betreffend deren Zusammenhangsmodellierung: Einerseits kann auf die Annahme multivariat normalverteilter Renditen der Vermögenspositionen verzichtet werden, andererseits wird, da verschiedenste Copulafunktionen zur Auswahl stehen, eine Wahlmöglichkeit bei der Modellierung des Zusammenhangs zwischen den Renditen der betrachteten Vermögenswerte eröffnet. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist nun die empirische Überprüfung, inwieweit ausgewählte Copulafunktionen für die Zusammenhangsmodellierung von Renditen im Rahmen der Monte-Carlo-Methode einen Fortschritt bringen können im Vergleich zu der klassischerweise eingesetzten geometrischen brownischen Bewegung.

In den nachfolgenden Kapiteln 4 bis 9 werden das Copulakzept und ausgewählte Familien von parametrischen Copulafunktionen ausführlich dargestellt. Im Anschluss wird in Kapitel 10 beschrieben, wie das Copulakzept in die Monte-Carlo-Methode integriert werden kann.

Teil II

Einbezug von Copulafunktionen zur Messung von Marktrisiken

Kapitel 4

Kovarianz und Korrelation – Mögliche Fehlschlüsse

In Abschnitt 3.3.2 des vorangehenden Kapitels wurde ausgeführt, dass das im Rahmen der Monte-Carlo-Methode standardmässig verwendete Modell der geometrischen brownischen Bewegung bei der Generierung einer Verteilung von Portfoliorenditen zwingend die Zusammenhangsmodellierung mittels der Kovarianz beziehungsweise der Korrelation vorschreibt. Bevor in Kapitel 5 mit den so genannten Copulafunktionen ein allgemeineres Konzept der Zusammenhangsmodellierung dargestellt wird, soll in diesem Kapitel zunächst im Rahmen einer Erörterung der Vorteile von Kovarianz und Korrelation aufgezeigt werden, in welchem Kontext der Einsatz dieser beiden Zusammenhangsmasse unbedenklich ist. Im Anschluss werden Grenzen von Kovarianz und Korrelation aufgezeigt. Im Besonderen werden zwei Situationen präsentiert, die zu Fehlschlüssen verleiten, die besonders für die Risikomessung problematisch sind, da sie zu verzerrten Risikoschätzungen führen können. Dies motiviert erneut die Auseinandersetzung mit Copulafunktionen.

Da sich die Konzepte Kovarianz und Korrelation gemäss Gleichung (3.10) ineinander überführen lassen, wird in den nachfolgenden Ausführungen je nach Anwendungsfall entweder nur die Kovarianz oder nur die Korrelation verwendet.

4.1 Vorteile

Für die weite Verbreitung von Kovarianz und Korrelation in der Finanzliteratur und -praxis gibt es mehrere Gründe. Erstens sind diese meist einfach herzuleiten; für viele bivariate Verteilungen ist die Ermittlung der Varianzen und der Kovarianz und somit der Korrelation unproblematisch. In jedem Fall ist die konkrete

Schätzung von Kovarianz und Korrelation gemäss (3.11) beziehungsweise (3.12) auf der Grundlage einer Stichprobe einfach und mit geringem Rechenaufwand zu bewältigen.

Ein zweiter Vorteil der Kovarianz ist die einfache Form der Varianz einer Linearkombination von Zufallsvariablen. Die Varianz einer Linearkombination

$$Y = a_1 X_1 + \dots + a_N X_N = \mathbf{a}' \mathbf{X}$$

mit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$ lautet (vgl. GREENE [80], S. 85)

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(\mathbf{a}' \mathbf{X}) = \mathbf{a}' \mathbf{\Sigma} \mathbf{a}, \quad (4.1)$$

wobei $\mathbf{\Sigma}$ die Varianz-Kovarianz-Matrix des Zufallsvektors \mathbf{X} darstellt. Beziehung (4.1) ist unter anderem für die Portfoliotheorie von grosser Bedeutung, da sich die Rendite eines Portfolios von Vermögenswerten gemäss (2.3) als Linearkombination der Renditen dieser Vermögenswerte auffassen lässt.

Ein Vorteil der Korrelation ist ferner darin zu sehen, dass diese die Beziehung

$$\text{Corr}(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) = \text{sgn}(\alpha \gamma) \text{Corr}(X, Y) \quad (4.2)$$

für $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ und $\beta, \delta \in \mathbb{R}$ erfüllt. Daraus folgt insbesondere, dass die Korrelation invariant ist unter streng monoton wachsenden linearen Transformationen der zugrunde liegenden Zufallsvariablen.

Ein kurzes Beispiel soll den Nutzen dieser Eigenschaft demonstrieren. Zwei Aktienkurse ausgedrückt in Schweizer Franken (CHF) werden als Realisierungen zweier Zufallsvariablen betrachtet und es wird die Korrelation dieser beiden Aktienkurse geschätzt. Sind weiter dieselben Aktienkurse ausgedrückt in US Dollar (USD) von Interesse, muss die Schätzung der Korrelation nicht erneut vorgenommen werden, da diese durch die Währungsumrechnung der Titel nicht beeinflusst wird.

Ein weiterer Grund für die Popularität von Kovarianz und Korrelation ist, dass diese im Umfeld der multivariaten Normalverteilung oder allgemeiner gesagt im Umfeld der multivariaten sphärischen und elliptischen Verteilungsfamilien als natürliche Zusammenhangsmasse betrachtet werden können. Bevor genauer auf die Bedeutung dieser Aussage eingegangen wird, sollen zunächst die Begriffe der sphärischen und elliptischen Verteilung erläutert werden. Hierbei wird auf eine genaue mathematische Definition verzichtet, da in diesem Kontext ein intuitives Verständnis genügt. Für eine mathematische Einführung sei auf die Arbeit von EMBRECHTS et al. [64], S. 8 ff., oder auf das ausführliche Werk von FANG et al. [71] verwiesen.

Charakteristisch für die *sphärische Verteilungsfamilie* ist, dass die Iso-Dichte-Kurven der Verteilungen dieser Familie Sphären sind (im zweidimensionalen

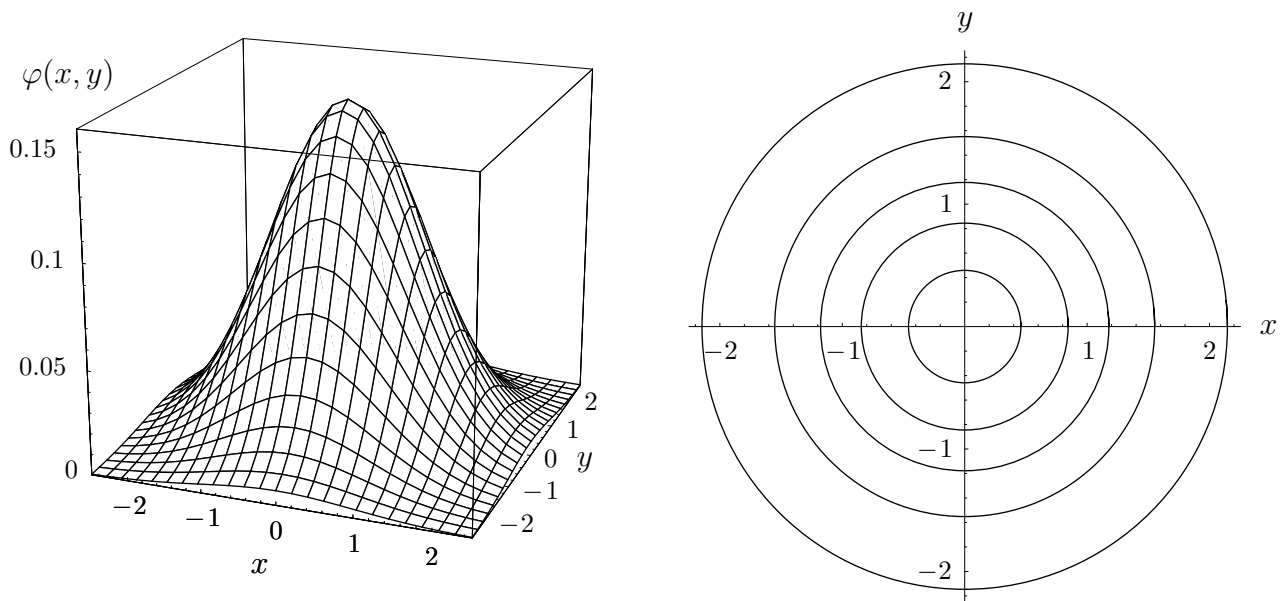


Abbildung 4.1: Dichtefunktion und Iso-Dichte-Kurven der bivariaten Standardnormalverteilung.

Raum spricht man von Kreisen). Eine Iso-Dichte-Kurve umfasst dabei alle Punkte (x_1, \dots, x_N) , für welche eine Dichtefunktion $f(x_1, \dots, x_N)$ einen vorgegebenen konstanten Wert annimmt. Folglich können sphärische Verteilungen als unter Drehung um den Erwartungswert invariante Verteilungen interpretiert werden. Die Varianz-Kovarianz-Matrix eines sphärisch verteilten Zufallsvektors entspricht stets der Einheitsmatrix \mathbf{I} mit entsprechender Dimension.

Ein Beispiel für eine Verteilung, die dieser Familie angehört, liefert die multivariate Standardnormalverteilung $N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$. Abbildung 4.1 zeigt den Sachverhalt für den bivariaten Fall. Im linken Teil der Graphik wird die Dichte $\varphi(x, y)$ abgebildet, die sich als dreidimensionale Glockenkurve präsentiert. Der rechte Teil der Abbildung zeigt Iso-Dichte-Kurven der bivariaten Standardnormalverteilung; diese sind allesamt kreisförmig mit Zentrum null.

Kennzeichnend für die *elliptische Verteilungsfamilie* ist, dass die Iso-Dichte-Kurven der Verteilungen dieser Familie Ellipsoide sind (im zweidimensionalen Raum spricht man von Ellipsen). Die elliptische Verteilungsfamilie verallgemeinert die sphärische Verteilungsfamilie in der Hinsicht, dass die Varianz-Kovarianz-Matrix nicht mehr gleich der Einheitsmatrix \mathbf{I} sein muss.

Ein wichtiges Mitglied dieser Familie ist die multivariate Normalverteilung $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. In Abbildung 4.2 ist der bivariate Fall $N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{pmatrix}\right)$ dargestellt. Der linke Teil der Graphik zeigt erneut die dreidimensional gezeichnete bivariate Dichtefunktion $\varphi(x, y)$. Im rechten Teil sind die entsprechenden ellipsenförmigen Iso-Dichte-Kurven abgebildet.

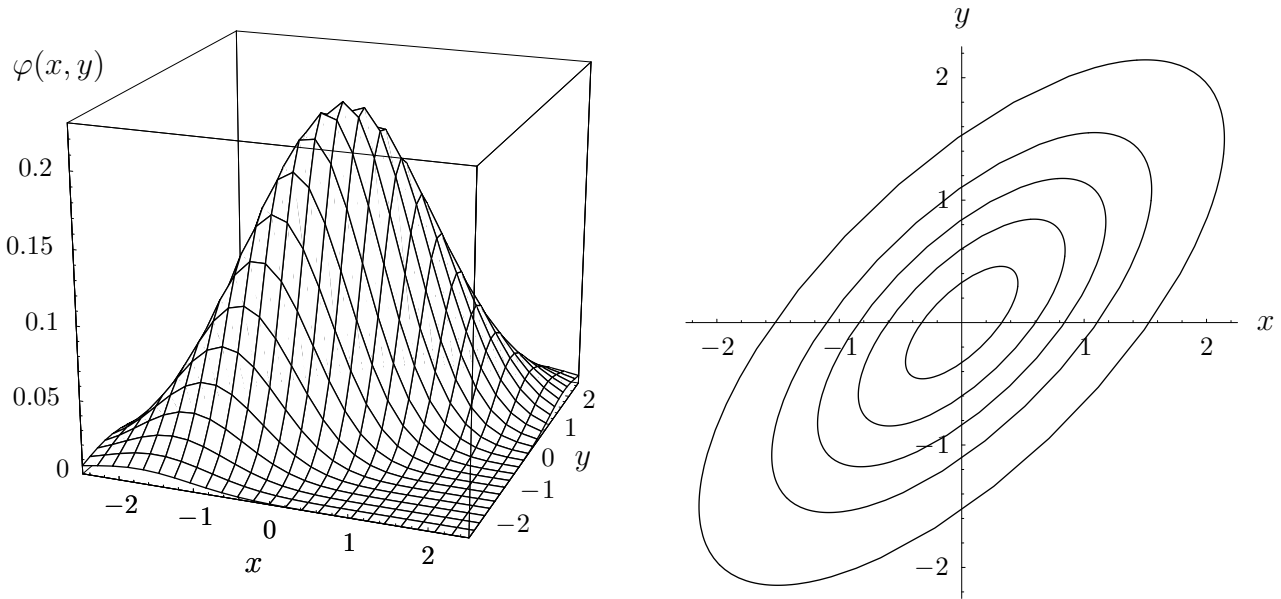


Abbildung 4.2: Dichtefunktion und Iso-Dichte-Kurven der bivariaten Normalverteilung mit $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{pmatrix}$.

Wie die Abbildungen 4.1 und 4.2 zeigen, wird die Form der Iso-Dichte-Kurven massgeblich durch die Varianz-Kovarianz-Matrix $\boldsymbol{\Sigma}$ beeinflusst. Gilt $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}$, geht die multivariate Normalverteilung in die multivariate Standardnormalverteilung oder allgemein ausgedrückt eine elliptische Verteilung in eine sphärische Verteilung über.

Die multivariate Normalverteilung ist nicht die einzige Vertreterin der elliptischen Verteilungsfamilie. Ein wichtiges weiteres Mitglied ist etwa die multivariate t -Verteilung mit ν Freiheitsgraden. Die Tatsache, dass ein N -dimensionaler Zufallsvektor \mathbf{X} elliptisch verteilt ist, wird in der Folge durch $\mathbf{X} \stackrel{\text{L}}{\sim} E_N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ ausgedrückt. Diese Schreibweise folgt daraus, dass jedes Mitglied der elliptischen Verteilungsfamilie durch eine so genannte charakteristische Generatorfunktion ϕ gekennzeichnet ist (vgl. EMBRECHTS et al. [63], S. 21).

Dass Kovarianz und Korrelation im Umfeld der sphärischen und elliptischen Verteilungsfamilien als natürliche Zusammenhangsmasse betrachtet werden können, wird durch den nachfolgenden Satz motiviert:

Satz 4.1 Sei $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{L}}{\sim} E_N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ ein elliptisch verteilter Zufallsvektor mit $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}^P$ und $\mathbf{X}_2 \in \mathbb{R}^Q$, wobei $P + Q = N$ gilt. Es bezeichne weiter $E(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}$ mit $\boldsymbol{\mu}_1 \in \mathbb{R}^P$ und $\boldsymbol{\mu}_2 \in \mathbb{R}^Q$ den Erwartungswertvektor und $\text{Cov}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}$ mit $\boldsymbol{\Sigma}_{11} \in \mathbb{R}^{P \times P}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{12} \in \mathbb{R}^{P \times Q}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{21} \in \mathbb{R}^{Q \times P}$ und $\boldsymbol{\Sigma}_{22} \in \mathbb{R}^{Q \times Q}$ die Varianz-Kovarianz-Matrix von \mathbf{X} . Dann gilt

$$\mathbf{X}_1 \stackrel{\text{L}}{\sim} E_P(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11}, \phi) \quad \text{und} \quad \mathbf{X}_2 \stackrel{\text{L}}{\sim} E_Q(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_{22}, \phi). \quad (4.3)$$

Dies bedeutet einerseits, dass eine gemeinsame elliptische Verteilung über elliptische Randverteilungen verfügt, welche alle die gleiche Generatorfunktion ϕ wie die gemeinsame Verteilung aufweisen und folglich vom gleichen Typ sind. Andererseits ist bei gegebenen elliptischen Randverteilungen gleichen Typs, gegebenem Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$ und gegebener Varianz-Kovarianz-Matrix $\boldsymbol{\Sigma}$ die gemeinsame *elliptische* Verteilung eindeutig bestimmt, falls bekannt ist, dass die gemeinsame Verteilung elliptisch und vom gleichen Typ wie die Randverteilungen ist. Dies liefert den Grund, weshalb die Varianz-Kovarianz-Matrix $\boldsymbol{\Sigma}$ im Umfeld multivariater elliptischer Verteilungsfamilien als natürliches Zusammenhangsmass angesehen werden kann.

4.2 Nachteile und mögliche Fehlschlüsse

Bevor ausführlich auf zwei Konsequenzen der Verwendung von Kovarianz und Korrelation ausserhalb der elliptischen Verteilungsfamilie eingegangen wird, werden kurz allgemein bekannte Einschränkungen der beiden Konzepte zusammengefasst. So erfassen Kovarianz und Korrelation ausschliesslich lineare Zusammenhänge. Dies kann gerade bei der Risikomessung von nichtlinearen Finanzinstrumenten wie beispielsweise Derivaten (vgl. HULL [89], S. 5 ff.) problematisch sein.

Weiter impliziert Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen stets Unkorreliertheit oder anders ausgedrückt eine Korrelation gleich null. Umgekehrt jedoch impliziert eine Korrelation gleich null nicht generell Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen. Lediglich im Fall der multivariaten Normalverteilung gilt dieser Umkehrschluss (vgl. GREENE [80], S. 150).

Einen Nachteil bedeutet ferner der Umstand, dass die Korrelation unter streng monoton wachsenden *nichtlinearen* Transformationen T der zugrunde liegenden Zufallsvariablen *nicht* invariant ist (vgl. EMBRECHTS et al. [64], S. 8). So gilt für zwei reellwertige Zufallsvariablen X und Y und zwei streng monoton wachsende nichtlineare Funktionen T und S im Allgemeinen

$$\text{Corr}(T(X), S(Y)) \neq \text{Corr}(X, Y).$$

Anhand eines kurzen Beispiels soll ein Fall aufgezeigt werden, in dem diese fehlende Invarianz unvorteilhaft ist. In Bezug auf die Diversifikation der Finanztitel in einem Portfolio interessiert man sich für die Korrelationen der Renditen dieser Finanztitel. In Abschnitt 2.2 wurden mit der einfachen Rendite gemäss (2.1) und der Log-Rendite gemäss (2.2) zwei alternative Renditedefinitionen eingeführt. Es werden nun zunächst die Korrelationen der Renditen der betrachteten Finanztitel unter Verwendung der Definition der einfachen Rendite geschätzt. Entscheidet

man sich später für einen Übergang von einfachen Renditen zu Log-Renditen, müssen die Korrelationen erneut geschätzt werden, da diese unter der hier benötigten nichtlinearen Transformation der Form $r_t = \ln(R_t + 1)$ nicht invariant sind.

In Abschnitt 4.1 wurde gezeigt, dass Kovarianz und Korrelation im Umfeld der elliptischen Verteilungsfamilie natürliche Zusammenhangsmasse darstellen. Diese Familie und besonders die Normalverteilung sind allgemein in der Statistik sehr wichtig. Es wurde in dieser Arbeit aber bereits erwähnt, dass die Normalverteilung meist nur eine unzureichende Näherung für im Finanzbereich relevante empirische Verteilungen darstellt. Solche empirische Verteilungen konzentrieren meist mehr Wahrscheinlichkeitsmasse in den Rändern einer Verteilung als die Normalverteilung.

Verlässt man die Normalverteilungsfamilie oder allgemeiner die elliptische Verteilungsfamilie, läuft man Gefahr, im Umgang mit Kovarianz und Korrelation Irrtümern zu erliegen, die zu inadäquaten Risikoschätzungen bei der Risikomesung eines Finanzportfolios führen können. Nachfolgende Ausführungen basieren im Wesentlichen auf den beiden Arbeiten von EMBRECHTS et al. [64] und [65].

Fehlschluss 1: Randverteilungen und Korrelation bestimmen die gemeinsame Verteilung.

Diese Aussage gilt im Falle gemeinsamer elliptischer Verteilungen uneingeschränkt. Oben wurde darauf hingewiesen, dass für einen Zufallsvektor mit *elliptischen* Randverteilungen gleichen Typs, gegebenem Erwartungswertvektor und gegebener Varianz-Kovarianz-Matrix genau eine eindeutig bestimmte gemeinsame *elliptische* Verteilung existiert. Für einen Zufallsvektor mit *beliebigen* Randverteilungen, gegebenem Erwartungswertvektor und gegebener Varianz-Kovarianz-Matrix existieren im Gegensatz hierzu im Allgemeinen unendlich viele mögliche gemeinsame Verteilungen. Sogar wenn ein Zufallsvektor weiterhin *elliptische* Randverteilungen gleichen Typs, gegebenen Erwartungswertvektor und gegebene Varianz-Kovarianz-Matrix aufweist, im Gegensatz zu vorher jedoch nicht mehr vorgegeben wird, dass die gemeinsame Verteilung elliptisch sein muss, existieren im Allgemeinen unendlich viele mögliche gemeinsame Verteilungen. Da folglich ausserhalb der Familie der gemeinsamen elliptischen Verteilungen durch die Vorgabe der Randverteilungen und der Kovarianz beziehungsweise der Korrelation eines Zufallsvektors die gemeinsame Verteilung dieses Zufallsvektors nicht eindeutig bestimmt ist, sind diese Zusammenhangsmasse in besagtem Kontext keine natürlichen Zusammenhangsmasse.

Der oben beschriebene Sachverhalt sei am Beispiel von zwei jeweils standard-normalverteilten Zufallsvariablen X und Y und einer Korrelation von 0.7 ver-

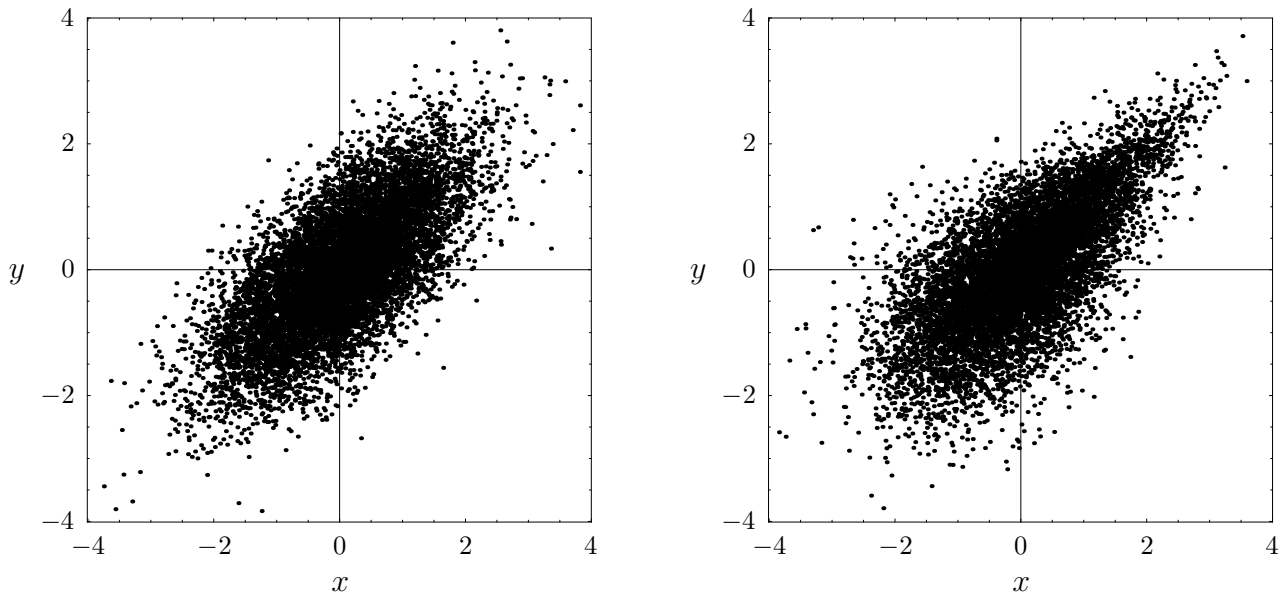


Abbildung 4.3: 10'000 simulierte Datenpaare zweier bivariater Verteilungen mit identischen standardnormalverteilten Randverteilungen und identischer Korrelation von 0.7, jedoch unterschiedlicher Zusammenhangsstruktur.

anschaulicht. Wird vorgegeben, dass die gemeinsame Verteilung elliptisch sein muss, existiert nur eine bivariate Verteilung für (X, Y) , die diese Anforderungen erfüllt – die standardisierte bivariate Normalverteilung mit Korrelation 0.7. Wird diese Bedingung fallen gelassen und werden beliebige gemeinsame Verteilungen zugelassen, existieren unendlich viele mögliche gemeinsame Verteilungen, die den gegebenen Anforderungen gerecht werden. Dies wird in Abbildung 4.3 illustriert. Auf der linken Seite sieht man 10'000 simulierte Datenpaare der bivariaten Normalverteilung mit Korrelation 0.7. Auf der rechten Seite werden 10'000 simulierte Datenpaare einer völlig unterschiedlichen bivariaten Verteilung gezeigt, die jedoch nichtsdestotrotz mit den gegebenen Anforderungen – standardnormalverteilte Randverteilungen und Korrelation 0.7 – konsistent ist. Diese zweite Verteilung neigt sichtlich dazu, simultan grosse Werte für X und Y zu generieren. Stellt man sich vor, dass es sich hierbei um Verluste von zwei Wertpapieren handelt, wird klar, dass die Verteilung, welche der Punktwolke auf der rechten Seite von Abbildung 4.3 zugrunde liegt, für das Risikomanagement problematischer ist. Rein auf Basis der Randverteilungen und der Korrelation können die in Abbildung 4.3 gezeigten Verteilungen jedoch nicht differenziert werden. Dieses Beispiel zeigt, dass die Vorgabe von Randverteilungen und Korrelation nicht ausreicht, um die gemeinsame Verteilung zu bestimmen.

Fehlschluss 2: Bei gegebenen Randverteilungen G und H für die Zufallsvariablen X und Y kann die Korrelation durch geeignete Spezifikation der gemeinsamen Verteilung F jeden Wert zwischen -1 und 1 annehmen.

Diese Aussage hat für die elliptische Verteilungsfamilie wiederum uneingeschränkte Gültigkeit. Allgemein ist die Aussage jedoch falsch. Wie bei EMBRECHTS et al. [64], S. 24, gezeigt wird, hängen die möglichen Werte der Korrelation von G und H ab und bilden ein abgeschlossenes Intervall $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ mit $-1 \leq \rho_{\min} < 0$ und $0 < \rho_{\max} \leq 1$. Für jedes ρ , das im Intervall $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ liegt, kann eine bivariate Verteilungsfunktion F für (X, Y) gefunden werden, so dass X die Randdichte G und Y die Randdichte H aufweist und $\rho(X, Y) = \rho$ gilt. Für Werte von ρ , die ausserhalb von $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ liegen, existiert keine gemeinsame Verteilung F , welche diese Anforderungen erfüllt.

Dies sei wiederum an einem Beispiel illustriert. Seien X und Y zwei lognormalverteilte Zufallsvariablen $X \stackrel{L}{\sim} LN(0, 1)$ und $Y \stackrel{L}{\sim} LN(0, \sigma^2)$ mit $\sigma > 0$. Bei EMBRECHTS et al. [64], S. 24 f., werden für diesen Fall für die Extremwerte der Korrelation folgende Beziehungen hergeleitet:

$$\rho_{\min} = \frac{e^{-\sigma} - 1}{\sqrt{(e - 1)(e^{\sigma^2} - 1)}}, \quad \rho_{\max} = \frac{e^{\sigma} - 1}{\sqrt{(e - 1)(e^{\sigma^2} - 1)}}.$$

Setzt man etwa $\sigma = 2$, erhält man $\rho_{\min} = -0.0901$ und $\rho_{\max} = 0.6658$. Man möchte nun das Risiko eines Portfolios aus zwei Finanztiteln auf der Grundlage einer gemeinsamen Gewinn/Verlust-Verteilung beziffern. Geht man etwa bei einer geschätzten Korrelation von 0.7 der Kurse der beiden Finanztitel davon aus, dass diese jeweils lognormalverteilt sind, hat man das Problem, dass gemäss obigen Überlegungen schlicht keine gemeinsame Verteilung existiert, welche diese Anforderungen erfüllt.

Abbildung 4.4 zeigt für das Beispiel der beiden lognormalverteilten Zufallsvariablen X und Y die maximal und minimal erreichbare Korrelation in Funktion von σ , der Standardabweichung von $\ln(Y)$. Mit zunehmendem σ wird das Intervall der möglichen Korrelationen $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ beliebig klein, es gilt $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \rho_{\min} = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \rho_{\max} = 0$. Dass aus diesem Sachverhalt jedoch keineswegs auf Unabhängigkeit von X und Y geschlossen werden kann, zeigt der nachfolgende allgemeine Satz:

Satz 4.2 Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen G beziehungsweise H . Sei weiter $0 < \sigma_X^2, \sigma_Y^2 < \infty$. Dann gilt $\rho = \rho_{\max}$ genau dann, wenn X und Y komonoton, und $\rho = \rho_{\min}$ genau dann, wenn X und Y kontramonoton sind.

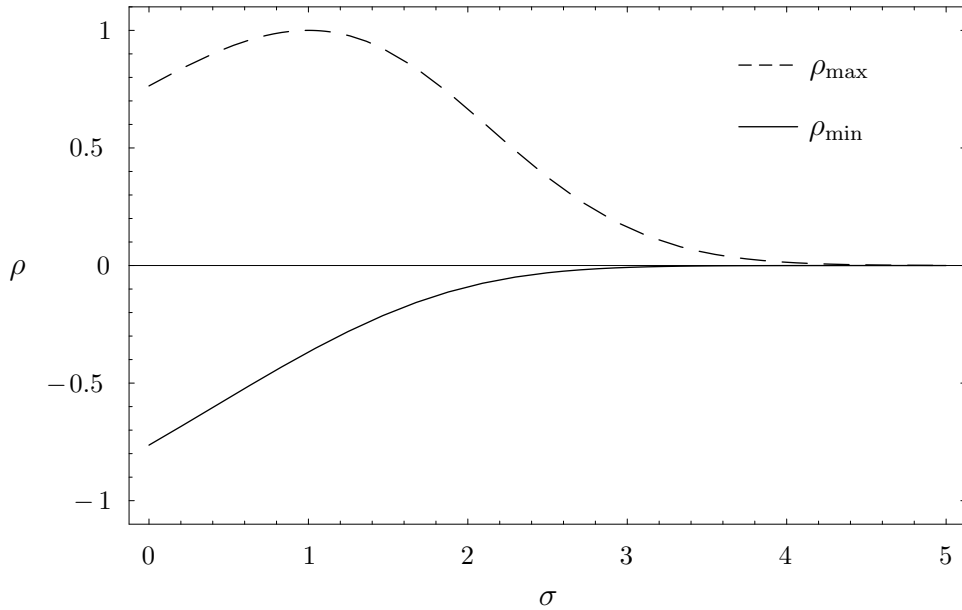


Abbildung 4.4: ρ_{\max} und ρ_{\min} in Abhängigkeit von σ .

Der Beweis dieses Satzes findet sich bei EMBRECHTS et al. [64], S. 24. Eine präzise mathematische Definition der Begriffe „komonoton“ und „kontramonoton“ wird in Abschnitt 6.1 präsentiert. Es sei jedoch bereits vermerkt, dass zwei komonotone Zufallsvariablen mit jeweils stetigen Verteilungsfunktionen, wie in diesem Beispiel gegeben, perfekt positiv abhängig sind, in dem Sinn, dass $Y = g(X)$ gilt, mit g als monoton wachsender Funktion. Weiter sind zwei kontramonotone Zufallsvariablen mit jeweils stetigen Verteilungsfunktionen perfekt negativ abhängig, in dem Sinn, dass $Y = h(X)$ gilt, mit h als monoton fallender Funktion.

Aus dem Gesagten folgt somit erstens, dass bei gegebenen Randverteilungen die Situation eintreten kann, dass nicht für jeden Korrelationswert zwischen -1 und 1 eine mit den Vorgaben vereinbare gemeinsame Verteilung existiert und zweitens, dass ein betragsmässig kleiner Wert der Korrelation nicht in jedem Fall als schwacher Zusammenhang zweier Zufallsvariablen interpretiert werden kann.

Diese Einschränkungen und möglichen Fehlschlüsse im Umgang mit Kovarianz und Korrelation motivieren in verstärktem Ausmass die Auseinandersetzung mit einem alternativen Ansatz der Zusammenhangsmodellierung. Ein solcher wird im folgenden Kapitel eingeführt.

Kapitel 5

Copulafunktionen

5.1 Einleitung

In den Jahren 1940 bis 1942 hat HOEFFDING in drei Aufsätzen erste Ansätze für das Copulakonzept präsentiert (vgl. [84], [85] und [86]). Weiter spricht SKLAR in einer in Französisch verfassten Arbeit von 1959 zum ersten Mal explizit von „copule“ (vgl. [150], S. 229). In der Folge sind Copulafunktionen oder kurz Copulas jedoch für längere Zeit in Vergessenheit geraten. So sucht man in der neunbändigen *Encyclopedia of Statistical Sciences* (vgl. [104]), die zwischen 1982 und 1988 erschienen ist, wie auch im *Supplement Volume* zu dieser Enzyklopädie von 1989 (vgl. [105]) vergeblich nach dem Begriff „Copula“. Erst im *Update Volume 1* aus dem Jahre 1997 erscheint ein Beitrag zu Copulas (vgl. FISHER [73]). Im *Current Index to Statistics*, einem bibliographischen Index für Publikationen in Statistik und verwandten Gebieten, in dem Referenzen aus 111 Journals sowie rund 11'000 Büchern und diversen weiteren Quellen seit 1975 erfasst sind¹, datiert der erste Aufsatz mit dem Begriff „Copula“ im Titel oder als Schlagwort aus dem Jahr 1981 (vgl. SCHWEIZER und WOLFF [148]). Finden sich von 1975 bis 1992 nur gerade 5 Einträge, die „Copulas“ erwähnen, so zeigt sich in der Folge ein wachsendes Interesse an diesem Thema. Für die Periode von 1992 bis 1999 sind insgesamt 31 Einträge im *Current Index to Statistics* gelistet. Noch jüngeren Datums ist das Interesse des Finanzbereichs am Copulakonzept; erst seit 1999 finden sich Copulas in der Finanzliteratur. Seither wurde jedoch eine grössere Zahl von Aufsätzen publiziert, die Anwendungen von Copulafunktionen für den Finanzbereich aufzeigen (vgl. beispielsweise BOUYÉ et al. [32], CESKE und HERNÁNDEZ [47] sowie LI [109]).

Der Begriff „Copula“ stammt aus dem Lateinischen und heisst soviel wie „Band,

¹Der *Current Index to Statistics* ist im World Wide Web unter der Adresse <http://www.statindex.org/CIS/> [Stand 2003-08-08] einsehbar.

Bindemittel, Verbindung“ (MENGE [119]). In mathematisch-statistischem Kontext wird eine Copula als Funktion verstanden, die eindimensionale Verteilungsfunktionen zu einer mehrdimensionalen Verteilungsfunktion „koppelt“. Dies wird im Folgenden genauer ausgeführt. Zunächst wird eine präzise mathematische Definition einer Copulafunktion präsentiert. Mit dem Satz von Sklar wird nachfolgend ein für die Theorie der Copulafunktionen zentraler Satz eingeführt, der die Grundlage der meisten Anwendungen des Copulakonzepts in der Statistik darstellt. Im Anschluss werden die wesentlichen Eigenschaften von Copulafunktionen besprochen. Für das leichtere Verständnis wird zunächst der zweidimensionale Fall betrachtet, bevor am Ende dieses Kapitels die Verallgemeinerung auf N Dimensionen eingeführt wird.

5.2 Satz von Sklar

Man betrachtet zwei Zufallsvariablen X und Y mit Verteilungsfunktion $G(x) = P[X \leq x]$ beziehungsweise $H(y) = P[Y \leq y]$ und gemeinsamer Verteilungsfunktion $F(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y]$. Sind die beiden Zufallsvariablen X und Y unabhängig, kann die gemeinsame Verteilungsfunktion F bekanntlich als Produkt der beiden Randverteilungsfunktionen G und H geschrieben werden:

$$F(x, y) = G(x)H(y), \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}. \quad (5.1)$$

Die Funktion, welche Werte der Randverteilungsfunktionen im Fall der Unabhängigkeit zum entsprechenden Wert der gemeinsamen Verteilungsfunktion „koppelt“, ist durch

$$C^\perp(u, v) = uv, \quad \text{für alle } u, v \in I, \quad (5.2)$$

definiert und soll in der Folge als *bivariate Produkt-Copula* bezeichnet werden. Gleichung (5.1) kann mit Hilfe derselben geschrieben werden als

$$F(x, y) = C^\perp(G(x), H(y)).$$

Allgemein können bivariate Copulafunktionen wie folgt definiert werden (vgl. NELSEN [122], S. 8):

Definition 5.1 Eine Funktion

$$C : \begin{cases} I^2 & \longrightarrow I \\ (u, v) & \longmapsto C(u, v), \end{cases}$$

heisst *bivariate Copulafunktion* oder kurz *bivariate Copula*, falls sie folgende Eigenschaften erfüllt:

1. Für alle $u, v \in I$ gilt

$$C(u, 0) = C(0, v) = 0 \quad (5.3a)$$

sowie

$$C(u, 1) = u \quad \text{und} \quad C(1, v) = v. \quad (5.3b)$$

2. Für alle $u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ mit $u_1 \leq u_2$ und $v_1 \leq v_2$ gilt die Ungleichung

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0. \quad (5.3c)$$

Es kann einfach gezeigt werden, dass die bivariate Produkt-Copula die Eigenschaften gemäss Definition 5.1 erfüllt. Es stellt sich nun die Frage, ob neben der Produkt-Copula weitere Copulafunktionen existieren, die in der Lage sind, die Rolle als Bindeglied zwischen einer multivariaten Verteilung und deren univariaten Randverteilungen zu übernehmen. Man sucht folglich Copulafunktionen, die über den Spezialfall der Unabhängigkeit hinausgehen und die Modellierung einer gewissen Abhängigkeitsstruktur zwischen Zufallsvariablen zulassen. Dass es für ein beliebiges Paar von Zufallsvariablen X und Y stets eine zugehörige Copulafunktion gibt, besagt der folgende Satz von Sklar. Dieser wurde bereits in jener Arbeit präsentiert, in welcher zum ersten Mal explizit von „copule“ gesprochen wird (vgl. SKLAR [150]). Der Wertebereich (englisch „range“) einer Funktion G sei in der Folge mit $R(G)$ bezeichnet.

Satz 5.1 (Satz von Sklar) *Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen G und H und gemeinsamer Verteilungsfunktion F . Dann existiert eine Copulafunktion C , so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$*

$$F(x, y) = C(G(x), H(y)) \quad (5.4)$$

gilt. Sind G und H stetig, so ist C eindeutig; sonst ist C eindeutig bestimmt auf $R(G) \times R(H) = I^2$. Falls umgekehrt C eine beliebige Copulafunktion ist und G und H Verteilungsfunktionen sind, ist umgekehrt die in (5.4) definierte Funktion F eine gemeinsame Verteilungsfunktion mit Randverteilungen G und H .

Eine gemeinsame Verteilung lässt sich somit in die univariaten Randverteilungen und in die durch eine Copulafunktion C beschriebene Zusammenhangsstruktur separieren. Weiter besagt der Satz, dass mit Hilfe einer beliebigen Copulafunktion beliebige Randverteilungen zu einer gemeinsamen Verteilung verbunden werden können. Für den Beweis des Satzes von Sklar sei auf NELSEN [122], S. 15 ff., verwiesen.

Definition 5.2 Eine bivariate Copulafunktion die den Werten der univariaten Verteilungen G und H zweier Zufallsvariablen X und Y gemäss (5.4) den entsprechenden Wert deren gemeinsamen Verteilung F zuordnet, heisst *zu X und Y gehörige Copulafunktion*. Diese wird mit C_{XY} bezeichnet, wenn die Identifizierung mit den Zufallsvariablen X und Y für das Verständnis von Vorteil ist.

Gleichung (5.4) zeigt eine gemeinsame Verteilungsfunktion ausgedrückt durch eine Copula und zwei univariate Verteilungsfunktionen. Durch Umformung dieser Gleichung lässt sich ein Ausdruck für eine Copula bestehend aus einer gemeinsamen Verteilungsfunktion und den „Inversen“ der beiden Randverteilungen finden. Das Problem in diesem Zusammenhang ist, dass die Inverse einer Randverteilungsfunktion im üblichen Sinn nicht existiert, falls diese Randverteilung nicht stetig oder nicht streng monoton wachsend ist. Aus diesem Grund wird zunächst die Quasi-Inverse einer Verteilungsfunktion definiert.

Definition 5.3 Sei G eine Verteilungsfunktion. Eine *Quasi-Inverse* von G ist eine reellwertige Funktion $G^{(-1)}$ mit Definitionsbereich I , so dass gilt:

$$G(G^{(-1)}(u)) = u, \quad \text{für alle } u \in R(G),$$

und

$$G^{(-1)}(u) = \inf\{x | G(x) \geq u\} = \sup\{x | G(x) \leq u\}, \quad \text{sonst.}$$

Allgemein existieren demnach mehrere Quasi-Inverse. Lediglich wenn G stetig und streng monoton wachsend ist, existiert eine einzige Quasi-Inverse, nämlich die gewöhnliche, üblicherweise mit G^{-1} bezeichnete Inverse.

Ein Beispiel soll Definition 5.3 verdeutlichen. Gegeben sei die im linken Teil der Abbildung 5.1 abgetragene Verteilungsfunktion

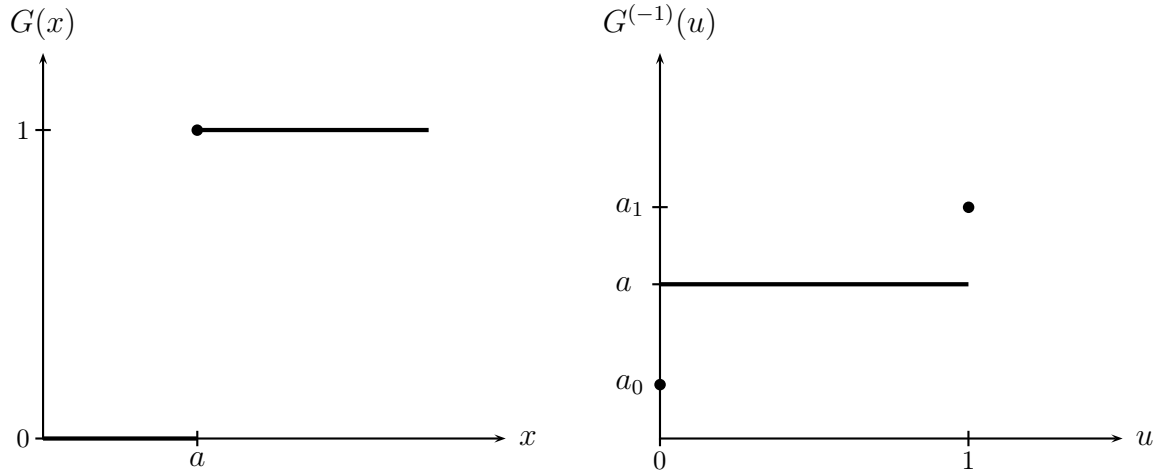
$$G(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, a), \\ 1, & x \in [a, \infty), \end{cases}$$

mit $a \in \mathbb{R}$. Gemäss Definition 5.3 ist eine Quasi-Inverse von G gegeben mit

$$G^{(-1)}(u) = \begin{cases} a_0, & u = 0, \\ a, & u \in (0, 1), \\ a_1, & u = 1, \end{cases}$$

wobei $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ so zu wählen sind, dass $a_0 < a \leq a_1$. Eine mögliche Quasi-Inverse von G ist im rechten Teil der Abbildung 5.1 dargestellt.

Mit Hilfe von Quasi-Inversen von Verteilungsfunktionen und der Zusatzbedingung, dass die univariaten Verteilungen G und H stetig sind, kann folgendes Korollar zu Satz 5.1 formuliert werden.

Abbildung 5.1: Verteilungsfunktion G und eine Quasi-Inverse von G .

Korollar 5.1 Sei F eine gemeinsame Verteilungsfunktion mit stetigen Randverteilungen G und H . Sei weiter C eine Copulafunktion und seien $G^{(-1)}$ und $H^{(-1)}$ Quasi-Inverse von G und H . Dann gilt für alle $(u, v) \in I^2$

$$C(u, v) = F\left(G^{(-1)}(u), H^{(-1)}(v)\right). \quad (5.5)$$

Dieses Resultat liefert offensichtlich eine Methode zur Konstruktion einer bivariaten Copula ausgehend von einer bivariaten Verteilungsfunktion.

5.3 Eigenschaften von Copulafunktionen

In der Folge sollen die wesentlichen Eigenschaften von bivariaten Copulafunktionen dargestellt werden. In NELSEN [122], S. 7 ff., wird der nachfolgende Satz bewiesen:

Satz 5.2 Jede bivariate Copulafunktion ist stetig.

Basierend auf einer geeigneten Erweiterung des Definitionsbereichs einer Copulafunktion C von I^2 auf \mathbb{R}^2 kann gezeigt werden, dass jede bivariate Copulafunktion die Eigenschaften einer zweidimensionalen Verteilungsfunktion aufweist.

Satz 5.3 Sei C eine zu den Zufallsvariablen X und Y gehörige Copulafunktion mit Definitionsbereich I^2 . Dann kann diese Copulafunktion in eine gemeinsame Verteilungsfunktion mit auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilten Randverteilungen fortgesetzt werden.

Beweis Als Fortsetzung von C in den Definitionsbereich \mathbb{R}^2 kann etwa die Funktion

$$F_C(x, y) = C(J(x), J(y)) \quad (5.6)$$

angesetzt werden. Dabei entspricht

$$J(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ z, & z \in I, \\ 1, & z > 1, \end{cases} \quad (5.7)$$

gerade der Verteilungsfunktion einer auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen. Mit Hilfe von (5.3a) und (5.3b) kann F_C geschrieben werden als

$$F_C(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ oder } y < 0, \\ C(x, y), & (x, y) \in I^2, \\ x, & x \in I, y > 1, \\ y, & x > 1, y \in I, \\ 1, & x > 1 \text{ und } y > 1. \end{cases} \quad (5.8)$$

Es bleibt zu zeigen, dass F_C tatsächlich eine Verteilungsfunktion ist. Dies folgt direkt aus (5.6) und dem Satz von Sklar. \square

Wird im Folgenden eine Copulafunktion als Verteilungsfunktion bezeichnet und behandelt, dann ist damit genauer immer die Fortsetzung gemäss (5.6) gemeint. Wird etwa von der Dichtefunktion einer Copula gesprochen, so ist die zu der entsprechenden Verteilungsfunktion gehörende Dichtefunktion gemeint. So kann die Dichtefunktion der zu zwei stetigen Zufallsvariablen X und Y gehörigen Copulafunktion $C(u, v)$ als

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} \quad (5.9)$$

geschrieben werden.

Mit der Produkt-Copula (5.2) wurde bereits die für unabhängige Zufallsvariablen charakteristische Copula präsentiert. Nachfolgender Satz liefert eine untere und eine obere Schranke für den Wertebereich bivariater Copulas und gleichzeitig zwei weitere wichtige Copulafunktionen.

Satz 5.4 *Sei C eine bivariate Copulafunktion. Dann gilt für alle $(u, v) \in I^2$*

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v). \quad (5.10)$$

Die Grenzen in (5.10) sind dabei selbst bivariate Copulafunktionen.

Für den Beweis sei auf NELSEN [122], S. 8 f., verwiesen. Die Grenzen in (5.10) seien mit

$$C^-(u, v) = \max(u + v - 1, 0) \quad (5.11a)$$

und

$$C^+(u, v) = \min(u, v) \quad (5.11b)$$

bezeichnet. Nach ihren Entdeckern heissen die Copulafunktionen C^- und C^+ *Fréchet-Hoeffding-Unter-* und *Fréchet-Hoeffding-Obergrenze*. Die Art des Zusammenhangs zweier Zufallsvariablen X und Y mit zugehöriger Copulafunktion C^- respektive C^+ wird in Abschnitt 6.1 ausgeführt.

Die drei Copulafunktionen C^- , C^+ und C^\perp sollen im Folgenden graphisch veranschaulicht werden. Nachfolgende Abbildung 5.2 zeigt dreidimensionale Graphen von C^- , C^\perp und C^+ . Laut Satz 5.4 bilden C^- und C^+ Unter- und Obergrenze, zwischen denen sich jede mögliche bivariate Copulafunktion befindet. Die im unteren Teil von Abbildung 5.2 gezeichnete Produkt-Copula C^\perp liegt augenscheinlich zwischen diesen Grenzen. Abbildung 5.3 zeigt weiter die Konturdiagramme der Copulas C^- , C^\perp und C^+ .

Eine weitere wichtige Eigenschaft einer zu den Zufallsvariablen X und Y gehörigen Copulafunktion C_{XY} ist die Invarianz unter streng monoton wachsenden Transformationen der entsprechenden Zufallsvariablen.

Satz 5.5 *Seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen mit zugehöriger Copulafunktion C_{XY} . Seien weiter T und S zwei auf $R(X)$ bzw. $R(Y)$ streng monoton wachsende Funktionen. Dann gilt*

$$C_{T(X)S(Y)} = C_{XY}.$$

Die beiden Zufallsvariablen X und Y verfügen somit über die gleiche Copulafunktion wie die beiden transformierten Zufallsvariablen $T(X)$ und $S(Y)$. Der Beweis findet sich bei SCHWEIZER und WOLFF [148], S. 881 ff., oder NELSEN [122], S. 22.

Die Relevanz dieses Resultats soll kurz aufgezeigt werden, indem ein in Abschnitt 4.2 besprochenes Beispiel aufgegriffen wird. Es interessiert der Zusammenhang der Renditen zweier Finanztitel, die als Zufallsvariablen betrachtet werden. In Abschnitt 4.2 wurde ausgeführt, dass bei Verwendung der Korrelation als Zusammenhangsmass bei einem Übergang von einfachen Renditen zu Log-Renditen, die interessierende Korrelation neu geschätzt werden muss, da diese unter der benötigten nichtlinearen Transformation der Form $r_t = \ln(R_t + 1)$ nicht invariant ist. Wird im Gegensatz dazu eine Copulafunktion zur Zusammenhangsmodellierung der beiden Renditen eingesetzt, so ändern sich durch einen entsprechenden Wechsel der Renditedefinition zwar die beiden betroffenen Randverteilungen, nicht aber die zugehörige Copulafunktion, da diese wie oben beschrieben unter einer derartigen Transformation der Zufallsvariablen invariant ist.

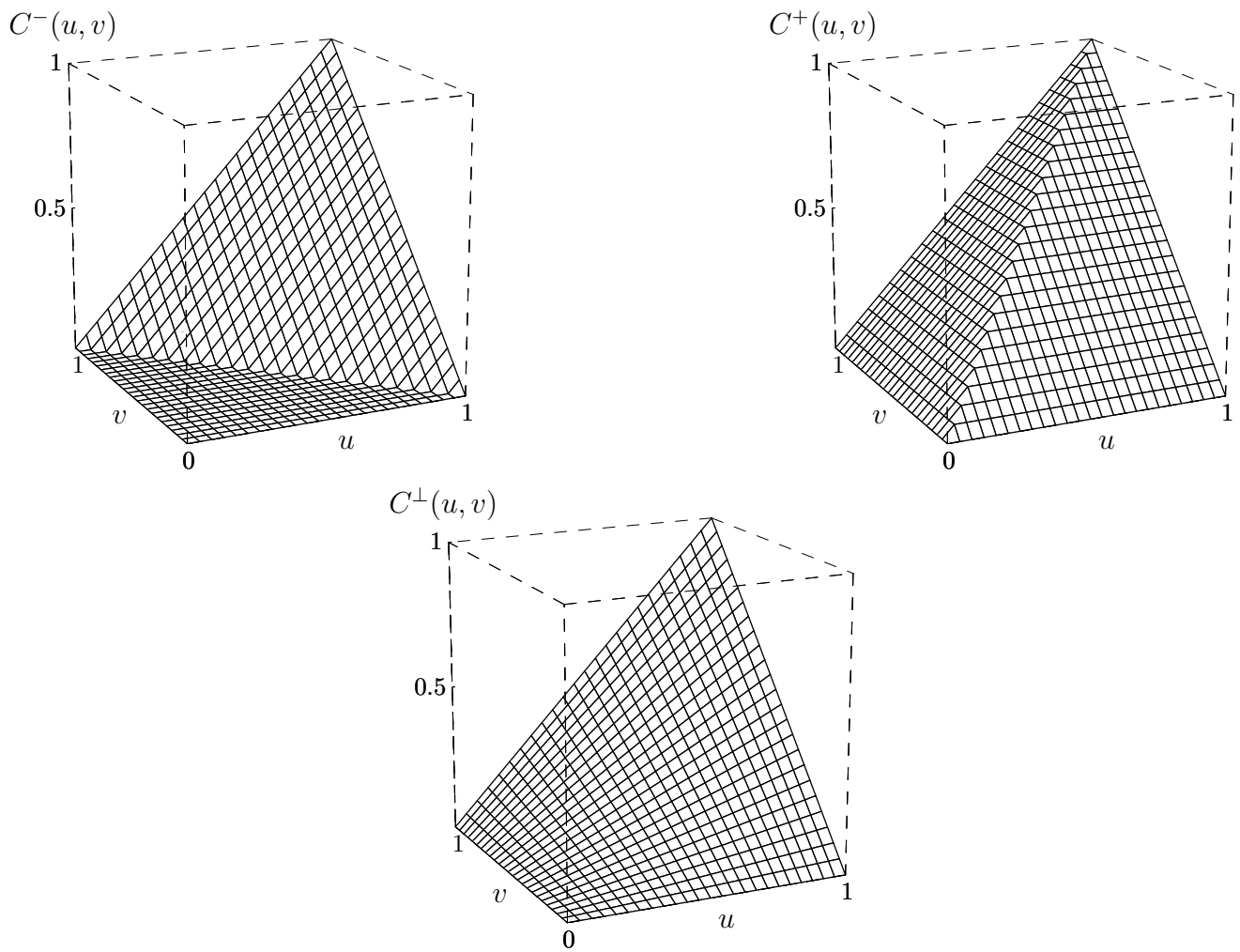


Abbildung 5.2: Dreidimensionale Graphen der Copulas C^- , C^\perp und C^+ .

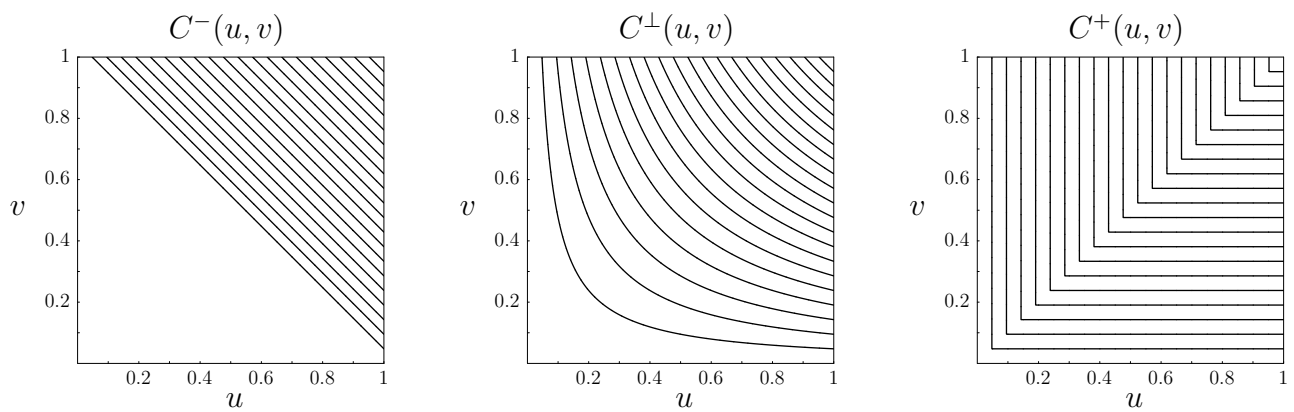


Abbildung 5.3: Konturdiagramme der Copulas C^- , C^\perp und C^+ .

5.4 Multivariate Copulafunktionen

Im Folgenden werden die Resultate der vorhergehenden Abschnitte dieses Kapitels vom bivariaten auf den multivariaten Fall ausgeweitet. Dazu betrachtet man N Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots, X_N mit Verteilungsfunktionen F_1, F_2, \dots, F_N und gemeinsamer Verteilungsfunktion F . Sind die Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots, X_N vollständig unabhängig, gilt bekanntlich

$$F(x_1, x_2, \dots, x_N) = F_1(x_1)F_2(x_2) \cdot \dots \cdot F_N(x_N), \quad \forall x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}. \quad (5.12)$$

Mit Hilfe der *N-dimensionalen Produkt-Copula*

$$C_N^\perp(\mathbf{u}) = u_1 u_2 \cdot \dots \cdot u_N, \quad \forall u_1, \dots, u_N \in I, \quad (5.13)$$

kann (5.12) geschrieben werden als

$$F(x_1, x_2, \dots, x_N) = C_N^\perp(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_N(x_N)).$$

Allgemein können multivariate Copulafunktionen wie folgt definiert werden (vgl. NELSEN [122], S. 40):

Definition 5.4 Eine Funktion

$$C : \begin{cases} I^N & \longrightarrow I \\ (u_1, u_2, \dots, u_N) & \longmapsto C(u_1, u_2, \dots, u_N) \end{cases}$$

heisst *multivariate Copulafunktion* oder kurz *N-Copula*, falls sie folgende Eigenschaften erfüllt:

1. Für alle $\mathbf{u} \in I^N$ gilt

$$C(\mathbf{u}) = 0, \quad \text{falls mindestens ein Element von } \mathbf{u} \text{ gleich 0 ist,} \quad (5.14a)$$

sowie

$$C(\mathbf{u}) = u_k, \quad \text{falls bis auf } u_k \text{ alle Elemente von } \mathbf{u} \text{ gleich 1 sind.} \quad (5.14b)$$

2. Für alle $\mathbf{u} \in I^N$ und $\varepsilon_n \geq 0$ ($n = 1, \dots, N$) gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned}
& C(u_1 + \varepsilon_1, u_2 + \varepsilon_2, \dots, u_N + \varepsilon_N) \\
& - \sum_{n=1}^N C(u_1 + \varepsilon_1, \dots, u_{n-1} + \varepsilon_{n-1}, u_n, u_{n+1} + \varepsilon_{n+1}, \dots, u_N + \varepsilon_N) \\
& + \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ n < m}}^N C(u_1 + \varepsilon_1, \dots, u_{n-1} + \varepsilon_{n-1}, u_n, u_{n+1} + \varepsilon_{n+1}, \dots, \\
& \quad u_{m-1} + \varepsilon_{m-1}, u_m, u_{m+1} + \varepsilon_{m+1}, \dots, u_N + \varepsilon_N) - + \dots \\
& + (-1)^N C(u_1, u_2, \dots, u_N) \geq 0
\end{aligned} \tag{5.14c}$$

Wie bereits im zweidimensionalen Fall stellt sich nun die Frage, ob neben der Produkt-Copula weitere Copulafunktionen existieren, die als Bindeglied zwischen einer multivariaten Verteilung und deren univariaten Randverteilungen auftreten können und weiter die Modellierung von Abhängigkeitsstrukturen zwischen Zufallsvariablen ermöglichen. Die Antwort auf diese Frage liefert der Satz von Sklar in N Dimensionen.

Satz 5.6 (Satz von Sklar in N Dimensionen) *Seien X_1, X_2, \dots, X_N Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen F_1, F_2, \dots, F_N und gemeinsamer Verteilungsfunktion F . Dann existiert eine N -Copula C , so dass für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_N) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_N(x_N)) \tag{5.15}$$

gilt. Sind alle F_1, F_2, \dots, F_N stetig, so ist C eindeutig; sonst ist C eindeutig bestimmt auf $R(F_1) \times R(F_2) \times \dots \times R(F_N) = I^N$. Falls umgekehrt C eine beliebige N -Copula ist und F_1, F_2, \dots, F_N Verteilungsfunktionen sind, ist umgekehrt die in (5.15) definierte Funktion F eine N -dimensionale Verteilungsfunktion mit Randverteilungen F_1, F_2, \dots, F_N .

Eine N -dimensionale Verteilung lässt sich somit wie eine zweidimensionale in die univariaten Randverteilungen und in die Copulafunktion separieren. Weiter können mit Hilfe einer multivariaten Copulafunktion beliebige Randverteilungen zu einer gemeinsamen Verteilung verbunden werden.

Definition 5.5 Eine multivariate Copulafunktion die den Werten der univariaten Verteilungen F_1, F_2, \dots, F_N der Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots, X_N gemäss (5.15) den entsprechenden Wert deren gemeinsamen Verteilung F zuordnet, heisst zu X_1, X_2, \dots, X_N gehörige Copulafunktion. Diese wird mit $C_{X_1 X_2 \dots X_N}$ bezeichnet, wenn die Identifizierung mit den Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots, X_N für das Verständnis von Vorteil ist.

Mit der Definition der Quasi-Inversen einer Verteilungsfunktion kann auch eine multivariate Erweiterung des Korollars 5.1 zum Satz von Sklar formuliert werden.

Korollar 5.2 *Sei F eine N -dimensionale Verteilungsfunktion mit stetigen Randverteilungen F_1, F_2, \dots, F_N . Sei weiter C eine N -Copula und seien $F_1^{(-1)}, F_2^{(-1)}, \dots, F_N^{(-1)}$ Quasi-Inverse von F_1, F_2, \dots, F_N . Dann gilt für alle $\mathbf{u} \in I^N$*

$$C(u_1, u_2, \dots, u_N) = F\left(F_1^{(-1)}(u_1), F_2^{(-1)}(u_2), \dots, F_N^{(-1)}(u_N)\right). \quad (5.16)$$

Dieses Resultat liefert offensichtlich eine Methode zur Konstruktion einer multivariaten Copula ausgehend von einer multivariaten Verteilungsfunktion.

Analog zum zweidimensionalen Fall kann gezeigt werden, dass jede multivariate Copulafunktion stetig ist (vgl. NELSEN [122], S. 39 f.) und in eine multivariate Verteilungsfunktion mit auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilten Randverteilungen fortgesetzt werden kann. Wird nachfolgend eine N -Copula als multivariate Verteilungsfunktion bezeichnet und behandelt, dann ist damit genauer immer die Fortsetzung

$$F_C(x_1, x_2, \dots, x_N) = C(J(x_1), J(x_2), \dots, J(x_N)) \quad (5.17)$$

mit

$$J(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ z, & z \in I, \\ 1, & z > 1, \end{cases} \quad (5.7)$$

gemeint. Wird etwa von der Dichtefunktion einer N -Copula gesprochen, so ist die zu der entsprechenden multivariaten Verteilungsfunktion gehörende Dichtefunktion gemeint. So kann die Dichtefunktion der zu den stetigen Zufallsvariablen X_1, \dots, X_N gehörigen Copulafunktion $C(u_1, \dots, u_N)$ als

$$c(u_1, \dots, u_N) = \frac{\partial^N C(u_1, \dots, u_N)}{\partial u_1 \dots \partial u_N} \quad (5.18)$$

geschrieben werden.

Weiter kann gezeigt werden, dass jede k -dimensionale Randverteilung einer N -dimensionalen Copulafunktion C ($N \geq 3$) als Fortsetzung einer k -dimensionalen Copulafunktion betrachtet werden kann ($2 \leq k < N$) (vgl. NELSEN [122], S. 40).

Die N -dimensionalen Erweiterungen der zweidimensionalen Copulas C^- und C^+ werden mit C_N^- und C_N^+ bezeichnet und sind gegeben durch

$$C_N^-(\mathbf{u}) = \max(u_1 + u_2 + \dots + u_N - N + 1, 0) \quad (5.19a)$$

$$C_N^+(\mathbf{u}) = \min(u_1, u_2, \dots, u_N). \quad (5.19b)$$

Während die Funktion C_N^+ für alle $N \geq 2$ eine multivariate Copula ist, erfüllt die Funktion C_N^- die Bedingungen an eine N -dimensionale Copula für $N > 2$ nicht (vgl. NELSEN [122], S. 42). Dennoch gilt die für den bivariaten Fall besprochene Fréchet-Hoeffding-Ungleichung (5.10) auch in N Dimensionen:

Satz 5.7 *Sei C eine N -dimensionale Copulafunktion. Dann gilt für alle $\mathbf{u} \in I^N$*

$$C_N^-(\mathbf{u}) \leq C(\mathbf{u}) \leq C_N^+(\mathbf{u}). \quad (5.20)$$

Obwohl die Fréchet-Hoeffding-Untergrenze C_N^- für $N > 2$ selbst nie eine Copula ist, existiert, wie der folgende Satz zeigt, für jeden beliebigen, fest vorgegebenen Vektor $\mathbf{u} \in I^N$ ($N \geq 3$) eine N -Copula $C(\mathbf{u})$, die den gleichen Funktionswert wie die Funktion $C_N^-(\mathbf{u})$ aufweist. Dies wird jedoch in der Regel für jeden Vektor $\mathbf{u} \in I^N$ eine andere Copula sein.

Satz 5.8 *Für alle $N \geq 3$ und alle $\mathbf{u} \in I^N$ existiert eine N -Copula $C(\mathbf{u})$, so dass*

$$C(\mathbf{u}) = C_N^-(\mathbf{u}).$$

Der Beweis findet sich bei NELSEN [122], S. 42.

Die in Satz 5.5 beschriebene Invarianzeigenschaft von bivariaten Copulas von Zufallsvariablen unter streng monoton wachsenden Transformationen der entsprechenden Zufallsvariablen gilt auch im multivariaten Fall:

Satz 5.9 *Seien X_1, X_2, \dots, X_N stetige Zufallsvariablen mit zugehöriger Copulafunktion $C_{X_1 X_2 \dots X_N}$. Seien weiter T_1, T_2, \dots, T_N auf $R(X_1)$ bzw. $R(X_2) \dots R(X_N)$ streng monoton wachsende Funktionen. Dann gilt*

$$C_{T_1(X_1) T_2(X_2) \dots T_N(X_N)} = C_{X_1 X_2 \dots X_N}.$$

Die Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots, X_N verfügen somit über die gleiche Copulafunktion wie die transformierten Zufallsvariablen $T_1(X_1), T_2(X_2), \dots, T_N(X_N)$. Dieser Satz wird bei EMBRECHTS et al. [63], S. 5, bewiesen.

Kapitel 6

Copulabasierte Zusammenhangsmasse

In Abschnitt 3.3.2 wurden die Kovarianz und die Korrelation eingeführt und in Abschnitt 4.2 mögliche Probleme bei der Verwendung dieser Zusammenhangsmasse erläutert. In diesem Kapitel werden nun verschiedene alternative Zusammenhangsmasse dargestellt. Für alle diese Zusammenhangsmasse wird aufgezeigt, dass sie als Funktionale von Copulafunktionen betrachtet werden können, weshalb sie nachfolgend als copulabasierte Zusammenhangsmasse bezeichnet werden. Den Anfang bildet die in Abschnitt 4.2 bereits erwähnte perfekte Abhängigkeit. Im Anschluss werden zwei Konkordanzmasse, die Rangkorrelation von Kendall und die Rangkorrelation von Spearman, dargestellt, die speziell einige der genannten Schwächen der Korrelation überwinden. Diese beiden Zusammenhangsmasse sind überdies im Hinblick auf die im nachfolgenden Kapitel unter Abschnitt 7.1.4 präsentierte Schätzung von Copulafunktionen mittels copulabasierter Zusammenhangsmasse von besonderem Interesse. Den Abschluss bildet die Präsentation der so genannten Randabhängigkeit. Dieses Mass lässt Aussagen über den Zusammenhang von Extremwerten zu und ist somit für das Risikomanagement besonders interessant. Im ganzen Kapitel wird ausschliesslich der zweidimensionale Fall betrachtet.

6.1 Perfekte Abhängigkeit

Der Begriff der perfekten Abhängigkeit wurde in Abschnitt 4.2 bereits verwendet. An dieser Stelle soll nun die exakte Definition geliefert werden. Gemäss Satz 5.4 gilt für jede zweidimensionale Copulafunktion die Fréchet-Hoeffding-Ungleichung

$$C^-(u, v) \leq C(u, v) \leq C^+(u, v), \quad (6.1)$$

wobei C^- und C^+ selbst Copulas sind. Ist C^- die zu zwei Zufallsvariablen X und Y gehörige Copulafunktion, so lautet die gemeinsame Verteilung dieser beiden Zufallsvariablen $F(x, y) = \max(G(x) + H(y) - 1, 0)$; ist C^+ die zu X und Y gehörige Copulafunktion, so lautet deren gemeinsame Verteilung $F(x, y) = \min(G(x), H(y))$. Wird der Zusammenhang zweier Zufallsvariablen durch eine dieser beiden Copulafunktionen beschrieben, gelten zwischen den Zufallsvariablen die Beziehungen des nachfolgenden Satzes.

Satz 6.1 *Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen G und H sowie zugehöriger Copulafunktion C^- .*

- a) *Sind sowohl G als auch H stetige Funktionen, so existiert eine monoton fallende Funktion f , so dass*

$$Y \stackrel{\text{f.s.}}{=} f(X).$$

- b) *Sind G oder H unstetige Funktionen, so dass die zu X und Y gehörige Copulafunktion nicht eindeutig und C^- als mögliche Copulafunktion zu interpretieren ist, so existieren eine monoton wachsende Funktion g , eine monoton fallende Funktion h und eine reellwertige Zufallsvariable Z , so dass*

$$(X, Y)' \stackrel{\text{L}}{\sim} (g(Z), h(Z))'.$$

Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen G und H sowie zugehöriger Copulafunktion C^+ .

- a) *Sind sowohl G als auch H stetige Funktionen, so existiert eine monoton wachsende Funktion f , so dass*

$$Y \stackrel{\text{f.s.}}{=} f(X).$$

- b) *Sind G oder H unstetige Funktionen, so dass die zu X und Y gehörige Copulafunktion nicht eindeutig und C^+ als mögliche Copulafunktion zu interpretieren ist, so existieren zwei monoton wachsende Funktionen g und h und eine reellwertige Zufallsvariable Z , so dass*

$$(X, Y)' \stackrel{\text{L}}{\sim} (g(Z), h(Z))'.$$

Die Umkehrung oben stehender Resultate gilt ebenso.

Der Beweis findet sich bei EMBRECHTS et al. [64], S. 14. Satz 6.1 motiviert die nachfolgende Definition.

Definition 6.1 Zwei Zufallsvariablen X und Y werden als *perfekt positiv abhängig* oder *komonoton* bezeichnet, wenn C^+ die zu X und Y gehörige Copulafunktion ist. Zwei Zufallsvariablen X und Y werden als *perfekt negativ abhängig* oder *kontramomonoton* bezeichnet, wenn C^- die zu X und Y gehörige Copulafunktion ist.¹

6.2 Konkordanz

Das Konzept der Konkordanz bildet die Basis der beiden in diesem Abschnitt präsentierten Zusammenhangsmasse. Die Definition der Konkordanz lautet dabei wie folgt (vgl. ROHATGI [134], S. 567):

Definition 6.2 Sei $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ eine Zufallsstichprobe eines Zufallsvektors (X, Y) . Zwei beliebige Paare (X_i, Y_i) und (X_j, Y_j) dieser Zufallsstichprobe heissen

- *perfekt konkordant*, wenn

$$[(X_i < X_j) \wedge (Y_i < Y_j)] \quad \vee \quad [(X_i > X_j) \wedge (Y_i > Y_j)],$$

- *perfekt diskordant*, wenn

$$[(X_i < X_j) \wedge (Y_i > Y_j)] \quad \vee \quad [(X_i > X_j) \wedge (Y_i < Y_j)].$$

Zwei Paare (X_i, Y_i) und (X_j, Y_j) ($i, j = 1, \dots, n$) einer bivariaten Zufallsstichprobe heissen also genau dann perfekt konkordant, wenn $(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) > 0$; sie heissen genau dann perfekt diskordant, wenn $(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) < 0$.

Mit der Kovarianz und der Korrelation wurden bereits zwei Zusammenhangsmasse eingeführt, die auf dem Konzept der Konkordanz aufbauen. Zwei weitere auf diesem Konzept basierende Zusammenhangsmasse werden in der Folge ausführlich besprochen. Dies sind die Rangkorrelation von Kendall und die Rangkorrelation von Spearman. Es wird aufgezeigt, dass die beiden letztgenannten Zusammenhangsmasse als Funktionale von Copulafunktionen betrachtet werden können. Für weitere Konkordanzmasse sei auf NELSEN [122], S. 146 ff., verwiesen.

¹Der Begriff „comonotonic“ wird bei YAARI [164] eingeführt. EMBRECHTS et al. greifen diesen Term in [64] auf und führen weiter den Begriff „countermonotonic“ ein.

6.2.1 Rangkorrelation von Kendall

Man betrachte eine Zufallsstichprobe $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ eines bivariaten Zufallsvektors (X, Y) . Es bezeichne π_k respektive π_d die Wahrscheinlichkeit, dass zwei beliebige Paare (X_i, Y_i) und (X_j, Y_j) perfekt konkordant beziehungsweise perfekt diskordant sind. Damit gilt

$$\pi_k = P[(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) > 0]$$

und

$$\pi_d = P[(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) < 0].$$

Auf der Grundlage dieser beiden Wahrscheinlichkeiten kann die Rangkorrelation von Kendall wie folgt definiert werden (vgl. ROHATGI [134], S. 567):

Definition 6.3 Seien X und Y zwei Zufallsvariablen. Das durch

$$\tau(X, Y) = \pi_k - \pi_d \tag{6.2}$$

definierte Zusammenhangsmass zwischen X und Y heisst *Rangkorrelation von Kendall* oder *Kendalls τ* .

Wie eingangs erwähnt wurde, können sämtliche in diesem Abschnitt dargestellten Zusammenhangsmasse als Funktionale von Copulafunktionen geschrieben werden. Im Falle der Rangkorrelation von Kendall kann dies für stetige Zufallsvariablen mit Hilfe des Ausdrucks der Dichtefunktion der zu zwei stetigen Zufallsvariablen X und Y gehörigen Copulafunktion $C(u, v)$ realisiert werden:

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}. \tag{5.9}$$

Satz 6.2 Seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen G und H sowie zugehöriger Copulafunktion C . Sei weiter $U = G(X)$ und $V = H(Y)$. Dann kann Kendalls τ für (X, Y) geschrieben werden als

$$\tau(X, Y) = \tau_{XY} = \tau_C = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) c(u, v) du dv - 1. \tag{6.3a}$$

Für den Beweis sei auf NELSEN [122], S. 127 f., verwiesen. Man beachte, dass das Doppelintegral in (6.3a) als Erwartungswert der Funktion $C(U, V)$ der auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen U und V mit gemeinsamer Verteilungsfunktion C interpretiert werden kann:

$$\tau_C = 4 E(C(U, V)) - 1. \tag{6.3b}$$

Satz 6.2 soll anhand eines Beispiels illustriert werden. Man betrachtet zwei unabhängige stetige Zufallsvariablen X und Y , deren zugehörige Copulafunktion folglich die Produkt-Copula $C^\perp(u, v) = uv$ ist und bestimmt gemäss (5.9) zunächst $c^\perp(u, v)$:

$$c^\perp(u, v) = \frac{\partial^2 C^\perp(u, v)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 uv}{\partial u \partial v} = 1.$$

Setzt man dies in Gleichung (6.3a) ein, erhält man für Kendalls τ

$$\begin{aligned} \tau_{C^\perp} &= 4 \int_0^1 \int_0^1 C^\perp(u, v) c^\perp(u, v) du dv - 1 \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^1 uv du dv - 1 = 4 \cdot 0.5 \cdot 0.5 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis erstaunt nicht weiter. Es entspricht dem allgemeinen Resultat, dass $\tau(X, Y) = 0$ genau dann gilt, wenn X und Y unabhängig sind (vgl. ROHATGI [134], S. 568).

Auf der Basis von Realisierungen $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ eines Zufallsvektors (X, Y) wird nachfolgend der empirische Rangkorrelationskoeffizient von Kendall hergeleitet. Aus besagten Realisierungen können $\binom{n}{2}$ ungeordnete Paare $((x_i, y_i), (x_j, y_j))$ gebildet werden. Es wird nun die Anzahl n_k der Paare ermittelt, für die $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ gilt. Weiter werden diejenigen Paare gezählt, für die $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$ gilt. Diese Anzahl wird mit n_d bezeichnet. Der *empirische Rangkorrelationskoeffizient von Kendall* ist nun definiert als

$$t(x, y) = t = \frac{n_k - n_d}{\binom{n}{2}} = \frac{2(n_k - n_d)}{n(n-1)}. \quad (6.4)$$

Für die praktische Bestimmung von n_k und n_d wird nachfolgend ein Vorgehen beschrieben (vgl. RINNE [132], S. 97), das deutlich macht, weshalb bei $t(x, y)$ von *Rangkorrelationskoeffizient* gesprochen wird. Hierfür muss zunächst der Begriff des Rangs eingeführt werden. Seien z_1, z_2, \dots, z_n Realisierungen einer Zufallsvariablen Z . Diese ordnet man, beim kleinsten Wert beginnend, der Grösse nach an. Die geordnete Reihe bezeichnet man mit $z_{[1]}, z_{[2]}, \dots, z_{[n]}$. Der *Rang* von z_i ist definiert als (vgl. HARTUNG et al. [82], S. 79)

$$\text{Rg}(z_i) = \text{Rg}(z_{[\nu]}) = \nu, \quad \text{falls } z_i = z_{[\nu]}.$$

Stimmen Realisierungen überein – man spricht hierbei von Bindungen – so ordnet man sämtlichen identischen Realisierungen als Rang das arithmetische Mittel der Ränge zu, die für diese Realisierungen zur Verfügung stehen. Solche Ränge werden *Durchschnittsränge* genannt.

Für die Berechnung von n_k und n_d sind den Realisierungen von X und Y zuerst Ränge zuzuordnen. Anschliessend ordnet man die Realisierungen (x_i, y_i) ($i = 1, \dots, n$) so, dass die Ränge der Realisierungen von X aufsteigend sortiert sind. Beim Auftreten von Bindungen ist die Anordnung innerhalb einer Bindung beliebig. In der resultierenden Anordnung bestimmt man für $i = 1, \dots, n$ die Anzahl p_i der Ränge $Rg(y_j)$, die grösser als $Rg(y_i)$ sind und in der Anordnung hinter $Rg(y_i)$ stehen:

$$p_i = \#\{j \in \{1, \dots, n\} \mid Rg(y_i) < Rg(y_j) \wedge Rg(x_i) < Rg(x_j)\}. \quad (6.5)$$

Der Wert n_k berechnet sich als

$$n_k = \sum_{i=1}^n p_i. \quad (6.6)$$

Weiter ermittelt man für $i = 1, \dots, n$ die Anzahl q_i der Ränge $Rg(y_j)$, die kleiner als $Rg(y_i)$ sind und in der Anordnung hinter $Rg(y_i)$ stehen:

$$q_i = \#\{j \in \{1, \dots, n\} \mid Rg(y_i) > Rg(y_j) \wedge Rg(x_i) < Rg(x_j)\}. \quad (6.7)$$

Der Wert n_d bestimmt sich als

$$n_d = \sum_{i=1}^n q_i. \quad (6.8)$$

Zur Bestimmung von $t(x, y)$ können die so ermittelten Werte n_k und n_d im Anschluss in (6.4) eingesetzt werden.

Dieses Vorgehen soll anhand eines Beispiels illustriert werden. Es soll der empirische Rangkorrelationskoeffizient von Kendall von zwei im *Swiss Market Index* (SMI) gelisteten Titeln, der Namenaktie der *CS Group* (CSGN) und der Namenaktie der *Swiss Re* (RUKN), ermittelt werden. In der oberen Hälfte von Tabelle 6.1 sind die mit x_i und y_i bezeichneten Tagesschlusskurse der beiden Aktien zwischen dem 1. und dem 10. Oktober 2001 (Quelle: Website der *Swiss Exchange*: <http://www.swx.com/>), sowie die mit $Rg(x_i)$ und $Rg(y_i)$ bezeichneten Ränge der jeweiligen Tagesschlusskurse angegeben. Es fällt auf, dass sowohl bei den x -Werten als auch bei den y -Werten Bindungen vorliegen. Die untere Hälfte von Tabelle 6.1 zeigt eine mögliche aus oben beschriebener Ordnungsprozedur resultierende Anordnung der Rangpaare. Da $Rg(x_4) = Rg(x_5)$ gilt, könnten die beiden fett gedruckten Rangpaare ebenfalls vertauscht werden. Für die gegebene Anordnung sind weiter die Werte von p_i und q_i sowie von n_k und n_d aufgeführt. Mit letzteren kann der empirische Rangkorrelationskoeffizient von Kendall gemäss Gleichung (6.4) bestimmt werden:

$$t(x, y) = \frac{2(n_k - n_d)}{n(n - 1)} = \frac{2(6 - 20)}{8 \cdot 7} = -0.5.$$

Datum	i	x_i (CSGN)	y_i (RUKN)	$Rg(x_i)$	$Rg(y_i)$
01.10.01	1	54.10	157.50	4	1
02.10.01	2	54.50	158.50	8	2
03.10.01	3	51.60	168.00	1	8
04.10.01	4	54.25	165.75	5.5	6
05.10.01	5	54.25	160.00	5.5	3.5
08.10.01	6	54.45	160.00	7	3.5
09.10.01	7	53.10	163.25	2	5
10.10.01	8	53.20	166.25	3	7
Datum	i	$Rg(x_i)$	$Rg(y_i)$	p_i	q_i
03.10.01	3	1	8	0	7
09.10.01	7	2	5	2	4
10.10.01	8	3	7	0	5
01.10.01	1	4	1	4	0
04.10.01	4	5.5	3.5	0	1
05.10.01	5	5.5	6	0	2
08.10.01	6	7	3.5	0	1
02.10.01	2	8	2	0	0
Summe				6	20

Tabelle 6.1: Bestimmung des empirischen Rangkorrelationskoeffizienten von Kendall für die Tagesschlusskurse der Namenaktien der *CS Group* und der *Swiss Re*.

6.2.2 Rangkorrelation von Spearman

Ein weiteres Zusammenhangsmass, das auf dem Konzept der Konkordanz aufbaut, ist die Rangkorrelation von Spearman. Man betrachte eine Zufallsstichprobe $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ eines bivariaten Zufallsvektors (X, Y) . Es bezeichne ϖ_k respektive ϖ_d die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Paare (X_i, Y_i) und (X_j, Y_k) perfekt konkordant beziehungsweise perfekt diskordant sind. Damit gilt

$$\varpi_k = P[(X_i - X_j)(Y_i - Y_k) > 0]$$

und

$$\varpi_d = P[(X_i - X_j)(Y_i - Y_k) < 0].$$

Auf der Grundlage dieser beiden Wahrscheinlichkeiten kann die Rangkorrelation von Spearman wie folgt definiert werden (vgl. NELSEN [122], S. 135):

Definition 6.4 Seien X und Y zwei Zufallsvariablen. Das durch

$$\varrho(X, Y) = 3(\varpi_k - \varpi_d). \quad (6.9)$$

definierte Zusammenhangsmass zwischen X und Y heisst *Rangkorrelation von Spearman* oder *Spearman's ϱ* .

Mit Hilfe der Dichtefunktion $c(u, v)$ gemäss (5.9) der zu zwei stetigen Zufallsvariablen X und Y gehörigen Copulafunktion $C(u, v)$ kann Spearmans ϱ wie im folgenden Satz angegeben für stetige Zufallsvariablen als Funktional einer Copulafunktion geschrieben werden.

Satz 6.3 *Seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen G und H sowie zugehöriger Copulafunktion C . Sei weiter $U = G(X)$ und $V = H(Y)$. Dann kann Spearmans ϱ für (X, Y) geschrieben werden als*

$$\varrho(X, Y) = \varrho_{XY} = \varrho_C = 12 \int_0^1 \int_0^1 uv \, c(u, v) \, du \, dv - 3 \quad (6.10a)$$

Die Herleitung wird bei NELSEN [122], S. 127 ff., präsentiert.

Satz 6.3 soll wiederum anhand eines Beispiels illustriert werden. Man betrachtet erneut zwei unabhängige stetige Zufallsvariablen X und Y , deren zugehörige Copulafunktion folglich die Produkt-Copula $C^\perp(u, v) = uv$ ist mit $c^\perp(u, v) = 1$. Setzt man dies in Gleichung (6.10a) ein, erhält man für Spearmans ϱ

$$\begin{aligned} \varrho_{C^\perp} &= 12 \int_0^1 \int_0^1 uv \, c^\perp(u, v) \, du \, dv - 3 \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 uv \, du \, dv - 3 = 12 \cdot 0.5 \cdot 0.5 - 3 = 0. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis erstaunt nicht weiter. Es entspricht dem allgemeinen Resultat, dass $\varrho(X, Y) = 0$ genau dann gilt, wenn X und Y unabhängig sind (vgl. ROHATGI [134], S. 571 f.).

Der Ausdruck (6.10a) kann weiter umgeformt werden. Dabei beachte man, dass das Doppelintegral in (6.10a) als Erwartungswert der Funktion UV der auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen U und V mit gemeinsamer Verteilungsfunktion C interpretiert werden kann. Berücksichtigt man weiter, dass auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen Erwartungswert $1/2$ und Varianz $1/12$ haben, kann (6.10a) neu geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \varrho_{XY} &= 12 \int_0^1 \int_0^1 uv \, c(u, v) \, du \, dv - 3 = 12 \, \mathbb{E}(UV) - 3 \\ &= \frac{\mathbb{E}(UV) - 1/4}{1/12} = \frac{\mathbb{E}(UV) - \mathbb{E}(U) \mathbb{E}(V)}{\sqrt{\text{Var}(U) \text{Var}(V)}} \\ &= \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{\text{Var}(U) \text{Var}(V)}} = \text{Corr}(U, V). \end{aligned} \quad (6.10b)$$

Spearman's ρ der Zufallsvariablen X und Y ist somit gleich der Korrelation der Zufallsvariablen U und V . Da Verteilungsfunktionen monoton wachsend sind, werden durch die Transformationen $U = G(X)$ und $V = H(Y)$ grösseren Realisierungen von X beziehungsweise Y grössere Werte von U beziehungsweise V zugeordnet. Damit können U und V als eine Art „Ränge“ von X und Y betrachtet werden.

Gleichung (6.10b) wird benutzt, um Spearman's ρ konkret zu schätzen. Seien (x_i, y_i) ($i = 1, \dots, n$) Realisierungen eines Zufallsvektors (X, Y) . Jeder einzelnen Beobachtung x_i und y_i werden „Ränge“ u_i und v_i zugeordnet mittels $u_i = \hat{G}(x_i)$ und $v_i = \hat{H}(y_i)$, wobei \hat{G} und \hat{H} empirische Verteilungsfunktionen bezeichnen. Der *empirische Rangkorrelationskoeffizient von Spearman* von x und y ist definiert als der Korrelationskoeffizient von Bravais-Pearson von u und v

$$r_{\text{SP}}(x, y) = r_{\text{SP}} = r(u, v). \quad (6.11a)$$

In diesem Abschnitt wurde der Begriff des Rangs bisher in Anführungszeichen gesetzt, da dessen Verwendung nicht der in Abschnitt 6.2.1 präsentierten Definition entspricht. Es kann gezeigt werden, dass der empirische Rangkorrelationskoeffizient von Spearman von x und y auch geschrieben werden kann als Korrelationskoeffizient von Bravais-Pearson von $\text{Rg}(x)$ und $\text{Rg}(y)$ (vgl. ROHATGI [134], S. 570 f.)

$$r_{\text{SP}}(x, y) = r_{\text{SP}} = r(\text{Rg}(x), \text{Rg}(y)). \quad (6.11b)$$

Dies ist die in der Literatur üblicherweise verwendete Form des empirischen Rangkorrelationskoeffizienten von Spearman (vgl. beispielsweise PIRIE [128]).

Um die Gleichheit von (6.11a) und (6.11b) exemplarisch zu verdeutlichen, wird der empirische Rangkorrelationskoeffizient von Spearman von zwei weiteren Titeln des SMI, der Namenaktie der *Swatch Group* (UHRN) und der Namenaktie der *Zurich Financial Services* (ZURN) ermittelt. In Tabelle 6.2 sind die mit x_i und y_i bezeichneten Tagesschlusskurse der beiden Aktien zwischen dem 1. und dem 10. Oktober 2001 aufgeführt (Quelle: Website der *Swiss Exchange*: <http://www.swx.com/>). Weiter sind die mit u_i und v_i bezeichneten Werte der empirischen Verteilungsfunktionen \hat{G} und \hat{H} und die mit $\text{Rg}(x_i)$ und $\text{Rg}(y_i)$ bezeichneten Ränge der jeweiligen Tagesschlusskurse gegeben. Auf Basis dieser Daten kann der empirische Rangkorrelationskoeffizient von Spearman sowohl gemäss (6.11a) als auch (6.11b) berechnet werden und man erhält

$$r_{\text{SP}}(x, y) = r(u, v) = r(\text{Rg}(x), \text{Rg}(y)) = 0.9524.$$

Man sieht, dass beide Varianten in der Tat den gleichen Schätzwert liefern.

Dies ist stets der Fall, wenn sowohl innerhalb der x -Werte als auch der y -Werte keine identischen Ausprägungen auftreten. Kommen hingegen Bindungen vor und

Datum	i	x_i (UHRN)	y_i (ZURN)	$u_i = \hat{G}(x_i)$	$v_i = \hat{H}(y_i)$	$\text{Rg}(x_i)$	$\text{Rg}(y_i)$
01.10.01	1	24.85	333.00	0.250	0.375	2	3
02.10.01	2	24.90	329.00	0.375	0.250	3	2
03.10.01	3	24.80	324.00	0.125	0.125	1	1
04.10.01	4	26.10	351.00	0.875	0.875	7	7
05.10.01	5	25.90	350.00	0.750	0.750	6	6
08.10.01	6	25.60	335.00	0.625	0.500	5	4
09.10.01	7	25.55	345.00	0.500	0.625	4	5
10.10.01	8	26.30	352.50	1.000	1.000	8	8

Tabelle 6.2: Bestimmung des empirischen Rangkorrelationskoeffizienten von Spearman für die Tagesschlusskurse der Namenaktien der *Swatch Group* und der *Zurich Financial Services*.

werden diesen Durchschnittsränge zugeordnet, unterscheiden sich im Allgemeinen die Schätzungen gemäss (6.11a) und (6.11b). Lediglich wenn Bindungen abweichend von obiger, allgemein üblicher Definition behandelt und sämtlichen identischen Werten als Rang der höchste für diese Werte zur Verfügung stehende Rang zugeordnet wird, sind die Schätzwerte gemäss (6.11a) und (6.11b) identisch. Solchermassen zugeordnete Ränge werden in der Folge mit Rg^* bezeichnet. Die Identität von (6.11a) und (6.11b) bei Verwendung dieser alternativen Rangdefinition ergibt sich daraus, dass eine empirische Verteilungsfunktion gemäss ihrer Definition den Anteil der Realisierungen in einer Stichprobe angibt, die kleiner oder gleich dem Argument der Funktion sind. Damit wird möglichen Bindungen genau wie bei Vergabe von Rängen Rg^* jeweils der höchstmögliche Wert zugeordnet.

Ein Beispiel soll dies ebenfalls verdeutlichen. Es wird der empirische Rangkorrelationskoeffizient von Spearman von den in Abschnitt 6.2.1 bereits verwendeten Tagesschlusskursen der Namenaktie der *CS Group* und der Namenaktie der *Swiss Re* bestimmt. In Tabelle 6.3 sind erneut die mit x_i und y_i bezeichneten Aktienkurse zwischen dem 1. und dem 10. Oktober 2001 aufgeführt. Weiter finden sich die mit u_i und v_i bezeichneten Werte der empirischen Verteilungsfunktionen \hat{G} und \hat{H} , die gemäss der klassischen Definition zugeordneten Ränge $\text{Rg}(x_i)$ und $\text{Rg}(y_i)$ und die gemäss alternativem Verfahren zugeordneten Ränge $\text{Rg}^*(x_i)$ und $\text{Rg}^*(y_i)$ der jeweiligen Tagesschlusskurse. Sowohl bei den x -Werten als auch bei den y -Werten liegen Bindungen vor, die in der Tabelle jeweils fett gedruckt sind. Auf der Grundlage dieser Daten kann der empirische Rangkorrelationskoeffizient von Spearman gemäss den verschiedenen Varianten bestimmt werden. Gleichung (6.11a) liefert den Wert

$$r(u, v) = -0.5768.$$

Datum	i	x_i (CSGN)	y_i (RUKN)	$u_i = \hat{G}(x_i)$	$v_i = \hat{H}(y_i)$
01.10.01	1	54.10	157.50	0.500	0.125
02.10.01	2	54.50	158.50	1.000	0.250
03.10.01	3	51.60	168.00	0.125	1.000
04.10.01	4	54.25	165.75	0.750	0.750
05.10.01	5	54.25	160.00	0.750	0.500
08.10.01	6	54.45	160.00	0.875	0.500
09.10.01	7	53.10	163.25	0.250	0.625
10.10.01	8	53.20	166.25	0.375	0.875
Datum	i	$\text{Rg}(x_i)$	$\text{Rg}(y_i)$	$\text{Rg}^*(x_i)$	$\text{Rg}^*(y_i)$
01.10.01	1	4	1	4	1
02.10.01	2	8	2	8	2
03.10.01	3	1	8	1	8
04.10.01	4	5.5	6	6	6
05.10.01	5	5.5	3.5	6	4
08.10.01	6	7	3.5	7	4
09.10.01	7	2	5	2	5
10.10.01	8	3	7	3	7

Tabelle 6.3: Bestimmung des empirischen Rangkorrelationskoeffizienten von Spearman für die Tagesschlusskurse der Namenaktien der *CS Group* und der *Swiss Re*.

Gleichung (6.11b) liefert unter Verwendung der klassischen Rangdefinition den Wert

$$r(\text{Rg}(x), \text{Rg}(y)) = -0.6325$$

und unter Verwendung der mit Rg^* bezeichneten Ränge den Wert

$$r(\text{Rg}^*(x), \text{Rg}^*(y)) = -0.5768.$$

Man sieht, dass (6.11a) und (6.11b) tatsächlich nur dann den gleichen Schätzwert liefern, wenn die mit Rg^* bezeichnete Rangdefinition verwendet wird.

6.2.3 Vergleich der Rangkorrelation von Kendall und Spearman mit der Korrelation

Die in Abschnitt 4.2 besprochenen Eigenschaften der Kovarianz und der Korrelation sollen im Lichte von Kendalls τ und Spearmans ϱ noch einmal betrachtet werden. In besagtem Abschnitt wurde festgehalten, dass die Korrelation unter streng monoton wachsenden *nichtlinearen* Transformationen *nicht* invariant ist. Am Beispiel der Korrelationsschätzung der Renditen zweier Finanztitel wurde ausgeführt, dass etwa aufgrund eines Übergangs vom Konzept der einfachen Rendite zum Konzept der Log-Rendite die Korrelation der Renditen neu bestimmt

werden muss. In diesem Kontext ist nachfolgender Satz von Bedeutung (vgl. NELSEN [122], S. 136, oder JOE [93], S. 32).

Satz 6.4 *Seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen. Seien weiter T und S zwei streng monoton wachsende Funktionen und bezeichne κ entweder Kendalls τ oder Spearmans ρ . Dann gilt*

$$\kappa_{T(X)S(Y)} = \kappa_{XY}.$$

Satz 6.4 besagt, dass Kendalls τ und Spearmans ρ invariant sind unter streng monoton wachsenden Transformationen der entsprechenden Zufallsvariablen. Wird demnach in obigem Beispiel der Zusammenhang der Renditen zweier Finanztitel mit einem dieser beiden Konkordanzmasse gemessen, so verändert ein Übergang von einfachen Renditen zu Log-Renditen diese Messung nicht; eine erneute Bestimmung des Zusammenhangs ist nicht notwendig.

In Abschnitt 4.2 wurde weiter ausgeführt, dass für zwei Zufallsvariablen mit gegebenen Randverteilungen nicht für jeden Korrelationswert zwischen -1 und 1 eine mit diesen Randverteilungen vereinbare gemeinsame Verteilung existiert. Vielmehr hängen die möglichen Werte der Korrelation von den Randverteilungen ab und liegen in einem abgeschlossenen Intervall $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$, das die Werte -1 und 1 nicht notwendigerweise einschliesst. Zudem wurde aufgezeigt, dass ein betragsmäßig kleiner Korrelationswert nicht in jedem Fall als schwacher Zusammenhang zweier Zufallsvariablen interpretiert werden kann; vielmehr kann die Korrelation auch bei perfekter Abhängigkeit der entsprechenden Zufallsvariablen beliebig klein werden. In diesem Zusammenhang ist folgender Satz von Interesse.

Satz 6.5 *Seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen mit zugehöriger Copulafunktion C und bezeichne κ entweder Kendalls τ oder Spearmans ρ . Dann gilt*

1. $-1 \leq \kappa \leq 1$,
2. $\kappa = 1$ genau dann, wenn $C = C^+$ ist,
3. $\kappa = -1$ genau dann, wenn $C = C^-$ ist.

Der Beweis findet sich bei EMBRECHTS et al. [64], S. 16 f. (vgl. auch JOE [93], S. 32). Satz 6.5 enthält zwei Aussagen. Erstens können sowohl Kendalls τ als auch Spearmans ρ zweier Zufallsvariablen stets sämtliche Werte zwischen -1 und 1 annehmen. Damit ist unter anderem garantiert, dass für beliebige Randverteilungen der Zufallsvariablen eine gemeinsame Verteilung mit beliebig vorgegebener Rangkorrelation existiert (vgl. EMBRECHTS et al. [65], S. 6, und [64], S. 33). Bei Verwendung der Rangkorrelation von Kendall oder Spearman läuft man somit

nicht Gefahr, dem Fehlschluss 2 in Abschnitt 4.2 zu erliegen. Die zweite in Satz 6.5 enthaltene Aussage ist, dass zwei komonotone Zufallsvariablen stets eine Rangkorrelation von 1 und zwei kontramotone Zufallsvariablen stets eine Rangkorrelation von -1 aufweisen. Dieser Tatbestand ist bekanntlich für die Korrelation nicht erfüllt.

Diese Ausführungen zeigen, dass mehrere Probleme, die mit der Korrelation als Zusammenhangsmass verbunden sind, durch einen Übergang zur Rangkorrelation von Kendall oder Spearman überwunden werden können. Andere Schwächen der Korrelation sind jedoch auch den beiden Rangkorrelationen eigen. Wie gerade gesehen existiert zwar für beliebige Randverteilungen und für jeden Rangkorrelationswert zwischen -1 und 1 eine gemeinsame Verteilung. Wie EMBRECHTS et al. in [65], S. 6, zeigen, ist eine solche gemeinsame Verteilung aber weiterhin im Allgemeinen nicht eindeutig. Man läuft also auch bei Verwendung der Rangkorrelation von Kendall oder Spearman Gefahr, den Fehlschluss 1 in Abschnitt 4.2 zu begehen.

Weiter nehmen wie gezeigt sowohl Kendalls τ als auch Spearmans ρ zweier Zufallsvariablen X und Y den Wert null an, wenn die beiden Zufallsvariablen unabhängig sind. Wie schon für die Korrelation impliziert aber ein Wert von Kendalls τ oder Spearmans ρ gleich null umgekehrt nicht allgemein die Unabhängigkeit der beiden Zufallsvariablen.

Den zuvor besprochenen Vorteilen der Rangkorrelation von Kendall und Spearman gegenüber der Kovarianz beziehungsweise der Korrelation steht auch ein spezifischer Nachteil gegenüber. Kann etwa wie gesehen die Varianz einer Linearkombination von Zufallsvariablen bei Vorliegen der Kovarianzmatrix gemäss (4.1) sehr einfach bestimmt werden, so ist diese Möglichkeit bei Verwendung einer Rangkorrelationsmatrix, die paarweise Rangkorrelationen zusammenfasst, nicht mehr gegeben (vgl. EMBRECHTS et al. [64], S. 17).

Diese Ausführungen zeigen, dass keines der beiden Konzepte das jeweils andere dominiert. Folglich ist die Wahl eines Zusammenhangsmasses aufgrund der Eignung im jeweils betrachteten Fall zu treffen.

6.3 Randabhängigkeit

Im Risikomanagement interessiert man sich häufig für Extremsituationen mit negativen Auswirkungen, die zwar selten eintreten, jedoch dennoch möglich sind. Eine wichtige Fragestellung ist etwa, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass sich die risikobehafteten Positionen in einem Portfolio simultan negativ entwickeln

und sich somit Verluste der einzelnen Positionen zu einem erheblichen Gesamtverlust kumulieren. Eine Möglichkeit den Zusammenhang solcher Extremwerte zweier Zufallsvariablen zu charakterisieren, wird im Folgenden dargestellt.

Definition 6.5 Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen G und H und sei $U = G(X)$ und $V = H(Y)$, so dass

$$\lambda_O(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 1-} \mathbb{P} [Y > H^{-1}(u) | X > G^{-1}(u)] \quad (6.12)$$

existiert. Dann heissen X und Y

- *asymptotisch abhängig im oberen Rand*, wenn $\lambda_O \in (0, 1]$,
- *asymptotisch unabhängig im oberen Rand*, wenn $\lambda_O = 0$.

Der Ausdruck $\lim_{u \rightarrow 1-}$ in (6.12) bezeichnet den linksseitigen Grenzwert von u an der Stelle 1.

Zwei Zufallsvariablen X und Y sind demnach asymptotisch abhängig im oberen Rand, wenn eine positive Wahrscheinlichkeit besteht, dass $H(Y) > u$, gegeben dass $G(X) > u$, für u beliebig nahe bei 1. Intuitiv gesprochen bedeutet dies, dass „grosse“ Realisierungen von X tendenziell gleichzeitig mit „grossen“ Realisierungen von Y auftreten. Für eine Punktwolke von Realisierungen zweier Zufallsvariablen X und Y bedeutet letztere Aussage, dass tendenziell Punkte in der rechten oberen Ecke eines entsprechenden Streudiagrammes zu finden sein müssen. Dies wird in Abbildung 6.1 illustriert, welche die gleichen 10'000 simulierten Realisierungen eines Zufallsvektors (X, Y) zeigt wie die rechte Graphik in Abbildung 4.3. Obwohl mit Hilfe einer solchen Punktwolke von Realisierungen nicht abschliessend entschieden werden kann, ob zwei Zufallsvariablen asymptotisch abhängig im oberen Rand sind, lässt sich anhand einer solchen Abbildung dennoch eine erste Einschätzung vornehmen. So kann die Tatsache, dass die hier vorliegende Punktwolke spitzförmig nach oben rechts ausläuft, als Hinweis dafür interpretiert werden, dass die beiden betrachteten Zufallsvariablen asymptotisch abhängig im oberen Rand sind. In Abschnitt 9.3 wird bei der Darstellung der so genannten Gumbel-Copula, die im vorliegenden Fall zur Generierung der in Abbildung 6.1 dargestellten Realisierungen von X und Y herangezogen wurde, gezeigt werden, dass diese Vermutung tatsächlich zutrifft.

Für zwei stetige Zufallsvariablen X und Y kann (6.12) als Funktional einer Copulafunktion geschrieben werden. Dies ergibt sich daraus, dass die bedingte

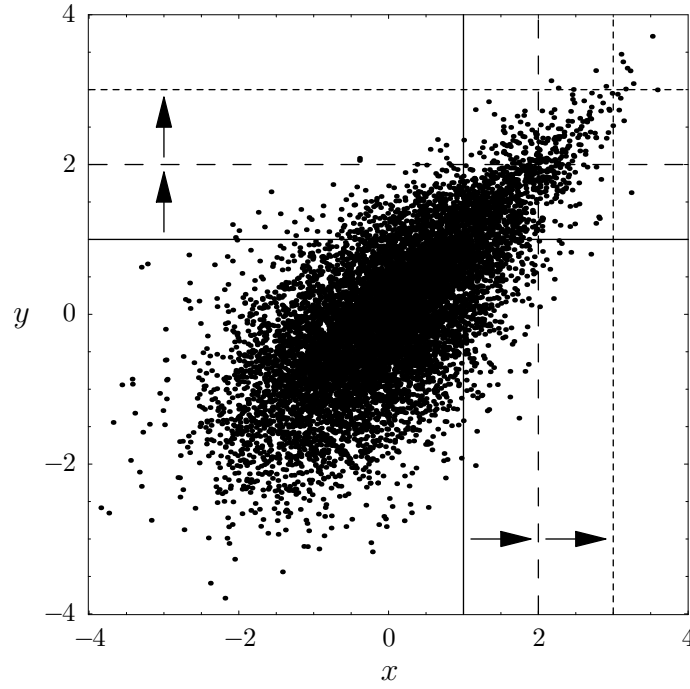


Abbildung 6.1: Obere Randabhängigkeit.

Wahrscheinlichkeit $P[Y > H^{-1}(u) | X > G^{-1}(u)]$ definitionsgemäss notiert werden kann als

$$\begin{aligned} & \frac{1 - P[X \leq G^{-1}(u)] - P[Y \leq H^{-1}(u)] + P[X \leq G^{-1}(u), Y \leq H^{-1}(u)]}{1 - P[X \leq G^{-1}(u)]} \\ = & \frac{1 - P[G(X) \leq u] - P[H(Y) \leq u] + P[G(X) \leq u, H(Y) \leq u]}{1 - P[G(X) \leq u]}. \end{aligned}$$

Damit kann aus (6.12) und unter Verwendung von Satz 5.3 im Falle von stetigen Zufallsvariablen die Gleichung (6.13a) hergeleitet werden. Diese wird in der nachfolgenden Definition 6.6 benötigt, die im Falle von stetigen Zufallsvariablen äquivalent zur Definition 6.5 ist.

Definition 6.6 Seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen mit zugehöriger Copulafunktion C , so dass

$$\lambda_O = \lim_{u \rightarrow 1-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} \quad (6.13a)$$

existiert. Dann heissen X und Y

- *asymptotisch abhängig im oberen Rand*, wenn $\lambda_O \in (0, 1]$,
- *asymptotisch unabhängig im oberen Rand*, wenn $\lambda_O = 0$.

Gemäss (6.13a) kann die asymptotische obere Randabhängigkeit als Eigenschaft einer Copulafunktion interpretiert werden.

Unter Verwendung der Definition 6.6 kann der Fall zweier unabhängiger Zufallsvariablen untersucht werden, deren zugehörige Copulafunktion die Produkt-Copula ist. Setzt man diese in (6.13a) ein, erhält man

$$\lambda_O = \lim_{u \rightarrow 1-} \frac{1 - 2u + u^2}{1 - u}.$$

Unter Verwendung der Regel von de l'Hospital ergibt sich

$$\lambda_O = \lim_{u \rightarrow 1-} \frac{-2 + 2u}{-1} = \lim_{u \rightarrow 1-} 2 - 2u = 0,$$

womit gezeigt ist, dass zwei unabhängige Zufallsvariablen asymptotisch unabhängig im oberen Rand sind.

Wie sich bei der Einführung diverser Copulafamilien in Kapitel 9 zeigen wird, kann sich zur Herleitung von λ_O für Copulafunktionen mit komplexerer Form eine zu (6.13a) alternative Form besser eignen. EMBRECHTS et al. [63], S. 14 f., zeigen, dass (6.13a) geschrieben werden kann als

$$\lambda_O = \lim_{u \rightarrow 1-} (\mathbb{P}[V > u | U = u] + \mathbb{P}[U > u | V = u]). \quad (6.13b)$$

Ist die Copulafunktion C in (6.13a) zudem symmetrisch in dem Sinn, dass $C(u, v) = C(v, u)$ gilt, so vereinfacht sich (6.13b) zu

$$\lambda_O = 2 \lim_{u \rightarrow 1-} \mathbb{P}[V > u | U = u]. \quad (6.14)$$

Sind zwei stetige Zufallsvariablen X und Y , deren zugehörige Copulafunktion eine symmetrische Copula C ist, überdies identisch verteilt mit Verteilungsfunktion T und handelt es sich bei T um eine stetige und streng monoton wachsende Verteilungsfunktion mit infinitem rechten Endpunkt, vereinfacht sich (6.14) weiter zu

$$\begin{aligned} \lambda_O &= 2 \lim_{u \rightarrow 1-} \mathbb{P}[V > u | U = u] \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}[T^{-1}(V) > x | T^{-1}(U) = x] \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}[Y > x | X = x]. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Das Konzept der unteren Randabhängigkeit kann analog eingeführt werden.

Definition 6.7 Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen G und H und sei $U = G(X)$ und $V = H(Y)$, so dass

$$\lambda_U(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 0+} \mathbb{P} [Y < H^{-1}(u) | X < G^{-1}(u)], \quad (6.16)$$

existiert. Dann heissen X und Y

- *asymptotisch abhängig im unteren Rand*, wenn $\lambda_U \in (0, 1]$,
- *asymptotisch unabhängig im unteren Rand*, wenn $\lambda_U = 0$.

Der Ausdruck $\lim_{u \rightarrow 0+}$ in (6.16) bezeichnet den rechtsseitigen Grenzwert von u an der Stelle 0.

Zwei Zufallsvariablen X und Y sind demnach asymptotisch abhängig im unteren Rand, wenn eine positive Wahrscheinlichkeit besteht, dass $H(Y) < u$, gegeben dass $G(X) < u$, für u beliebig nahe bei 0. Intuitiv gesprochen bedeutet dies, dass „kleine“ Realisierungen von X tendenziell gleichzeitig mit „kleinen“ Realisierungen von Y auftreten.

Für zwei stetige Zufallsvariablen X und Y kann (6.16) als Funktional einer Copulafunktion geschrieben werden. Dies ergibt sich daraus, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P} [Y < H^{-1}(u) | X < G^{-1}(u)]$ definitionsgemäss notiert werden kann als

$$\frac{\mathbb{P} [Y < H^{-1}(u), X < G^{-1}(u)]}{\mathbb{P} [X < G^{-1}(u)]} = \frac{\mathbb{P} [H(Y) < u, G(X) < u]}{\mathbb{P} [G(X) < u]}.$$

Damit kann aus (6.16) und unter Verwendung von Satz 5.3 im Falle von stetigen Zufallsvariablen die Gleichung (6.17a) hergeleitet werden. Diese wird in der nachfolgenden Definition 6.8 benötigt, die im Falle von stetigen Zufallsvariablen äquivalent zur Definition 6.7 ist.

Definition 6.8 Seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen mit zugehöriger Copulafunktion C , so dass

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{C(u, u)}{u} \quad (6.17a)$$

existiert. Dann heissen X und Y

- *asymptotisch abhängig im unteren Rand*, wenn $\lambda_U \in (0, 1]$,
- *asymptotisch unabhängig im unteren Rand*, wenn $\lambda_U = 0$.

Gemäss (6.17a) kann die asymptotische untere Randabhängigkeit als Eigenschaft einer Copulafunktion interpretiert werden.

Analog zu oben kann gezeigt werden, dass zwei unabhängige Zufallsvariablen, deren zugehörige Copulafunktion die Produkt-Copula ist, asymptotisch unabhängig im oberen Rand sind.

Für Copulafunktionen mit komplexerer Form kann sich zur Herleitung von λ_U eine zu (6.17a) alternative Form besser eignen. EMBRECHTS et al. [63], S. 15, zeigen, dass (6.17a) geschrieben werden kann als

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 0+} (\mathbb{P}[V < u | U = u] + \mathbb{P}[U < u | V = u]). \quad (6.17b)$$

Ist die Copulafunktion C in (6.17a) zudem symmetrisch in dem Sinn, dass $C(u, v) = C(v, u)$ gilt, so vereinfacht sich (6.17b) zu

$$\lambda_U = 2 \lim_{u \rightarrow 0+} \mathbb{P}[V < u | U = u]. \quad (6.18)$$

Sind zwei stetige Zufallsvariablen X und Y , deren zugehörige Copulafunktion eine symmetrische Copula C ist, überdies identisch verteilt mit Verteilungsfunktion T und handelt es sich bei T um eine stetige und streng monoton wachsende Verteilungsfunktion mit infinitem linken Endpunkt, vereinfacht sich (6.18) weiter zu

$$\begin{aligned} \lambda_U &= 2 \lim_{u \rightarrow 0+} \mathbb{P}[V < u | U = u] \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{P}[T^{-1}(V) < x | T^{-1}(U) = x] \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{P}[Y < x | X = x]. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Kapitel 7

Schätzung von Copulafunktionen

In Kapitel 5 wurden die Produkt-Copula C^\perp , die Fréchet-Hoeffding-Untergrenze C^- und die Fréchet-Hoeffding-Obergrenze C^+ eingeführt. Diese drei Copulafunktionen sind allesamt nichtparametrischer Natur. Neben den nichtparametrischen existieren ebenfalls parametrische Copulafunktionen. Eine Copulafunktion heisst dabei parametrisch, wenn sie durch einen endlich dimensional Parametervektor charakterisiert ist. Als Beispiel sei an dieser Stelle etwa die so genannte Farlie-Gumbel-Morgenstern-Copula

$$C_\theta^{\text{FGM}}(u, v) = uv + \theta uv(1 - u)(1 - v)$$

mit dem Parameter θ genannt. Diese und weitere parametrische Copulafunktionen werden in Kapitel 9 dargestellt.

Der wahre charakteristische Parametervektor einer parametrischen Copulafunktion ist in praktischen Anwendungen stets unbekannt und muss deshalb aus Daten geschätzt werden. In diesem Kapitel soll ein Überblick über Methoden zur Schätzung von Copulaparametern gegeben werden. Es werden parametrische und semiparametrische Schätzverfahren dargestellt. Die Ausführungen bleiben jeweils auf die Herleitung von Punktschätzern beschränkt. Einige Überlegungen zur konkreten Schätzung beschliessen dieses Kapitel.

7.1 Parametrische Schätzverfahren

In diesem Abschnitt werden mit der (exakten) Maximum-Likelihood-Methode, der Methode der Inferenzfunktionen für Randverteilungen, der Momentenmetho-

de und der Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse vier parametrische Schätzverfahren dargestellt. Nebst den Copulafunktionen werden in diesem Abschnitt auch Rand- und gemeinsame Verteilungen als parametrisch angenommen.

7.1.1 (Exakte) Maximum-Likelihood-Methode

Bevor die Schätzung von parametrischen Copulafunktionen mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode (ML-Methode) beschrieben wird, soll zunächst die in der Literatur allgemein übliche Form dieser Schätzmethode dargestellt werden. Dabei werden die unbekannten Parameter einer parametrischen Verteilungsfunktion geschätzt. Die ML-Methode ist für diskrete und stetige Zufallsvektoren analog, weshalb der Einfachheit halber nur der stetige Fall betrachtet wird. Es sei $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\vartheta})$ die gemeinsame parametrische Dichtefunktion eines N -dimensionalen Zufallsvektors \mathbf{X} mit unbekanntem Parametervektor $\boldsymbol{\vartheta}$. Auf der Grundlage von T unabhängigen und identisch verteilten Realisierungen dieses Zufallsvektors soll dieser unbekannte Parametervektor geschätzt werden. Aufgrund der Unabhängigkeit der T Realisierungen ist deren gemeinsame Dichtefunktion gleich dem Produkt der Dichten der einzelnen Realisierungen:

$$f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T | \boldsymbol{\vartheta}) = f(\mathbf{x}_1 | \boldsymbol{\vartheta}) \cdot \dots \cdot f(\mathbf{x}_T | \boldsymbol{\vartheta}) = \prod_{t=1}^T f(\mathbf{x}_t | \boldsymbol{\vartheta}). \quad (7.1)$$

Die so genannte Likelihoodfunktion weist identische funktionale Form auf wie die gemeinsame Dichtefunktion (7.1). Es besteht jedoch ein Unterschied in der Lesart der beiden Funktionen. Während die gemeinsame Dichte als Funktion von Realisierungen von Zufallsvektoren für gegebene Parameterwerte interpretiert wird, wird die Likelihoodfunktion als Funktion eines Parametervektors für gegebene Realisierungen der Zufallsvektoren verstanden, das heisst

$$L(\boldsymbol{\vartheta} | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T) = f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T | \boldsymbol{\vartheta}) = \prod_{t=1}^T f(\mathbf{x}_t | \boldsymbol{\vartheta}). \quad (7.2)$$

Ein Maximum-Likelihood-Schätzer für $\boldsymbol{\vartheta}$, üblicherweise mit $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ bezeichnet, ist eine Schätzfunktion, welche die Likelihoodfunktion maximiert. Zur Lösung dieses Maximierungsproblems wird aus Gründen der leichten Handhabbarkeit in der Regel zur logarithmierten Likelihoodfunktion, der so genannten Log-Likelihoodfunktion, übergegangen:

$$\ln L(\boldsymbol{\vartheta} | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T) = \sum_{t=1}^T \ln f(\mathbf{x}_t | \boldsymbol{\vartheta}). \quad (7.3)$$

Da der natürliche Logarithmus eine streng monoton wachsende Transformation ist, liefert das Maximieren von L und $\ln L$ denselben Wert des Parametervektors. Jede Lösung der Vektorgleichung

$$\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\vartheta} | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T)}{\partial \boldsymbol{\vartheta}} = \mathbf{0} \quad (7.4)$$

liefert einen ML-Schätzer $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$, sofern die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen von (7.3) nach $\boldsymbol{\vartheta}$ die Bedingung für ein Maximum erfüllt.

Mit der Maximum-Likelihood-Methode wird demnach für vorliegende Realisierungen $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T$ eines Zufallsvektors \mathbf{X} derjenige Parametervektor $\boldsymbol{\vartheta}$ gesucht, für den die „Likelihood“, dass gerade diese Werte $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T$ auftreten, maximal wird; es wird der Parametervektor gewählt, der die vorliegenden Realisierungen „am wahrscheinlichsten“ werden lässt.

Maximum-Likelihood-Schätzer verfügen über eine Reihe wünschenswerter Schätzqualitäten. So sind diese unter geeigneten Regularitätsbedingungen konsistent, asymptotisch effizient und asymptotisch normalverteilt. Für eine detaillierte Darstellung der Eigenschaften von ML-Schätzern sei etwa auf GREENE [80], S. 126 ff., und MITTELHAMMER [120], S. 470 ff., verwiesen.

Für viele wichtige Verteilungsfamilien ist eine analytische Bestimmung des ML-Schätzers möglich. Es existieren aber Fälle, in denen keine explizite Lösung der Bedingungen erster Ordnung für ein Maximum gefunden werden kann. Dann muss $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ approximativ mit Hilfe numerischer Methoden wie etwa dem Newton-Verfahren bestimmt werden (vgl. FAHRMEIR und HAMERLE [68], S. 67 f.).

Ausgangspunkt für die Schätzung der Parameter einer parametrischen Copulafunktion mit Hilfe der ML-Methode bildet die Tatsache, dass sich die N -dimensionale parametrische Verteilungsfunktion F eines Zufallsvektors \mathbf{X} nach dem Satz von Sklar schreiben lässt als

$$F(\mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_N, \boldsymbol{\theta}) = C(F_1(x_1 | \boldsymbol{\alpha}_1), \dots, F_N(x_N | \boldsymbol{\alpha}_N) | \boldsymbol{\theta}), \quad (7.5)$$

wobei C eine Copula mit Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$ und F_1, \dots, F_N univariate Randverteilungen mit jeweiligen Parametervektoren $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_N$ bezeichnen. Die Copula C verfüge über die Dichtefunktion c und die Randverteilungen F_1, \dots, F_N über die Randdichten f_1, \dots, f_N . Die partielle Ableitung von (7.5) nach sämtlichen Variablen x_1, \dots, x_N ergibt die N -dimensionale parametrische Dichtefunktion f des Zufallsvektors \mathbf{X}

$$f(\mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_N, \boldsymbol{\theta}) = c(F_1(x_1 | \boldsymbol{\alpha}_1), \dots, F_N(x_N | \boldsymbol{\alpha}_N) | \boldsymbol{\theta}) \prod_{n=1}^N f_n(x_n | \boldsymbol{\alpha}_n). \quad (7.6)$$

Auf der Grundlage von T unabhängigen und identisch verteilten Realisierungen dieses Zufallsvektors können die Parametervektoren $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ und θ gemäss oben beschriebener ML-Methode geschätzt werden. Die entsprechende Likelihoodfunktion lautet

$$\begin{aligned} L(\alpha_1, \dots, \alpha_N, \theta | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T) &= f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T | \alpha_1, \dots, \alpha_N, \theta) \\ &= \prod_{t=1}^T f(\mathbf{x}_t | \alpha_1, \dots, \alpha_N, \theta). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Die Log-Likelihoodfunktion kann geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \ln L(\alpha_1, \dots, \alpha_N, \theta | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T) &= \sum_{t=1}^T \ln f(\mathbf{x}_t | \alpha_1, \dots, \alpha_N, \theta) \\ &= \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_{t1} | \alpha_1), \dots, F_N(x_{tN} | \alpha_N) | \theta) + \sum_{t=1}^T \sum_{n=1}^N \ln f_n(x_{tn} | \alpha_n). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Im Hinblick auf die klare Abgrenzung gegenüber den im Anschluss präsentierten Schätzverfahren wird dieses Verfahren in der Folge als *exakte Maximum-Likelihood-Methode* (EML-Methode) bezeichnet.

Empirische Studien, in denen die EML-Methode zur Schätzung von Copulafunktionen verwendet wurde, wurden etwa von COOK und JOHNSON [50], FREES und VALDEZ [75], KLUGMAN und PARSA [102] und DURRLEMAN et al. [58] durchgeführt.

7.1.2 Methode der Inferenzfunktionen für Randverteilungen

Wie in Abschnitt 7.1.1 erwähnt ist die analytische Herleitung eines ML-Schätzers nicht immer möglich. In solchen Fällen muss auf numerische Optimierungsmethoden zur Lösung des Gleichungssystems (7.4) zurückgegriffen werden. Dies kann bei Verwendung der EML-Methode im Wesentlichen zwei Probleme beinhalten. So kann es sein, dass die Schätzung vor allem für Modelle mit einer hohen Anzahl Dimensionen N rechentechnisch sehr aufwändig wird, oder aber die numerischen Methoden nicht konvergieren.

Da die Parameter einer gemeinsamen Verteilung durch die Copulaschreibweise gemäss (7.5) in Parameter aufgeteilt werden, die einerseits eindeutig den Randverteilungen und andererseits eindeutig der Copula zugeordnet werden können, kann das Schätzproblem in zwei getrennten, jeweils weniger komplexen Etappen

angegangen werden. Diese Schätzidee wird bei JOE und XU [94] als „Method of Inference Functions for Margins“ (IFM) eingeführt. In Anlehnung an diesen Text soll dieses Verfahren in der Folge als *Methode der Inferenzfunktionen für Randverteilungen* (IFR-Methode) bezeichnet werden. Die beiden Etappen dieses Verfahrens sind:

1. Es werden zunächst N separate Schätzungen der Parametervektoren der univariaten Randverteilungen durchgeführt, indem einzeln die N entsprechenden Log-Likelihoodfunktionen

$$\ln L_n(\boldsymbol{\alpha}_n | x_{1n}, \dots, x_{Tn}) = \sum_{t=1}^T \ln f_n(x_{tn} | \boldsymbol{\alpha}_n), \quad n = 1, \dots, N, \quad (7.9)$$

maximiert werden, um die Schätzungen $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1^{\text{IFR}}, \dots, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_N^{\text{IFR}}$ zu erhalten.

2. Anschliessend wird bei gegebenen $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_n^{\text{IFR}}$ ($n = 1, \dots, N$) die multivariate Log-Likelihoodfunktion

$$\ln L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T; \hat{\boldsymbol{\alpha}}_1^{\text{IFR}}, \dots, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_N^{\text{IFR}})$$

für $\boldsymbol{\theta}$ maximiert, um $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{\text{IFR}}$ zu erhalten.

Wie aus (7.8) ersichtlich kommt der Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$ in den Randdichten f_n ($n = 1, \dots, N$) nicht vor, womit der zweite Schritt der IFR-Methode gleichbedeutend mit der Maximierung von

$$\ln L_C(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T; \hat{\boldsymbol{\alpha}}_1^{\text{IFR}}, \dots, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_N^{\text{IFR}}) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_{t1} | \hat{\boldsymbol{\alpha}}_1^{\text{IFR}}), \dots, F_N(x_{tN} | \hat{\boldsymbol{\alpha}}_N^{\text{IFR}}) | \boldsymbol{\theta}) \quad (7.10)$$

für $\boldsymbol{\theta}$ ist. Für die konkrete Schätzung bedeutet dies, dass die ursprünglich beobachteten Daten mit Hilfe der geschätzten Randverteilungen transformiert werden. Diese transformierten Grössen dienen in der Folge zur Schätzung des Vektors der Copulaparameter.

Die IFR-Methode weist gegenüber der EML-Methode im Wesentlichen zwei Vorteile auf, wenn die analytische Herleitung eines ML-Schätzers nicht möglich ist und auf numerische Optimierungsmethoden zurückgegriffen werden muss. So konstatieren JOE und XU in [94], S. 4, dass die simultane Optimierung aller Parameter in einem Modell zeitintensiver ist als die Gesamtheit mehrerer Optimierungen

für jeweils wenige Parameter. Damit kann die IFR-Methode allgemein als rechen-technisch weniger aufwändig betrachtet werden als die EML-Methode. Weiter kann die Aufteilung der Schätzung der Parameter eines Modells in zwei Etappen und die damit einhergehende Komplexitätsreduktion bewirken, dass die eingesetzten numerischen Methoden überhaupt erst konvergieren und ein gewisses Modell überhaupt erst schätzbar wird. Diesen Vorteilen steht entgegen, dass die IFR-Methode im Allgemeinen nicht die gleichen Parameterschätzwerte liefert wie die exakte ML-Methode. Während bei der exakten ML-Methode die Parameter der Randverteilungen und der Copulafunktion gemeinsam geschätzt werden, baut die zweite Etappe der IFR-Methode auf den mit einem Fehlerrisiko behafteten Schätzergebnissen der ersten Etappe auf, weshalb die IFR-Methode als weniger genaues Verfahren anzusehen ist. Diverse Studien (vgl. etwa JOE und XU [94] oder DURRLEMAN et al. [58]) haben jedoch gezeigt, dass die Abweichungen der IFR-Methode gegenüber der exakten ML-Methode sehr gering sind.

7.1.3 Momentenmethode

Ziel der so genannten Momentenmethode ist es, den unbekannten P -dimensionalen Parametervektor $\boldsymbol{\vartheta}$ eines statistischen Modells $f(x|\boldsymbol{\vartheta})$ für die Zufallsvariable X zu schätzen (vgl. MITTELHAMMER [120], S. 490 ff.). Dabei kann die Momentenmethode ohne Einschränkung für beliebige Zufallsvektoren geschrieben werden; zur Vereinfachung der Notation wird an dieser Stelle jedoch lediglich der eindimensionale Fall verfolgt. Die Grundidee der Momentenmethode ist es, ein Gleichungssystem aufzustellen, dessen Lösung eine Schätzung für den unbekannten Parametervektor $\boldsymbol{\vartheta}$ liefert. Hierfür werden zunächst invertierbare Momentenbedingungen der Form

$$\mathbb{E} \mathbf{g}(X|\boldsymbol{\vartheta}) = \mathbf{0} \quad (7.11)$$

spezifiziert, wobei die Anzahl der Dimensionen der Vektorfunktion \mathbf{g} grösser oder gleich der Dimension von $\boldsymbol{\vartheta}$ sein muss. Entspricht die Dimension von \mathbf{g} gerade der Dimension von $\boldsymbol{\vartheta}$, wird als Schätzer $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ des Parametervektors $\boldsymbol{\vartheta}$ der Wert gewählt, der die empirische Entsprechung der Momentenbedingungen

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{g}(x_t|\boldsymbol{\vartheta}) = \mathbf{0}, \quad (7.12)$$

die auf einer unabhängigen und identisch verteilten Zufallsstichprobe von X vom Umfang T basiert, erfüllt:

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = \arg_{\boldsymbol{\vartheta}} \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{g}(x_t|\boldsymbol{\vartheta}) = \mathbf{0} \right]. \quad (7.13)$$

Ist die Dimension von \mathbf{g} grösser als die Dimension von $\boldsymbol{\vartheta}$, wird $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ so gewählt, dass die empirischen Momentenbedingungen möglichst gut erfüllt werden. Dies bedeutet, dass eine (gewichtete) quadratische Distanz zwischen $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{g}(x_t|\boldsymbol{\vartheta})$ und $\mathbf{0}$ minimiert wird. Üblicherweise wird der Momentenschätzer für $\boldsymbol{\vartheta}$ also als Lösung des Minimierungsproblems

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\vartheta}} \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{g}(x_t|\boldsymbol{\vartheta}) \right]' \mathbf{W} \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{g}(x_t|\boldsymbol{\vartheta}) \right] \quad (7.14)$$

bestimmt, wobei \mathbf{W} eine positiv definite und symmetrische Gewichtungsmatrix bezeichnet. Es kann gezeigt werden, dass ein auf diese Weise geschätzter Parametervektor $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ unter geeigneten Regularitätsbedingungen konsistent, asymptotisch effizient und asymptotisch normalverteilt ist (vgl. MITTELHAMMER [120], S. 491).

Häufig werden die ersten P Momente zur Definition der benötigten Momentenbedingungen herangezogen. Dann weisen \mathbf{g} und $\boldsymbol{\vartheta}$ die gleiche Dimension auf. Solcherart formulierte Momentenbedingungen haben die Form

$$\mathbf{E} \mathbf{g}(X|\boldsymbol{\vartheta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{E}(X) & - & h_1(\boldsymbol{\vartheta}) \\ \mathbf{E}(X^2) & - & h_2(\boldsymbol{\vartheta}) \\ & \vdots & \\ \mathbf{E}(X^P) & - & h_P(\boldsymbol{\vartheta}) \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Hierbei bezeichnen h_1, h_2, \dots, h_P Funktionen, welche die jeweils entsprechenden theoretischen Momente $\mathbf{E}(X), \mathbf{E}(X^2), \dots, \mathbf{E}(X^P)$ in Abhängigkeit von dem zu schätzenden Parametervektor ausdrückt. Die entsprechenden empirischen Momentenbedingungen präsentieren sich als

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{g}(x_t|\boldsymbol{\vartheta}) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t & - & h_1(\boldsymbol{\vartheta}) \\ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t^2 & - & h_2(\boldsymbol{\vartheta}) \\ & \vdots & \\ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t^P & - & h_P(\boldsymbol{\vartheta}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m_1 & - & h_1(\boldsymbol{\vartheta}) \\ m_2 & - & h_2(\boldsymbol{\vartheta}) \\ & \vdots & \\ m_P & - & h_P(\boldsymbol{\vartheta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_P \end{pmatrix} & - & \mathbf{h}(\boldsymbol{\vartheta}) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

und die Momentenschätzer bestimmen sich als $\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = \mathbf{h}^{-1}(m_1, m_2, \dots, m_P)$.

Die Verwendung anderer Momente zur Formulierung der Momentenbedingungen ist ebenfalls denkbar. Dabei muss lediglich erfüllt sein, dass $\boldsymbol{\vartheta}$ als Funktion der empirischen Momente m_p ($p = 1, \dots, P$) dargestellt werden kann. So kann etwa die

Maximum-Likelihood-Methode als Spezialfall der Momentenmethode dargestellt werden (vgl. MITTELHAMMER [120], S. 496 f.). Weiter kann die Beschränkung auf unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen aufgegeben werden. Man spricht in diesem Kontext von der verallgemeinerten Momentenmethode. Für deren Darstellung und die Diskussion der Eigenschaften von Momentenschätzern sei auf MITTELHAMMER, S. 490 ff., verwiesen.

Ist die Herleitung von entsprechenden invertierbaren Momentenbedingungen der Form (7.11) möglich, können sowohl die Parameter von Randverteilungen als auch die Parameter von Copulafunktionen mittels der Momentenmethode geschätzt werden. Da es sich bei Copulas um Funktionen mehrerer Variablen handelt, ist die Herleitung von entsprechenden Momenten jedoch selbst beim Einsatz von Programmpaketen wie etwa MathematicaTM der Firma Wolfram Research, Inc.¹, das symbolische Berechnungen unterstützt, oft nicht trivial. Aus diesem Grund wird in Abschnitt 7.1.4 ein gegenüber der Momentenmethode leicht abgeändertes Verfahren zur Schätzung von Copulaparametern vorgestellt.

7.1.4 Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse

Im vorhergehenden Abschnitt wurde die Momentenmethode eingeführt. In ihrer einfachsten Form werden theoretische Momente als invertierbare Funktionen des zu schätzenden Parametervektors geschrieben. Für die konkrete Parameterschätzung werden diese theoretischen Momente anschliessend durch die entsprechenden empirischen Momente ersetzt. Wie bereits festgestellt wurde, kann die Bestimmung von Momenten im Fall von Copulafunktionen problematisch sein, weshalb in diesem Abschnitt ein Verfahren zur Schätzung von Copulaparametern vorgestellt wird, das zwar die Grundidee der Momentenmethode aufgreift, das Problem der Herleitung von Momenten aber umgeht.

In Kapitel 6 wurden verschiedene Zusammenhangsmasse präsentiert, die als Funktionale von Copulafunktionen betrachtet werden können. Die Momentenmethode wird nun in der Hinsicht angepasst, dass nicht theoretische Momente, sondern theoretische copulabasierte Zusammenhangsmasse, als invertierbare Funktionen der zu schätzenden Copulaparameter θ geschrieben werden. Diese theoretischen copulabasierten Zusammenhangsmasse sind für die konkrete Schätzung der Copulaparameter durch die entsprechenden empirischen copulabasierten Zusammenhangsmasse zu ersetzen. Als Zusammenhangsmasse bieten sich in diesem Kontext etwa die Rangkorrelation von Kendall oder die Rangkorrelation von Spearman an.

¹Für detaillierte Informationen sei auf die Website der Firma Wolfram Research, Inc. <http://www.wolfram.com/> [Stand 2003-08-08] verwiesen.

Es bezeichne in der Folge κ entweder Kendalls τ oder Spearmans ϱ . Da diese beiden Konzepte den Zusammenhang jeweils zweier Zufallsvariablen quantifizieren, präsentiert sich die Entsprechung zu $E\mathbf{g}(X|\boldsymbol{\vartheta})$ für N Zufallsvariablen als

$$\begin{bmatrix} \kappa(X_1, X_2) & - & h_1(\boldsymbol{\theta}) \\ & \vdots & \\ \kappa(X_1, X_N) & - & h_{N-1}(\boldsymbol{\theta}) \\ \kappa(X_2, X_3) & - & h_N(\boldsymbol{\theta}) \\ & \vdots & \\ \kappa(X_{N-1}, X_N) & - & h_{(N^2-N)/2}(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}, \quad (7.15)$$

wobei h_m ($m = 1, \dots, (N^2 - N)/2$) eine Funktion ist, die κ in Abhängigkeit von den zu schätzenden Parametern ausdrückt. Es bezeichne weiter k entweder den empirischen Rangkorrelationskoeffizienten von Kendall oder den empirischen Rangkorrelationskoeffizienten von Spearman. Das Pendant zu $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{g}(x_t|\boldsymbol{\vartheta})$ weist die folgende Form auf:

$$\begin{bmatrix} k(x_{t1}, x_{t2}) & - & h_1(\boldsymbol{\theta}) \\ & \vdots & \\ k(x_{t1}, x_{tN}) & - & h_{N-1}(\boldsymbol{\theta}) \\ k(x_{t2}, x_{t3}) & - & h_N(\boldsymbol{\theta}) \\ & \vdots & \\ k(x_{tN-1}, x_{tN}) & - & h_{(N^2-N)/2}(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}, \quad t = 1, \dots, T. \quad (7.16)$$

Die Dimension P des Vektors der Copulaparameter $\boldsymbol{\theta}$ darf hierbei maximal $(N^2 - N)/2$ betragen. Entspricht P genau $(N^2 - N)/2$, kann (7.16) der Idee in (7.13) folgend dem Nullvektor mit entsprechender Dimension gleichgesetzt und nach $\boldsymbol{\theta}$ aufgelöst werden; dies liefert $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Gilt $P < (N^2 - N)/2$, ist eine (gewichtete) Distanz zwischen (7.16) und dem Nullvektor mit Dimension P zu minimieren. So kann beispielsweise (7.16) zur Herleitung des Schätzers $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ sinngemäss in (7.14) eingesetzt werden.

Diese Schätzmethode wird nachfolgend als *Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse* bezeichnet. Da diese zwar auf der Momentenmethode aufbaut, nicht aber Momente verwendet, kann nicht davon ausgegangen werden, dass die Schätzqualitäten der Momentenmethode auf die Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse übergehen. Diese Vermutung wird etwa durch eine von GENEST et al. [77] durchgeführte Simulationsstudie gestützt. Hierbei wird für die so genannte Clayton-Copula gezeigt, dass sich die Schätzungen der Copulaparameter nach der IFR-Methode und nach der Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse teils erheblich unterscheiden. Ein weiteres Ziel der nachfolgend präsentierten empirischen Studie wird somit die Überprüfung sein, ob sich diese Beobachtung für eine grössere Auswahl von Copulafunktionen bestätigt.

7.2 Semiparametrische Schätzverfahren

In Abschnitt 7.1.2 wurde die IFR-Methode eingeführt. Hierbei werden in einem ersten Schritt die Parametervektoren sämtlicher univariater Randverteilungen geschätzt. In einem zweiten Schritt wird unter Verwendung dieser Schätzungen der Parametervektor der Copulafunktion bestimmt. Die in diesem Abschnitt präsentierte Methode greift dieses Zwei-Schritt-Verfahren auf. Im Gegensatz zur IFR-Methode werden für die univariaten Randverteilungen jedoch keine parametrische Funktionen vorgegeben und geschätzt, sondern die Randverteilungen werden in diesem ersten Schritt nichtparametrisch mittels der empirischen Verteilung geschätzt. In einem zweiten Schritt ist in Anlehnung an (7.10) die Log-Likelihoodfunktion

$$\ln L_C(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T) = \sum_{t=1}^T \ln c(\hat{F}_1(x_{t1}), \dots, \hat{F}_N(x_{tN})|\boldsymbol{\theta}), \quad (7.17)$$

für den Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$ der betrachteten parametrischen Copulafunktion zu maximieren. Dabei bezeichnen $\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_N$ die jeweiligen empirischen Verteilungsfunktionen.

Bei BOUYÉ et al. [32], S. 26 ff., wird dieses semiparametrische Schätzverfahren unter dem Namen „Canonical Maximum Likelihood Method“ (CML) eingeführt. In Anlehnung daran soll dieses Verfahren in der Folge als *kanonische Maximum-Likelihood-Methode* (KML-Methode) bezeichnet werden. Ein entsprechender Schätzer für den Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$ einer Copulafunktion wird somit mit $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{\text{KML}}$ bezeichnet.

Da bei Anwendung der KML-Methode keine Annahmen über die parametrische Form der Randverteilungen getroffen werden müssen, ist dieses Schätzverfahren in Fällen, in denen das Hauptaugenmerk auf der Untersuchung der Zusammenhangsstruktur von Zufallsvariablen liegt, besonders geeignet. Liefern die KML-Methode einerseits und die EML- beziehungsweise die IFR-Methode andererseits erhebliche Unterschiede in den Schätzungen des Parametervektors $\boldsymbol{\theta}$, kann dies als Indiz für eine Fehlspezifikation der Randverteilungen aufgefasst werden.

7.3 Weiterführende Überlegungen zur konkreten Schätzung von Copulafunktionen

In diesem Kapitel wurden verschiedene Verfahren zur Schätzung von Copulafunktionen dargestellt. Für die konkrete Schätzung von Copulafunktionen im Rahmen

einer empirischen Studie ist nicht zuletzt der Rechenaufwand der Schätzverfahren ein wichtiges Kriterium. Dieser wird massgeblich dadurch beeinflusst, ob eine analytische Herleitung der Schätzer möglich ist oder ob auf numerische Methoden zurückgegriffen werden muss.

Gelangen numerische Methoden zum Einsatz, müssen für die zu schätzenden Parameter Startwerte angegeben werden. Die Festlegung solcher Werte spielt eine zentrale Rolle, da diese Resultat und Rechenzeit einer festgelegten Schätzprozedur determinieren. Ungeschickt gewählte Startwerte können dazu führen, dass numerische Verfahren nicht oder lediglich zu einem lokalen Maximum konvergieren.

Erfolgversprechend ist sicherlich, Startwerte zu definieren, die den zu schätzenden Parameterwerten bereits möglichst nahe sind. Dies kann etwa dadurch erreicht werden, dass Verfahren, die eine analytische Bestimmung der Schätzer ermöglichen, dazu verwendet werden, Startwerte für numerische Verfahren zu generieren. Eine solche Strategie macht indes nur Sinn, wenn die numerischen Verfahren im Vergleich zu den analytischen Schätzer mit besseren Schätzqualitäten liefern; ansonsten ist stets der analytischen Methode der Vorzug zu geben.

Sei etwa bei der Schätzung von Copulaparametern mit der KML-, der IFR- oder der EML-Methode eine analytische Herleitung der Schätzer nicht möglich. Dann können in einem ersten Schritt die Copulaparameter mittels der Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse geschätzt werden, falls ein copulabasiertes Zusammenhangsmass existiert, das als invertierbare Funktion der zu schätzenden Copulaparameter geschrieben werden kann. Solchermassen geschätzte Werte können als Startwerte für eine nachfolgende numerische Schätzung der Copulaparameter mit der KML-, der IFR- oder der EML-Methode dienen.

In der in Kapitel 13 präsentierten empirischen Studie werden Copulafunktionen nach der IFR-Methode, der KML-Methode und der Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse geschätzt. Ist die analytische Herleitung entsprechender Copulaparameter bei Anwendung der IFR- oder der KML-Methode nicht möglich, werden die benötigten Startwerte wie oben beschrieben durch das auf copulabasierten Zusammenhangsmassen aufbauende Schätzverfahren generiert. Aufgrund der hohen Komplexität und der hohen Rechenintensität wird auf die Anwendung der EML-Methode verzichtet. Auch wird die reine Momentenmethode nicht eingesetzt, da die Bestimmung von invertierbaren Momentenbedingungen im Fall von Copulafunktionen nur in Einzelfällen möglich ist.

Kapitel 8

Simulation von Copulafunktionen

In der vorliegenden Arbeit sollen Copulafunktionen im Rahmen der in Abschnitt 3.3 beschriebenen Monte-Carlo-Methode zur Generierung von Realisierungen einer Verteilung von Renditen eines Finanzportfolios eingesetzt werden. Damit wird ein wichtiger Arbeitsschritt in der nachfolgend präsentierten empirischen Studie die Generierung von Zufallszahlen sein, die gemäss einer multivariaten Verteilungsfunktion F verteilt sind.

Im Satz von Sklar wird deutlich, dass sich eine solche gemeinsame Verteilungsfunktion einerseits in die durch eine Copulafunktion C beschriebene Zusammenhangsstruktur und andererseits in die univariaten Randverteilungen F_1, \dots, F_N , die in der Folge als stetig und streng monoton wachsend angenommen werden, zerlegen lässt. Diese Begebenheit wird ausgenutzt, um die gewünschten Zufallszahlen zu generieren: Es werden zunächst Realisierungen eines Zufallsvektors $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_N)'$ erzeugt, der gemäss der gewünschten Copula C verteilt ist. Der transformierte Zufallsvektor $(F_1^{-1}(U_1), \dots, F_N^{-1}(U_N))$ verfügt nunmehr über die Verteilung F . Dieser zweite Schritt, die Transformation des Zufallsvektors \mathbf{U} mit den Inversen der Randverteilungen, soll hier nicht weiter thematisiert werden; Aufgabe wird es vielmehr sein, eine Methode zur Erzeugung von Realisierungen einer Copula darzustellen. Hierbei werden Verfahren zur univariaten Simulation, das heisst Methoden zur Generierung von Realisierungen einer Zufallsvariablen, als bekannt vorausgesetzt. Für eine Einführung in dieses Gebiet sei etwa auf DAVIDSON und MACKINNON [52], S. 734 ff., verwiesen.

EMBRECHTS et al. [64], S. 34 f., stellen einen allgemein gültigen Algorithmus zur Zufallszahlengenerierung von Copulas vor. Dazu betrachtet man eine N -dimensionale Copula C . Bezeichne

$$C_n(u_1, \dots, u_n) = C(u_1, \dots, u_n, 1, \dots, 1), \quad n = 2, \dots, N - 1 \quad (8.1)$$

eine n -dimensionale Randverteilung von $C(u_1, \dots, u_N)$. Sei zudem $C_1(u_1) = u_1$ und $C_N(u_1, \dots, u_N) = C(u_1, \dots, u_N)$. Der Zufallsvektor (U_1, \dots, U_N) weise weiter die gemeinsame Verteilung C auf. Dann kann die Verteilungsfunktion der bedingten Verteilung von U_n bei gegebenen Werten der ersten $n - 1$ Komponenten von \mathbf{U} geschrieben werden als

$$\begin{aligned} C_n(u_n|u_1, \dots, u_{n-1}) &= P[U_n \leq u_n | U_1 = u_1, \dots, U_{n-1} = u_{n-1}] \\ &= \frac{\partial^{n-1} C_n(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_{n-1}} \bigg/ \frac{\partial^{n-1} C_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1})}{\partial u_1 \dots \partial u_{n-1}}, \quad (8.2) \end{aligned}$$

vorausgesetzt dass sowohl Zähler als auch Nenner existieren. Unter Verwendung solcher bedingter Copulafunktionen kann folgender Algorithmus zur Erzeugung einer Realisierung (u_1, \dots, u_N) von $C(u_1, \dots, u_N)$ hergeleitet werden:

Algorithmus 8.1

- Generiere eine Zufallszahl $u_1 \stackrel{L}{\sim} U[0, 1]$.
- Generiere eine Zufallszahl $u_2 \stackrel{L}{\sim} C_2(u_2|u_1)$.
- \vdots
- Generiere eine Zufallszahl $u_N \stackrel{L}{\sim} C_N(u_N|u_1, \dots, u_{N-1})$.

Um eine Zufallszahl $u_n \stackrel{L}{\sim} C_n(u_n|u_1, \dots, u_{n-1})$ zu simulieren, wird allgemein zunächst eine von u_1, \dots, u_{n-1} unabhängige, $U[0, 1]$ -verteilte Zufallsvariable v erzeugt und daraus anschliessend der Wert $u_n = C_n^{-1}(v|u_1, \dots, u_{n-1})$ berechnet. Kann diese Inverse der bedingten Copula (8.2) explizit geschrieben werden, so kann die Verwendung dieses Algorithmus empfohlen werden (vgl. EMBRECHTS et al. [63], S. 7). In den nicht seltenen Fällen jedoch, in denen dieser Ausdruck nicht explizit geschrieben werden kann und folglich numerische Methoden zur Bestimmung von u_n eingesetzt werden müssten, existieren häufig geeignetere Algorithmen. Aus diesem Grund werden im folgenden Kapitel 9 bei der Einführung diverser Copulafamilien immer auch adäquate Algorithmen zur Zufallszahlengenerierung vorgestellt.

Kapitel 9

Ausgewählte parametrische Copulafamilien

Bisher wurden allgemein die Theorie der Copulafunktionen, verschiedene copulabasierte Zusammenhangsmasse, diverse Verfahren zur Schätzung von Copulas und eine allgemeine Methode der Zufallszahlengenerierung von Copulafunktionen dargestellt. In diesem Kapitel werden nun mehrere Familien von parametrischen Copulafunktionen präsentiert. Eine Copulafunktion heisst dabei parametrisch, wenn sie durch einen endlich dimensional Parametervektor gekennzeichnet ist. Die dargestellten parametrischen Copulafamilien werden in der nachfolgend vorgestellten empirischen Studie verwendet, um die Zusammenhangsstruktur verschiedener Vermögenswerte in einem Portfolio zu modellieren.

In der Literatur findet sich eine Vielzahl bivariater Copulafunktionen. Für eine Übersicht sei etwa auf JOE [93], S. 139 ff., oder NELSEN [122] verwiesen. Die Anzahl an multivariaten Copulas nimmt sich im Gegensatz dazu klein aus, da sich viele Konstruktionsverfahren für zweidimensionale Copulas nicht auf eine beliebige Anzahl Dimensionen ausweiten lassen (vgl. NELSEN [122], S. 84). Da Portfolios im Finanzbereich aber in der Regel mehr als zwei Vermögenswerte umfassen, werden in der Folge nur Copulafamilien eingeführt, die über eine N -dimensionale Erweiterung verfügen.

Für jede Copulafamilie wird zunächst die funktionale Form präsentiert. In Abschnitt 7.1.4 wurde aufgezeigt, dass copulabasierte Zusammenhangsmasse zur Schätzung von Copulaparametern verwendet werden können. Im Hinblick auf die empirische Studie, in der dieses Schätzverfahren eingesetzt wird, werden für die dargestellten Copulafamilien solche copulabasierte Zusammenhangsmasse betrachtet. Dabei können jedoch nicht für jede Copulafamilie alle in Kapitel 6 gezeigten Zusammenhangsmasse hergeleitet werden. Im Anschluss werden die notwendigen Grundlagen für die Schätzung der Copulafunktionen nach der IFR- und

der KML-Methode erarbeitet. So werden Likelihoodfunktionen und falls möglich explizite Schätzer für die Copulaparameter hergeleitet.

In diesem Kapitel soll nicht weiter auf die unterschiedliche Behandlung der Randverteilungen durch diese beiden Methoden eingegangen werden; vielmehr wird davon ausgegangen, dass die ursprünglich beobachteten Daten bereits mit Hilfe der geschätzten Randverteilungen transformiert wurden. Da die Schätzung einer Copulafunktion mit Hilfe der IFR- und der KML-Methode bei Vorliegen solch transformierter Daten identisch ist, wird in der Folge nicht explizit zwischen den beiden Methoden unterschieden. Da in beiden Fällen eine Maximum-Likelihood-Schätzung durchgeführt wird, wird vereinfachend von der ML-Methode gesprochen. Wo es angezeigt scheint, werden ebenfalls Hinweise für die konkrete Schätzung gegeben.

Zuletzt werden für die diversen Copulafamilien geeignete Algorithmen zur Zufallszahlengenerierung angeführt. Die Schätzung und Simulation von Copulafunktionen wurde im Rahmen dieser Arbeit unter Verwendung der speziell für rechenintensive numerische Analysen entwickelten Programmierungsumgebung GAUSSTM der Firma Aptech Systems, Inc. realisiert.¹ Hinweise zur konkreten Umsetzung beziehen sich folglich immer auch auf dieses Programmpaket.

9.1 Elliptische Copulafamilie

In Abschnitt 4.1 wurde der Begriff der elliptischen Verteilung eingeführt. Eine Eigenschaft dieser Verteilungsfamilie ist, dass eine gemeinsame elliptische Verteilung über elliptische Randverteilungen gleichen Typs verfügt. Dieses Charakteristikum wird verwendet, um die Copulafunktionen von zwei wichtigen Vertretern der elliptischen Verteilungsfamilie, der multivariaten Normalverteilung und der multivariaten t -Verteilung, zu bestimmen.

9.1.1 Normal-Copula

Ein Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)'$ sei multivariat normalverteilt. In der Folge interessiert man sich für die zu X_1, \dots, X_N gehörige Copulafunktion. Zur Herleitung dieser so genannten Normal-Copula werden zunächst die benötigten Eigenschaften der multivariaten Normalverteilung eingeführt. Weiter wird die Dichtefunktion der multivariaten Normalverteilung in der später verwendeten Form präsentiert.

¹Für detaillierte Informationen sei auf die Website der Firma Aptech Systems, Inc. <http://www.aptech.com/> [Stand 2003-08-08] verwiesen.

Als Mitglied der elliptischen Verteilungsfamilie verfügt eine multivariate Normalverteilung über Randverteilungen gleichen Typs, also normalverteilte Randverteilungen. Weiter verfügt eine multivariate Standardnormalverteilung über standardnormalverteilte Randverteilungen (vgl. GREENE [80], S. 87).

Die allgemeine Form der N -dimensionalen Dichtefunktion eines multivariat normalverteilten Zufallsvektors \mathbf{X} mit Erwartungswertvektor

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}$$

und Varianz-Kovarianz-Matrix

$$\text{Cov}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}$$

mit $\sigma_{ij} = \mathbf{E}((X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j))$ ($i, j = 1, \dots, N$) lautet

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right). \quad (9.1)$$

Hierbei bezeichnet $|\boldsymbol{\Sigma}|$ die Determinante der Matrix $\boldsymbol{\Sigma}$.

Bezeichne \mathbf{R} die Korrelationsmatrix des Zufallsvektors \mathbf{X} , das heisst

$$\mathbf{R} = \text{Corr}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1N} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \rho_{N2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\rho_{ij} = \sigma_{ij}/(\sigma_i \sigma_j)$. Für die N -dimensionale Standardnormalverteilung mit $\mu_n = 0$ und $\sigma_n^2 = 1$ ($n = 1, \dots, N$) gilt dann $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{R}$ und die N -dimensionale Dichtefunktion lautet

$$\phi_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\mathbf{R}|^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} \right). \quad (9.2)$$

Da die zu einem multivariat standardnormalverteilten Zufallsvektor gehörige Copulafunktion und die zu einem beliebig multivariat normalverteilten Zufallsvektor gehörige Copulafunktion identisch sind, wird aufgrund der einfacheren Handhabung nachfolgend mit der multivariaten Standardnormalverteilung gearbeitet. Zur Herleitung der Normal-Copula wird das Korollar 5.2 zum Satz von Sklar in N Dimensionen mit

$$C(u_1, u_2, \dots, u_N) = F \left(F_1^{(-1)}(u_1), F_2^{(-1)}(u_2), \dots, F_N^{(-1)}(u_N) \right). \quad (5.16)$$

verwendet. In (5.16) ist für F die Verteilungsfunktion $\Phi_{\mathbf{R}}$ der multivariaten Standardnormalverteilung mit Korrelationsmatrix \mathbf{R} und für F_1, \dots, F_N jeweils die Verteilungsfunktion Φ der univariaten Standardnormalverteilung einzusetzen. Die Normal-Copula kann damit geschrieben werden als

$$C_{\mathbf{R}}^N(u_1, \dots, u_N) = \Phi_{\mathbf{R}}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_N)). \quad (9.3)$$

Die Normal-Copula $C_{\mathbf{R}}^N$ ist durch eine spezielle Korrelationsmatrix \mathbf{R} charakterisiert. Dabei ist $C_{\mathbf{R}}^N$ gerade diejenige eindeutig bestimmte Funktion von $I^2 \rightarrow I$, die N normalverteilte Randverteilungen zu jener N -dimensionalen Normalverteilung verbindet, die durch dieselbe Korrelationsmatrix \mathbf{R} gekennzeichnet ist wie $C_{\mathbf{R}}^N$.

Mittels der Dichtefunktion (9.2) der N -dimensionalen Standardnormalverteilung mit Korrelationsmatrix \mathbf{R} kann die Normal-Copula explizit als

$$C_{\mathbf{R}}^N(u_1, \dots, u_N) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\mathbf{R}|^{1/2}} \cdot \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \cdots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_N)} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}\right) dx_1 \dots dx_N \quad (9.4)$$

geschrieben werden.

Zusammenhangsmasse

Die für eine Normal-Copula $C_{\mathbf{R}}^N$ charakteristische Parametermatrix \mathbf{R} kann ebenfalls als Rangkorrelationsmatrix von Kendall geschrieben werden. Dabei gilt zwischen den Elementen einer solchen Rangkorrelationsmatrix und jenen von \mathbf{R} die Beziehung (vgl. LINDSKOG et al. [112])

$$\tau_{ij} = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (9.5)$$

Weiter kann \mathbf{R} ebenfalls als Rangkorrelationsmatrix von Spearman geschrieben werden. Zwischen den Elementen einer solchen Rangkorrelationsmatrix und jenen von \mathbf{R} gilt die Beziehung (vgl. LINDSKOG [111], S. 47)

$$\varrho_{ij} = \frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{\rho_{ij}}{2}\right), \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (9.6)$$

Seien X und Y zwei standardnormalverteilte Zufallsvariablen, deren zugehörige Copulafunktion die durch die Korrelation ρ der beiden Zufallsvariablen charakterisierte Normal-Copula ist. Diese Vorgaben erfüllen sämtliche in Abschnitt 6.3

genannten notwendigen Bedingungen zur Herleitung von λ_O gemäss

$$\lambda_O = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} P[Y > x | X = x]. \quad (6.15)$$

Die Normal-Copula mit Parameter ρ verbindet die beiden univariaten Standardnormalverteilungen zur bivariaten Standardnormalverteilung mit Parameter ρ . Damit ist Y gegeben $X = x$ ebenfalls normalverteilt mit (vgl. HOGG und CRAIG [87], S. 149)

$$E(Y|X = x) = \rho x \quad \text{und} \quad \text{Var}(Y|X = x) = 1 - \rho^2$$

und (6.15) kann für den hier vorliegenden Fall geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \lambda_O &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \Phi \left(\frac{x - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \right) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \Phi \left(\frac{x\sqrt{1 - \rho}}{\sqrt{1 + \rho}} \right) \right). \end{aligned} \quad (9.7)$$

Folglich gilt $\lambda_O = 0$ für $-1 < \rho < 1$ und $\lambda_O = 1$ für $\rho = 1$. Für $\rho = -1$ ist λ_O nicht definiert. Zwei Zufallsvariablen X und Y , deren zugehörige Copulafunktion eine Normal-Copula ist, sind demnach asymptotisch unabhängig im oberen Rand für $-1 < \rho < 1$ und asymptotisch abhängig im oberen Rand im Fall perfekt positiver Korrelation.

Aufbauend auf Gleichung (6.19) findet man für λ_U durch analoge Herleitung

$$\lambda_U = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi \left(\frac{x\sqrt{1 - \rho}}{\sqrt{1 + \rho}} \right). \quad (9.8)$$

Zwei Zufallsvariablen X und Y mit zugehöriger Normal-Copula sind demnach asymptotisch unabhängig im unteren Rand für $-1 < \rho < 1$ und asymptotisch abhängig im unteren Rand für $\rho = 1$. Es fällt auf, dass $\lambda_O = \lambda_U$ gilt. Damit implizieren Normal-Copulas stets gleiche asymptotische obere und asymptotische untere Randabhängigkeit.

ML-Schätzung

Zur Schätzung der Parametermatrix \mathbf{R} der Normal-Copula mittels der Maximum-Likelihood-Methode wird die entsprechende Log-Likelihood-Funktion benötigt. Diese basiert auf der Dichtefunktion der Normal-Copula, für deren Herleitung der in Abschnitt 7.1.1 eingeführte Ausdruck einer N -dimensionalen parametrischen Dichtefunktion eines Zufallsvektors \mathbf{X}

$$f(\mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_N, \boldsymbol{\theta}) = c(F_1(x_1 | \boldsymbol{\alpha}_1), \dots, F_N(x_N | \boldsymbol{\alpha}_N) | \boldsymbol{\theta}) \prod_{n=1}^N f_n(x_n | \boldsymbol{\alpha}_n) \quad (7.6)$$

herangezogen wird (vgl. BOUYÉ et al. [32], S. 17). Dabei bezeichnen c die zu \mathbf{X} gehörige Copuladichte mit Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$ und f_1, \dots, f_N die Randdichten von X_1, \dots, X_N mit jeweiligen Parametervektoren $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_N$. In (7.6) wird für f die Dichtefunktion (9.2) der N -dimensionalen Standardnormalverteilung mit Parametermatrix \mathbf{R} und für f_1, \dots, f_N und F_1, \dots, F_N die Dichtefunktion beziehungsweise die Verteilungsfunktion Φ der univariaten Standardnormalverteilung eingesetzt:

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}|\mathbf{R}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}\right) = c_{\mathbf{R}}^N(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_N)|\mathbf{R}) \cdot \prod_{n=1}^N \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}x_n^2\right). \quad (9.9)$$

Dabei bezeichnet $c_{\mathbf{R}}^N$ die gesuchte Dichtefunktion der Normal-Copula mit Parametermatrix \mathbf{R} . Löst man (9.9) nach $c_{\mathbf{R}}^N$ auf, erhält man

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{R}}^N(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_N)|\mathbf{R}) &= \frac{\frac{1}{(2\pi)^{N/2}|\mathbf{R}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}\right)}{\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{x}\right)} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{R}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}\right) \exp\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{x}\right) \\ &= \frac{1}{|\mathbf{R}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}'(\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{I})\mathbf{x}\right). \end{aligned}$$

Ersetzt man weiter $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}) = (\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_N))'$ durch $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)'$, erhält man die übliche Form der Dichtefunktion der Normal-Copula

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{R}}^N(u_1, \dots, u_N|\mathbf{R}) &= \frac{1}{|\mathbf{R}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\mathbf{u})'(\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{I})\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\mathbf{u})\right) \\ &= \frac{1}{|\mathbf{R}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{z}'(\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{I})\mathbf{z}\right) \end{aligned} \quad (9.10)$$

mit

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(\mathbf{u}). \quad (9.11)$$

Auf Basis dieser Dichtefunktion kann die zur Schätzung der Parametermatrix \mathbf{R} benötigte Log-Likelihoodfunktion auf der Grundlage von T unabhängigen und identisch verteilten Realisierungen von \mathbf{U} , die gemäss (9.11) zu transformieren sind, geschrieben werden als

$$\ln L(\mathbf{R}|\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_T) = -\frac{T}{2} \ln |\mathbf{R}| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \mathbf{z}_t'(\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{I})\mathbf{z}_t. \quad (9.12)$$

Zur Herleitung des Maximum-Likelihood-Schätzers von \mathbf{R} wird die Log-Likelihoodfunktion der Normal-Copula (9.12) leicht umgeformt zu

$$\ln L(\mathbf{R}|\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_T) = -\frac{T}{2} \ln |\mathbf{R}| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \mathbf{z}'_t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z}_t + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \mathbf{z}'_t \mathbf{z}_t \quad (9.13)$$

und mit der aus (9.2) herzuleitenden Log-Likelihoodfunktion der multivariaten Standardnormalverteilung mit Korrelationsmatrix \mathbf{R}

$$\ln L(\mathbf{R}|\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_T) = -\frac{NT}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln |\mathbf{R}| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \mathbf{z}'_t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z}_t \quad (9.14)$$

verglichen. Gleichung (9.14) basiert auf der Grundlage von T unabhängigen und gleich verteilten Realisierungen eines N -dimensionalen standardnormalverteilten Zufallsvektors \mathbf{Z} . Es fällt auf, dass die Summanden in (9.13) und (9.14), die \mathbf{R} enthalten, identisch sind. Damit kann die Maximum-Likelihood-Schätzung für \mathbf{R} der Normal-Copula auf das bekannte Problem der Maximum-Likelihood-Schätzung für \mathbf{R} der multivariaten Standardnormalverteilung zurückgeführt werden. Der ML-Schätzer für die Parametermatrix \mathbf{R} der Normal-Copulafamilie ist somit durch den gewöhnlichen ML-Schätzer für

$$\hat{\mathbf{R}}^{\text{ML}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{z}_t \mathbf{z}'_t \quad (9.15)$$

gegeben mit $\mathbf{z}_t = \Phi^{-1}(\mathbf{u}_t)$ ($t = 1, \dots, T$) als N -dimensionalem Spaltenvektor (vgl. MAGNUS und NEUDECKER [114], S. 314 ff.).

Für die konkrete Schätzung von $\hat{\mathbf{R}}^{\text{ML}}$ müssen die ursprünglichen Beobachtungen x_{t1}, \dots, x_{tN} ($t = 1, \dots, T$) somit in einem ersten Schritt mit den entsprechend angenommenen und geschätzten Randverteilungen F_1, \dots, F_N transformiert werden:

$$u_{t1}, \dots, u_{tN} = F_1(x_{t1}), \dots, F_N(x_{tN}) \quad t = 1, \dots, T.$$

Diese transformierten Größen sind in einem zweiten Schritt in die Schätzfunktion (9.15) einzusetzen. Handelt es sich bei den angenommenen Randverteilungen um standardnormalverteilte Randverteilungen, gilt $\mathbf{z}_t = \Phi^{-1}(\mathbf{u}_t) = \Phi^{-1}(\Phi(\mathbf{x}_t)) = \mathbf{x}_t$ ($t = 1, \dots, T$), womit die Schätzfunktion (9.15) gerade auf Basis der ursprünglich beobachteten Daten geschätzt werden kann (vgl. MAGNUS und NEUDECKER [114], S. 315).

Generierung von Beobachtungen

Zur Generierung von Beobachtungen, die gemäss einer Normal-Copula mit Parametermatrix \mathbf{R} verteilt sind, kann eine einfache Transformationsmethode verwendet werden. Damit muss nicht auf die Methode der bedingten Copulafunktionen zurückgegriffen werden, die in Kapitel 8 vorgestellt wurde.

Diese Transformationsmethode basiert auf einem normalverteilten Zufallsvektor mit Korrelationsmatrix \mathbf{R} . Man bestimmt zunächst eine $N \times N$ -Matrix \mathbf{A} , so dass $\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{A}'$ gilt. Für einen Zufallsvektor \mathbf{Z} bestehend aus unabhängigen Zufallsvariablen $Z_n \stackrel{L}{\sim} N(0, 1)$ ($n = 1, \dots, N$) berechnet man anschliessend

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{A}\mathbf{Z},$$

womit der Zufallsvektor \mathbf{X} wie gewünscht einer N -dimensionalen Normalverteilung mit Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$ und Varianz-Kovarianz-Matrix \mathbf{R} folgt. Üblicherweise wird \mathbf{A} mit Hilfe der so genannten Cholesky-Zerlegung bestimmt, die eine eindeutige untere Dreiecksmatrix \mathbf{C} liefert, für die $\mathbf{R} = \mathbf{C}\mathbf{C}'$ gilt (vgl. SCHWARZ [147], S. 42 ff.). Durch die Transformation

$$\mathbf{U} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{X}) = (\Phi(X_1), \dots, \Phi(X_N))'$$

erhält man schliesslich den gesuchten Zufallsvektor, der gemäss Normal-Copula mit Korrelationsmatrix \mathbf{R} verteilt ist.

Der Algorithmus zur Generierung einer Realisierung dieses N -dimensionalen Zufallsvektors \mathbf{U} präsentiert sich somit wie folgt:

Algorithmus 9.1

- Bilde die Cholesky-Zerlegung \mathbf{C} von \mathbf{R} .
- Generiere unabhängige Zufallszahlen $z_n \stackrel{L}{\sim} N(0, 1)$ ($n = 1, \dots, N$).
- Berechne $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{z}$.
- Berechne $\mathbf{u} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x})$.

9.1.2 Students t -Copula

Ein Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)'$ sei multivariat t -verteilt und es soll die zu X_1, \dots, X_N gehörige Copulafunktion, die so genannte Students t -Copula oder kurz t -Copula, hergeleitet werden. In diesem Kontext ist darauf hinzuweisen, dass in der Literatur verschiedene Definitionen von multivariaten t -Verteilungen existieren. Für eine Übersicht sei auf JOHNSON und KOTZ [96], S. 132 ff., verwiesen. Für die vorliegende Arbeit wird die folgende Definition verwendet:

Definition 9.1 Sei $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_N)'$ ein multivariat standardnormalverteilter Zufallsvektor mit Korrelationsmatrix \mathbf{R} und sei S eine χ^2 -verteilte Zufallsvariable mit ν Freiheitsgraden. Seien weiter \mathbf{Z} und S unabhängig. Dann heisst die Verteilung des Zufallsvektors

$$\mathbf{X} = \mathbf{Z} \sqrt{\frac{\nu}{S}} \quad (9.16)$$

multivariate t -Verteilung $T_{\mathbf{R},\nu}$ mit Korrelationsmatrix \mathbf{R} und ν Freiheitsgraden.

Die gemeinsame Dichtefunktion einer solchen N -dimensionalen t -Verteilung lautet (vgl. JOHNSON und KOTZ [96], S. 134)

$$t_{\mathbf{R},\nu}(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+N}{2}\right)}{(\pi\nu)^{N/2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) |\mathbf{R}|^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{\nu} \mathbf{x}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}\right)^{-\left(\frac{\nu+N}{2}\right)} \quad (9.17)$$

mit

$$\Gamma(\kappa) = \int_0^\infty y^{\kappa-1} e^{-y} dy.$$

In Abschnitt 4.1 wurde erwähnt, dass die multivariate t -Verteilung zur elliptischen Verteilungsfamilie gehört. Als Mitglied dieser Verteilungsfamilie verfügt eine N -dimensionale t -Verteilung mit ν Freiheitsgraden über N univariate Randverteilungen gleichen Typs, also t -verteilte Randverteilungen mit ebenfalls ν Freiheitsgraden. Damit kann zur Herleitung der Students t -Copula wie bei der Herleitung der Normal-Copula das Korollar 5.2 zum Satz von Sklar in N Dimensionen verwendet werden: In (5.16) wird für F die Verteilungsfunktion $T_{\mathbf{R},\nu}$ der multivariaten t -Verteilung mit Korrelationsmatrix \mathbf{R} und ν Freiheitsgraden und für die Randverteilungen F_1, \dots, F_N jeweils die Verteilungsfunktion T_ν der univariaten t -Verteilung mit ebenfalls ν Freiheitsgraden eingesetzt. Die t -Copula kann damit geschrieben werden als

$$C_{\mathbf{R},\nu}^t(u_1, \dots, u_N) = T_{\mathbf{R},\nu}^N(T_\nu^{-1}(u_1), \dots, T_\nu^{-1}(u_N)). \quad (9.18)$$

Die t -Copula $C_{\mathbf{R},\nu}^t$ ist durch eine spezielle Korrelationsmatrix \mathbf{R} und eine spezielle Anzahl Freiheitsgrade ν charakterisiert. Dabei ist $C_{\mathbf{R},\nu}^t$ gerade diejenige eindeutig bestimmte Funktion von $I^2 \rightarrow I$, die N univariat t -verteilte Randverteilungen mit ν Freiheitsgraden zu jener N -dimensionalen t -Verteilung verbindet, die durch dieselbe Korrelationsmatrix \mathbf{R} und dieselbe Anzahl Freiheitsgrade ν gekennzeichnet ist wie $C_{\mathbf{R},\nu}^t$.

Mittels der Dichtefunktion (9.17) der multivariaten t -Verteilung kann die t -Copula explizit als

$$C_{\mathbf{R},\nu}^t(u_1, \dots, u_N) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+N}{2}\right)}{(\pi\nu)^{N/2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) |\mathbf{R}|^{1/2}} \cdot \int_{-\infty}^{T_{\nu}^{-1}(u_1)} \cdots \int_{-\infty}^{T_{\nu}^{-1}(u_N)} \left(1 + \frac{1}{\nu} \mathbf{x}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}\right)^{-\left(\frac{\nu+N}{2}\right)} dx_1 \dots dx_N. \quad (9.19)$$

geschrieben werden.

Zusammenhangsmasse

Die Parametermatrix \mathbf{R} der t -Copula $C_{\mathbf{R},\nu}^t$ kann ebenfalls als Rangkorrelationsmatrix von Kendall geschrieben werden. Dabei gilt zwischen den Elementen einer solchen Rangkorrelationsmatrix und jenen von \mathbf{R} wie bei der Normal-Copula die Beziehung (vgl. LINDSKOG et al. [112])

$$\tau_{ij} = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho_{ij}), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N. \quad (9.20)$$

Diese Beziehung kann, wie in Abschnitt 7.1.4 beschrieben wurde, verwendet werden, um die Korrelationsmatrix \mathbf{R} der t -Copula auf Basis der aus den Daten geschätzten Rangkorrelationsmatrix von Kendall zu bestimmen.

Seien X und Y zwei t -verteilte Zufallsvariablen mit Freiheitsgrad ν , deren zugehörige Copulafunktion die durch die Korrelation ρ der beiden Zufallsvariablen und den Freiheitsgrad ν charakterisierte t -Copula ist. Diese Vorgaben erfüllen sämtliche in Abschnitt 6.3 genannten notwendigen Bedingungen zur Herleitung von λ_O gemäss

$$\lambda_O = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} P[Y > x | X = x]. \quad (6.15)$$

Die t -Copula mit Parametern ρ und ν verbindet die beiden univariaten t -Verteilungen zur bivariaten t -Verteilung mit Parametern ρ und ν . Damit folgt Y gegeben $X = x$ einer t -Verteilung mit $\nu + 1$ Freiheitsgraden sowie (vgl. EMBRECHTS et al. [64], S. 19)

$$E(Y|X = x) = \rho x \quad \text{und} \quad \text{Var}(Y|X = x) = \left(\frac{\nu + x^2}{\nu + 1}\right) (1 - \rho^2)$$

und (6.15) kann für den hier vorliegenden Fall geschrieben werden als

$$\begin{aligned}
 \lambda_O &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - T_{\nu+1} \left(\left(\frac{\nu+1}{\nu+x^2} \right)^{1/2} \left(\frac{x - \rho x}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \right) \right) \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - T_{\nu+1} \left(\left(\frac{\nu+1}{\frac{\nu}{x^2} + 1} \right)^{1/2} \left(\frac{\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}} \right) \right) \right) \\
 &= 2 \left(1 - T_{\nu+1} \left(\frac{\sqrt{\nu+1} \sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}} \right) \right). \tag{9.21}
 \end{aligned}$$

Zwei Zufallsvariablen X und Y mit zugehöriger t -Copula sind demnach asymptotisch abhängig im oberen Rand für $\rho > -1$.

Tabelle 9.1 zeigt Werte von λ_O für unterschiedliche Werte von ν und ρ . Es mag überraschen, dass die t -Copula selbst bei negativer und bei Null-Korrelation asymptotische obere Randabhängigkeit impliziert. Ein Vergleich von (9.7) und (9.21) zeigt, dass der Wert von λ_O für die t -Copula für $\nu \rightarrow \infty$ gegen den Wert von λ_O für die Normal-Copula konvergiert. Dieser Tatbestand wird ebenfalls in der letzten Zeile von Tabelle 9.1 ausgewiesen. Zusammenfassend kann etwas salopp gesagt werden, dass die t -Copula asymptotische obere Randabhängigkeit impliziert, die mit zunehmendem ρ steigt und mit zunehmendem ν fällt.

$\nu \backslash \rho$	-0.5	0	0.5	0.9	1
2	0.06	0.18	0.39	0.72	1.00
5	0.01	0.05	0.21	0.59	1.00
10	0.00	0.01	0.08	0.46	1.00
∞	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00

Tabelle 9.1: Werte von λ_O für die t -Copula für unterschiedliche Werte von ν und ρ .

Aufbauend auf Gleichung (6.19) kann λ_U analog hergeleitet werden. Wie schon bei der Normal-Copulafamilie gilt auch bei der t -Copulafamilie $\lambda_O = \lambda_U$. Damit sind zwei Zufallsvariablen mit zugehöriger t -Copula für $\rho > -1$ ebenfalls asymptotisch abhängig im unteren Rand.

In Abbildung 9.1 wird die unterschiedliche Randabhängigkeit der Normal- und der t -Copula veranschaulicht. Sowohl die linke wie auch die rechte Graphik zeigen 10'000 simulierte Daten einer bivariaten Verteilung mit je standardnormalverteilten Randverteilungen und Korrelation von 0.9. Die Zusammenhangsstruktur in der linken Graphik wird durch die Normal-Copula erzeugt, wohingegen die Zusammenhangsstruktur in der rechten Graphik einer t -Copula mit $\nu = 2$ Freiheitsgraden entspricht. Vergleicht man die beiden Punktwolken, ist klar ersichtlich,

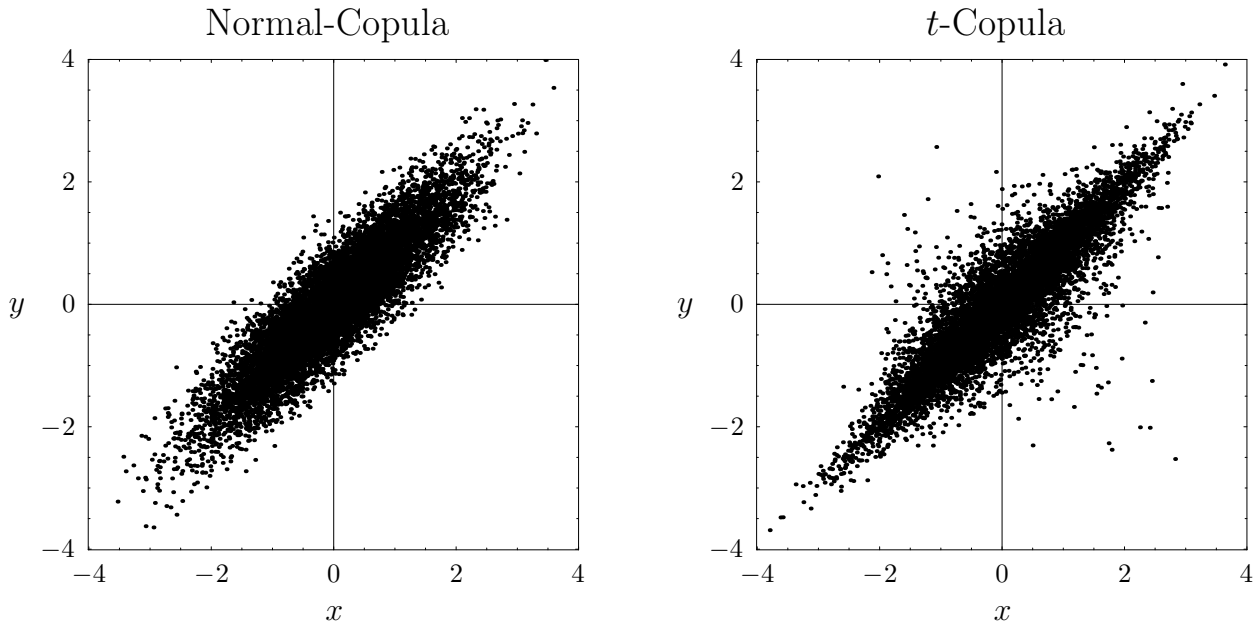


Abbildung 9.1: 10'000 simulierte Datenpaare zweier bivariater Verteilungen mit identischen standardnormalverteilten Randverteilungen und identischer Korrelation von 0.9. Die Zusammenhangsstruktur wird in der linken Graphik durch die Normal-Copula, in der rechten Graphik durch die t -Copula mit $\nu = 2$ modelliert.

dass die durch die t -Copula erzeugte bivariate Verteilung verstärkt dazu tendiert, simultan extreme Werte – sowohl kleine als auch grosse – von X und Y zu generieren.

ML-Schätzung

Zur Schätzung der Parameter \mathbf{R} und ν der t -Copula mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode bedarf es der entsprechenden Log-Likelihoodfunktion. Diese basiert auf der Dichtefunktion der t -Copula, die analog zur Dichtefunktion der Normal-Copula hergeleitet wird: In (7.6) wird für f die Dichtefunktion (9.17) der multivariaten t -Verteilung und für f_1, \dots, f_N und F_1, \dots, F_N die Dichtefunktion beziehungsweise die Verteilungsfunktion T_ν der univariaten t -Verteilung mit ν Freiheitsgraden eingesetzt:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+N}{2}\right)}{(\pi\nu)^{N/2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) |\mathbf{R}|^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{\nu} \mathbf{x}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}\right)^{-\left(\frac{\nu+N}{2}\right)} =$$

$$c_{\mathbf{R},\nu}^t(T_\nu(x_1), \dots, T_\nu(x_N) | \mathbf{R}, \nu) \cdot \prod_{n=1}^N \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{(\pi\nu)^{1/2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x_n^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}. \quad (9.22)$$

Dabei bezeichnet $c_{\mathbf{R},\nu}^t$ die gesuchte Dichtefunktion der t -Copula mit Parametern \mathbf{R} und ν . Löst man (9.22) nach $c_{\mathbf{R},\nu}^t$ auf, erhält man

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{R},\nu}^t(T_\nu(x_1), \dots, T_\nu(x_N) | \mathbf{R}, \nu) &= \frac{\frac{\Gamma(\frac{\nu+N}{2})}{(\pi\nu)^{N/2} \Gamma(\frac{\nu}{2}) |\mathbf{R}|^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{\nu} \mathbf{x}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}\right)^{-\left(\frac{\nu+N}{2}\right)}}{\frac{[\Gamma(\frac{\nu+1}{2})]^N}{(\pi\nu)^{N/2} [\Gamma(\frac{\nu}{2})]^N} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{x_n^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+N}{2}\right) [\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)]^N \left(1 + \frac{1}{\nu} \mathbf{x}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}\right)^{-\left(\frac{\nu+N}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) [\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)]^N |\mathbf{R}|^{1/2} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{x_n^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}}. \end{aligned}$$

Ersetzt man weiter $\mathbf{T}_\nu(\mathbf{x}) = (T_\nu(x_1), \dots, T_\nu(x_N))'$ durch $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)'$, kann die Dichtefunktion der t -Copula als

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{R},\nu}^t(u_1, \dots, u_N | \mathbf{R}, \nu) &= \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+N}{2}\right) [\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)]^N \left(1 + \frac{1}{\nu} (\mathbf{T}_\nu^{-1}(\mathbf{u}))' \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{T}_\nu^{-1}(\mathbf{u}))\right)^{-\left(\frac{\nu+N}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) [\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)]^N |\mathbf{R}|^{1/2} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{(T_\nu^{-1}(u_n))^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+N}{2}\right) [\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)]^N \left(1 + \frac{1}{\nu} \mathbf{z}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z}\right)^{-\left(\frac{\nu+N}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) [\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)]^N |\mathbf{R}|^{1/2} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{z_n^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}} \quad (9.23) \end{aligned}$$

geschrieben werden mit $\mathbf{z} = \mathbf{T}_\nu^{-1}(\mathbf{u})$ und $z_n = T_\nu^{-1}(u_n)$.

Auf Basis dieser Dichtefunktion kann die Log-Likelihoodfunktion der t -Copula auf der Grundlage von T unabhängigen und identisch verteilten Realisierungen von \mathbf{U} geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \ln L(\mathbf{R}, \nu | \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_T) &= T \ln \left[\Gamma\left(\frac{\nu+N}{2}\right) \right] + NT \ln \left[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \right] \\ &\quad - \left(\frac{\nu+N}{2}\right) \sum_{t=1}^T \ln \left(1 + \frac{1}{\nu} \mathbf{z}_t' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z}_t\right) \\ &\quad - T \ln \left[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \right] - NT \ln \left[\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \right] \\ &\quad - \frac{T}{2} \ln |\mathbf{R}| + \left(\frac{\nu+1}{2}\right) \sum_{n=1}^N \sum_{t=1}^T \ln \left(1 + \frac{z_{tn}^2}{\nu}\right). \quad (9.24) \end{aligned}$$

Im Gegensatz zur Normal-Copula können die ML-Schätzer der Parameter der t -Copula nicht explizit angegeben werden (vgl. BOUYÉ et al. [32], S. 26), womit

für die Schätzung von \mathbf{R} und ν aus (9.24) auf numerische Optimierungsmethoden wie etwa das Newton-Verfahren zurückgegriffen werden muss (vgl. FAHRMEIR und HAMERLE [68], S. 67 f.). Die konkrete Schätzung mit Hilfe des Programmpakets GAUSSTM unter Verwendung des Zusatzpakets Maximum Likelihood, in dem das Newton-Verfahren oder wahlweise mehrere so genannte Quasi-Newton-Verfahren (vgl. FAHRMEIR und HAMERLE [68], S. 68 ff.) zur Anwendung gelangen (vgl. APTECH SYSTEMS, INC. [9]), hat gezeigt, dass die gleichzeitige Schätzung der gesamten $N \times N$ -dimensionalen Korrelationsmatrix \mathbf{R} und der Anzahl Freiheitsgrade ν bereits bei einer moderaten Anzahl Dimensionen N an rechentechnische Grenzen stösst und bei grossem N nicht mehr oder nicht mehr mit angemessenem Aufwand zu bewältigen ist. Aus diesem Grund wird eine sequentielle Schätzung in zwei Etappen vorgeschlagen, wobei die Schätzung der Korrelationsmatrix den ersten Schritt bildet.

Da die simultane Bestimmung der $(N^2 - N)/2$ unbekannten Elemente von \mathbf{R} nach wie vor sehr aufwändig ist, werden diese einzeln geschätzt, indem die Korrelation jeweils zweier Variablen bestimmt wird. Dieses Vorgehen ist legitim, da die Korrelation zweier Variablen von weiteren Variablen unabhängig ist. Bei der Schätzung des Elements ρ_{ij} ($1 \leq i, j \leq N, i \neq j$) wird weiter berücksichtigt, dass die Anzahl Freiheitsgrade ν eine positive natürliche Zahl ist. Diesem Umstand wird Rechnung getragen, indem eine Schleife abgearbeitet wird, bei der ν zunächst gleich 1 gesetzt und anschliessend jeweils um 1 erhöht wird. Für einen solchermassen fixierten Wert von ν wird mittels numerischer Optimierung der Parameterwert r_{ij} bestimmt, der die Log-Likelihoodfunktion (9.24) im hier vorliegenden bivariaten Fall bei gegebenen Realisierungen u_{ti} und u_{tj} ($t = 1, \dots, T$) maximiert. Dieser maximale Wert der Log-Likelihoodfunktion $\ln L$ wird notiert. Die Abarbeitung der Schleife wird abgebrochen, sobald das Maximum von $\ln L$ gegenüber dem vorhergehenden Schritt der Schleife erstmals fällt, und es wird das Parameterpaar (r_{ij}, ν) dieses vorletzten Schritts ausgegeben. Auf die Legitimität dieses Abbruchkriteriums wird in der Folge noch eingegangen. Liegen sämtliche $(N^2 - N)/2$ paarweise Schätzungen r_{ij} vor, werden diese zur geschätzten Korrelationsmatrix $\hat{\mathbf{R}}$ zusammengefasst.

Die zweite Etappe der sequentiellen Schätzung bildet die Ermittlung der Anzahl Freiheitsgrade ν . Man beachte, dass bei der zuvor beschriebenen Bestimmung von $\hat{\mathbf{R}}$ bereits $(N^2 - N)/2$ Schätzungen von ν erzeugt wurden, wobei diese theoretisch alle den gleichen Wert aufweisen sollten. Da dies in der Praxis kaum der Fall ist, soll die Anzahl Freiheitsgrade unter Verwendung der gesamten geschätzten Korrelationsmatrix bestimmt werden. Folglich wird $\hat{\mathbf{R}}$ in die Log-Likelihoodfunktion (9.24) eingesetzt, die im Anschluss bei gegebenen Realisierungen u_{tn} ($t = 1, \dots, T; n = 1, \dots, N$) bezüglich ν maximiert wird. Dabei

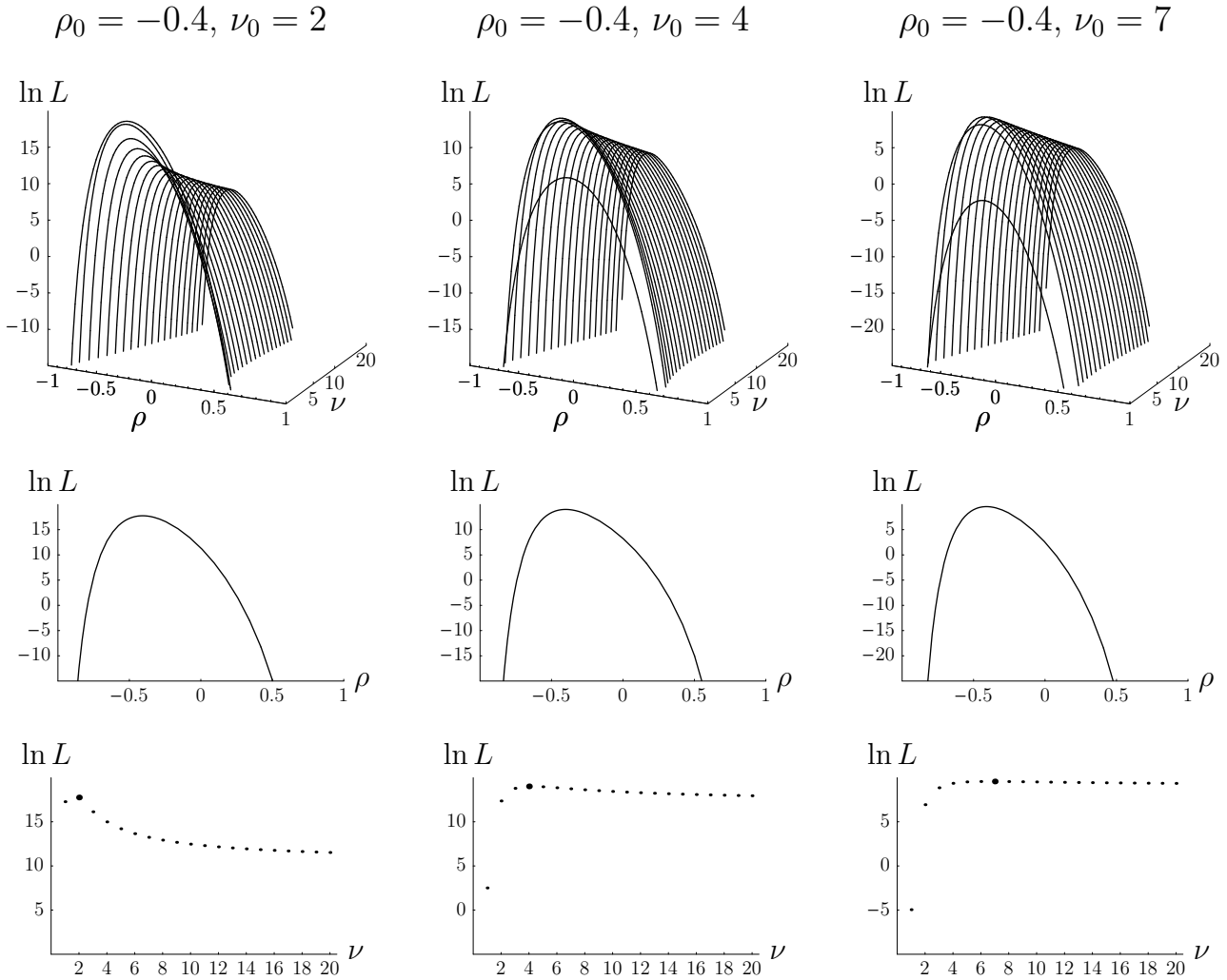


Abbildung 9.2: Log-Likelihoodfunktion (9.24) in Abhängigkeit von ρ und ν , bei wahren Parameterwerten ρ_0 von -0.4 und ν_0 von $2, 4$ und 7 .

ist zu berücksichtigen, dass der Lösungsraum für ν auf positive natürliche Zahlen beschränkt ist.

Eine umfangreiche Simulationsstudie, in der jeweils in einem ersten Schritt T Realisierungen von \mathbf{U} mit bekannten Parameterwerten \mathbf{R} und ν generiert und in einem zweiten Schritt eben diese Parameter gemäß oben beschriebenem Verfahren geschätzt wurden, hat aufgezeigt, dass die Log-Likelihoodfunktion (9.24) für zunehmende Werte von ν , nachdem sie einmal gefallen ist, nicht wieder ansteigt. Dadurch wird das in der beschriebenen Schleife verwendete Abbruchkriterium gerechtfertigt.

Der besagte Sachverhalt wird exemplarisch in den Abbildungen 9.2, 9.3 und 9.4 illustriert. Diese zeigen die bivariate Ausprägung der Log-Likelihoodfunktion (9.24) in Abhängigkeit von ρ und ν , wobei die zur Generierung der T Realisierungen des hier benötigten zweidimensionalen Zufallsvektors \mathbf{U} vorgegebenen wahren Parameter ρ_0 und ν_0 variiert werden. In den drei Abbildungen werden Graphen von

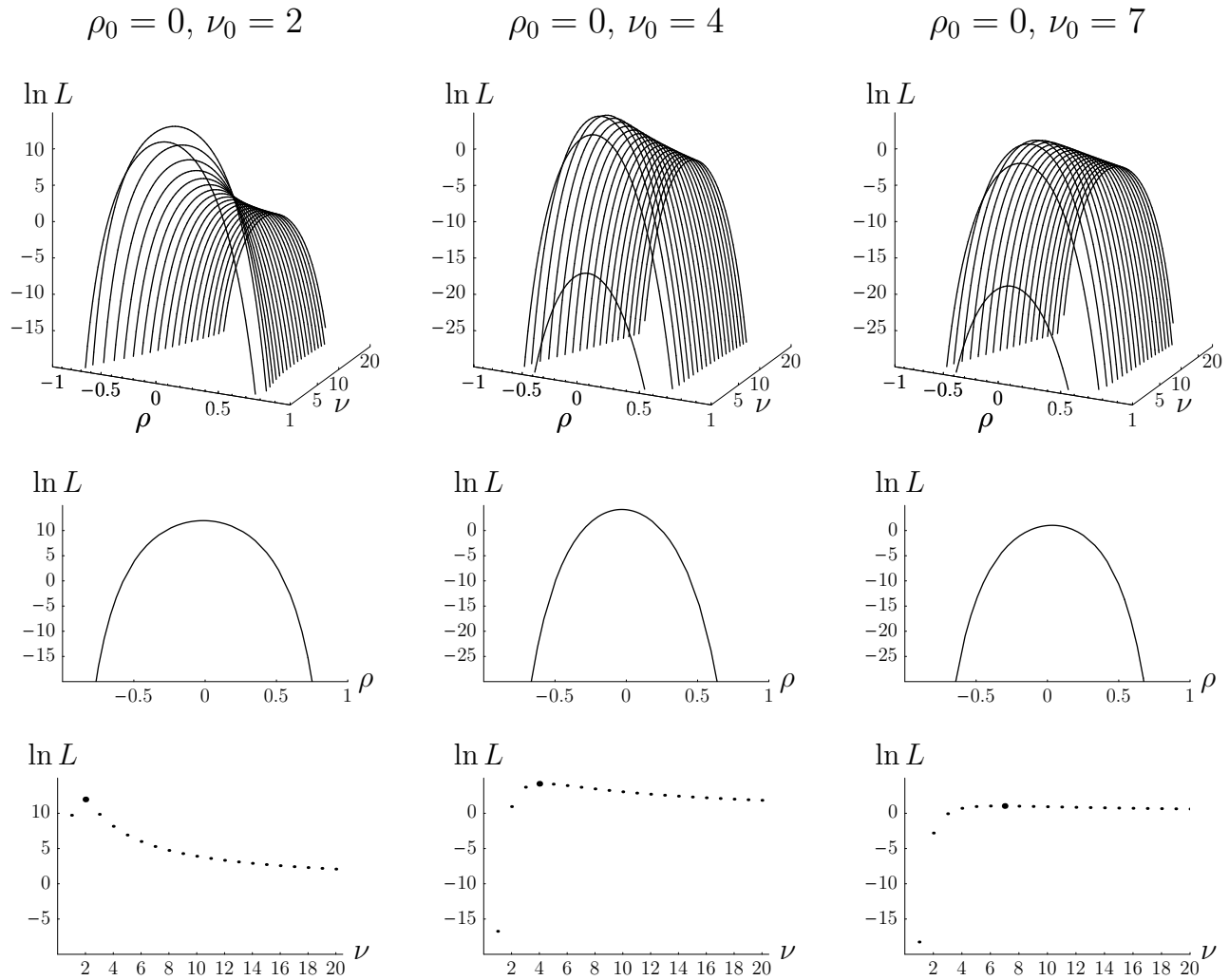


Abbildung 9.3: Log-Likelihoodfunktion (9.24) in Abhängigkeit von ρ und ν , bei wahren Parameterwerten ρ_0 von 0 und ν_0 von 2, 4 und 7.

$\ln L$ für Kombinationen von ρ_0 gleich -0.4 , 0 und 0.7 und von ν gleich 2 , 4 und 7 gezeichnet. In der ersten Zeile der Abbildungen findet sich jeweils ein dreidimensionales Schaubild, in den beiden folgenden Zeilen sind zweidimensionale Darstellungen wiedergegeben. Dabei wird in der zweiten Zeile $\ln L$ in Abhängigkeit von ρ bei fixiertem Wert $\nu = \nu_0$ und in der dritten Zeile $\ln L$ in Abhängigkeit von ν bei fixiertem Wert $\rho = \rho_0$ gezeigt. Hauptsächlich aus der dritten Zeile der jeweiligen Abbildung ersieht man, dass die Log-Likelihoodfunktion $\ln L$ für steigende Werte von ν nach dem Erreichen des Maximums nur mehr fällt.

Eine weitere Erkenntnis aus der durchgeführten Simulationsstudie ist, dass zwar kleine Werte von ν_0 präzise geschätzt werden, dass aber mit wachsendem Parameterwert ν_0 , dessen Schätzung zunehmend ungenau wird. Dieser Tatbestand wird exemplarisch ebenfalls in den Abbildungen 9.2, 9.3 und 9.4 verdeutlicht. Hauptsächlich der dritten Zeile des jeweiligen Graphen ist zu entnehmen, dass $\ln L$ mit steigendem wahren Parameterwert ν_0 im Bereich des Maximums zunehmend flach

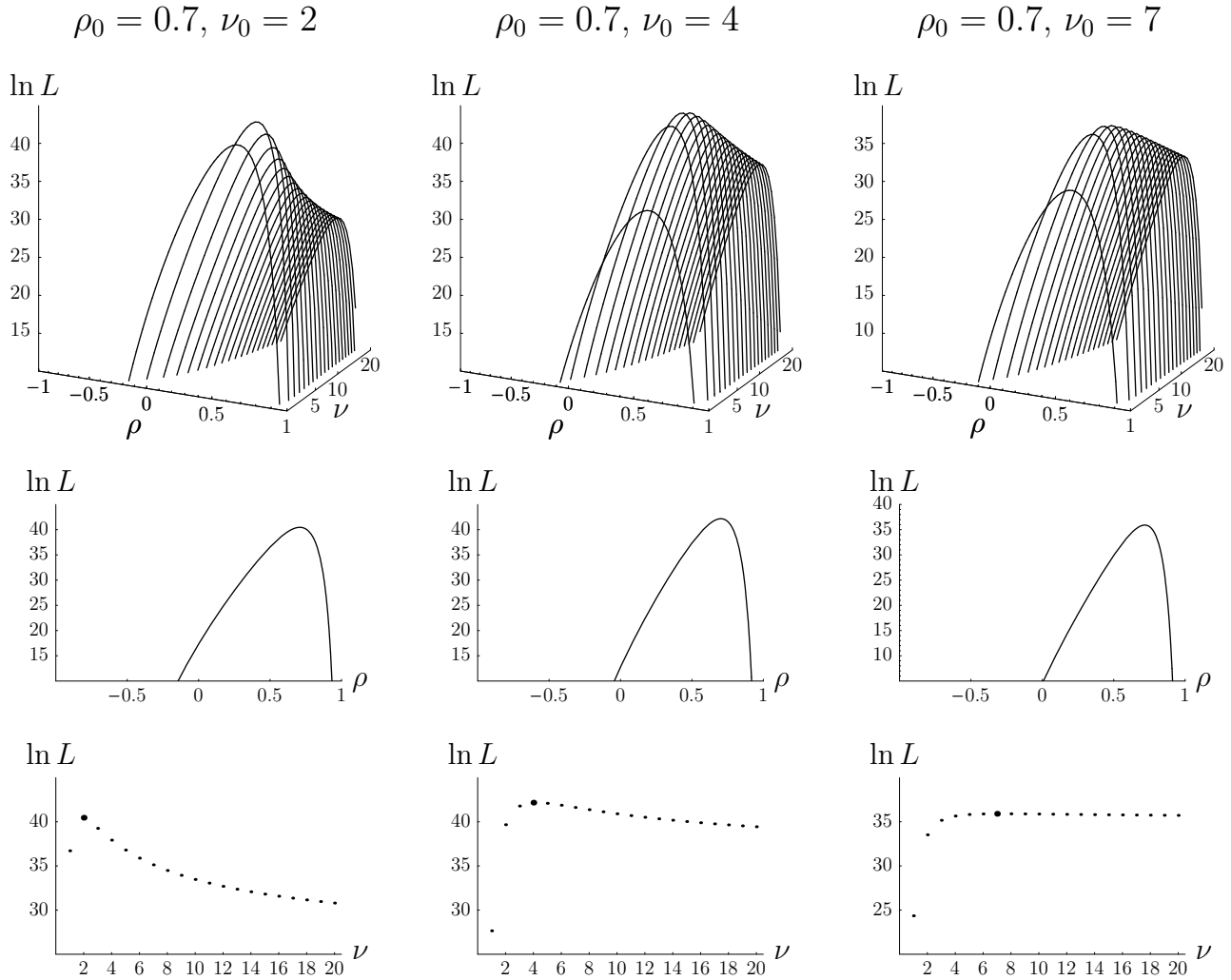


Abbildung 9.4: Log-Likelihoodfunktion (9.24) in Abhängigkeit von ρ und ν , bei wahren Parameterwerten ρ_0 von 0.7 und ν_0 von 2, 4 und 7.

wird, wodurch eine Abweichung des Schätzwerts vom wahren Wert wahrscheinlicher wird. Die Simulationsstudie hat weiter gezeigt, dass oben beschriebenes Verfahren für \mathbf{R} ohne Einschränkung gute Schätzergebnisse liefert. Dies kann beispielhaft wiederum den Abbildungen 9.2, 9.3 und 9.4 entnommen werden. Die Graphen in der zweiten Zeile zeigen, dass die Schätzungen der Korrelation kaum vom wahren Wert ρ_0 abweichen, und zwar unabhängig vom Wert von ν_0 . Dieses Erkenntnis ist bedeutsam, da in der nachfolgenden empirischen Studie das Hauptaugenmerk auf der Zusammenhangsstruktur und somit im Fall der t -Copula auf der Korrelationsmatrix \mathbf{R} liegt.

Generierung von Beobachtungen

Zur Generierung von Beobachtungen, die gemäß einer t -Copula mit Parametern \mathbf{R} und ν verteilt sind, kann auf eine Transformationsmethode zurückgegriffen

werden, die dem im Rahmen der Simulation der Normal-Copula vorgestellten Verfahren ähnlich sieht. Die ersten drei Schritte der beiden Algorithmen, in denen Realisierungen eines normalverteilten Zufallsvektors mit Korrelationsmatrix \mathbf{R} erzeugt werden, sind sogar identisch. Im Fall der t -Copula wird im Anschluss daran gemäss Gleichung (9.16) mit Hilfe einer χ^2 -verteilten Zufallszahl mit ν Freiheitsgraden eine Realisierung eines t -verteilten Zufallsvektors mit entsprechender Anzahl Freiheitsgrade erzeugt, dessen Komponenten in einem letzten Schritt mit der t -Verteilung mit ν Freiheitsgraden zu transformieren sind.

Der Algorithmus zur Simulation einer Realisierung eines N -dimensionalen Zufallsvektors, der gemäss t -Copula mit Korrelationsmatrix \mathbf{R} und ν Freiheitsgraden verteilt ist, kann zusammenfassend wie folgt angegeben werden:

Algorithmus 9.2

- Bilde die Cholesky-Zerlegung \mathbf{C} von \mathbf{R} .
- Generiere unabhängige Zufallszahlen $z_n \stackrel{\text{L}}{\sim} N(0, 1)$ ($n = 1, \dots, N$).
- Berechne $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{z}$.
- Generiere eine von z_1, \dots, z_N unabhängige Zufallszahl $s \stackrel{\text{L}}{\sim} \chi_\nu^2$.
- Berechne $\mathbf{x} = \mathbf{y} \sqrt{\frac{\nu}{s}}$.
- Berechne $\mathbf{u} = \mathbf{T}_\nu(\mathbf{x})$.

9.2 Farlie-Gumbel-Morgenstern-Copulafamilie

Eine weitere Copulafamilie, die hier dargestellt werden soll, ist die Farlie-Gumbel-Morgenstern-Copulafamilie (FGM-Copulafamilie), die durch einen speziellen Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$ charakterisiert ist. Für deren Herleitung sei auf NELSEN [122], S. 68 f., verwiesen. Die FGM-Copulafamilie gilt insbesondere aufgrund ihrer einfachen analytischen Form als attraktiv. Die bivariate FGM-Copula beispielsweise kann als

$$C_\theta^{\text{FGM}}(u, v) = uv + \theta uv(1 - u)(1 - v) \quad (9.25)$$

geschrieben werden, wobei der charakteristische Parameter θ im Intervall $[-1, 1]$ liegt. NELSEN [122], S. 87, präsentiert weiter folgende N -dimensionale Erweite-

rung der FGM-Copulafamilie ($N \geq 3$):

$$C_{\boldsymbol{\theta}}^{\text{FGM}}(\mathbf{u}) = u_1 u_2 \cdot \dots \cdot u_N \left(1 + \sum_{k=2}^N \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_k \leq N} \theta_{l_1 l_2 \dots l_k} (1 - u_{l_1})(1 - u_{l_2}) \cdot \dots \cdot (1 - u_{l_k}) \right). \quad (9.26)$$

Jede Copulafunktion in dieser Familie ist differenzierbar mit Dichtefunktion

$$\begin{aligned} c_{\boldsymbol{\theta}}^{\text{FGM}}(\mathbf{u}) &= \frac{\partial^N C_{\boldsymbol{\theta}}^{\text{FGM}}(\mathbf{u})}{\partial u_1 \dots \partial u_N} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^N \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_k \leq N} \theta_{l_1 l_2 \dots l_k} (1 - 2u_{l_1})(1 - 2u_{l_2}) \cdot \dots \cdot (1 - 2u_{l_k}). \end{aligned} \quad (9.27)$$

Damit ist die Dichtefunktion $c_{\boldsymbol{\theta}}^{\text{FGM}}$ linear in jeder Variablen u_1, \dots, u_N . Folglich ist die Dichtefunktion genau dann nichtnegativ auf I^N , wenn sie in allen 2^N Kanten von I^N nichtnegativ ist, was für die Parameter einer FGM-Copula folgende 2^N Restriktionen impliziert:

$$1 + \sum_{k=2}^N \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_k \leq N} \varepsilon_{l_1} \varepsilon_{l_2} \cdot \dots \cdot \varepsilon_{l_k} \theta_{l_1 l_2 \dots l_k} \geq 0 \quad (9.28)$$

mit $\varepsilon_{l_1}, \varepsilon_{l_2}, \dots, \varepsilon_{l_k} \in \{-1, 1\}$. Dies bedeutet unter anderem, dass jeder der $2^N - N - 1$ Parameter $\theta_{l_1 l_2 \dots l_k}$ die Bedingung $|\theta_{l_1 l_2 \dots l_k}| \leq 1$ erfüllen muss. Gilt $\theta_{l_1 l_2 \dots l_k} = 0$, dann entspricht die FGM-Copula gerade der Produkt-Copula.

Basierend auf (9.26) kann eine Unterfamilie der Farlie-Gumbel-Morgenstern-Copula mit lediglich $(N^2 - N)/2$ Parametern formuliert werden, die in der Folge als reduzierte Farlie-Gumbel-Morgenstern-Copula oder RFGM-Copula bezeichnet wird. Diese Unterfamilie erhält man, indem $\theta_{l_1 l_2 \dots l_k}$ für $k \geq 3$ gleich null gesetzt wird, womit jeder Parameter eindeutig jeweils zwei Variablen zugeordnet werden kann (vgl. JOE [93], S. 149):

$$C_{\boldsymbol{\theta}}^{\text{RFGM}}(\mathbf{u}) = u_1 u_2 \cdot \dots \cdot u_N \left(1 + \sum_{1 \leq l_1 < l_2 \leq N} \theta_{l_1 l_2} (1 - u_{l_1})(1 - u_{l_2}) \right). \quad (9.29)$$

Jede Copulafunktion in dieser Familie ist ebenfalls differenzierbar mit Dichtefunktion

$$c_{\boldsymbol{\theta}}^{\text{RFGM}}(\mathbf{u}) = \frac{\partial^N C_{\boldsymbol{\theta}}^{\text{RFGM}}(\mathbf{u})}{\partial u_1 \dots \partial u_N} = 1 + \sum_{1 \leq l_1 < l_2 \leq N} \theta_{l_1 l_2} (1 - 2u_{l_1})(1 - 2u_{l_2}). \quad (9.30)$$

Aufgrund der gleichen Argumentation wie zuvor müssen die Parameter der Copula $C_{\boldsymbol{\theta}}^{\text{RFGM}}$ den $(2^N)/2$ aus folgender Ungleichung ableitbaren Restriktionen genügen:

$$1 + \sum_{1 \leq l_1 < l_2 \leq N} \varepsilon_{l_1} \varepsilon_{l_2} \theta_{l_1 l_2} \geq 0, \quad \varepsilon_{l_1}, \varepsilon_{l_2}, \dots, \varepsilon_{l_k} \in \{-1, 1\}. \quad (9.31)$$

Für $N = 3$ sollen exemplarisch sowohl die Copulafunktion $C_{\boldsymbol{\theta}}^{\text{RFGM}}$ als auch die Parameterrestriktionen explizit geschrieben werden. Die RFGM-Copula hat die Form

$$C_{\boldsymbol{\theta}}^{\text{RFGM}}(u_1, u_2, u_3) = u_1 u_2 u_3 (1 + \theta_{12}(1 - u_1)(1 - u_2) + \theta_{13}(1 - u_1)(1 - u_3) + \theta_{23}(1 - u_2)(1 - u_3)), \quad (9.32)$$

die Restriktionen präsentieren sich als

$$1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \theta_{12} + \varepsilon_1 \varepsilon_3 \theta_{13} + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \theta_{23} \geq 0, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{-1, 1\}. \quad (9.33)$$

Setzt man weiter für ε_1 , ε_2 und ε_3 sämtliche möglichen Kombinationen von -1 und 1 ein, können die in (9.33) implizierten $(2^3)/2 = 4$ Parameterrestriktionen in folgendes System übersetzt werden:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \theta_{12} + \theta_{13} + \theta_{23} \geq -1 \\ (2) \quad & \theta_{12} - \theta_{13} - \theta_{23} \geq -1 \\ (3) \quad & -\theta_{12} + \theta_{13} - \theta_{23} \geq -1 \\ (4) \quad & -\theta_{12} - \theta_{13} + \theta_{23} \geq -1 \end{aligned} \quad (9.34)$$

Dieses lässt sich wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23} \leq 1, \\ -1 + |\theta_{12} + \theta_{23}| &\leq \theta_{13} \leq 1 - |\theta_{12} - \theta_{23}|. \end{aligned}$$

Ein erster Vorteil dieser Unterfamilie der Farlie-Gumbel-Morgenstern-Copula ist, dass die $(N^2 - N)/2$ Parameter der RFGM-Copula durch jeweils eine im folgenden Abschnitt herzuleitende bijektive Abbildung in die oberen (unteren) Dreieckselemente einer Rangkorrelationsmatrix von Kendall oder von Spearman überführt werden können. Damit kann die in Abschnitt 7.1.4 beschriebene Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse zur Schätzung des Parametervektors $\boldsymbol{\theta}$ verwendet werden. Ein zweiter Vorteil ist, dass die Zufallszahlengenerierung dieser Copula-Unterfamilie, wie noch ausgeführt wird, unproblematisch ist. Diese beiden Vorteile sind der Grund, weshalb in der in Kapitel 13 präsentierten empirischen Studie nur mit der RFGM-Copula und nicht mit der FGM-Copula gearbeitet wird.

Zusammenhangsmasse

Es soll zunächst die Beziehung zwischen dem Parameter θ der bivariaten FGM-Copula und Kendalls τ beziehungsweise Spearmans ϱ hergeleitet werden. Im Fall von Kendalls τ wird hierfür auf Gleichung (6.3a) aus Satz 6.2 zurückgegriffen. Mittels einfacher Berechnungen kann gezeigt werden, dass Kendalls τ zweier stetiger Zufallsvariablen mit zugehöriger Copula C_θ^{FGM} geschrieben werden kann als (vgl. LINDSKOG [111], S. 22)

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C_\theta^{\text{FGM}}(u, v) c_\theta^{\text{FGM}}(u, v) du dv - 1 = \frac{2\theta}{9}, \quad (9.35)$$

mit

$$c_\theta^{\text{FGM}}(u, v) = \frac{\partial^2 C_\theta^{\text{FGM}}(u, v)}{\partial u \partial v} = (1 + \theta(1 - 2u)(1 - 2v))$$

als bivariater Dichtefunktion von C_θ^{FGM} . Die Rangkorrelation von Spearman zweier stetiger Zufallsvariablen mit zugehöriger Copula C_θ^{FGM} , für deren Herleitung Gleichung (6.10a) aus Satz 6.3 verwendet wird, lautet weiter (vgl. LINDSKOG [111], S. 22)

$$\varrho = 12 \int_0^1 \int_0^1 uv c_\theta^{\text{FGM}}(u, v) du dv - 3 = \frac{\theta}{3}. \quad (9.36)$$

Es wurde bereits erwähnt, dass die $(N^2 - N)/2$ Parameter der RFGM-Copula durch eine bijektive Abbildung in die oberen beziehungsweise unteren Dreieckselemente einer Rangkorrelationsmatrix von Kendall oder von Spearman überführt werden können. Da zudem im zweidimensionalen Fall offenbar $C_\theta^{\text{RFGM}}(u, v) = C_\theta^{\text{FGM}}(u, v)$ gilt, können die zur Schätzung des Parametervektors $\boldsymbol{\theta}$ der N -dimensionalen RFGM-Copula mittels der in Abschnitt 7.1.4 beschriebenen Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse benötigten Beziehungen direkt aus (9.35) und (9.36) abgeleitet werden und lauten für $1 \leq i, j \leq N, i \neq j$

$$\tau_{ij} = \frac{2\theta_{ij}}{9} \quad \text{und} \quad \varrho_{ij} = \frac{\theta_{ij}}{3}.$$

An dieser Stelle sei daran erinnert, dass $\theta \in [-1, 1]$, was gemäss (9.35) und (9.36) bedeutet, dass $\tau \in [-2/9, 2/9]$ und $\varrho \in [-1/3, 1/3]$. Diese Einschränkung des Bereichs der modellierbaren Abhängigkeit gilt als Nachteil der Farlie-Gumbel-Morgenstern-Copula und limitiert bisweilen den Einsatz in praktischen Arbeiten.

Nachfolgende Berechnungen zeigen, dass zwei Zufallsvariablen, deren zugehörige Copulafunktion eine FGM-Copula ist, sowohl asymptotisch unabhängig im oberen

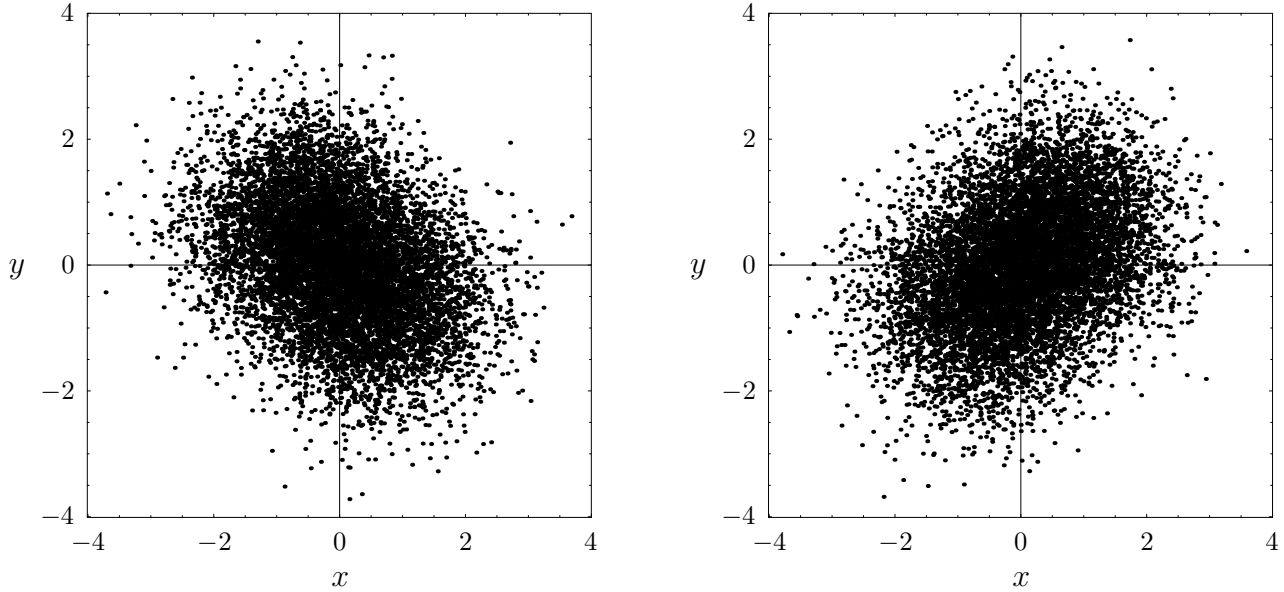


Abbildung 9.5: 10'000 simulierte Datenpaare einer bivariaten Verteilung mit standardnormalverteilten Randverteilungen und Copula C_θ^{FGM} . In der linken Graphik gilt $\theta = -1$, in der rechten Graphik beträgt $\theta = 1$.

als auch im unteren Rand sind:

$$\begin{aligned} \lambda_O &= \lim_{u \rightarrow 1-} \frac{1 - 2u + C_\theta^{\text{FGM}}(u, u)}{1 - u} = \lim_{u \rightarrow 1-} \frac{1 - 2u + u^2 + \theta u^2(1 - u)^2}{1 - u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1-} \frac{(1 - u)^2(1 + \theta u^2)}{1 - u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1-} (1 - u)(1 + \theta u^2) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{C_\theta^{\text{FGM}}(u, u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{u^2 + \theta u^2(1 - u)^2}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{u^2(1 + \theta(1 - u)^2)}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0+} u(1 + \theta(1 - u)^2) = 0. \end{aligned}$$

Abbildung 9.5 veranschaulicht diesen Sachverhalt. Die beiden Graphiken zeigen jeweils 10'000 simulierte Datenpaare einer zweidimensionalen Verteilung, die durch die Verbindung von zwei standardnormalverteilten Randverteilungen mit einer bivariaten FGM-Copula erzeugt wurde. In der linken Graphik weist der Copulaparameter θ den Wert -1 , in der rechten Graphik den Wert 1 auf. In beiden Schaubildern ist keine Tendenz zu gleichzeitig auftretenden „grossen“ beziehungsweise gleichzeitig auftretenden „kleinen“ Realisierungen der beiden involvierten Zufallsvariablen auszumachen. Dies kann als Indiz dafür aufgefasst werden, dass

die beiden Zufallsvariablen sowohl asymptotisch unabhängig im oberen als auch im unteren Rand sind. Mit -1 und 1 nimmt θ sowohl den kleinst- als auch den grösstmöglichen Wert an. Die beiden Graphiken in Abbildung 9.5 verdeutlichen somit auch den begrenzten Bereich der modellierbaren Abhängigkeit der FGM-Copula.

ML-Schätzung

Die zur Schätzung des Parametervektors θ der FGM-Copula benötigte Log-Likelihoodfunktion kann aus der Dichtefunktion c_{θ}^{FGM} gemäss (9.27) abgeleitet werden. Seien X_1, \dots, X_N Zufallsvariablen mit jeweiliger Verteilungsfunktion F_1, \dots, F_N und sei $\mathbf{U} = (F_1(X_1), \dots, F_N(X_N))'$. Dann kann die Log-Likelihoodfunktion einer FGM-Copula auf der Grundlage von T unabhängigen und identisch verteilten Realisierungen dieses Zufallsvektors \mathbf{U} geschrieben werden als

$$\ln L^{\text{FGM}}(\theta | \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_T) = \sum_{t=1}^T \ln \left(1 + \sum_{k=2}^N \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_k \leq N} \theta_{l_1 l_2 \dots l_k} (1 - 2u_{tl_1})(1 - 2u_{tl_2}) \cdot \dots \cdot (1 - 2u_{tl_k}) \right). \quad (9.37)$$

Die Log-Likelihoodfunktion einer RFGM-Copula kann aus der Dichtefunktion c_{θ}^{RFGM} gemäss (9.30) hergeleitet werden und kann auf der Grundlage von T unabhängigen und identisch verteilten Realisierungen des Zufallsvektors \mathbf{U} geschrieben werden als

$$\ln L^{\text{RFGM}}(\theta | \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_T) = \sum_{t=1}^T \ln \left(1 + \sum_{1 \leq l_1 < l_2 \leq N} \theta_{l_1 l_2} (1 - 2u_{tl_1})(1 - 2u_{tl_2}) \right). \quad (9.38)$$

Weder für die FGM-Copulafamilie noch für die Unterfamilie der RFGM-Copulas kann der ML-Schätzer des Parametervektors θ explizit angegeben werden. Damit ist für die konkrete Schätzung die Anwendung numerischer Methoden unumgänglich. Dabei sind bei der Modellschätzung die Restriktionen über die Copulaparameter gemäss (9.28) beziehungsweise (9.31) zu berücksichtigen. In GAUSSTM bietet sich hierfür der Einsatz des Zusatzpakets Constrained Maximum Likelihood an, in dem wie schon beim Zusatzpaket Maximum Likelihood das Newton-Verfahren oder wahlweise mehrere so genannte Quasi-Newton-Verfahren zur Anwendung gelangen, das aber, wie der Name vermuten lässt, zusätzlich das Einbringen von Parameterrestriktionen ermöglicht (vgl. APTECH SYSTEMS, INC. [8]).

Generierung von Beobachtungen einer RFGM-Copula

Es wurde bereits gesagt, dass ein Vorteil der RFGM-Copulafamilie die einfache Zufallszahlengenerierung ist. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle lediglich das Verfahren zur Generierung von Beobachtungen dargestellt, die gemäss einer RFGM-Copula mit Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$ verteilt sind. Dank der einfachen analytischen Form der RFGM-Copula kann der in Kapitel 8 vorgestellte, allgemein gültige Algorithmus 8.1 zur Zufallszahlengenerierung verwendet werden, der auf bedingten Copulafunktionen $C_n(u_n|u_1, \dots, u_{n-1})$ ($n = 2, \dots, N$) gemäss Gleichung (8.2) aufbaut. Für wachsende n sind dazu die Ausdrücke

$$\frac{\partial^{n-1} C_{n-1}^{\text{RFGM}}(u_1, \dots, u_{n-1})}{\partial u_1 \dots \partial u_{n-1}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^{n-1} C_n^{\text{RFGM}}(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_{n-1}}$$

herzuleiten. Für $n = 2$ lauten diese:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_1^{\text{RFGM}}(u_1)}{\partial u_1} &= 1 = c_2, \\ \frac{\partial C_2^{\text{RFGM}}(u_1, u_2)}{\partial u_1} &= -(\theta_{12}(1 - 2u_1))u_2^2 + \left(1 + (\theta_{12}(1 - 2u_1))\right)u_2 \\ &= -a_2u_2^2 + (c_2 + a_2)u_2 = -a_2u_2^2 + b_2u_2 \end{aligned}$$

mit $a_2 = \theta_{12}(1 - 2u_1)$ und $b_2 = a_2 + c_2$.

Für $n = 3$ können oben stehende Ausdrücke geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C_2^{\text{RFGM}}(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} &= 1 + \theta_{12}(1 - 2u_1)(1 - 2u_2) = c_3, \\ \frac{\partial^2 C_3^{\text{RFGM}}(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_1 \partial u_2} &= -(\theta_{13}(1 - 2u_1) + \theta_{23}(1 - 2u_2))u_3^2 \\ &\quad + \left((1 + \theta_{12}(1 - 2u_1)(1 - 2u_2))\right. \\ &\quad \left.+ (\theta_{13}(1 - 2u_1) + \theta_{23}(1 - 2u_2))\right)u_3 \\ &= -a_3u_3^2 + (c_3 + a_3)u_3 = -a_3u_3^2 + b_3u_3 \end{aligned}$$

mit $a_3 = \theta_{13}(1 - 2u_1) + \theta_{23}(1 - 2u_2)$ und $b_3 = a_3 + c_3$.

Führt man in dieser Weise fort, erhält man für ein beliebiges $n \in \{2, \dots, N\}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^{n-1} C_{n-1}^{\text{RFGM}}(u_1, \dots, u_{n-1})}{\partial u_1 \dots \partial u_{n-1}} = \\
& = 1 + \theta_{12}(1 - 2u_1)(1 - 2u_2) + \dots + \theta_{1(n-1)}(1 - 2u_1)(1 - 2u_{n-1}) \\
& \quad + \theta_{23}(1 - 2u_2)(1 - 2u_3) + \dots + \theta_{2(n-1)}(1 - 2u_2)(1 - 2u_{n-1}) \\
& \quad + \dots \\
& \quad + \theta_{(n-2)(n-1)}(1 - 2u_{n-2})(1 - 2u_{n-1}) \\
& = c_n, \\
& \frac{\partial^{n-1} C_n^{\text{RFGM}}(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_{n-1}} = \\
& = -(\theta_{1n}(1 - 2u_1) + \dots + \theta_{(n-1)n}(1 - 2u_{n-1}))u_n^2 \\
& \quad + \left(c_n + (\theta_{1n}(1 - 2u_1) + \dots + \theta_{(n-1)n}(1 - 2u_{n-1})) \right) u_n \\
& = -a_n u_n^2 + (c_n + a_n)u_n = -a_n u_n^2 + b_n u_n.
\end{aligned}$$

mit $a_n = \theta_{1n}(1 - 2u_1) + \dots + \theta_{(n-1)n}(1 - 2u_{n-1})$ und $b_n = a_n + c_n$.

Gemäss Gleichung (8.2) ist eine bedingte RFGM-Copulafunktion somit von der Form

$$C_n(u_n | u_1, \dots, u_{n-1}) = \frac{-a_n u_n^2 + b_n u_n}{c_n}. \quad (9.39)$$

Hierbei sind u_1, \dots, u_{n-1} gemäss Algorithmus 8.1 jeweils aus den vorangegangenen Schritten bekannt.

In Kapitel 8 wurde erläutert, dass zur Erzeugung einer Zufallszahl $u_n \stackrel{\text{L}}{\sim} C_n(u_n | u_1, \dots, u_{n-1})$ zunächst eine von u_1, \dots, u_{n-1} unabhängige, $U[0, 1]$ -verteilte Zufallsvariable v zu generieren und anschliessend der Ausdruck $u_n = C_n^{-1}(v | u_1, \dots, u_{n-1})$ zu bestimmen ist. Unter Verwendung von (9.39) erhält man aus

$$C_n(u_n | u_1, \dots, u_{n-1}) = \frac{-a_n u_n^2 + b_n u_n}{c_n} = v$$

gerade

$$u_n = C_n^{-1}(v | u_1, \dots, u_{n-1}) = \frac{-b_n \pm \sqrt{b_n^2 - 4a_n c_n v}}{-2a_n},$$

wobei das Vorzeichen von u_n so zu wählen ist, dass $u_n \in [0, 1]$.

9.3 Archimedische Copulafamilie

Die bisher dargestellten Copulafamilien sind alle symmetrisch in dem Sinne, dass sie jeweils gleiche asymptotische obere und asymptotische untere Randabhängigkeit implizieren. Gerade im Finanzbereich kann aber beobachtet werden – man denke etwa an die Börsenkrachs von 1929 und 1987, den „Mini-Crash“ von 1989 (für eine detaillierte Analyse sei auf ASCHINGER [11] verwiesen) oder an das so genannte „Platzen der New-Economy-Blase“ im zweiten Quartal des Jahres 2000 (vgl. etwa STADLER [151]) –, dass grosse Verluste allgemein eine stärkere Abhängigkeit aufweisen als grosse Gewinne. Eine Copulafamilie, die das Modellieren solcher Asymmetrien erlaubt, ist die so genannte archimedische Copulafamilie. Diese Copulafamilie umfasst eine Vielzahl Subfamilien. Für eine Übersicht sei etwa auf NELSEN [122], S. 89 ff., verwiesen. Für die nachfolgende empirische Untersuchung wurden

- die Gumbel-Copulafamilie,
- die Kimeldorf-Sampson-Copulafamilie und
- die Nelsen-Copulafamilie

ausgewählt. Die Kriterien, die zur Wahl dieser parametrischen Subfamilien geführt haben, sind die Erweiterbarkeit auf $N > 2$ Dimensionen, die gute Praktikabilität der Schätzung der charakteristischen Parameter und der Zufallszahlengenerierung und die noch zu kommentierenden im Hinblick auf die Anwendung im Finanzbereich interessanten Eigenschaften. In der Folge wird zunächst allgemein die Theorie der archimedischen Copulafamilie präsentiert, gefolgt von der Darstellung dieser drei spezifischen parametrischen Copulafamilien.

Zur Definition der archimedischen Copulafamilie wird der Ausdruck der Pseudo-Inversen einer stetigen streng monoton fallenden Funktion benötigt.

Definition 9.2 Sei $\varphi : I \longrightarrow [0, \infty]$ eine stetige streng monoton fallende Funktion, so dass $\varphi(1) = 0$. Die *Pseudo-Inverse* von φ ist die Funktion $\varphi^{[-1]} : [0, \infty] \longrightarrow I$ definiert durch:

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases} \quad (9.40)$$

Demnach ist $\varphi^{[-1]}$ stetig und monoton fallend auf $[0, \infty]$ und streng monoton fallend auf $[0, \varphi(0)]$. Weiter gilt $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$ auf I und

$$\begin{aligned}\varphi\left(\varphi^{[-1]}(t)\right) &= \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ \varphi(0), & \varphi(0) \leq t \leq \infty, \end{cases} \\ &= \min(t, \varphi(0)).\end{aligned}$$

Ist φ an einer Stelle t_0 a priori nicht definiert, gilt aber $\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = \infty$, so wird im Folgenden stets $\varphi(t_0) = \infty$ gesetzt. Gilt $\varphi(0) = \infty$, dann ist $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

Der Ausdruck der Pseudo-Inversen erlaubt die Formulierung des folgenden Satzes:

Satz 9.1 *Sei $\varphi : I \longrightarrow [0, \infty]$ eine stetige streng monoton fallende Funktion, so dass $\varphi(1) = 0$ und sei $\varphi^{[-1]}$ die Pseudo-Inverse von φ gemäss (9.40). Dann erfüllt die Funktion $C : I^2 \longrightarrow I$*

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}[\varphi(u) + \varphi(v)] \quad (9.41)$$

genau dann die in Definition 5.1 genannten Bedingungen (5.3a) bis (5.3c) an eine bivariate Copulafunktion, wenn φ konvex ist.

Für den Beweis sei auf NELSEN [122], S. 91, verwiesen. Unter Verwendung von Satz 9.1 können bivariate archimedische Copulafunktionen wie folgt definiert werden:

Definition 9.3 Eine bivariate Copulafunktion der Form (9.41) heisst *bivariate archimedische Copulafunktion*. Die Funktion φ wird *Generator* dieser bivariaten Copulafunktion genannt.

Gilt $\varphi(0) = \infty$ spricht man von φ als *strikt Generator*. In diesem Fall ist $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$, und $C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$ wird *strikte bivariate archimedische Copulafunktion* genannt. Abbildung 9.6 zeigt Generatorfunktionen und deren (Pseudo-)Inversen im strikten und nicht-strikten Fall.

Es wird nun die Form der Generatorfunktion und der bivariaten Copulafunktion für die drei ausgewählten archimedischen Copulafamilien präsentiert. Für diese drei Subfamilien handelt es sich bei den Generatorfunktionen jeweils um einparametrische Funktionen.

Gumbel-Copula Die Generatorfunktion der Gumbel-Copula lautet

$$\varphi(t) = (-\ln t)^\theta \quad (9.42)$$

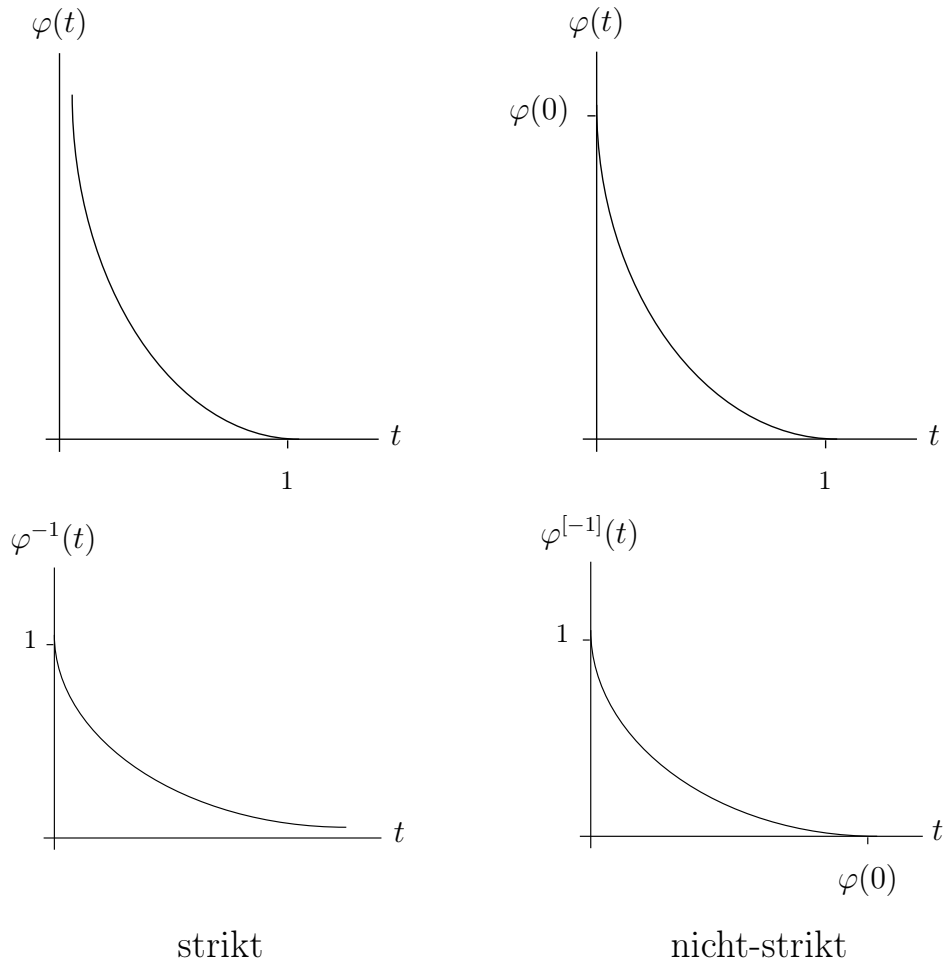


Abbildung 9.6: Strikte und nicht-strikte Generatorfunktionen und deren (Pseudo-) Inversen.

für $\theta \in [1, \infty)$. Da $\varphi(0) = \infty$, ist φ strikt und es gilt

$$\varphi^{[-1]}(t) = \varphi^{-1}(t) = \exp\left(-t^{1/\theta}\right). \quad (9.43)$$

Hiermit ergibt sich die bivariate Gumbel-Copula

$$C_{\theta}^{\text{Gu}}(u, v) = \exp\left(-\left[(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}\right]^{1/\theta}\right). \quad (9.44)$$

Als Grenzen von C_{θ}^{Gu} erhält man mit $\theta = 1$ gerade den Ausdruck der Produkt-Copula C^{\perp} und für $\theta \rightarrow \infty$ die Fréchet-Hoeffding-Obergrenze C^+ (vgl. NELSEN [122], S. 94 f.). \diamond

Kimeldorf-Sampson-Copula Mit der Generatorfunktion

$$\varphi(t) = t^{-\theta} - 1, \quad (9.45)$$

für $\theta \in (0, \infty)$ lässt sich die Kimeldorf-Sampson-Copula (KS-Copula) erzeugen. Es gilt wiederum $\varphi(0) = \infty$, womit φ ein strikter Generator ist und

$$\varphi^{[-1]}(t) = \varphi^{-1}(t) = (1 + t)^{-1/\theta} \quad (9.46)$$

gilt. Die zweidimensionale Kimeldorf-Sampson-Copula kann somit als

$$C_{\theta}^{\text{KS}}(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta} \quad (9.47)$$

geschrieben werden. Für $\theta \rightarrow 0$ entspricht die Kimeldorf-Sampson-Copula C_{θ}^{KS} der Produkt-Copula C^{\perp} , für $\theta \rightarrow \infty$ der Fréchet-Hoeffding-Obergrenze C^+ (vgl. JOE [93], S. 141). \diamond

Nelsen-Copula Die dritte ausgewählte archimedische Copulafunktion wird mit der Generatorfunktion

$$\varphi(t) = (t^{-1} - 1)^{\theta} \quad (9.48)$$

für $\theta \in [1, \infty)$ erzeugt. Da erneut $\varphi(0) = \infty$ gilt, ist

$$\varphi^{[-1]}(t) = \varphi^{-1}(t) = \left(1 + t^{1/\theta}\right)^{-1}, \quad (9.49)$$

womit sich die strikte bivariate Copula

$$C_{\theta}^{\text{Ne}}(u, v) = \left(1 + \left[(u^{-1} - 1)^{\theta} + (v^{-1} - 1)^{\theta}\right]^{1/\theta}\right)^{-1}, \quad (9.50)$$

ergibt, die von NELSEN [122], S. 94 f., eingeführt und deshalb nachfolgend Nelsen-Copula genannt wird.

Für $\theta = 1$ ergibt die Nelsen-Copula den Ausdruck $C_{\theta}^{\text{Ne}}(u, v) = uv/(u + v - uv)$, für $\theta \rightarrow \infty$ die Fréchet-Hoeffding-Obergrenze (vgl. NELSEN [122], S. 94 f.). \diamond

Nach der Einführung der allgemeinen bivariaten archimedischen Copulafamilie und dreier Subfamilien sollen nun multivariate Erweiterungen dargestellt werden. Einen ersten Ansatz bildet die Erweiterung des in (9.41) beschriebenen Konstruktionsprinzips der bivariaten archimedischen Copulafunktion in N Dimensionen:

$$C(\mathbf{u}) = \varphi^{[-1]}[\varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \dots + \varphi(u_N)]. \quad (9.51)$$

Man betrachtet nun die Funktion $\varphi(t) = 1 - t$. Diese ist stetig, streng monoton fallend und konvex mit $\varphi(1) = 0$ und erfüllt damit die Anforderungen gemäss Satz 9.1 an eine Generatorfunktion im bivariaten Fall. Es kann einfach gezeigt werden, dass gerade die N -dimensionale Fréchet-Hoeffding-Untergrenze $C_N^{-}(\mathbf{u})$

gemäss (5.19a) resultiert, wenn man diese Generatorfunktion und die entsprechende Pseudo-Inverse in (9.51) einsetzt. Wie in Abschnitt 5.4 erläutert wurde, ist $C_N^-(\mathbf{u})$ für $N > 2$ keine Copulafunktion. Damit stellt sich die Frage, welche Bedingungen zusätzlich zu den in Satz 9.1 genannten an eine Funktion φ gestellt werden müssen, um sicherzustellen, dass $C(\mathbf{u})$ in (9.51) für $N > 2$ stets eine Copulafunktion ist. In diesem Kontext benötigt man den Begriff der vollständigen Monotonie, der bei WIDDER [162], S. 144 ff., eingeführt und bei NELSEN [122], S. 122, aufgegriffen wird.

Definition 9.4 Eine Funktion $\phi(t)$ ist *vollständig monoton* auf einem Intervall J , falls sie auf J stetig und unendlich oft differenzierbar ist und die Ableitungen im Vorzeichen alternieren, das heisst, dass

$$(-1)^k \phi^{(k)} = (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \phi(t) \geq 0 \quad (9.52)$$

für sämtliche t im Innern von J und für $k = 0, 1, 2, \dots$.

WIDDER [162] zeigt, dass ϕ auf $[0, \infty]$ identisch null sein muss, falls $\phi(t)$ auf $[0, \infty]$ vollständig monoton ist und $\phi(c) = 0$ für irgend ein (endliches) $c > 0$ gilt. Damit eine Funktion φ als Generatorfunktion gemäss (9.41) verwendet werden kann, muss laut Satz 9.1 $\varphi(1) = 0$ gelten, was für die entsprechende Pseudo-Inverse $\varphi^{[-1]}(0) = 1$ impliziert. Aufgrund dessen und aufgrund der obigen Aussage muss eine vollständig monotone Pseudo-Inverse auf $[0, \infty]$ positiv sein. Dies wiederum bedeutet, dass φ strikt ist und $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$ gilt.

Nachfolgender Satz nennt notwendige und hinreichende Bedingungen für einen strikten Generator φ , die sicherstellen, dass dieser zur Erzeugung von archimedischen N -Copulas von der in (9.51) beschriebenen Form für sämtliche $N \geq 2$ eingesetzt werden kann (vgl. NELSEN [122], S. 122).

Satz 9.2 Sei $\varphi : I \longrightarrow [0, \infty]$ eine stetige streng monoton fallende Funktion, so dass $\varphi(0) = \infty$ und $\varphi(1) = 0$ und sei φ^{-1} die Inverse von φ . Dann erfüllt die in (9.51) gegebene Funktion $C : I^N \longrightarrow I$ genau dann die in Definition 5.4 genannten Bedingungen (5.14a) bis (5.14c) an eine N -Copula, wenn φ^{-1} auf $[0, \infty)$ vollständig monoton ist.

Es kann gezeigt werden, dass die Inversen der Generatorfunktionen der Gumbel-Copula (9.42), der Kimeldorf-Sampson-Copula (9.45) und der Nelsen-Copula (9.48) vollständig monoton sind (vgl. NELSEN [122], S. 122 ff.), womit sie laut Satz 9.2 zur Erzeugung entsprechender N -dimensionaler Copulafunktionen für sämtliche $N \geq 2$ verwendet werden können. Dem in Gleichung (9.51) beschriebenen Konstruktionsprinzip folgend können diese N -Copulas wie folgt geschrieben werden:

Gumbel-Copula

$$C_{\theta}^{\text{Gu}}(\mathbf{u}) = \exp \left(- \left[(-\ln u_1)^{\theta} + \dots + (-\ln u_N)^{\theta} \right]^{1/\theta} \right). \quad (9.53)$$

◇

Kimeldorf-Sampson-Copula

$$C_{\theta}^{\text{KS}}(\mathbf{u}) = (u_1^{-\theta} + \dots + u_N^{-\theta} - N + 1)^{-1/\theta}. \quad (9.54)$$

◇

Nelsen-Copula

$$C_{\theta}^{\text{KS}}(\mathbf{u}) = \left(1 + \left[(u_1^{-1} - 1)^{\theta} + \dots + (u_N^{-1} - 1)^{\theta} \right]^{1/\theta} \right)^{-1}. \quad (9.55)$$

◇

Es fällt auf, dass sämtliche archimedischen N -Copulas vom Typ (9.51) unabhängig von der Anzahl Dimensionen N mit einer einzigen Generatorfunktion φ konstruiert werden, was für die Gumbel-, die KS- und die Nelsen-Copula bedeutet, dass diese über einen einzigen Parameter θ verfügen. Dieser Umstand schränkt die Möglichkeiten der Zusammenhangsmodellierung dieser Klasse von archimedischen N -Copulas ein.

Aus diesem Grund wird nachfolgend eine Erweiterung der archimedischen Copulafamilie in N Dimensionen angegeben, welche die Konstruktion von N -Copulas mit unterschiedlichen Generatorfunktionen ermöglicht. Da eine solche Verallgemeinerung die Copulafunktion (9.51) als Spezialfall enthalten soll, müssen die in Satz 9.2 für Gleichung (9.51) formulierten Bedingungen weiterhin erfüllt sein. Damit beschränkt man sich auf strikte Generatorfunktionen. Zum leichteren Verständnis sollen zunächst die entsprechenden Copulafunktionen für $N = 3$ und $N = 4$ angegeben werden:

$$C(u_1, u_2, u_3) = \varphi_1^{-1} \left[\varphi_1 \left(\varphi_2^{-1} [\varphi_2(u_1) + \varphi_2(u_2)] \right) + \varphi_1(u_3) \right],$$

$$C(u_1, u_2, u_3, u_4) = \varphi_1^{-1} \left[\varphi_1 \left(\varphi_2^{-1} \left[\varphi_2 \left(\varphi_3^{-1} [\varphi_3(u_1) + \varphi_3(u_2)] \right) + \varphi_2(u_3) \right] \right) + \varphi_1(u_4) \right].$$

Führt man in dieser Weise fort, stellt sich diese verallgemeinerte multivariate archimedische Copula für ein beliebiges N als

$$C(\mathbf{u}) = \varphi_1^{-1} \left[\varphi_1 \left(\varphi_2^{-1} \left[\varphi_2 \left(\dots \left(\varphi_{N-1}^{-1} [\varphi_{N-1}(u_1) + \varphi_{N-1}(u_2)] \right. \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left. + \varphi_{N-2}(u_3) \right] \right) + \dots + \varphi_2(u_{N-1}) \right] \right) + \varphi_1(u_N) \right] \quad (9.56a)$$

dar, wobei $\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}$ strikte Generatorfunktionen bezeichnen. Gleichung (9.56a) kann auch geschrieben werden als

$$C(\mathbf{u}) = C_1(C_2(\dots(C_{N-1}(u_1, u_2), u_3), \dots, u_N), \quad (9.56b)$$

wobei C_n eine mit φ_n erzeugte strikte archimedische Copula ist ($n = 1, \dots, N-1$). Setzt man sämtliche $N-1$ Generatorfunktionen in (9.56a) gleich φ , erhält man gerade den in Gleichung (9.51) beschriebenen Spezialfall.

Damit $C(\mathbf{u})$ in (9.56a) stets eine Copulafunktion ist, müssen die Generatorfunktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}$ zusätzlich weiteren Bedingungen genügen (vgl. JOE [93], S. 87 f.). Zu deren Formulierung wird die Funktionsklasse \mathcal{L}_m , die eine Teilklasse der vollständig monotonen Funktionen gemäss Definition 9.4 ist, und die Funktionsklasse \mathcal{L}_m^* eingeführt. Es sei

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m = \{ \phi : [0, \infty) \longrightarrow I \mid \phi(0) = 1, \phi(\infty) = 0, \\ (-1)^k \phi^{(k)} \geq 0, k = 1, \dots, m \} \end{aligned}$$

für $m = 1, 2, \dots, \infty$. Weiter sei

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m^* = \{ \omega : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty) \mid \omega(0) = 0, \omega(\infty) = \infty, \\ (-1)^{k-1} \omega^{(k)} \geq 0, k = 1, \dots, m \} \end{aligned}$$

für $m = 1, 2, \dots, \infty$. Man stellt fest, dass für die Generatorfunktion φ einer strikten archimedischen Copula $\varphi^{-1} \in \mathcal{L}_1$ gilt. Weiter sieht man, dass die Bedingung $\varphi^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$ notwendig und hinreichend ist, damit (9.51) eine N -Copula ist.

Damit nun die verallgemeinerte N -dimensionale Copula $C(\mathbf{u})$ in (9.56a) tatsächlich eine Copulafunktion ist, muss weiter gelten, dass (vgl. JOE [93], S. 88)

$$\omega_n = \varphi_n \circ \varphi_{n+1}^{-1} \in \mathcal{L}_\infty^*. \quad (9.57)$$

Für die Gumbel- die KS- und die Nelsen-Copulafamilie sollen nun die zusätzlichen Bedingungen für die jeweils $N-1$ Generatorfunktionen hergeleitet werden, die sicherstellen, dass diese zur Konstruktion einer N -dimensionalen Copula der Form (9.56a) verwendet werden können.

Gumbel-Copula Für die Generatorfunktionen $\varphi_n(t) = (-\ln t)^{\theta_n}$ der Gumbel-Copula mit $\theta_n \in [1, \infty)$ gilt

$$\omega_n(t) = \varphi_n(\varphi_{n+1}^{-1}(t)) = t^{\frac{\theta_n}{\theta_{n+1}}}, \quad n = 1, \dots, N-2.$$

Somit gilt $\omega_n(0) = 0$ und $\omega_n(\infty) = \infty$ für alle n , und die k -te Ableitung von $\omega_n(t)$ kann als

$$\omega_n^{(k)}(t) = \left(\frac{\theta_n}{\theta_{n+1}} \right) \left(\frac{\theta_n}{\theta_{n+1}} - 1 \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{\theta_n}{\theta_{n+1}} - k + 1 \right) t^{\frac{\theta_n}{\theta_{n+1}} - k}$$

geschrieben werden. Folglich ist die Bedingung (9.57) genau dann erfüllt, wenn $\theta_n/\theta_{n+1} \leq 1$ gilt. Die Erweiterung der Gumbel-Copula gemäss (9.56a) soll wegen der umständlichen Notation zunächst für $N = 3$ geschrieben werden:

$$C_{\boldsymbol{\theta}}^{\text{Gu}}(u_1, u_2, u_3) = \exp \left(- \left[\left[(-\ln u_1)^{\theta_2} + (-\ln u_2)^{\theta_2} \right]^{\frac{\theta_1}{\theta_2}} + (-\ln u_3)^{\theta_1} \right]^{\frac{1}{\theta_1}} \right)$$

Hierbei muss wie oben hergeleitet $\theta_1 \leq \theta_2$ gelten. Für ein beliebiges $N \geq 2$ lautet die verallgemeinerte multivariate Gumbel-Copula

$$C_{\boldsymbol{\theta}}^{\text{Gu}}(\mathbf{u}) = \exp \left(- \left[\dots \left[(-\ln u_1)^{\theta_{N-1}} + (-\ln u_2)^{\theta_{N-1}} \right]^{\frac{\theta_{N-2}}{\theta_{N-1}}} + (-\ln u_3)^{\theta_{N-2}} \right]^{\frac{\theta_{N-3}}{\theta_{N-2}}} \right. \\ \left. + \dots + (-\ln u_{N-1})^{\theta_2} \right]^{\frac{\theta_1}{\theta_2}} + (-\ln u_N)^{\theta_1} \right]^{\frac{1}{\theta_1}} \quad (9.58)$$

mit $\theta_1 \leq \dots \leq \theta_{N-1}$. ◇

Kimeldorf-Sampson-Copula Für die Generatorfunktionen $\varphi_n(t) = t^{-\theta_n} - 1$ der Kimeldorf-Sampson-Copula mit $\theta_n \in (0, \infty)$ gilt

$$\omega_n(t) = \varphi_n(\varphi_{n+1}^{-1}(t)) = (1+t)^{\frac{\theta_n}{\theta_{n+1}}} - 1, \quad n = 1, \dots, N-2.$$

Somit gilt $\omega_n(0) = 0$ und $\omega_n(\infty) = \infty$ für alle n . Weiter präsentiert sich die k -te Ableitung von $\omega_n(t)$ als

$$\omega_n^{(k)}(t) = \left(\frac{\theta_n}{\theta_{n+1}} \right) \left(\frac{\theta_n}{\theta_{n+1}} - 1 \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{\theta_n}{\theta_{n+1}} - k + 1 \right) (1+t)^{\frac{\theta_n}{\theta_{n+1}} - k},$$

so dass die Bedingung (9.57) genau dann erfüllt ist, wenn $\theta_n/\theta_{n+1} \leq 1$. Die Erweiterung der KS-Copula gemäss (9.56a) lautet folglich für $N = 3$

$$C_{\boldsymbol{\theta}}^{\text{KS}}(u_1, u_2, u_3) = \left(\left(u_1^{-\theta_2} + u_2^{-\theta_2} - 1 \right)^{\frac{\theta_1}{\theta_2}} + u_3^{-\theta_1} - 1 \right)^{-\frac{1}{\theta_1}}$$

mit $\theta_1 \leq \theta_2$ und für ein beliebiges $N \geq 2$

$$C_{\boldsymbol{\theta}}^{\text{KS}}(\mathbf{u}) = \left(\dots \left(u_1^{-\theta_{N-1}} + u_2^{-\theta_{N-1}} - 1 \right)^{\frac{\theta_{N-2}}{\theta_{N-1}}} + u_3^{-\theta_{N-2}} - 1 \right)^{\frac{\theta_{N-3}}{\theta_{N-2}}} \\ + \dots + u_{N-1}^{-\theta_2} - 1 \right)^{\frac{\theta_1}{\theta_2}} + u_N^{-\theta_1} - 1 \right)^{-\frac{1}{\theta_1}} \quad (9.59)$$

mit $\theta_1 \leq \dots \leq \theta_{N-1}$. ◇

Nelsen-Copula Für die Generatorfunktion $\varphi_n(t) = (t^{-1} - 1)^{\theta_n}$ der Nelsen-Copula mit $\theta_n \in [1, \infty)$ gilt wie für die zuvor besprochene Gumbel-Copula

$$\omega_n(t) = \varphi_n(\varphi_{n+1}^{-1}(t)) = t^{\frac{\theta_n}{\theta_{n+1}}}, \quad n = 1, \dots, N-2,$$

womit sich die gleichen Schlussfolgerungen wie oben ergeben. Die Erweiterung der Nelsen-Copula gemäss (9.56a) lautet somit für $N = 3$

$$C_{\boldsymbol{\theta}}^{\text{Ne}}(u_1, u_2, u_3) = \left(1 + \left[[(u_1^{-1} - 1)^{\theta_2} + (u_2^{-1} - 1)^{\theta_2}]^{\frac{\theta_1}{\theta_2}} + (u_3^{-1} - 1)^{\theta_1} \right]^{\frac{1}{\theta_1}} \right)^{-1}$$

mit $\theta_1 \leq \theta_2$ und für ein beliebiges $N \geq 2$

$$\begin{aligned} C_{\boldsymbol{\theta}}^{\text{Ne}}(\mathbf{u}) = & \left(1 + \left[\dots [(u_1^{-1} - 1)^{\theta_{N-1}} + (u_2^{-1} - 1)^{\theta_{N-1}}]^{\frac{\theta_{N-2}}{\theta_{N-1}}} + (u_3^{-1} - 1)^{\theta_{N-2}} \right]^{\frac{\theta_{N-3}}{\theta_{N-2}}} \right. \\ & \left. + \dots + (u_{N-1}^{-1} - 1)^{\theta_2} \right]^{\frac{\theta_1}{\theta_2}} + (u_N^{-1} - 1)^{\theta_1} \Big]^{\frac{1}{\theta_1}} \Big)^{-1} \end{aligned} \quad (9.60)$$

mit $\theta_1 \leq \dots \leq \theta_{N-1}$. ◇

Zusammenhangsmasse

In Abschnitt 6.2.1 wurde aufgezeigt, dass zur Ermittlung von Kendalls τ auf der Grundlage einer Copulafunktion allgemein das Doppelintegral in (6.3a) zu lösen ist. Für archimedische Copulas ist die Herleitung einfacher, da Kendalls τ aus der jeweiligen Generatorfunktion abgeleitet werden kann, die im Gegensatz zu einer Copulafunktion über nur ein Argument verfügt. Dies wird im nachfolgenden Satz beschrieben:

Satz 9.3 *Seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen mit zugehöriger archimedischer Copulafunktion C , die mit der Generatorfunktion φ erzeugt wurde. Dann gilt für Kendalls τ für X und Y*

$$\tau_{XY} = \tau_C = \tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt. \quad (9.61)$$

Der Beweis findet sich bei NELSEN [122] auf Seite 130.

Gumbel-Copula Mit Hilfe von Gleichung (9.61) soll Kendalls τ für zwei stetige Zufallsvariablen hergeleitet werden, deren Zusammenhangsstruktur durch eine bivariate Gumbel-Copula beschrieben wird. Für die Generatorfunktion $\varphi(t)$ der Gumbel-Copula, $\varphi(t) = (-\ln t)^\theta$, gilt $\varphi(t)/\varphi'(t) = (t \ln t)/\theta$. Damit erhält man für Kendalls τ

$$\begin{aligned}\tau &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{t \ln t}{\theta} dt = 1 + \frac{4}{\theta} \left(\left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{2} dt \right) \\ &= 1 + \frac{4}{\theta} \left(0 - \frac{1}{4} \right) = 1 - \frac{1}{\theta}.\end{aligned}\tag{9.62}$$

◇

Kimeldorf-Sampson-Copula Betrachtet sei nun die Kimeldorf-Sampson-Copula mit Generator $\varphi(t) = t^{-\theta} - 1$. Der Quotient $\varphi(t)/\varphi'(t)$ lautet $(t^{\theta+1} - t)/\theta$, womit Kendalls τ für zwei stetige Zufallsvariablen mit bivariater KS-Copula gemäss (9.61) geschrieben werden kann als

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{t^{\theta+1} - t}{\theta} dt = 1 + \frac{4}{\theta} \left(\frac{1}{\theta+2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\theta}{\theta+2}.\tag{9.63}$$

◇

Nelsen-Copula Für die Generatorfunktion der Nelsen-Copula $\varphi(t) = (t^{-1} - 1)^\theta$ gilt weiter $\varphi(t)/\varphi'(t) = (t^2 - t)/\theta$. Setzt man diesen Ausdruck in (9.61) ein, erhält man Kendalls τ für zwei stetige Zufallsvariablen, deren Zusammenhangsstruktur durch eine bivariate Nelsen-Copula beschrieben ist, mit

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{t^2 - t}{\theta} dt = 1 + \frac{4}{\theta} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = 1 - \frac{2}{3\theta}.\tag{9.64}$$

◇

Wie in Abschnitt 7.1.4 beschrieben wurde, können diese Beziehungen verwendet werden, um die Parameter θ der jeweiligen Copulafunktionen aus den entsprechenden einfach zu schätzenden Rangkorrelationskoeffizienten von Kendall zu bestimmen.

Hierbei ist zu beachten, dass eine N -dimensionale Copulafunktion im Fall des Modells (9.51) mit einer einzigen Generatorfunktion und im Fall des Modells (9.56a) mit $N - 1$ unterschiedlichen Generatorfunktionen erzeugt wird. Geht man weiter davon aus, dass die Generatorfunktionen, wie dies für die drei gewählten archimedischen Copulas der Fall ist, über einen einzigen Parameter θ verfügen, so sind im Modell (9.51) ein Parameter und im Modell (9.56a) $N - 1$ Parameter zu schätzen. Hierzu stehen $(N^2 - N)/2$ Gleichungen zur Verfügung, welche die Beziehungen zwischen Copulaparametern und Rangkorrelationskoeffizienten beschreiben. Diese

beruhen auf den $(N^2 - N)/2$ Rangkorrelationskoeffizienten, welche aus den Realisierungen der N betrachteten Zufallsvariablen geschätzt werden können. Für eine multivariate archimedische Copula gemäss (9.51) etwa kann die Rangkorrelationsmatrix von Kendall als Funktion des einzigen Parameters θ geschrieben werden als

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} 1 & h(\theta) & \cdots & h(\theta) \\ h(\theta) & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & h(\theta) \\ h(\theta) & \cdots & h(\theta) & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.65)$$

Für die verallgemeinerte multivariate archimedische Copula gemäss (9.56a) lautet die Rangkorrelationsmatrix von Kendall als Funktion von $\theta_1, \dots, \theta_{N-1}$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} 1 & h(\theta_{N-1}) & \cdots & h(\theta_2) & h(\theta_1) \\ h(\theta_{N-1}) & 1 & & \vdots & h(\theta_1) \\ \vdots & & \ddots & h(\theta_2) & \vdots \\ h(\theta_2) & \cdots & h(\theta_2) & 1 & h(\theta_1) \\ h(\theta_1) & h(\theta_1) & \cdots & h(\theta_1) & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.66)$$

Aus diesen Matrizen lassen sich die für die Parameterschätzung mittels copulabasierter Zusammenhangsmasse erforderlichen Bedingungen von der in (7.15) beschriebenen Form herleiten. Weiter erkennt man aus den beiden Matrizen (9.65) und (9.66), dass für $N > 2$ die Dimension des zu schätzenden Vektors der Copulaparameter kleiner als die Anzahl der für die Schätzung zur Verfügung stehenden Gleichungen ist. Zur Herleitung der Schätzer der Copulaparameter auf der Grundlage der geschätzten Rangkorrelationsmatrix von Kendall ist somit ein der Idee in Gleichung (7.14) folgendes Minimierungsproblem zu lösen. Bei der konkreten Lösung dieses Minimierungsproblems wurde die Gewichtungsmatrix \mathbf{W} in (7.14) jeweils gleich der Einheitsmatrix mit entsprechender Dimension gesetzt. Die sich daraus ergebenden Parameterschätzer werden für die oben ausgewählten archimedischen Copulafunktionen nachfolgend hergeleitet.

Gumbel-Copula Für eine multivariate Gumbel-Copula der Form (9.53) können die für die Parameterschätzung mittels copulabasierter Zusammenhangsmasse erforderlichen Bedingungen gemäss (7.15) der Matrix (9.65) entnommen und im Vektor

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \tau(X_1, X_2) & - & h(\theta) \\ & \vdots & \\ \tau(X_1, X_N) & - & h(\theta) \\ \tau(X_2, X_3) & - & h(\theta) \\ & \vdots & \\ \tau(X_{N-1}, X_N) & - & h(\theta) \end{pmatrix} \quad (9.67)$$

zusammengefasst werden. Im Falle der Gumbel-Copula lautet die Funktion $h(\theta)$ gemäss (9.62) $h(\theta) = 1 - 1/\theta$. Sei $\hat{\mathbf{g}}$ der Vektor der sich aus \mathbf{g} ergibt, wenn für sämtliche $\tau(X_i, X_j)$ ($i = 1, \dots, N; j > i$) die entsprechenden Schätzer t_{ij} eingesetzt werden. Der Schätzer $\hat{\theta}$ ist nun derjenige Wert für θ , welcher der Idee in (7.14) folgend den Ausdruck $\hat{\mathbf{g}}'\hat{\mathbf{g}}$ minimiert. Es ergibt sich

$$\hat{\theta} = \frac{\frac{N^2-N}{2}}{\frac{N^2-N}{2} - \sum_{1 \leq i < j \leq N} t_{ij}}. \quad (9.68)$$

Für die Schätzung der $N - 1$ Parameter einer N -dimensionalen Gumbel-Copula des Typs (9.58) werden die erforderlichen Bedingungen aus Matrix (9.66) hergeleitet und wie oben in einem Vektor \mathbf{g} zusammengefasst. Die Parameterschätzer ergeben sich analog mit $j = N - m + 1$ als

$$\hat{\theta}_m = \frac{N - m}{N - m - \sum_{i=1}^{N-m} t_{ij}}, \quad m = 1, \dots, N - 1. \quad (9.69)$$

◇

Da die Herleitung der Parameterschätzer im Fall der Kimeldorf-Sampson- und der Nelsen-Copulafamilie nach demselben Schema erfolgt, werden diese nachfolgend direkt angegeben.

Kimeldorf-Sampson-Copula Die Schätzfunktion des Copulaparameters θ für eine multivariate Kimeldorf-Sampson-Copula der Form (9.54) auf der Grundlage der Elemente t_{ij} der geschätzten Rangkorrelationsmatrix von Kendall und unter Verwendung der aus (9.63) hergeleiteten Funktion $h(\theta) = \theta/(\theta + 2)$ kann geschrieben werden als

$$\hat{\theta} = \frac{2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} t_{ij}}{\frac{N^2-N}{2} - \sum_{1 \leq i < j \leq N} t_{ij}}. \quad (9.70)$$

Die Schätzer der $N - 1$ Parameter einer N -dimensionalen KS-Copula der Form (9.59) lauten mit $j = N - m + 1$

$$\hat{\theta}_m = \frac{2 \sum_{i=1}^{N-m} t_{ij}}{N - m - \sum_{i=1}^{N-m} t_{ij}}, \quad m = 1, \dots, N - 1. \quad (9.71)$$

◇

Nelsen-Copula Für eine multivariate Nelsen-Copula der Form (9.55) lautet der Schätzer von θ auf Basis der Elemente t_{ij} der geschätzten Rangkorrelationsmatrix von Kendall und unter Verwendung der aus (9.64) hergeleiteten Funktion $h(\theta) = 1 - (2/3\theta)$

$$\hat{\theta} = \frac{N^2 - N}{3 \frac{N^2-N}{2} - \sum_{1 \leq i < j \leq N} t_{ij}}. \quad (9.72)$$

Die Schätzer der $N-1$ Parameter einer N -dimensionalen Nelsen-Copula der Form (9.60) ergeben sich mit $j = N - m + 1$ als

$$\hat{\theta}_m = \frac{2(N-m)}{3(N-m - \sum_{i=1}^{N-m} t_{ij})}, \quad m = 1, \dots, N-1. \quad (9.73)$$

◇

An dieser Stelle ist auf eine weitere Eigenart multivariater archimedischer Copulas von der Form (9.56a) hinzuweisen, die bei oben beschriebener Schätzung ebenfalls zu berücksichtigen ist. Schaut man sich etwa die allgemeine Formel (9.56b) an,

$$C(\mathbf{u}) = C_1(\dots(C_{N-2}(C_{N-1}(u_1, u_2), u_3), \dots, u_N),$$

fällt auf, dass beispielsweise der Zusammenhang von u_1 und u_2 durch die Copula C_{N-1} modelliert wird. Die Abhängigkeit von u_1 respektive u_2 und u_3 wird durch die Copula C_{N-2} abgebildet. Dieser Logik folgend wird der Zusammenhang von u_1, \dots, u_{N-1} und u_N durch C_1 modelliert. Hieraus wird ersichtlich, dass die Reihenfolge der Daten u_n ($n = 1, \dots, N$) einen massgeblichen Einfluss auf $C(\mathbf{u})$ hat.

Im Hinblick auf die in Kapitel 13 präsentierte empirische Studie ist anzumerken, dass für die Risikoschätzung eines Portfolios nur von Bedeutung ist, welche Vermögenswerte im Portfolio gehalten werden und dass eine wie auch immer festgelegte Reihenfolge der Vermögenswerte keinen Einfluss auf eine Risikokennzahl haben soll. Diesem Umstand kann bei der Schätzung multivariater archimedischer Copulas von der Form (9.56a) Rechnung getragen werden, indem die Copulaparameter zunächst für sämtliche möglichen Reihenfolgen der Daten u_n geschätzt werden. Da die Anordnung von u_1 und u_2 auf $C(\mathbf{u})$ keinen Einfluss hat, existieren gerade $N!/2$ Kombinationsmöglichkeiten der Daten. Ein nahe liegendes Kriterium zur Wahl der Schätzung der Copulaparameter und der dazugehörigen Reihenfolge der Daten aus den vorliegenden Möglichkeiten lässt sich nun aus dem Umstand ableiten, dass zur Schätzung der Copulaparameter jeweils ein Minimierungsproblem gemäss (7.14) zu lösen ist: Der Schätzer $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ und die entsprechende Datenreihenfolge werden so aus den $N!/2$ Möglichkeiten gewählt, dass die Norm des Vektors (7.16) minimal wird. Eine Folge dieses Verfahrens ist, dass der Schätzaufwand bereits bei einer moderaten Anzahl an Dimensionen N verhältnismässig gross wird.

Da Spearmans ϱ im Gegensatz zu Kendalls τ nicht als Funktional einer Generatorfunktion φ geschrieben werden kann und die Ermittlung dieses Zusammenhangsmasses für viele Subfamilien der archimedischen Copulafamilie mittels Gleichung (6.10a) nicht trivial ist, soll dieser Ansatz an dieser Stelle nicht weiterverfolgt werden.

Das Konzept der asymptotischen oberen und unteren Randabhängigkeit lässt sich für archimedische Copulafunktionen wie Kendalls τ aus der jeweiligen Generator-

funktion herleiten. Der nachfolgende Satz befasst sich mit der asymptotischen oberen Randabhängigkeit. Für den Beweis sei auf JOE [93], S. 103, verwiesen.

Satz 9.4 *Seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen mit zugehöriger strikter archimedischer Copulafunktion*

$$C(u, v) = \varphi^{-1}[\varphi(u) + \varphi(v)].$$

Sind X und Y asymptotisch abhängig im oberen Rand, dann gilt $\varphi^{-1'}(0) = -\infty$ und λ_O kann geschrieben werden als

$$\lambda_O = 2 - 2 \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\varphi^{-1'}(2t)}{\varphi^{-1'}(t)}. \quad (9.74)$$

Ist $\varphi^{-1'}(0)$ endlich, dann sind X und Y asymptotisch unabhängig im oberen Rand.

Der nachfolgende Satz befasst sich mit der asymptotischen unteren Randabhängigkeit (vgl. JOE [93], S. 105).

Satz 9.5 *Seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen mit zugehöriger strikter archimedischer Copulafunktion*

$$C(u, v) = \varphi^{-1}[\varphi(u) + \varphi(v)].$$

Dann kann λ_U geschrieben werden als

$$\lambda_U = 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{-1'}(2t)}{\varphi^{-1'}(t)}. \quad (9.75)$$

Die Zufallsvariablen X und Y sind asymptotisch abhängig im unteren Rand, wenn $\lambda_U \in (0, 1]$ gilt, und asymptotisch unabhängig im unteren Rand, wenn $\lambda_U = 0$ gilt.

Es soll nun für die drei ausgewählten archimedischen Copulafamilien die asymptotische obere und untere Randabhängigkeit hergeleitet werden. Oben wurde aufgezeigt, dass es sich bei den drei entsprechenden Copulafunktionen um strikte Copulafunktionen handelt.

Gumbel-Copula Leitet man die Inverse der Generatorfunktion der Gumbel-Copula (9.43) nach t ab, ergibt sich

$$\varphi^{-1'}(t) = -\frac{t^{(1/\theta)-1} \exp(-t^{1/\theta})}{\theta}.$$

Somit gilt $\varphi^{-1'}(0) = -\infty$ und λ_O kann geschrieben werden als

$$\lambda_O = 2 - 2^{1/\theta} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\exp(-(2t)^{1/\theta})}{\exp(-t^{1/\theta})} = 2 - 2^{1/\theta}. \quad (9.76)$$

Zwei Zufallsvariablen X und Y mit zugehöriger Gumbel-Copula sind folglich asymptotisch unabhängig im oberen Rand für $\theta = 1$ und asymptotisch abhängig im oberen Rand für $\theta > 1$. Setzt man die Funktion $\varphi^{-1'}$ der Gumbel-Copula in (9.75) ein, erhält man

$$\lambda_U = 2^{1/\theta} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\exp(-(2t)^{1/\theta})}{\exp(-t^{1/\theta})} = 0.$$

Damit sind X und Y asymptotisch unabhängig im unteren Rand. \diamond

Kimeldorf-Sampson-Copula Die erste Ableitung der Inversen der Generatorfunktion der Kimeldorf-Sampson-Copula lautet

$$\varphi^{-1'}(t) = -\frac{(1+t)^{-(1/\theta)-1}}{\theta}.$$

Da $\varphi^{-1'}(0) = -1/\theta$ gilt, sind zwei Zufallsvariablen mit zugehöriger Kimeldorf-Sampson-Copula laut Satz 9.4 asymptotisch unabhängig im oberen Rand. Für λ_U erhält man

$$\lambda_U = 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2t}{1+t} \right)^{-(1/\theta)-1} = 2^{-1/\theta}. \quad (9.77)$$

Damit sind zwei Zufallsvariablen mit zugehöriger Kimeldorf-Sampson-Copula asymptotisch abhängig im unteren Rand. \diamond

Nelsen-Copula Leitet man die Inverse der Generatorfunktion der Nelsen-Copula nach t ab, ergibt sich

$$\varphi^{-1'}(t) = -\frac{t^{(1/\theta)-1}}{\theta (1+t^{1/\theta})^2},$$

womit $\varphi^{-1'}(0) = -\infty$ gilt. Für λ_O erhält man demnach

$$\lambda_O = 2 - 2 \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2^{(1/\theta)-1} (1+t^{1/\theta})^2}{(1+(2t)^{1/\theta})^2} = 2 - 2^{1/\theta}. \quad (9.78)$$

Folglich sind zwei Zufallsvariablen X und Y mit zugehöriger Nelsen-Copula analog zur Gumbel-Copula asymptotisch unabhängig im oberen Rand für $\theta = 1$ und

asymptotisch abhängig im oberen Rand für $\theta > 1$. Durch Einsetzen der Funktion $\varphi^{-1'}$ der Nelsen-Copula in (9.75) kann λ_U geschrieben werden als

$$\lambda_U = 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2^{(1/\theta)-1} (1 + t^{1/\theta})^2}{(1 + (2t)^{1/\theta})^2} = 2^{1/\theta} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{-2/\theta} + t^{-1/\theta} + 1}{t^{-2/\theta} + t^{-1/\theta} + 2^{2/\theta}} = 2^{-1/\theta} \quad (9.79)$$

Dieser Ausdruck ist gleich dem Ausdruck für λ_U im Fall der Kimeldorf-Sampson-Copula. Damit sind zwei Zufallsvariablen mit zugehöriger Nelsen-Copula ebenfalls asymptotisch abhängig im unteren Rand. \diamond

Abbildung 9.7 illustriert für die Gumbel-, die Kimeldorf-Sampson- und die Nelsen-Copula das unterschiedliche Verhalten in den Rändern. Zum Vergleich wird ebenfalls ein mit Hilfe der Normal-Copula erzeugtes Schaubild gegeben. Alle vier Graphiken in Abbildung 9.7 zeigen 10'000 simulierte Datenpunkte einer bivariaten Verteilung mit je standardnormalverteilten Randverteilungen und identischem Rangkorrelationskoeffizienten von Kendall in Höhe von 0.6. Im Vergleich zur Normal-Copula, die weder asymptotische obere noch untere Randabhängigkeit impliziert, erkennt man, dass die Gumbel-Copula zwar asymptotische obere nicht aber asymptotische untere Randabhängigkeit beinhaltet, dass die Kimeldorf-Sampson-Copula genau umgekehrt asymptotische untere nicht aber asymptotische obere Randabhängigkeit impliziert und dass die Nelsen-Copula sowohl asymptotische untere als auch obere Randabhängigkeit einschliesst. Wie bereits (9.78) und (9.79) entnommen werden kann, verdeutlicht die mit Hilfe der Nelsen-Copula erzeugte Punktwolke zudem, dass asymptotische obere und untere Randabhängigkeit in diesem Fall nicht symmetrisch sind.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass archimedische Copulafunktionen das Modellieren von Randabhängigkeiten ermöglichen und dass mit Hilfe dieser Copulafamilie des Weiteren Asymmetrien zwischen oberer und unterer Randabhängigkeit modelliert werden können. Wie in der Einleitung zu Abschnitt 9.3 erläutert wurde, sind dies gerade für das Risikomanagement im Finanzbereich wichtige Eigenschaften. Die drei ausgewählten Copulas sind weiter im Hinblick darauf interessant, als dass einmal nur obere, einmal nur untere und einmal untere und obere, jedoch asymmetrische Randabhängigkeit dargestellt werden kann.

Als Nachtrag sei an dieser Stelle angefügt, dass die Punktwolke in der rechten Graphik von Abbildung 4.3 und die Punktwolke in Abbildung 6.1 mit Hilfe der bivariaten Gumbel-Copula erzeugt wurden.

ML-Schätzung

Zur Schätzung der Parameter einer N -dimensionalen archimedischen Copulafunktion $C(\mathbf{u})$ mittels der Maximum-Likelihood-Methode benötigt man zunächst die

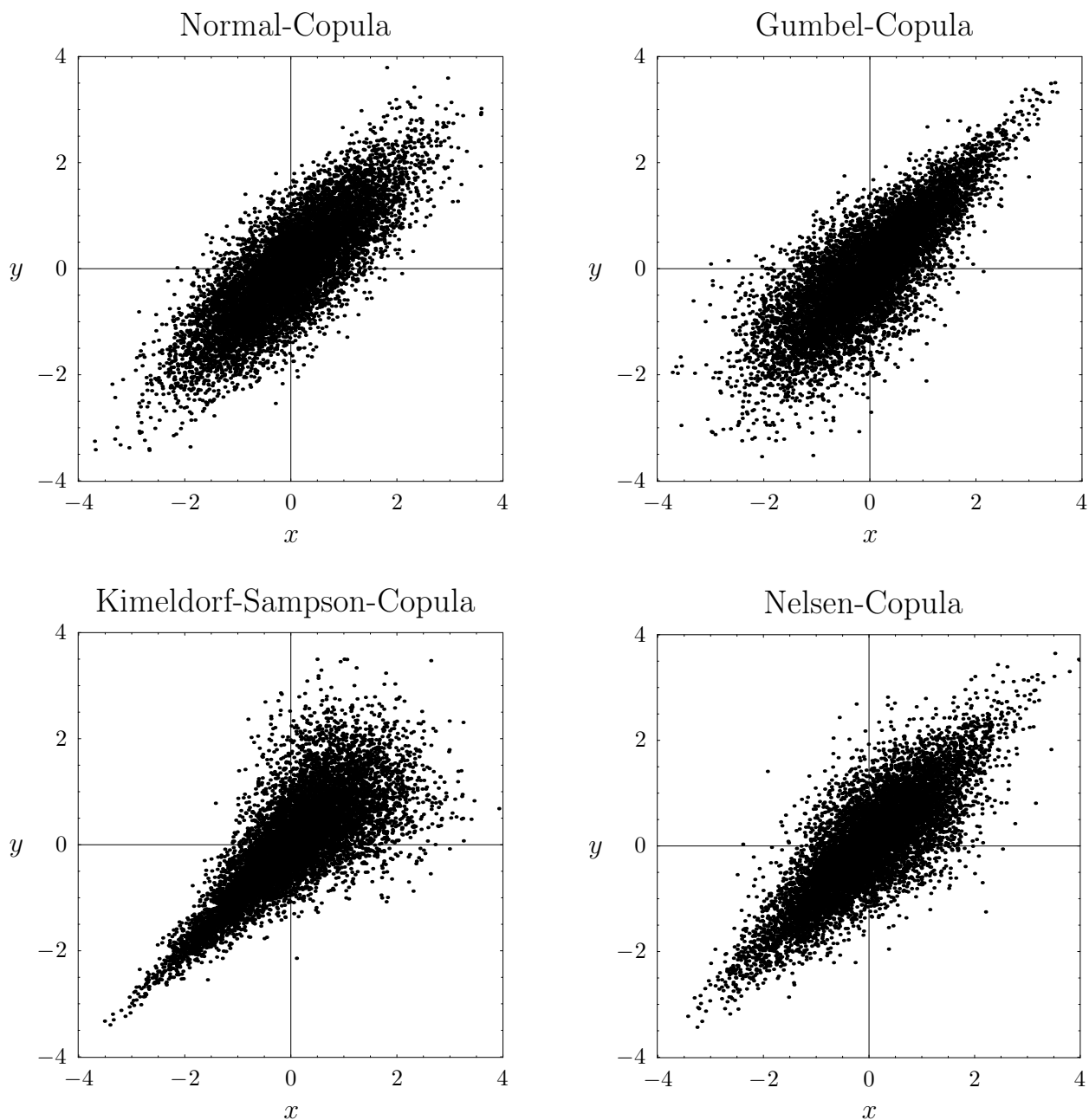


Abbildung 9.7: 10'000 simulierte Datenpaare von vier bivariaten Verteilungen mit standardnormalverteilten Randverteilungen und identischem Rangkorrelationskoeffizienten von Kendall von 0.6. Die Zusammenhangsstruktur wird durch die Normal-, die Gumbel-, die Kimeldorf-Sampson- beziehungsweise die Nelsen-Copula modelliert.

Operation	N Typ	2		3		4		5	
		a	b	a	b	a	b	a	b
Addition		1	1	2	13	3	79	4	437
Multiplikation		2	2	3	10	4	46	5	223
φ		2	2	3	22	4	138	5	788
φ'		2	2	3	5	4	14	5	55
$\varphi^{(2)}$					1		5		23
$\varphi^{(3)}$							1		5
$\varphi^{(4)}$									1
ψ					6		48		302
ψ'					1		7		36
$\psi^{(2)}$		1	1		3		9		35
$\psi^{(3)}$				1	1		4		16
$\psi^{(4)}$						1	1		4
$\psi^{(5)}$								1	1
Total		8	8	12	62	16	352	20	1926

Tabelle 9.2: Anzahl Operationen und Funktionen in Abhängigkeit der Dimension N , die in der Dichtefunktion einer Copula vom Typ a beziehungsweise b enthalten sind.

entsprechende Dichtefunktion. Diese findet man durch partielles Ableiten von $C(\mathbf{u})$ nach sämtlichen Variablen u_1, \dots, u_N . In der Folge werden nur strikte archimedische Copulafunktionen betrachtet. Weiter wird für die Inverse φ^{-1} einer Generatorfunktion zur Vereinfachung der Notation ψ geschrieben. Die Dichtefunktion der bivariaten archimedischen Copula (9.41) lautet demnach

$$c(u, v) = \varphi'(u)\varphi'(v)\psi^{(2)}[\varphi(u) + \varphi(v)]. \quad (9.80)$$

Die Dichtefunktion der multivariaten archimedischen Copula der Form (9.51) ergibt sich mit

$$c(\mathbf{u}) = \varphi'(u_1) \cdot \dots \cdot \varphi'(u_N)\psi^{(N)}[\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_N)]. \quad (9.81)$$

Im Vergleich hierzu ist die Angabe der Dichtefunktion der multivariaten archimedischen Copula der Form (9.56a) problematischer, da die Komplexität ihrer formalen Darstellung mit steigender Dimension N geradezu explodiert. Auch wenn die Herleitung solcher Dichten etwa mit der Software MathematicaTM, welche symbolische Berechnungen unterstützt, automatisiert vorgenommen werden kann, sind der Ermittlung und der anschliessenden Weiterverwendung im Rahmen von ML-Schätzungen Grenzen gesetzt. Um dies zu illustrieren, wird in Tabelle 9.2 für $N = 2, \dots, 5$ angegeben, wie viele Operationen in der jeweiligen Dichtefunktion enthalten sind. Hierbei werden in der Tabelle Dichtefunktionen der Form (9.81) als Typ a und Dichtefunktionen, die auf Copulas der Form (9.56a) beruhen, als Typ b bezeichnet. Zu Tabelle 9.2 ist weiter anzufügen, dass es sich bei φ und ψ

und den entsprechenden Ableitungen weniger um Operationen als vielmehr um Funktionen handelt, die selbst wieder, meist mehrere Operationen umfassen, was die Komplexität der entsprechenden Dichtefunktion weiter erhöht.

Wegen der umständlichen Notation wird an dieser Stelle darauf verzichtet, die Dichtefunktionen und die darauf basierenden Likelihood- und Log-Likelihoodfunktionen der Gumbel-, der Kimeldorf-Sampson- und der Nelsen-Copulafamilie explizit anzugeben. Die ML-Schätzer der Copulaparameter können für keine dieser drei Copulafamilien analytisch hergeleitet werden. Für die Schätzung einer Copula sowohl der Form (9.51) als auch der Form (9.56a) muss auf numerische Optimierungsmethoden zurückgegriffen werden.

Weiter ist bei der Schätzung multivariater archimedischer Copulas der Form (9.56a) dem Umstand Rechnung zu tragen, dass die Reihenfolge der Daten u_n ($n = 1, \dots, N$) einen massgeblichen Einfluss auf $C(\mathbf{u})$ und die Schätzwerte der entsprechenden Copulaparameter hat. Folglich sind, wie in Abschnitt 9.3 beschrieben wurde, die Copulaparameter zunächst für sämtliche $N!/2$ möglichen Kombinationsmöglichkeiten mittels Maximum-Likelihood-Methode zu schätzen. Ein nahe liegendes Kriterium zur Wahl der Schätzung der Copulaparameter und der entsprechenden Reihenfolge der Daten aus den vorliegenden Möglichkeiten lässt sich aus konsequentem Weiterverfolgen des Maximum-Likelihood-Prinzips ableiten: Aus den $N!/2$ potentiellen ML-Schätzern $\hat{\theta}$ wird derjenige mit der dazugehörenden Datenreihenfolge gewählt, der die Log-Likelihoodfunktion maximiert.

Die konkreten Schätzungen wurden im Rahmen der hier durchgeführten empirischen Studie mit der Software GAUSSTM realisiert, wobei die Einhaltung der Restriktionen zu den Copulaparametern unter Verwendung des Zusatzpakets Constrained Maximum Likelihood umgesetzt wurde. Hierbei hat sich gezeigt, dass die ML-Schätzung archimedischer Copulas rechentechnisch nur für eine beschränkte Anzahl Dimensionen N zu bewältigen ist. Die Gründe hierfür sind wie zuvor gesehen der obligate Einsatz numerischer Verfahren. Für Copulas der Form (9.56a) kommt die bei zunehmender Dimension N überproportional wachsende Anzahl möglicher Datenreihenfolgen und die überproportional steigende Komplexität der Dichtefunktionen erschwerend hinzu.

Generierung von Beobachtungen

Seien U und V zwei auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen, deren gemeinsame Verteilungsfunktion die archimedische Copulafunktion C_n ist. Sei weiter φ_n die zur Copulafunktion C_n gehörende Generatorfunktion. Dann ist die Funktion

$$K_{C_n}(t) = t - \frac{\varphi_n(t)}{\varphi'_n(t)}. \quad (9.82)$$

die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $C_n(U, V)$ (vgl. NELSEN [122], S. 101 ff.).

Diese Funktion K_{C_n} wird zur Generierung einer Realisierung eines N -dimensionalen Zufallsvektors benötigt, der gemäss einer archimedischen Copula der Form (9.56a) verteilt ist. Der entsprechende Algorithmus, der bei LINDSKOG [111], S. 42 f., genauer erläutert wird, kann wie folgt angegeben werden:

Algorithmus 9.3

- Generiere unabhängige Zufallszahlen $s_n \stackrel{L}{\sim} U[0, 1]$ ($n = 1, \dots, N$).
- Berechne $t_1 = K_{C_1}^{-1}(s_1)$.
- Wiederhole für $i = 1, \dots, N - 2$:
 - Berechne $a_i = \varphi_i^{-1}(s_{i+1} \varphi_i(t_i))$ und $u_{N-i+1} = \varphi_i^{-1}((1 - s_{i+1})\varphi_i(t_i))$.
 - Berechne $t_{i+1} = K_{C_{i+1}}^{-1}(a_i)$.
- Berechne $u_1 = \varphi_{N-1}^{-1}(s_N \varphi_{N-1}(t_{N-1}))$ und $u_2 = \varphi_{N-1}^{-1}((1 - s_N)\varphi_{N-1}(t_{N-1}))$.

Algorithmus 9.3 kann ebenfalls zur Simulation von Realisierungen eines Zufallsvektors verwendet werden, der gemäss einer Copula der Form (9.51) verteilt ist, da diese Copula, die auf einer einzigen Generatorfunktion φ basiert, als Spezialfall in Copula (9.56a) enthalten ist.

Die Generatorfunktionen der drei ausgewählten archimedischen Copulas und deren Inversen wurden bereits eingeführt. Nachfolgend soll die für die Simulation notwendige Funktion K_{C_n} gemäss (9.82) und falls möglich deren Inverse hergeleitet werden.

Gumbel-Copula Die Funktion K_{C_n} der Gumbel-Copula (9.58) lautet

$$K_{C_n}(t) = t - \frac{t \ln t}{\theta_n} = \frac{t(\theta_n - \ln t)}{\theta_n}, \quad n = 1, \dots, N - 1. \quad (9.83)$$

Da die Inverse dieser Funktion nicht explizit geschrieben werden kann, sind zur Bestimmung von konkreten Werten von $K_{C_n}^{-1}$ numerische Verfahren einzusetzen. \diamond

Kimeldorf-Sampson-Copula Für die Kimeldorf-Sampson-Copula der Form (9.59) ergibt sich Funktion (9.82) als

$$K_{C_n}(t) = t - \frac{t^{\theta_n+1} - t}{\theta_n} = \frac{t(1 + \theta_n - t^{\theta_n})}{\theta_n}, \quad n = 1, \dots, N - 1. \quad (9.84)$$

Wie bei der Gumbel-Copula kann die Inverse dieser Funktion nicht analytisch hergeleitet werden, womit zur Berechnung von konkreten Werten von $K_{C_n}^{-1}$ wiederum der Einsatz numerischer Verfahren notwendig wird. \diamond

Nelsen-Copula Die Funktion (9.82) lautet für die Nelsen-Copula der Form (9.60)

$$K_{C_n}(t) = t - \frac{t^2 - t}{\theta} = \frac{t(1 + \theta - t)}{\theta}, \quad n = 1, \dots, N - 1. \quad (9.85)$$

Die Inverse dieser Funktion kann explizit angegeben werden. Aus Algorithmus 9.3 erkennt man, dass das Intervall $[0, 1]$ der relevante Definitionsbereich von $K_{C_n}^{-1}$ ist. Für diesen Bereich lautet die Inverse von K_{C_n}

$$K_{C_n}^{-1}(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \theta_n - \sqrt{(1 + \theta_n)^2 - 4t\theta_n} \right). \quad (9.86)$$

◇

In diesem 9. Kapitel wurden verschiedene Familien von parametrischen Copulafunktionen im Detail dargestellt. Dabei wurden copulabasierte Zusammenhänge betrachtet und es wurde auf die Schätzung und Simulation dieser Copulafunktionen eingegangen. Im folgenden Kapitel soll nun aufgezeigt werden, wie Copulafunktionen im Rahmen der in Abschnitt 3.3.2 dargestellten Monte-Carlo-Simulation für ein Portfolio von Vermögenswerten zur Modellierung des Zusammenhangs zwischen den Renditen dieser Vermögenswerte eingesetzt werden können.

Kapitel 10

Monte-Carlo-Simulation unter Verwendung von Copulafunktionen

In Abschnitt 3.3.2 wurde die Monte-Carlo-Methode zur Generierung von Realisierungen einer Verteilung von Portfoliorenditen dargestellt. Es wurde erläutert, dass dabei die Beschreibung der zeitlichen Dynamik von Renditen klassischerweise mit Hilfe der geometrischen brownischen Bewegung erfolgt. Diese geht von der kritisch zu betrachtenden Annahme multivariat normalverteilter Renditen der Vermögenswerte in einem Portfolio aus, die zwingend vorschreibt, dass der Zusammenhang zwischen den Renditen über die Varianz-Kovarianz- beziehungsweise die Korrelationsmatrix modelliert wird. In Abschnitt 4.2 wurde aufgezeigt, dass Kovarianz und Korrelation in verschiedenen Fällen ungeeignete Zusammenhangsmasse sind, die zu inadäquaten Risikoschätzungen führen können. Dadurch motiviert, wurde in Kapitel 5 das Konzept der Copulafunktionen dargestellt.

In diesem Kapitel wird nun zunächst erläutert, wie im Rahmen der Monte-Carlo-Methode unter Verwendung des Copulakonzepts Portfoliorenditen generiert werden können, die der Anwendung des Modells der geometrischen brownischen Bewegung entsprechen. Im Anschluss wird aufgezeigt, wie Copulafunktionen allgemein zur Modellierung des Zusammenhangs zwischen den Renditen von Vermögenswerten in die Monte-Carlo-Methode integriert werden können und wie dadurch auf die Annahme multivariat normalverteilter Renditen verzichtet werden kann.

In Abschnitt 3.3.2 wurde erläutert, dass im Rahmen der Generierung einer Stichprobe von Portfoliorenditen $R_{t+\Delta t}^{\text{Portfolio}}$ mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode und unter Verwendung der geometrischen brownischen Bewegung die wiederholte Si-

mulation eines gemäss (3.15) multivariat normalverteilten Zufallsvektors

$$\mathbf{X}_t = (X_{t1}, \dots, X_{tN})' \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} N(\mathbf{0}, \mathbf{R})$$

zu leisten ist. Dabei bezeichnet \mathbf{R} die zu schätzende Korrelationsmatrix \mathbf{R} der Eintagesrenditen der N Vermögenswerte im betrachteten Portfolio. Laut dem in Abschnitt 5.4 präsentierten Satz von Sklar in N Dimensionen und den Ausführungen in Abschnitt 9.1.1 zur Normal-Copula kann die Verteilungsfunktion $\Phi_{\mathbf{R}}$ dieses multivariat normalverteilten Zufallsvektors \mathbf{X}_t ebenfalls als

$$\Phi_{\mathbf{R}}(x_{t1}, \dots, x_{tN}) = C_{\mathbf{R}}^N(\Phi(x_{t1}), \dots, \Phi(x_{tN})) \quad (10.1)$$

geschrieben werden, wobei $C_{\mathbf{R}}^N$ die Normal-Copula gemäss (9.3) und Φ die Verteilungsfunktion der univariaten Standardnormalverteilung bezeichnen. Damit kann eine Portfoliorendite $R_{t+\Delta t}^{\text{Portfolio}}$ gemäss (3.17), die der Anwendung des Modells der geometrischen brownischen Bewegung entspricht, wie folgt unter Verwendung der Normal-Copula $C_{\mathbf{R}}^N$ generiert werden:

- Zunächst sind auf der Basis einer Stichprobe von T Eintagesrenditen der N betrachteten Vermögenswerte der Parametervektor $\boldsymbol{\mu}$ und die Parametermatrix \mathbf{S} in Gleichung (3.8) zu schätzen und die Werte der ursprünglichen Stichprobe mit Hilfe dieser Parameterschätzungen zu standardisieren.
- Diese standardisierten Werte sind anschliessend mit den Randverteilungen Φ zu transformieren, womit man eine Stichprobe $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_T$ von N -dimensionalen Vektoren erhält, die gemäss (9.15) zur Schätzung der Parametermatrix \mathbf{R} der Normal-Copula $C_{\mathbf{R}}^N$ verwendet werden kann.
- Nachfolgend ist mittels Algorithmus 9.1 eine Realisierung \mathbf{u} eines N -dimensionalen Zufallsvektors zu generieren, welcher der geschätzten Normal-Copula $C_{\mathbf{R}}^N$ folgt. Durch die Transformation $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\mathbf{u}) = (\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_N))'$ erhält man eine Realisierung von $\mathbf{X}_t \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} N(\mathbf{0}, \mathbf{R})$ gemäss (3.15).
- Diese simulierte Realisierung ist mit den Schätzungen von $\boldsymbol{\mu}$ und \mathbf{S} gemäss (3.16) zu transformieren, so dass schliesslich eine Realisierung von $\mathbf{R}_{t+\Delta t}$ vorliegt.
- Abschliessend kann diese Realisierung von $\mathbf{R}_{t+\Delta t}$ gemäss (3.17) zur Portfoliorendite $R_{t+\Delta t}^{\text{Portfolio}}$ zusammengefasst werden.

Die Verwendung einer Normal-Copula stellt offensichtlich nicht die direkteste Vorgehensweise dar, um die geometrische brownische Bewegung im Rahmen der

Monte-Carlo-Methode umzusetzen. Der Vorteil des aufgezeigten Vorgehens ist vielmehr darin zu sehen, dass die Normal-Copula $C_{\mathbf{R}}^N$ und die Randverteilungen Φ durch beliebige Copulafunktionen und Randverteilungen ersetzt werden können: Gemäss dem Satz 5.6 von Sklar leistet jede Copulafunktion die Verbindung von beliebigen Randverteilungen zu einer gemeinsamen Verteilung. Durch das Ersetzen der Copulafunktion und der Randverteilungen in oben beschriebenem Vorgehen werden Realisierungen des Renditevektors $\mathbf{R}_{t+\Delta t}$ erzeugt, die eine von der multivariaten Normalverteilung abweichende gemeinsame Verteilung aufweisen. Diese Möglichkeit der Erzeugung von gemeinsamen Verteilungen in einer Art Baukastensystem, in dem wahlweise beliebige Randverteilungen und beliebige Copulafunktionen kombiniert werden können, bedeutet so eine Flexibilisierung der Monte-Carlo-Methode gegenüber ihrer im betrachteten Kontext klassischerweise eingesetzten Form. Dies wiederum eröffnet die Möglichkeit, die Besonderheiten von beobachteten Renditeverteilungen adäquater zu modellieren, als dies die vom Standardmodell der geometrischen brownischen Bewegung implizierte multivariate Normalverteilung zulässt.

Genau an dieser Stelle setzt die empirische Untersuchung der vorliegenden Arbeit an. Ihr Ziel ist die Überprüfung, inwieweit die Messung von Aktienkursrisiken durch die Modellierung des Zusammenhangs zwischen Aktienrenditen mit Hilfe der in Kapitel 9 dargestellten parametrischen Copulafunktionen verbessert werden kann. Als Referenzmodelle dienen dabei die klassischerweise eingesetzten Modelle der historischen Simulation und der Monte-Carlo-Simulation unter Verwendung der geometrischen brownischen Bewegung. Damit geht es letztlich, wie in Abschnitt 1.3 erläutert wurde, um die Abschätzung des Modellrisikos der Verwendung beziehungsweise der Nichtverwendung von Copulafunktionen im Allgemeinen und des Modellrisikos der in Kapitel 9 dargestellten parametrischen Copulafamilien im Speziellen.

Die Abschätzung dieser Art statistischen Risikos am Beispiel des Schweizer Aktienmarktes ist Inhalt des nachfolgenden Teils dieser Arbeit. Zunächst wird in Kapitel 11 die verwendete Datengrundlage besprochen. Im Anschluss werden in Kapitel 12 Kriterien dargestellt, welche die Abschätzung des Modellrisikos von Copulafunktionen ermöglichen. In Kapitel 13 werden schliesslich die Resultate der empirischen Studie vorgestellt.

Teil III

Empirische Studie für den Schweizer Aktienmarkt

Kapitel 11

Datengrundlage

In diesem Kapitel werden die Daten besprochen, die der in Kapitel 13 besprochenen empirischen Untersuchung zugrunde liegen. Es handelt sich hierbei um Tagesschlusskurse von im Swiss Market Index (SMI) gelisteten Aktien. Der SMI ist ein kapitalgewichteter, nicht dividendenkorrigierter Index. Er umfasst bis zu dreissig liquide Titel hochkapitalisierter Unternehmen, so genannte Blue Chips, die ungefähr 80% der Gesamtkapitalisierung des Schweizer Aktienmarktes repräsentieren.¹ Die empirische Untersuchung wird für die Jahre 1999 bis 2001 durchgeführt. In einem ersten Abschnitt wird ein Überblick über die Entwicklung des Schweizer Aktienmarktes in diesem Zeitraum gegeben.

Die Schätzung der in der empirischen Studie verwendeten Copulafunktionen basiert auf den einfachen Tagesrenditen, die aus den Tagesschlusskursen der untersuchten Aktien ermittelt werden. Die in Kapitel 7 eingeführten Methoden zur Schätzung von Copulafunktionen beruhen im Wesentlichen auf der Annahme unabhängiger und identisch verteilter Realisierungen eines Zufallsvektors. In einem zweiten Abschnitt werden deshalb zwei statistische Tests eingeführt, welche die Überprüfung dieser Annahme ermöglichen. Den Abschluss dieses Kapitels bildet die konkrete Durchführung der beiden Tests für die Renditedaten der in der empirischen Studie verwendeten Schweizer Aktien.

11.1 Der Schweizer Aktienmarkt in den Jahren 1999 bis 2001

Die Entwicklung des Schweizer Aktienmarktes in den Jahren 1999 bis 2001 wird am Beispiel des Swiss Market Index nachgezeichnet. Die obere Graphik in Abbil-

¹Detaillierte Informationen zum SMI finden sich auf der Website der Swiss Exchange unter der Adresse <http://www.swx.com/> [Stand 2003-08-08].

dung 11.1 zeigt die Tagesschlussstände des SMI für diese Periode. In der unteren Graphik sind die entsprechenden einfachen Tagesrenditen abgetragen. Es ist klar, dass der Verlauf des SMI jeweils nicht isoliert, sondern vielmehr in Verbindung mit der gesamtwirtschaftlichen Entwicklung der Schweiz sowie der Entwicklung der Aktienmärkte und der Gesamtwirtschaft anderer Volkswirtschaften zu sehen ist.

Im Jahre 1999 bewegte sich der SMI bei relativ hoher Volatilität der Renditen aufgrund einer schwachen Konjunktur in Europa tendenziell seitwärts. Weder die mehrheitlich antizipierte Abwertung der brasilianischen Währung im Januar (vgl. BANK FOR INTERNATIONAL SETTLEMENTS [13], S. 1 ff.) noch die Kursrallye an den internationalen Technologiebörsen im zweiten Halbjahr 1999 (vgl. KOHLER [103]) zeigten grössere Auswirkungen auf die Schweizer Blue Chips.

Nachdem der Milleniumswechsel ohne grössere Pannen über die Bühne gegangen war, verzeichnete im Zuge des durch den andauernden Höhenflug von Technologiewerten um sich greifenden Optimismus auch der SMI nach einem kurzen Taucher einen Kursanstieg. Im zweiten Quartal 2000 fanden die hohen Kursgewinne im Technologiebereich ein jähes Ende. Das so genannte „Platzen der New-Economy-Blase“ führte zu einem Trend hin zu defensiven Werten, wodurch die hochkapitalisierten Schweizer Titel profitieren konnten. So war der SMI trotz einer zwischenzeitlichen Kurskorrektur einer der einzigen Indizes weltweit, die im Jahre 2000 eine positive Performance erzielen konnten (vgl. WALDE [160], S. 2).

Im ersten Halbjahr 2001 waren die Stimmungsumschwünge an den Börsen besonders ausgeprägt, was sich in einem Anstieg der Volatilität der Tagesrenditen ausdrückte. Allgemein belastete die Angst vor einer Rezession in den USA die weltweiten Aktienmärkte. Sich häufende Gewinnwarnungen von Unternehmen wirkten sich dämpfend auf die Aktienkurse aus, während Zinssenkungen der amerikanischen Notenbank den Märkten Auftrieb gaben (vgl. BANK FOR INTERNATIONAL SETTLEMENTS [14], S. 1 ff.). Im Spätsommer kippte die Stimmung endgültig auf die Baisseseite, als die nordamerikanische Konjunkturschwäche auf den Rest der Welt übergriff. Der Terrorakt des 11. September 2001 schien zunächst auch die Börsen im Kurschaos versinken zu lassen. Dank grosszügigen Liquiditätsspritzen der Zentralbanken blieb es jedoch bei einem Minicrash. Als sich zum Jahresende hin ein rascher Erfolg der Amerikaner im durch den Terroranschlag heraufbeschworenen Krieg gegen das Talibanregime in Afghanistan und die Terrororganisation Al-Qaida abzeichnete, besserte sich das internationale Börsenklima allmählich wieder (vgl. BANK FOR INTERNATIONAL SETTLEMENTS [12], S. 1 ff.).

Die nachfolgend durchgeführte Studie untersucht hauptsächlich das Jahr 2001, wobei die Parameter der verwendeten Modelle jeweils auf den Daten der 500 vorangehenden Tage geschätzt werden. Damit bilden schliesslich die Jahre 1999 bis

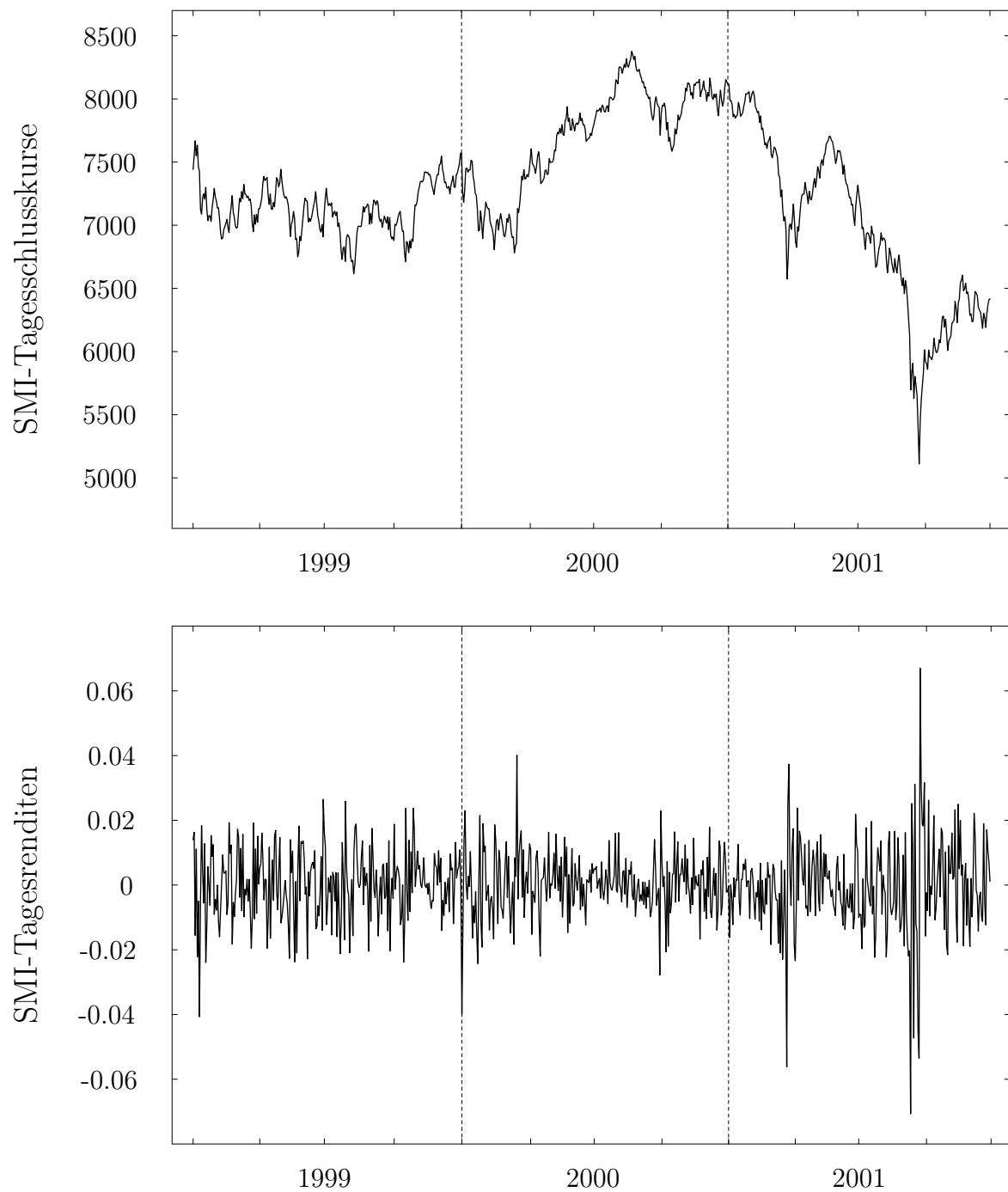


Abbildung 11.1: Tagesschlussstände und einfache Tagesrenditen des SMI in den Jahren 1999 bis 2001.

Titel	Symbol	Titel	Symbol
ABB LTD N	ABBN	Richemont	CFR
Adecco N	ADEN	Roche GS	ROG
Bâloise N	BALN	Serono -B- I	SEO
Ciba SC N	CIBN	SGS Surveillance N	SGSN
Clariant N	CLN	Sulzer N	SUN
CS Group N	CSGN	Swatch I	UHR
Holcim I	HOL	Swatch N	UHRN
Julius Bär I	BAER	Swiss Re N	RUKN
Kudelski I	KUD	Swisscom N	SCMN
Nestlé N	NESN	UBS N	UBSN
Novartis N	NOVN	Unaxis N	UNAX
Rentenanstalt N	RAN	Zurich Financial Services N	ZURN

Tabelle 11.1: In der empirischen Studie verwendete Aktien.

2001 den Zeitraum für die empirische Untersuchung. Der Grund für diese Wahl ist darin zu sehen, dass das Jahr 2001 für das Risikomanagement ein besonders herausforderndes Jahr darstellt. So war das erste Halbjahr 2001 wie oben beschrieben durch grosse Unsicherheit über die weitere Konjunkturentwicklung gekennzeichnet, wodurch eine hohe Volatilität und Kursausschläge sowohl nach unten als auch nach oben zu verzeichnen waren. Im dritten Quartal folgte ein veritabler Kurssturz, der durch die Terrorattacke auf verschiedene Ziele in den USA seinen Höhepunkt fand. Das Jahr 2001 war somit für die Aktienmärkte ein kritisches Jahr, das höchste Anforderungen an die Risikomanagementsysteme von Finanzinstituten stellte. Die Untersuchung dieses Zeitabschnitts garantiert somit, dass die in der empirischen Studie zur Risikomessung eingesetzten Modelle tatsächlich auf ihre Eignung in schwierigen Zeiten überprüft werden. Da sich das Jahr 2001 weiter an eine durch mehrheitlich prosperierende Kurse gekennzeichnete Periode anschloss und im vierten Quartal 2001 auf den allgemeinen Kursrutsch ein Aufwärtstrend der Börse eintrat, werden die verwendeten Modelle ausserdem auf ihre Reaktionsfähigkeit auf sich ändernde Gegebenheiten und zwar in beide möglichen Richtungen untersucht. Für diesen eher kurzen Zeitraum werden in der Folge eine Vielzahl von unterschiedlich zusammengesetzten Portfolios untersucht.

Es ist klar, dass sich die Entwicklung der nachfolgend untersuchten Aktien durch firmenspezifische Gegebenheiten und Ereignisse von der am Beispiel des SMI nachgezeichneten Gesamtentwicklung des Schweizer Aktienmarktes unterscheiden kann. Auf solche Besonderheiten soll an dieser Stelle jedoch nicht eingegangen werden. Bei den in der Studie verwendeten Titeln handelt es sich um die in Tabelle 11.1 aufgeführten 24 Valoren. Diese waren im Jahre 2001 allesamt im SMI enthalten. Bei der Auswahl wurde auf das Vorliegen von vollständigen Datenreihen über die gesamte Untersuchungsperiode geachtet. Sämtliche in dieser Arbeit eingesetz-

ten Finanzdaten wurden von der Datenbank der Datastream AG bezogen, die vom Studienzentrum Gerzensee, einer Stiftung der Schweizerischen Nationalbank, für wissenschaftliche Zwecke zur Verfügung gestellt wird. Bei den verwendeten Aktienkursen handelt es sich um Tagesschlusskurse, die um Kapitalmassnahmen wie etwa Kapitalerhöhungen, Aktiensplits, etc. korrigiert wurden. Da das Ziel der empirischen Untersuchung eine Abschätzung der Eignung verschiedener Copulafunktionen für die Zusammenhangsmodellierung von Aktien ist, werden aus den in Tabelle 11.1 genannten Einzeltiteln im Anschluss durch zufällige Kombination diverse Portfolios generiert.

11.2 Überprüfung der Annahme unabhängiger und identisch verteilter Renditen

Die in den Abschnitten 7.1.1 und 7.1.2 eingeführte Maximum-Likelihood-Methode zur Schätzung von Copulafunktionen basiert auf der Annahme unabhängiger und identisch verteilter Realisierungen eines Zufallsvektors. Auch die in Abschnitt 7.1.3 präsentierte Momentenmethode geht in ihrer einfachsten Form von dieser Voraussetzung aus. Im Gegensatz zur ML-Methode, bei der diese Annahme zentral ist und direkt in die Konstruktion der Likelihoodfunktion einfließt, kann bei der Momentenmethode die Beschränkung auf unabhängige und identisch verteilte Daten aufgegeben werden (vgl. MITTELHAMMER [120], S. 495 ff.).

Die Schätzung der in der empirischen Studie verwendeten Copulafunktionen basiert auf einfachen Tagesrenditen, die aus den Tagesschlusskursen der untersuchten Aktien ermittelt werden. Anhand zweier statistischer Tests, dem Wald-Wolfowitz'schen Iterationstest und dem Brock-Dechert-Scheinkmann-Test, soll nachfolgend untersucht werden, ob die Annahme der Unabhängigkeit und identischen Verteiltheit für diese Renditedaten Gültigkeit hat. Nach der Einführung der beiden Testverfahren werden die Testresultate für die Renditedaten der in der empirischen Studie verwendeten Schweizer Aktien präsentiert.

11.2.1 Wald-Wolfowitz'scher Iterationstest

Man betrachtet eine Stichprobe x_1, \dots, x_T als Realisierung eines Zufallsvektors X_1, \dots, X_T . Mit dem Wald-Wolfowitz'schen Iterationstest wird die Nullhypothese

H_0 : die Zufallsvariablen X_t ($t = 1, \dots, T$) sind unabhängig und identisch verteilt,

gegen die Alternativhypothese

H_1 : die Zufallsvariablen X_t ($t = 1, \dots, T$) sind *nicht* unabhängig
oder *nicht* identisch verteilt,

getestet (vgl. MITTELHAMMER [120], S. 663). Für die Anwendung des Wald-Wolfowitz-Tests müssen die einzelnen vorliegenden Realisierungen gemäss einem Unterscheidungsmerkmal zunächst in die Werte 1 oder 0 transformiert werden. Dieses Unterscheidungsmerkmal kann ein den Daten innewohnendes sein, wie beispielsweise die Aufteilung von Befragungsergebnissen nach dem Geschlecht der Probanden. Fehlt ein solch natürliches Kriterium, kann die Dichotomie erreicht werden, indem den Stichprobendaten, die einen vorgegebenen Wert überschreiten, eine 1 und allen übrigen Realisierungen eine 0 zugeordnet wird. Üblicherweise wird als Schwellenwert der Stichprobenmedian gewählt (vgl. RINNE [132], S. 406). Unter H_0 führt eine solche Zweiteilung der Daten zu einer Reihe von unabhängigen und identisch verteilten Realisierungen einer Bernoulli-Verteilung.

Im Anschluss ist für die dichotomisierte Stichprobe die Anzahl w so genannter Iterationen zu ermitteln. Eine Iteration ist dabei jede zusammenhängende Folge von Realisierungen eines Wertes, die ausschliesslich an Realisierungen des jeweils anderen Wertes grenzt (vgl. MITTELHAMMER [120], S. 663). Für die Sequenz

0 0 1 1 1 0 1 0 0 1

werden so beispielsweise sechs Iterationen gezählt, die nachfolgend durch vertikale Linien abgetrennt sind:

00 | 111 | 0 | 1 | 00 | 1.

Sind nun die der ursprünglichen Stichprobe zugrunde liegenden Zufallsvariablen tatsächlich unabhängig und identisch verteilt, so darf die Anzahl beobachteter Iterationen weder zu niedrig noch zu hoch ausfallen. Zu wenige Iterationen können hierbei auf positive Korrelation, zu viele Iterationen auf ein systematisch alternierendes Muster der Daten hindeuten.

Die Wahrscheinlichkeit, unter H_0 jeweils genau w Iterationen zu beobachten, kann aus der Anzahl Anordnungsmöglichkeiten der bei der Dichotomisierung vergebenen n_1 Werte 1 und n_0 Werte 0 hergeleitet werden (vgl. MITTELHAMMER [120],

S. 664). Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariablen W ergibt sich als

$$f(w) = P[W = w] =$$

$$\begin{cases} \frac{2 \binom{n_1-1}{w/2-1} \binom{n_0-1}{w/2-1}}{\binom{n_0+n_1}{n_1}}, & \text{falls } w \text{ gerade und } w \leq n-1, \\ \frac{\binom{n_1-1}{(w-1)/2} \binom{n_0-1}{(w-3)/2} + \binom{n_1-1}{(w-3)/2} \binom{n_0-1}{(w-1)/2}}{\binom{n_0+n_1}{n_1}}, & \text{falls } w \text{ ungerade und } w \leq n-1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11.1)$$

Der Erwartungswert und die Varianz von W sind weiter gegeben durch (vgl. MITTELHAMMER [120], S. 664)

$$E(W) = \frac{2n_1n_0}{n_1 + n_0} + 1$$

und

$$\text{Var}(W) = \frac{2n_1n_0(2n_1n_0 - n_1 - n_0)}{(n_1 + n_0)^2(n_1 + n_0 - 1)}.$$

Bei WALD und WOLFOWITZ [159], S. 151 ff., wird nun gezeigt, dass für $n_1 \rightarrow \infty$ und $n_0 \rightarrow \infty$ die Grösse

$$Z = \frac{W - E(W)}{\sqrt{\text{Var}(W)}} \quad (11.2)$$

asymptotisch standardnormalverteilt ist, wobei diese Approximation bereits für $n_1 > 10$ und $n_0 > 10$ hinreichend gut ist. H_0 ist zu verwerfen, falls für eine vorliegende Realisierung z von Z

$$z \in (-\infty, -z_{1-\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}, \infty)$$

gilt, wobei $z_{1-\alpha/2}$ das $(1 - \alpha/2) \cdot 100\%$ -Quantil der Standardnormalverteilung bezeichnet. Für $n_1 + n_0 \leq 20$ finden sich bei SWED und EISENHART [154] exakte, auf (11.1) basierende kritische Werte.

11.2.2 Brock-Dechert-Scheinkmann-Test

Der Brock-Dechert-Scheinkmann-Test (BDS-Test) ist eine weitere Methode, um auf Unabhängigkeit und identische Verteiltheit zu testen.

Man betrachtet weiterhin eine Stichprobe x_1, \dots, x_T als Realisierung eines Zufallsvektors X_1, \dots, X_T . Analog zum Wald-Wolfowitz'schen Iterationstest prüft der BDS-Test die Nullhypothese

H_0 : die Zufallsvariablen X_t ($t = 1, \dots, T$) sind unabhängig und identisch verteilt,

gegen die Alternativhypothese

H_1 : die Zufallsvariablen X_t ($t = 1, \dots, T$) sind *nicht* unabhängig oder *nicht* identisch verteilt.

Es bezeichne $m \in \mathbb{N}$ ($m < T$) eine so genannte Einbettungsdimension und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ einen beliebigen aber festen Abstand. Die vorliegende Stichprobe wird nun durch die Bildung von m -dimensionalen Vektoren der Form

$$\mathbf{x}_s^m = (x_s, x_{s+1}, \dots, x_{s+m-1}), \quad s = 1, \dots, T - m + 1$$

in einen m -dimensionalen Raum eingebettet (vgl. BROCK et al. [42], S. 42). Diese Einbettung ermöglicht die Definition des Korrelationsintegrals $C_m(\varepsilon)$ als (vgl. BROCK et al. [41], S. 7)

$$C_m(\varepsilon) = \lim_{T \rightarrow \infty} C_{m,T}(\varepsilon), \quad (11.3)$$

wobei

$$C_{m,T}(\varepsilon) = \frac{2}{(T-m)(T-m+1)} \sum_{u=1}^{T-m} \sum_{v=u+1}^{T-m+1} I_m(\mathbf{x}_u^m, \mathbf{x}_v^m, \varepsilon) \quad (11.4)$$

mit

$$I_m(\mathbf{x}_u^m, \mathbf{x}_v^m, \varepsilon) = \prod_{k=0}^{m-1} I(x_{u+k}, x_{v+k}, \varepsilon) \quad (11.5)$$

und

$$I(x_i, x_j, \varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |x_i - x_j| < \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (11.6)$$

Diese Grössen lassen sich anschaulich interpretieren. So gibt $I(\cdot)$ an, ob der Abstand zwischen zwei Beobachtungswerten kleiner als ε ist. Die Grösse $I_m(\cdot)$ ist für zwei m -dimensionale Vektoren weiter genau dann gleich eins, wenn sämtliche korrespondierenden Punkte dieser Vektoren nahe beieinander liegen in dem Sinn, dass deren paarweiser Abstand kleiner als ε ist. Die Funktion $C_{m,T}(\varepsilon)$ misst schliesslich den Anteil der m -dimensionalen Vektoren, die in oben genanntem Sinne nahe beieinander liegen.

Bei BROCK et al. [41], S. 7, wird nun gezeigt, dass unter Annahme der eingangs formulierten Nullhypothese für alle festen m und ε

$$C_m(\varepsilon) = (C_1(\varepsilon))^m \quad (11.7)$$

gilt, was die Betrachtung der Differenz $C_{m,T}(\varepsilon) - (C_{1,T}(\varepsilon))^m$ als Grundlage für die Herleitung einer Prüfgrösse motiviert. Besagte Autoren zeigen weiter, dass unter H_0 die BDS-Statistik

$$W_{m,T}(\varepsilon) = \sqrt{T} \frac{C_{m,T}(\varepsilon) - (C_{1,T}(\varepsilon))^m}{\hat{\sigma}_{m,T}(\varepsilon)} \quad (11.8)$$

asymptotisch standardnormalverteilt ist (vgl. BROCK et al. [41], S. 7 ff.), wobei in Simulationsstudien nachgewiesen wurde, dass die Approximation für $T \geq 500$ hinreichend gut ist (vgl. BROCK et al. [42], S. 52). Mit $\hat{\sigma}_{m,T}(\varepsilon)$ wird in (11.8) ein Schätzer der asymptotischen Standardabweichung von $C_{m,T}(\varepsilon) - (C_{1,T}(\varepsilon))^m$ bezeichnet, der sich als Wurzel von

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{m,T}^2(\varepsilon) = & 4 \left((K_T(\varepsilon))^m + 2 \sum_{l=1}^{m-1} (K_T(\varepsilon))^{m-l} (C_{1,T}(\varepsilon))^{2l} \right. \\ & \left. + (m-1)^2 (C_{1,T}(\varepsilon))^{2m} - m^2 K_T(\varepsilon) (C_{1,T}(\varepsilon))^{2m-2} \right) \end{aligned} \quad (11.9)$$

bestimmt (vgl. BROCK et al. [42], S. 43), wobei

$$\begin{aligned} K_T(\varepsilon) = & \frac{6}{(T-m-1)(T-m)(T-m+1)} \\ & \cdot \sum_{o=1}^{T-m-1} \sum_{p=o+1}^{T-m} \sum_{q=p+1}^{T-m+1} h_m(\mathbf{x}_o^m, \mathbf{x}_p^m, \mathbf{x}_q^m, \varepsilon) \end{aligned} \quad (11.10)$$

gilt mit

$$\begin{aligned} h_m(i, j, k, \varepsilon) = & (I(i, j, \varepsilon)I(j, k, \varepsilon) + I(i, k, \varepsilon)I(k, j, \varepsilon) \\ & + I(j, i, \varepsilon)I(i, k, \varepsilon))/3. \end{aligned} \quad (11.11)$$

Die Nullhypothese H_0 ist demnach zu verwerfen, falls für die geschätzte Prüfgrösse

$$w_{m,T}(\varepsilon) \in (-\infty, -z_{1-\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}, \infty)$$

gilt. Für die konkrete Durchführung des BDS-Tests ist eine geeignete Wahl für m und ε zu treffen. Monte-Carlo-Studien haben gezeigt, dass die Einbettungsdimension m zwischen 2 und 5 und der Abstand ε zwischen 0.5 und 2 mal der Standardabweichung der Daten gewählt werden sollte (vgl. BROCK et al. [41], S. 52).

11.2.3 Überprüfung der Annahme unabhängiger und identisch verteilter Renditen für den Schweizer Aktienmarkt

Nachfolgend soll mit Hilfe der beiden zuvor eingeführten Testmethoden für die in der empirischen Studie untersuchten Schweizer Aktien überprüft werden, ob die Annahme unabhängiger und identisch verteilter Tagesrenditen haltbar ist.

Es sollen zunächst die Resultate des Wald-Wolfowitz'schen Iterationstests präsentiert werden. Die Tabelle 11.2 zeigt die Ergebnisse für die jeweils 749 Beobachtungen der Periode von 1999 bis 2001. In der zweiten Spalte sind die Werte der gemäss (11.2) geschätzten Prüfgrösse z für die untersuchten Titel aufgeführt. Die dritte mit P-Wert bezeichnete Spalte zeigt die entsprechenden Überschreitungswahrscheinlichkeiten. In der vierten und fünften Spalte der Tabelle 11.2 wird angegeben, ob die Nullhypothese unabhängig und identisch verteilter Tagesrenditen bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.01$ beziehungsweise von $\alpha = 0.05$ abzulehnen ist. Hierbei steht der Wert 1 für die Ablehnung und der Wert 0 für die Nichtablehnung der Hypothese H_0 . In der letzten Zeile ist der Anteilswert der Titel aufgeführt, für welche die Nullhypothese verworfen werden muss. So ist diese für die Periode von 1999 bis 2001 für $\alpha = 0.01$ in 12.5% aller Fälle und für $\alpha = 0.05$ in 25% aller Fälle abzulehnen. Besonders kritisch scheint die Annahme für die Julius Bär Inhaberaktie, die UBS Namenaktie und das Namenpapier der Zurich Financial Services, für die H_0 bereits bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.01$ abzulehnen ist.

Für die Anwendung des Brock-Dechert-Scheinkmann-Tests wurde gemäss dem Vorschlag bei BROCK et al. [41], S. 52, für die Einbettungsdimension $m = 2, 3, 4, 5$ gewählt. Weiter wird der Abstand ε in Einheiten δ der empirischen Standardabweichung der Beobachtungen gemessen, die auf $\delta = 0.5, 1.0, 2.0$ festgelegt werden. So ergeben alle möglichen Kombinationen von m und δ zwölf BDS-Statistiken pro untersuchten Titel. Tabelle 11.3 zeigt exemplarisch für die ABB Namenaktie die detaillierten Testresultate für den Zeitraum von 1999 bis 2001. Hierbei konnte für die Schätzung der in der dritten Spalte angegebenen Prüfgrösse $w_{m,T}(\varepsilon)$ des BDS-Tests auf ein Programm von DECHERT zurückgegriffen werden.² Weiterhin wird in Tabelle 11.3 die Überschreitungswahrscheinlichkeit angegeben und es wird für die Signifikanzniveaus $\alpha = 0.01$ und $\alpha = 0.05$ angeführt, ob die Annahme unabhängiger und identisch verteilter Tagesrenditen abzulehnen ist, wobei der Wert 1 für die Ablehnung und der Wert 0 für die Nichtablehnung der Annahme steht. Man erkennt, dass im Falle der ABB Namenaktie für $\alpha = 0.01$ die Hypothese H_0

²Diese Routine wird auf der Website mit der Adresse <http://dechert.econ.uh.edu/software/bds.html> [Stand 2003-08-08] von W. D. Dechert, Department of Economics, University of Houston, zur Verfügung gestellt.

Titel	WW				BDS	
	z	P-Wert	Ablehnung		Ablehnungsanteil	
			0.01	0.05	0.01	0.05
ABBN	-1.2088	0.2268	0	0	0.000	0.083
ADEN	-1.3394	0.1804	0	0	0.000	0.000
BALN	0.9725	0.3308	0	0	0.000	0.083
CIBN	-1.2767	0.2017	0	0	0.000	0.000
CLN	-1.4991	0.1339	0	0	0.000	0.000
CSGN	0.1097	0.9126	0	0	0.000	0.000
HOL	-0.9860	0.3241	0	0	0.000	0.000
BAER	-2.8075	0.0050	1	1	0.000	0.000
KUD	-1.4991	0.1339	0	0	0.000	0.000
NESN	0.2045	0.8380	0	0	0.000	0.000
NOVN	-1.7784	0.0753	0	0	0.000	0.000
RAN	-0.0866	0.9310	0	0	0.083	0.167
CFR	-1.8516	0.0641	0	0	0.000	0.000
ROG	-1.6529	0.0984	0	0	0.000	0.000
SEO	-0.2385	0.8115	0	0	0.000	0.000
SGSN	2.1544	0.0312	0	1	0.000	0.000
SUN	2.3767	0.0175	0	1	0.000	0.083
UHR	-0.6947	0.4873	0	0	0.000	0.000
UHRN	-0.7332	0.4634	0	0	0.000	0.083
RUKN	-2.0740	0.0381	0	1	0.000	0.083
SCMN	0.4789	0.6320	0	0	0.000	0.000
UBSN	-3.5003	0.0005	1	1	0.000	0.000
UNAX	0.2301	0.8180	0	0	0.000	0.000
ZURN	-2.9763	0.0029	1	1	0.083	0.083
Ablehnungsanteil			0.125	0.250	0.007	0.028

Tabelle 11.2: Resultate des Wald-Wolfowitz- und des Brock-Dechert-Scheinkmann-Tests für die Jahre 1999 bis 2001.

in keinem der zwölf Fälle verworfen werden muss. Für $\alpha = 0.05$ führt lediglich die für $m = 5$ und $\delta = 2.0$ ermittelte BDS-Statistik zu einer Ablehnung der Nullhypothese, was über die zwölf Teststatistiken gesehen einem Ablehnungsanteil von 8.3% entspricht. Das an diesem Beispiel gezeigte Vorgehen wurde für sämtliche übrigen Aktien analog angewendet. Damit ein einfacher Vergleich der Resultate des BDS- und des Wald-Wolfowitz-Tests möglich wird, werden die so ermittelten Ablehnungsanteile in Tabelle 11.2 angegeben.

Eine erste Erkenntnis der Gegenüberstellung ist, dass der jeweilige Anteilswert der Titel für welche die Annahme unabhängiger und identisch verteilter Tagesrenditen verworfen werden muss, beim BDS-Test viel kleiner ausfällt, als beim Wald-Wolfowitz'schen Iterationstest. So muss die Hypothese H_0 für $\alpha = 0.01$ nur noch in 0.7% aller Fälle und für $\alpha = 0.05$ lediglich in 2.8% aller Fälle abgelehnt werden. Weiter fällt auf, dass Titel, für welche die Annahme unabhängiger und

m	δ	$w_{m,T}(\varepsilon)$	P-Wert	Ablehnung	
				0.01	0.05
2	0.5	0.3076	0.7584	0	0
3	0.5	0.3125	0.7547	0	0
4	0.5	0.2232	0.8234	0	0
5	0.5	0.1379	0.8903	0	0
2	1.0	0.6169	0.5373	0	0
3	1.0	1.1058	0.2688	0	0
4	1.0	1.3432	0.1792	0	0
5	1.0	1.3486	0.1775	0	0
2	2.0	0.3494	0.7268	0	0
3	2.0	0.9077	0.3641	0	0
4	2.0	1.5366	0.1244	0	0
5	2.0	2.0742	0.0381	0	1
Ablehnungsanteil				0.000	0.083

Tabelle 11.3: Detaillierte Resultate des Brock-Dechert-Scheinkmann-Tests für die ABB Namenaktie im Zeitraum von 1999 bis 2001 für verschiedene Werte von m und δ .

identisch verteilter Tagesrenditen mittels der einen Testmethode verworfen wird, hinsichtlich dieser Annahme häufig durch den jeweils anderen Test als unkritisch eingestuft werden. Als Beispiele für diesen Tatbestand sind etwa die Inhaberaktie Julius Bär, die Rentenanstalt Namenaktie, das Namenpapier der UBS und etwas weniger akzentuiert die Namenaktie der Zurich Financial Services zu nennen. Damit wird die untersuchte Nullhypothese für keine der betrachteten Aktien durch beide Testverfahren eindeutig verworfen.

Insgesamt zeigen die Testresultate auf, dass die Annahme unabhängiger und identisch verteilter Tagesrenditen für die untersuchten Schweizer Aktien nicht allgemein verworfen werden muss. Dennoch sollte man bei der Beurteilung der Schätzergebnisse der folgenden empirischen Untersuchung im Gedächtnis behalten, dass die Gültigkeit dieser Annahme für einzelne Titel nicht eindeutig bestätigt werden kann. Diese Titel wurden deshalb nicht aus der Untersuchung ausgeschlossen, da eine solche Ausschlussmöglichkeit in der Praxis ebenfalls nicht besteht: Soll das Marktrisiko eines bestimmten Portfolios von Vermögenswerten geschätzt werden, dann müssen Daten sämtlicher in diesem Portfolio gehaltenen Titel berücksichtigt werden.

Abschliessend soll betont werden, dass die in diesem Abschnitt angesprochene mögliche Verletzung der Annahme unabhängiger und identisch verteilter Realisierungen nicht ein Problem ist, das in erhöhtem Masse beim Einsatz von Copulafunktionen zum Tragen kommt. Vielmehr handelt es sich um ein Charakteristikum

der verwendeten Datengrundlage, die letztlich in jedes in der Praxis übliche Modell zur Risikomessung einfließt. Zudem betrifft das Problem wie angedeutet in erster Linie die gewählte Schätzmethode und so lediglich indirekt das Modell zur Risikobezifferung.

Bevor in Kapitel 13 die Ergebnisse der für den Schweizer Aktienmarkt durchgeführten empirischen Studie vorgestellt werden, werden im nachfolgenden Kapitel Kriterien dargestellt, welche die Abschätzung des Modellrisikos von Copulafunktionen ermöglichen.

Kapitel 12

Kriterien zur Abschätzung des Modellrisikos

In Abschnitt 1.3 wurde ausgeführt, dass die einer wahren Verteilung zugrunde liegende Copulafunktion stets unbekannt ist und folglich das Risiko der Wahl einer spezifischen Copulafunktion nie abschliessend beurteilt werden kann. Um dennoch Aussagen über dieses so genannte Modellrisiko von angenommenen Copulafunktionen machen zu können, werden in diesem Kapitel verschiedene Kriterien eingeführt, die eine indirekte Abschätzung dieser Art statistischen Risikos ermöglichen. Dabei ist zu beachten, dass aus dem Wert eines solchen Kriteriums nicht unmittelbar auf das Modellrisiko einer Copulafunktion geschlossen werden kann. Vielmehr lassen sich erst aus dem Vergleich dieser Kriterien bei verschiedenen Modellen Aussagen über die Höhe des Modellrisikos der verwendeten Copulafunktionen relativ zueinander ableiten.

Solche Kriterien können auf verschiedenen Ebenen ansetzen. So ist es denkbar, dass mittels multidimensionalen Anpassungstests (vgl. KLUGMAN und PARSA [102], S. 146 ff., sowie SAUNDERS und LAUD [141], S. 237) überprüft wird, ob die Renditen oder Verluste der in einem Portfolio gehaltenen Aktien als Realisierungen derjenigen multivariaten Verteilung angenommen werden können, die aus der zu untersuchenden Copulafunktion und den gewählten Randverteilungen resultiert. In diesem Kapitel werden im Gegensatz hierzu jedoch vielmehr Kriterien eingeführt, die auf der Ebene der unter Verwendung der einzelnen Copulafunktionen ermittelten Value-at-Risk-Prognosen ansetzen. Damit wird sichergestellt, dass die untersuchten Copulafunktionen tatsächlich auf ihre Eignung im gewünschten Kontext, der Risikobezifferung von Aktienportfolios, überprüft werden. Für die Zielsetzung dieser Arbeit ist es hinreichend, wenn eine Copulafunktion die für die Risikomessung relevanten Bereiche einer Verteilung adäquat zu modellieren vermag.

Nachfolgend werden Kriterien zur Abschätzung des Modellrisikos bei Value-at-Risk-Schätzungen dargestellt. Dabei wird insbesondere das so genannte Ampelkonzept des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht besprochen, dessen Anwendung Banken im Rahmen des Backtesting verbindlich vorgeschrieben ist. Es sei an dieser Stelle hervorgehoben, dass mit sämtlichen anschliessend besprochenen Kriterien nicht der VaR als Risikomass beurteilt wird. Vielmehr werden die Modelle bewertet, welche die den vorliegenden VaR-Prognosewerten zugrunde liegenden Realisierungen der Verlustverteilungen betrachteter Aktienportfolios generieren. Die in der empirischen Studie untersuchten Modelle unterscheiden sich lediglich in der verwendeten Copulafunktion. Einzige Ausnahme bildet die historische Simulation, die zu Vergleichszwecken ebenfalls herangezogen wird. Damit wird mit den nachfolgenden Kriterien letztlich dem Ziel der Arbeit entsprechend die Eignung der verschiedenen Copulas für die Zusammenhangsmodellierung von Aktien im Hinblick auf die Risikomessung untersucht.

Nebst diesen Kriterien werden mit dem χ^2 - und dem Kolmogorov-Smirnov-Test zwei Anpassungstests vorgestellt, die im Rahmen der in Kapitel 13 dargestellten empirischen Studie zur Überprüfung der Annahme normalverteilter Aktienrenditen eingesetzt werden.

12.1 Abschätzung des Modellrisikos bei Value-at-Risk-Schätzungen

12.1.1 Mittlere relative Abweichung

Zum Vergleich der Höhe der durch die betrachteten Modelle generierten VaR-Schätzungen dient die mittlere relative Abweichung (MRA) (vgl. HENDRICKS [83], S. 46 f., sowie ENGEL und GIZYCKI [66], S. 22 f.).

Dazu wird zunächst für jeden Zeitpunkt t ($t = 1, \dots, T$) eines Beobachtungszeitraums das arithmetische Mittel der VaR-Schätzungen über alle betrachteten Modelle m ($m = 1, \dots, M$) gemäss

$$\overline{VaR}_t = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \widehat{VaR}_{m,t} \quad (12.1)$$

gebildet. Hierbei bezeichnet $\widehat{VaR}_{m,t}$ den geschätzten VaR-Wert bei Verwendung von Modell m zum Zeitpunkt t . Dann werden die relativen Abweichungen $(\widehat{VaR}_{m,t} - \overline{VaR}_t) / \overline{VaR}_t$ der VaR-Schätzungen eines bestimmten Modells m vom gemäss (12.1) ermittelten Mittelwert betrachtet. Die mittlere relative Abweichung

\widehat{MRA}_m für ein Modell m ist definiert als arithmetisches Mittel dieser relativen Abweichungen über den gesamten Beobachtungszeitraum, das heisst durch

$$\widehat{MRA}_m = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\widehat{VaR}_{m,t} - \overline{VaR}_t}{\overline{VaR}_t}. \quad (12.2)$$

Mit der mittleren relativen Abweichung liegt ein Mass vor, das die Höhe der aus einem bestimmten Modell resultierenden VaR-Schätzungen im Verhältnis zu den VaR-Schätzungen sämtlicher betrachteten Modelle angibt. Die Summe über die mittleren relativen Abweichungen aller M Modelle ergibt stets null. Eine mittlere relative Abweichung grösser null bedeutet, dass die VaR-Schätzungen des entsprechenden Modells im Mittel grösser sind als das Mittel der VaR-Schätzungen über alle Modelle und steht somit für ein im Vergleich *konservatives Modell*. Ein so genannt *aggressives Modell* weist entsprechend eine mittlere relative Abweichung kleiner null auf.

Bei der mittleren relativen Abweichung werden VaR-Schätzungen verschiedener Modelle direkt miteinander verglichen. Der Referenzpunkt für den Vergleich bildet das Mittel über sämtliche Modelle. Bei den nachfolgend dargestellten Kriterien liefern die tatsächlich eingetretenen Verluste der betrachteten Finanztitel den Referenzpunkt für die Modellvergleiche. So werden gemäss dem in Abschnitt 2.4 beschriebenen Backtesting die mit einem bestimmten Modell für jeden gewählten Zeitpunkt eines Beobachtungszeitraums geschätzten VaR-Werte mit den an diesen Zeitpunkten tatsächlich beobachteten Verlusten verglichen. Diese Rückvergleiche liefern die Informationen, die für die Ermittlung der nachfolgend präsentierten so genannten *Ex-post-Kriterien* notwendig sind.

12.1.2 Allgemeines Konzept der Verlustfunktion

Das Konzept der Verlustfunktion erlaubt es, die in Abschnitt 2.4 dargestellte Grundidee des Backtesting im Rahmen des Value-at-Risk-Konzepts in einen allgemeinen Rahmen zu stellen. Mit Hilfe eines Modells m werden Realisierungen der Verlustverteilung eines bestimmten Finanztitels generiert, auf deren Basis ein VaR-Wert $\widehat{VaR}_{m,t}$ zum Zeitpunkt $t - D$ als Prognose für den Zeitpunkt t geschätzt wird. Hierbei bezeichnet D die Haltedauer. Dieser VaR-Prognosewert wird nachfolgend mit dem tatsächlich eingetretenen Verlust V_t zum Zeitpunkt t verglichen. Dabei werden zwei Zustände unterschieden. Entweder ist ein Verlust grösser als der entsprechende VaR-Prognosewert, oder er ist kleiner gleich dem entsprechenden VaR-Prognosewert. Dies wird für ein bestimmtes Modell m ($m = 1, \dots, M$) wie folgt in eine so genannte Verlustfunktion $L_{m,t}$ übersetzt (vgl. LOPEZ [113],

S. 121):

$$L_{m,t} = \begin{cases} f(V_t, \widehat{VaR}_{m,t}) & \text{falls } V_t > \widehat{VaR}_{m,t} \\ g(V_t, \widehat{VaR}_{m,t}) & \text{falls } V_t \leq \widehat{VaR}_{m,t} \end{cases}. \quad (12.3)$$

Die Funktionen f und g sind dabei im Allgemeinen verschieden.

Nachfolgend wird diejenige Wahl von f und g dargelegt, die insbesondere dem Rahmenkonzept für Backtesting des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht zugrunde liegt (vgl. BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION [20]).

12.1.3 Binäre Verlustfunktion

Setzt man $f(x) = 1$ und $g(x) = 0$ für alle x , so ergibt (12.3) die binäre Verlustfunktion (vgl. LOPEZ [113], S. 121, und ENGEL und GIZYCKI [66], S. 27)

$$\begin{aligned} L_{m,t} &= \begin{cases} 1 & \text{falls } V_t > \widehat{VaR}_{m,t} \\ 0 & \text{falls } V_t \leq \widehat{VaR}_{m,t} \end{cases} \\ &= \mathbf{1}_{\{V_t > \widehat{VaR}_{m,t}\}}. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Die Bildung des arithmetischen Mittels dieser Verlustfunktion über einen bestimmten Beobachtungszeitraum T , das heisst die Division der Summe $n = \sum_{t=1}^T L_{m,t}$ durch den Stichprobenumfang T , führt zum Anteilswert der in dieser Zeitperiode eingetretenen Überschreitungen an der Gesamtzahl der betrachteten Verluste. Die Höhe der jeweiligen Überschreitungen werden bei diesem Ansatz nicht berücksichtigt. Dieser für ein spezifisches Modell ex post ermittelte Anteilswert kann mit dem theoretisch zu erwartenden verglichen werden. Bei einem passenden Modell sollten im Durchschnitt genau $\alpha \cdot 100\%$ der tatsächlichen Verluste den für ein Konfidenzniveau von $1 - \alpha$ ermittelten VaR übersteigen. Ein entsprechender Vergleich erlaubt Rückschlüsse darauf, ob die Realisierungen der Verlustverteilungen, auf denen die VaR-Schätzungen basieren, mit Hilfe eines adäquaten Modells erzeugt wurden.

Nimmt man die Verluste der einzelnen Perioden als unabhängig an, so kann die Anzahl Überschreitungen n als Realisierung einer binomialverteilten Zufallsvariablen N aufgefasst werden. Auf diesem Umstand basierend schlägt KUPIEC [106], S. 79 ff., einen Likelihood-Quotienten-Test vor, dessen Nullhypothese H_0 wie folgt lautet: eine Überschreitung eines für ein Konfidenzniveau von $1 - \alpha$ ermittelten VaR-Schätzwertes tritt genau mit der Wahrscheinlichkeit α ein. Der Likelihood-Quotient ist dabei gegeben durch

$$LQ = \frac{\alpha^N (1 - \alpha)^{T-N}}{\left(\frac{N}{T}\right)^N \left(1 - \frac{N}{T}\right)^{T-N}}. \quad (12.5)$$

α	$T = 250$	$T = 500$	$T = 1250$
0.01	$n < 7$	$1 < n < 10$	$6 < n < 20$
0.05	$6 < n < 20$	$16 < n < 36$	$47 < n < 79$

Tabelle 12.1: Nichtablehnungsbereiche für n bei einem Signifikanzniveau von 5%.

α	$T = 250$	$T = 500$	$T = 1250$
0.01	$n < 8$	$n < 12$	$4 < n < 23$
0.05	$4 < n < 23$	$13 < n < 39$	$43 < n < 84$

Tabelle 12.2: Nichtablehnungsbereiche für n bei einem Signifikanzniveau von 1%.

Die Prüfgrösse des Likelihood-Quotienten-Tests $-2 \ln LQ$ ist unter H_0 asymptotisch χ^2 -verteilt mit einem Freiheitsgrad. Bei diesem Test handelt es sich um den gleichmässig trennschärfsten Test für einen gegebenen Stichprobenumfang (vgl. KUPIEC [106], S. 79). Nach Festlegung eines Signifikanzniveaus kann der Ablehnungs- beziehungsweise der Nichtablehnungsbereich für n bestimmt werden. Letzterer wird für die Signifikanzniveaus von 5% und 1% und für verschiedene Stichprobenumfänge T und unterschiedliche Restwahrscheinlichkeiten α in den beiden Tabellen 12.1 und 12.2 angegeben.

Kann die oben genannte Nullhypothese nicht abgelehnt werden, wird ein Modell im Sinne des Likelihood-Quotienten-Tests als adäquat bezeichnet. Die Tabellen 12.1 und 12.2 lassen in diesem Kontext ein Problem bei VaR-Schätzungen für kleine Restwahrscheinlichkeiten α erkennen. So existiert teils keine untere Schranke des Nichtablehnungsbereichs, womit keine Möglichkeit besteht, den Tatbestand von zu wenig Überschreitungen zu detektieren und so ein Modell zu erkennen, das systematisch das Risiko überschätzt.

Auf eine Einführung weiterer Verlustfunktionen soll an dieser Stelle verzichtet werden. Für eine Präsentation der quadratischen Verlustfunktion, die im Gegensatz zur binären Verlustfunktion zusätzlich die Höhe der Überschreitungen berücksichtigt, sei auf LOPEZ [113], S. 122, sowie ENGEL und GIZYCKI [66], S. 30 f., verwiesen.

12.1.4 Ampelkonzept des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht

In diesem Abschnitt wird das Rahmenkonzept für Backtesting des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht diskutiert, das unverändert von der Eidgenössischen

Zone	Anzahl Überschreitungen	Multiplikationsfaktor
grün	0 bis 4	3.00
gelb	5	3.40
gelb	6	3.50
gelb	7	3.65
gelb	8	3.75
gelb	9	3.85
rot	10 und mehr	4.00

Tabelle 12.3: Festlegung des Multiplikationsfaktors nach dem Basler Ampelkonzept.

Bankenkommission übernommen wurde (vgl. BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION [20] und EIDGENÖSSISCHE BANKENKOMMISSION [138]). Je nach Ausgang der durch ein Finanzinstitut angestellten Rückvergleiche wird durch die Aufsichtsbehörden festgelegt, ob der Faktor von ursprünglich drei, mit dem die VaR-Schätzungen zur Bestimmung der Eigenmittelunterlegung zu multiplizieren sind, allenfalls zu erhöhen ist. Hierzu hat der Basler Ausschuss das so genannte Ampelkonzept vorgelegt. Als Kriterium für die Identifikation von adäquaten und inadäquaten Modellen wird dabei die Anzahl Überschreitungen des geschätzten VaR verwendet, womit das Konzept der binären Verlustfunktion aufgegriffen wird.

In Abschnitt 2.5 wurde ausgeführt, dass gemäss Basler Ausschuss und Eidgenössischer Bankenkommission VaR-Werte für ein Konfidenzniveau von 99% zu schätzen sind und für das Backtesting eine Stichprobe von 250 Beobachtungen zu verwenden ist. So sollten bei einem adäquaten Modell exakt 1% der 250 tatsächlich beobachteten Verluste den jeweils entsprechenden geschätzten VaR übersteigen. Im Rahmenkonzept für Backtesting des Basler Ausschusses wird nun nicht eine einzelne Anzahl von Überschreitungen genannt, welche die Schwelle zwischen „guten“ und „schlechten“ Modellen bildet. Vielmehr wird ein Zonenkonzept entwickelt, das auch Zwischenstufen vorsieht. Analog zu einer Ampel werden eine grüne, eine gelbe und eine rote Zone unterschieden. Tabelle 12.3 gibt die Details wieder (vgl. BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION [20], Table 2, und EIDGENÖSSISCHE BANKENKOMMISSION [138], S. 27 f.).

In der grünen Zone wird angenommen, dass ein verwendetes Modell adäquat und ein Eingreifen nicht notwendig ist. In der gelben Zone wird davon ausgegangen, dass Handlungsbedarf besteht: Da ein Ansteigen der Anzahl Überschreitungen ein Indiz für das Vorliegen eines inadäquaten Modells ist, verlangen die Aufsichtsbehörden eine Erhöhung des Multiplikators und zwar umso stärker, je mehr Überschreitungen gezählt werden. Mit einer solchen Erhöhung verfolgt der Basler Ausschuss das Ziel, VaR-Schätzungen, die aus allenfalls inadäquaten Modellen resultieren, auf den geforderten Standard zu transformieren (vgl. BASEL COM-

MITTEE ON BANKING SUPERVISION [20], S. 8). In der roten Zone wird in jedem Fall angenommen, dass ein inadäquates Modell vorliegt, was eine Erhöhung des Multiplikationsfaktors auf den maximalen Wert von vier zur Folge hat.

Die Festlegung dieser Zonen resultiert aus einer Abwägung der bei der Durchführung eines statistischen Tests möglichen Fehler. Sei H_0 die im betrachteten Kontext interessierende Nullhypothese, dass ein adäquates Modell vorliegt. Dann wird ein *Fehler 1. Art* begangen, wenn H_0 abgelehnt wird, obwohl tatsächlich ein adäquates Modell vorliegt. Ein *Fehler 2. Art* wird begangen, wenn die Nullhypothese H_0 nicht abgelehnt wird, obwohl in der Realität ein inadäquates Modell vorliegt.

Den Ausgangspunkt für die Festlegung der Zonen des Ampelkonzepts bildet die Überlegung, dass bei der Verwendung eines adäquaten Modells ein für das geforderte Konfidenzniveau von 99% bestimmter VaR von genau 1% der Verluste überschritten werden sollte. Ein unpassendes Modell liefert entsprechend mehr oder weniger Überschreitungen, wobei das Hauptaugenmerk der Aufsichtsbehörden natürlich einem Mehr an Überschreitungen gilt. Aus Abschnitt 12.1.3 ist bekannt, dass die Anzahl Überschreitungen n als Realisierung einer binomialverteilten Zufallsvariable N aufgefasst werden kann. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von n Überschreitungen bei einer Stichprobe vom Umfang T kann daher gemäss

$$P[N = n] = \binom{T}{n} \alpha^n (1 - \alpha)^{T-n} \quad (12.6)$$

berechnet werden, wobei α die gewählte Restwahrscheinlichkeit bezeichnet. Im Rahmenkonzept für Backtesting des Basler Ausschusses wird ein Modell als adäquat betrachtet, sofern die beobachtete Anzahl Überschreitungen kleiner ist als eine bestimmte festzulegende Schwelle n^* (vgl. BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION [20], S. 6 ff.).

Sei H_0 die Nullhypothese, dass ein adäquates Modell vorliegt. Es wird nun angenommen, dass tatsächlich ein adäquates Modell vorliegt und die Wahrscheinlichkeit einer Überschreitung genau $\alpha = 1\%$ beträgt. Die zweite Spalte in Tabelle 12.4 gibt die gemäss (12.6) berechnete Wahrscheinlichkeit an, dass sich bei diesem Modell bei einem Stichprobenumfang von $T = 250$ jeweils genau n Überschreitungen ergeben. Beobachtet man nun für dieses adäquate Modell eine Überschreitungsanzahl $n \geq n^*$, so führt dies zur Ablehnung der Hypothese H_0 und somit zu einem Fehler 1. Art. Die Wahrscheinlichkeit für einen derartigen falschen Entscheid kann mit

$$P[N \geq n^*] = 1 - \sum_{n=0}^{n^*-1} P[N = n]$$

beziffert werden und ist in der dritten Spalte von Tabelle 12.4 aufgeführt.

Überschreitungen n	Wahrscheinlichkeit $P[N = n]$	Fehler 1. Art $P[N \geq n]$
0	8.1%	100.0%
1	20.5%	91.9%
2	25.7%	71.4%
3	21.5%	45.7%
4	13.4%	24.2%
5	6.7%	10.8%
6	2.7%	4.1%
7	1.0%	1.4%
8	0.3%	0.4%
9	0.1%	0.1%
10	0.0%	0.0%

Tabelle 12.4: Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten von Überschreitungen und für den Fehler 1. Art in einem adäquaten Modell mit $\alpha = 0.01$ und $T = 250$.

Zur Festlegung einer Schwelle n^* stellt der Basler Ausschuss ebenfalls Überlegungen zum Fehler 2. Art an, dem Fehler also, ein inadäquates Modell als adäquat einzustufen. Sei weiterhin H_0 die Nullhypothese, dass ein adäquates Modell vorliegt. Es wird nun angenommen, dass ein inadäquates Modell vorliegt, das entsprechend mehr oder weniger als die 1% geforderten Überschreitungen liefert. Nachfolgend werden exemplarisch die beiden Fälle betrachtet, in denen $\alpha = 2\%$ beziehungsweise $\alpha = 3\%$ gilt. Die zweite und die vierte Spalte in Tabelle 12.5 geben die gemäss (12.6) berechnete Wahrscheinlichkeit an, dass diese beiden inadäquaten Modelle bei einem Stichprobenumfang von $T = 250$ jeweils genau n Überschreitungen liefern. Beobachtet man nun für eines dieser unpassenden Modelle eine Überschreitungsanzahl $n < n^*$, so führt dies zur Nichtablehnung der Hypothese H_0 und somit zu einem Fehler 2. Art. Die Wahrscheinlichkeit für einen solchen Fehlentscheid berechnet sich gemäss

$$P[N < n^*] = \sum_{n=0}^{n^*-1} P[N = n]$$

und ist für die beiden betrachteten inadäquaten Modelle in der dritten beziehungsweise in der fünften Spalte von Tabelle 12.5 angegeben.

Es ist nie möglich, simultan den Fehler 1. und 2. Art zu minimieren. Die Einteilung der verschiedenen Zonen erfolgt so durch subjektive Abwägung dieser beiden Fehlerarten. Wird die untere Schwelle, ab der ein Modell als inadäquat betrachtet wird, beispielsweise auf fünf Überschreitungen festgelegt, so erkennt man aus Tabelle 12.4, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 10.8% zu Unrecht ein adäquates Modell abgelehnt wird. Im Gegenzug erkennt man aus Tabelle 12.5, dass ein in-

Überschreitungen n	$\alpha = 0.02$		$\alpha = 0.03$	
	Wahrscheinlichkeit $P[N = n]$	Fehler 2. Art $P[N < n]$	Wahrscheinlichkeit $P[N = n]$	Fehler 2. Art $P[N < n]$
0	0.6%	0.0%	0.0%	0.0%
1	3.3%	0.6%	0.4%	0.0%
2	8.3%	3.9%	1.5%	0.4%
3	14.0%	12.2%	3.8%	1.9%
4	17.7%	26.2%	7.2%	5.7%
5	17.7%	43.9%	10.9%	12.8%
6	14.8%	61.6%	13.8%	23.7%
7	10.5%	76.4%	14.9%	37.5%
8	6.5%	86.9%	14.0%	52.4%
9	3.6%	93.4%	11.6%	66.3%
10	1.8%	97.0%	8.6%	77.9%

Tabelle 12.5: Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten von Überschreitungen und für den Fehler 2. Art in zwei inadäquaten Modellen mit $\alpha = 0.02$ beziehungsweise $\alpha = 0.03$ und $T = 250$.

adäquates Modell mit $\alpha = 2\%$ in 43.9% der Fälle und ein inadäquates Modell mit $\alpha = 3\%$ in 12.8% der Fälle fälschlicherweise nicht zurückgewiesen wird. Dieses Beispiel zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit von Fehlentscheidungen im vorgestellten Backtestingkonzept des Basler Ausschusses verhältnismässig hoch sein kann, weshalb dieses in der einschlägigen Literatur nicht unkritisiert bleibt (vgl. etwa JORION [98], S. 138 ff.).

12.1.5 Multiplikator zur Erreichung von $\alpha \cdot 100\%$ Überschreitungen

Das nachfolgend präsentierte Backtestingkriterium betrachtet erneut die Anzahl der Überschreitungen, die eintreten sollte, wenn der für ein Konfidenzniveau von $1 - \alpha$ bestimmte Value-at-Risk auf der Grundlage eines adäquaten Modells ermittelt wurde, und basiert folglich ebenfalls auf dem Konzept der binären Verlustfunktion. Unter Verwendung der VaR-Schätzungen und der tatsächlich eingetretenen Verluste eines Beobachtungszeitraums soll derjenige Multiplikationsfaktor bestimmt werden, mit dem sämtliche VaR-Werte dieser Stichprobe zu multiplizieren sind, um genau die zu erwartenden $\alpha \cdot 100\%$ Überschreitungen zu erhalten (vgl. HENDRICKS [83], S. 50 f., sowie ENGEL und GIZYCKI [66], S. 32 f.). Folglich wird versucht, aus einem eventuell inadäquaten Modell ein adäquates Modell zu machen, das die zu erwartende Restwahrscheinlichkeit α einhält.

Für den Stichprobenumfang T wird zunächst gemäss

$$n_\alpha = \alpha T \quad (12.7)$$

die Anzahl Überschreitungen bestimmt, die ein adäquates Modell hervorbringen soll. Anschliessend wählt man als Multiplikator k_m^α für ein bestimmtes Modell m ($m = 1, \dots, M$) den kleinsten Koeffizienten k , der die Gleichung

$$\lfloor n_\alpha \rfloor = \sum_{t=1}^T \mathbf{1}_{\{V_t > k \widehat{VaR}_{m,t}\}} \quad (12.8)$$

erfüllt. Das Abrunden von n_α auf die grösste ganze Zahl kleiner oder gleich n_α entspricht einem konservativen Vorgehen in dem Sinn, dass maximal n_α Überschreitungen toleriert werden. Anders ausgedrückt kann k_m^α auch als $\lceil n_\alpha \rceil$ -grösster Quotient $V_t / \widehat{VaR}_{m,t}$ der betrachteten Stichprobe aufgefasst werden, wobei $\lceil n_\alpha \rceil$ die kleinste ganze Zahl grösser oder gleich n_α bezeichnet. Ein adäquates Modell weist somit einen Multiplikator von eins auf. Liefert ein Modell m mehr als $\lfloor n_\alpha \rfloor$ Verluste, die den VaR übersteigen, so resultiert ein Faktor $k_m^\alpha > 1$. Ein Multiplikator $k_m^\alpha < 1$ ergibt sich, wenn weniger als $\lfloor n_\alpha \rfloor$ Überschreitungen beobachtet werden.

12.1.6 Mittlere relative Abweichung skaliertter VaR-Schätzungen

Hauptziel des Ampelkonzepts des Basler Ausschusses ist die Sicherstellung einer ausreichenden Eigenmittelunterlegung von Finanzinstituten. Im Hinblick auf die Konkurrenzfähigkeit von Finanzinstituten sollten aber nicht übermässig viele Mittel zum Zwecke der Risikoabsicherung aus dem produktiven Kreislauf ausgeschlossen werden. Diesen Aspekt berücksichtigt speziell das in diesem Abschnitt dargestellte Kriterium, die so genannte mittlere relative Abweichung skaliertter VaR-Schätzungen.

Das angesprochene Kriterium wird in zwei Schritten berechnet. Zunächst sind die VaR-Schätzungen eines jeden betrachteten Modells m ($m = 1, \dots, M$) für jeden Zeitpunkt t ($t = 1, \dots, T$) eines Beobachtungszeitraums mit dem in Abschnitt 12.1.5 eingeführten Multiplikator zu skalieren, das heisst

$$\widehat{SVaR}_{m,t} = k_m^\alpha \widehat{VaR}_{m,t}. \quad (12.9)$$

So wird erreicht, dass jedes Modell genau die erwarteten $\alpha \cdot 100\%$ Überschreitungen liefert. In einem zweiten Schritt wird zum Vergleich der Grösse der durch die

betrachteten Modelle generierten und nachträglich skalierten VaR-Schätzungen die in Abschnitt 12.1.1 präsentierte mittlere relative Abweichung bestimmt. Hierzu wird zunächst für jeden Zeitpunkt t das arithmetische Mittel der skalierten VaR-Schätzungen über alle betrachteten Modelle gemäss

$$\overline{SVaR}_t = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \widehat{SVaR}_{m,t} \quad (12.10)$$

gebildet. Weiter ergibt sich die mittlere relative Abweichung der skalierten VaR-Schätzung \widehat{SMRA}_m für ein Modell m in Anlehnung an (12.2) als

$$\widehat{SMRA}_m = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\widehat{SVaR}_{m,t} - \overline{SVaR}_t}{\overline{SVaR}_t}. \quad (12.11)$$

Dasjenige Modell, das die kleinste mittlere relative Abweichung skalierten VaR-Schätzungen aufweist, gilt nun als das effizienteste in dem Sinn, dass die geforderte Restwahrscheinlichkeit α mit der verhältnismässig kleinsten Eigenmittelunterlegung eingehalten wird.

12.1.7 Mittlerer Überschreitungsverlust relativ zum Value-at-Risk

Die bisher vorgestellten Backtestingkriterien basierten jeweils auf dem Tatbestand, dass bei einem auf der Grundlage eines adäquaten Modells ermittelten VaR-Wert eine Überschreitung gerade mit der Restwahrscheinlichkeit α beobachtet werden sollte. Bei den in Abschnitt 12.1.5 und 12.1.6 eingeführten Kriterien wurde weiter die Höhe einer einzelnen Überschreitung ermittelt beziehungsweise verwendet, wobei aber das Hauptaugenmerk weiterhin auf die Restwahrscheinlichkeit α gerichtet war. In der Folge sollen nun zwei Kriterien präsentiert werden, die sich auf die Höhe der Überschreitungsverluste konzentrieren. Da ein VaR-Wert keine Aussage über diese Grössen macht, ist an dieser Stelle zu betonen, dass ein zugrunde liegendes Modell nicht aufgrund hoher Überschreitungen als inadäquat bezeichnet werden kann. Dennoch sind im Risikomanagement gerade die extremen Verluste von besonderer Bedeutung. Folglich wird es als eine wünschenswerte Eigenschaft eines Modells aufgefasst, wenn dieses nicht nur VaR-Werte liefert, die das vorgegebene Konfidenzniveau einhalten, sondern auch imstande ist, hohe Verluste möglichst gut zu „prognostizieren“.

Der mittlere Überschreitungsverlust relativ zum Value-at-Risk wird durch folgendes Vorgehen ermittelt. Für ein bestimmtes Modell m ($m = 1, \dots, M$) wird

zunächst für jeden Zeitpunkt t ($t = 1, \dots, T$) eines Beobachtungszeitraums der Quotient

$$\widehat{RUV}_{m,t} = \frac{V_t}{\widehat{VaR}_{m,t}} \quad (12.12)$$

aus dem tatsächlich eingetretenen Verlust V_t und dem korrespondierenden geschätzten VaR-Prognosewert $\widehat{VaR}_{m,t}$ bestimmt. Diese Stichprobe von so genannten relativen Überschreitungsverlusten wird anschliessend für jedes Modell m aufsteigend sortiert. Der mittlere Überschreitungsverlust relativ zum Value-at-Risk ergibt sich nun für ein Modell m als arithmetisches Mittel über die $\lceil n_\alpha \rceil$ grössten Verlust-VaR-Quotienten gemäss

$$\overline{RUV}_m = \frac{1}{\lceil n_\alpha \rceil} \sum_{t=T-\lceil n_\alpha \rceil+1}^T \widehat{RUV}_{m,[t]}, \quad (12.13)$$

wobei sich n_α mittels (12.7) bestimmt. Das Aufrunden von n_α auf die kleinste ganze Zahl grösser oder gleich n_α entspricht im Rahmen des für das Risikomanagement relevanten und in der Praxis häufiger beobachteten Falles von mehr als n_α Überschreitungen einer konservativen Vorgehensweise in dem Sinn, dass mindestens $\alpha \cdot 100\%$ Überschreitungsverluste berücksichtigt werden.

Ein Wert von \overline{RUV}_m von eins würde bedeuten, dass die n_α grössten Verluste relativ zur jeweils korrespondierenden VaR-Schätzung im Mittel diesen VaR-Schätzungen entsprechen. Dies kann dahingehend interpretiert werden, dass die geschätzten VaR-Werte die hohen Verluste gut „prognostizieren“, womit ein Wert von \overline{RUV}_m nahe eins als wünschenswerte Eigenschaft eines Modells m betrachtet wird.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass sich diese Betrachtung der $\lceil n_\alpha \rceil$ grössten Verlust-VaR-Quotienten von dem in der einschlägigen Literatur üblicherweise vorgeschlagenen Vorgehen unterscheidet (vgl. HENDRICKS [83], S. 51 f., sowie ENGEL und GIZYCKI [66], S. 33 ff.). Dieses sieht die Bildung des arithmetischen Mittels über sämtliche Quotienten vor, die grösser als eins sind. Dies kann aber, wie nachfolgend ausgeführt wird, zu einer unzutreffenden Beurteilung der untersuchten Modelle führen.

Man betrachte zwei Modelltypen. Ein erster Modelltyp respektiere die vorgegebene Restwahrscheinlichkeit und liefere die gewünschte Anzahl Überschreitungen. Ein zweiter Modelltyp unterschätze den VaR systematisch und führe zu mehr Überschreitungen als vorgesehen. Es ist intuitiv einleuchtend und konnte im Rahmen der in Kapitel 13 vorgestellten empirischen Studie ebenfalls bestätigt werden, dass bei häufig vorkommenden Überschreitungsverlusten eine Mehrzahl dieser Verluste relativ knapp über den korrespondierenden VaR-Prognosen liegt.

Bildet man also das arithmetische Mittel über sämtliche Verlust-VaR-Quotienten, die grösser als eins sind, dann fliessen bei Modellen des zweiten Typs verhältnismässig viele Werte ein, die lediglich knapp über eins liegen. Dadurch fällt der entsprechende Mittelwert kleiner aus als etwa bei Modellen des ersten Typs, bei denen weniger aber tendenziell höhere Verlust-VaR-Quotienten in die Mittelwertbildung einfließen. Folglich werden Modelle des ersten Typs unerwünschterweise selbst dann als schlechter beurteilt als Modelle des zweiten Typs, wenn erstere hohe Verluste besser „prognostizieren“ als letztere.

Dieses Problem wird bei dem hier vorgeschlagenen Vorgehen dadurch umgangen, dass für jedes der M betrachteten Modelle die gleiche Anzahl $\lceil n_\alpha \rceil$ Überschreitungsverluste in die Mittelwertbildung einfließen. Ein Modell, bei dem das Mittel dieser $\lceil n_\alpha \rceil$ höchsten Überschreitungsverluste kleiner ausfällt, wird durch das Kriterium des mittleren Überschreitungsverlusts relativ zum VaR gemäss (12.13) wie gewünscht besser beurteilt als ein zu vergleichendes Modell, bei dem das Mittel dieser $\lceil n_\alpha \rceil$ höchsten Überschreitungsverluste grösser ausfällt. Die oben für den zweiten Modelltyp beschriebene Kompensation der hohen Verlust-VaR-Quotienten durch eine grössere Anzahl von Werten, die nur knapp über eins liegen, wird verhindert. Aus der Betrachtung der über alle untersuchten Modelle konstanten Anzahl $\lceil n_\alpha \rceil$ grössten Quotienten resultiert damit ein Kriterium, das einzig die Überschreitungshöhe beurteilt und diese nicht auf eine nicht klar trennbare Art mit dem Erreichen beziehungsweise dem Nichterreichen des geforderten Konfidenzniveaus vermischt.

12.1.8 Maximaler Überschreitungsverlust relativ zum Value-at-Risk

Das in diesem Abschnitt betrachtete Kriterium stellt die Frage nach der grössten betrachteten Überschreitung während einem Beobachtungszeitraum. Für ein bestimmtes Modell m ($m = 1, \dots, M$) wird zunächst für jeden Zeitpunkt t ($t = 1, \dots, T$) einer Beobachtungsperiode der Quotient zwischen dem effektiven Verlust V_t und dem entsprechenden geschätzten VaR-Prognosewert $VaR_{m,t}$ gemäss (12.12) berechnet. Anschliessend wird der maximale Überschreitungsverlust relativ zum VaR bestimmt (vgl. HENDRICKS [83], S. 52 f., und ENGEL und GIZYCKI [66], S. 35 f.), das heisst

$$RUV_m^{\max} = \max \left(\frac{V_1}{VaR_{m,1}}, \dots, \frac{V_T}{VaR_{m,T}} \right). \quad (12.14)$$

Wie in Abschnitt 12.1.7 bereits erläutert wurde, kann das den betrachteten VaR-Werten zugrunde liegende Modell nicht aufgrund hoher Überschreitungen als inadäquat bezeichnet werden, da der VaR dazu schlicht keine Aussage macht. Dennoch

interessiert man sich im Risikomanagement gerade für die sehr hohen Verluste mit ruinösen Auswirkungen. Folglich wird es als wünschenswert erachtet, wenn ein VaR-Modell nebst der Respektierung der vorgegebenen Restwahrscheinlichkeit auch in der Lage ist, extreme Verluste möglichst gut zu „prognostizieren“. In diesem Sinne sprechen möglichst kleine Werte von RUV_m^{\max} für die Verwendung eines bestimmten Modells m .

12.2 Univariate Anpassungstests

In Kapitel 3 wurde aufgezeigt, dass das im Rahmen der Monte-Carlo-Simulation für die Beschreibung der zeitlichen Dynamik von Aktienrenditen standardmässig verwendete Modell der geometrischen brownischen Bewegung von der Annahme normalverteilter Portfoliorenditen ausgeht. Ein erstes Indiz für die Adäquatheit oder Nichtadäquatheit dieses Ansatzes zur Generierung einer Prognoseverteilung kann folglich eine Überprüfung der beobachteten Portfoliorenditen auf Normalverteiltheit liefern. Nachfolgend sollen zwei Anpassungstests eingeführt werden. Dabei interessiert man sich wie oben motiviert im vorliegenden Kontext vorwiegend für die Überprüfung einer Normalverteilungsannahme.

12.2.1 χ^2 -Anpassungstest

Der χ^2 -Anpassungstest dient zur Überprüfung der Nullhypothese H_0 , dass eine Zufallsvariable X eine bestimmte theoretische Verteilung F_0 aufweist (vgl. HARTUNG [82], S. 182 f., und MITTELHAMMER [120], S. 655 ff.). Somit wird die Nullhypothese

$$H_0 : X \stackrel{L}{\sim} F_0$$

gegen die Alternativhypothese

$$H_1 : X \not\stackrel{L}{\sim} F_0$$

getestet. Die theoretische Verteilung F_0 kann dabei eine Normalverteilung sein. Der χ^2 -Anpassungstest ist aber nicht auf diese Verteilungsfamilie beschränkt.

Man verfüge über eine Zufallsstichprobe x_1, \dots, x_T . Zur Bestimmung der benötigten Prüfgrösse wird zunächst der Wertebereich von X in K Klassen unterteilt. In einem zweiten Schritt wird ermittelt, wie viele der beobachteten Werte x_1, \dots, x_T in jeder dieser Klassen zu liegen kommen. Diese absoluten Häufigkeiten bezeichnet man mit O_k ($k = 1, \dots, K$). Anschliessend ist die Wahrscheinlichkeit p_k zu berechnen, mit der eine Beobachtung unter H_0 in die k -te Klasse fällt. Daraus

kann die unter H_0 erwartete Anzahl Realisierungen in der k -ten Klasse als $p_k T$ ermittelt werden. Die Prüfgrösse ergibt sich als

$$W = \sum_{k=1}^K \frac{(O_k - p_k T)^2}{p_k T}. \quad (12.15)$$

Unter H_0 ist diese asymptotisch χ^2 -verteilt mit $K - 1$ Freiheitsgraden (vgl. MITTELHAMMER [120], S. 655). Diese Approximation gilt als hinreichend genau, falls nicht mehr als 20% der Werte $p_k T$ kleiner als fünf und sämtliche Werte $p_k T \geq 1$ sind (vgl. HARTUNG [82], S. 182). Sind diese Bedingungen verletzt, so sind Klassen geeignet zusammenzufassen.

Die Nullhypothese H_0 ist zum Signifikanzniveau α zu verwerfen, falls für einen konkret bestimmten Wert w von W

$$w > \chi_{K-1;1-\alpha}^2$$

gilt. Dabei bezeichnet $\chi_{K-1;1-\alpha}^2$ das $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ -Quantil der χ^2 -Verteilung mit $K - 1$ Freiheitsgraden.

Ist bei der Ermittlung von p_k ($k = 1, \dots, K$) weiter eine Anzahl von c Verteilungsparametern aus der vorliegenden Zufallsstichprobe zu schätzen, so muss die Anzahl Freiheitsgrade um diesen Wert c verringert werden. H_0 ist dann zu verwerfen, falls

$$w > \chi_{K-1-c;1-\alpha}^2$$

gilt. Für die Überprüfung einer Normalverteilungsannahme, bei der die Nullhypothese

$$H_0 : X \stackrel{L}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$$

gegen die Alternativhypothese

$$H_1 : X \not\stackrel{L}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$$

getestet wird, wobei μ und σ^2 unbekannt und folglich zu schätzen sind, gilt etwa $c = 2$.

12.2.2 Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstest

Der Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstest (KS-Anpassungstest) ist ein weiterer Test zur Überprüfung der Nullhypothese H_0 , dass eine Zufallsvariable X eine bestimmte theoretische Verteilung F_0 aufweist (vgl. HARTUNG [82], S. 183 ff., und MITTELHAMMER [120], S. 658 ff.). Es wird folglich weiterhin die Nullhypothese

$$H_0 : X \stackrel{L}{\sim} F_0$$

$1 - \alpha$	0.90	0.95	0.99
$d_{T;1-\alpha}$	$1.224/\sqrt{T}$	$1.358/\sqrt{T}$	$1.628/\sqrt{T}$

Tabelle 12.6: Approximative kritische Werte für den Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstest bei bekannten Verteilungsparametern.

gegen die Alternativhypothese

$$H_1 : X \not\stackrel{L}{\sim} F_0$$

getestet.

Man verfüge über eine Zufallsstichprobe x_1, \dots, x_T . Die Grundidee des KS-Tests besteht darin, den grössten vertikalen Abstand zwischen der angenommenen theoretischen Verteilungsfunktion F_0 und der empirischen Verteilungsfunktion \hat{F} zu bestimmen. Dabei gibt die empirische Verteilungsfunktion den Anteil der Realisierungen x_1, \dots, x_T an, die kleiner oder gleich dem Argument x der Funktion sind. Die Prüfgrösse ergibt sich als

$$d_T = \sup_x |F_0(x) - \hat{F}(x)|. \quad (12.16)$$

Für die konkrete Berechnung sei darauf hingewiesen (vgl. MITTELHAMMER [120], S. 659), dass

$$d_T = \max(d_T^+, d_T^-)$$

gilt, wobei

$$d_T^+ = \max_{t \in \{1, \dots, T\}} (t/T - F_0(x_{[t]})) \quad \text{und} \quad d_T^- = \max_{t \in \{1, \dots, T\}} (F_0(x_{[t]}) - (t-1)/T).$$

Mit $x_{[1]}, \dots, x_{[T]}$ wird dabei die aufsteigend sortierte Stichprobe bezeichnet.

Die Nullhypothese H_0 wird zum Signifikanzniveau α verworfen, falls

$$d_T \geq d_{T;1-\alpha}$$

gilt. Dabei ist der kritische Wert $d_{T;1-\alpha}$ das $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ -Quantil der Verteilung der Testgrösse D_T . Solche Quantile können in entsprechenden Tafeln nachgeschlagen (vgl. etwa GIBBONS [79], S. 400, oder HARTUNG [82], S. 184) oder über Näherungsformeln berechnet werden (vgl. MITTELHAMMER [120], S. 659 f.). In Tabelle 12.6 sind approximative kritische Werte in Abhängigkeit des Stichprobenumfangs T für drei verschiedene Signifikanzniveaus angegeben. Es ist zu beachten, dass die so ermittelten Werte nur in den Fällen adäquat sind, in denen die Parameter der

$1 - \alpha$	0.90	0.95	0.99
$d_{T;1-\alpha}$	$0.805/\sqrt{T}$	$0.886/\sqrt{T}$	$1.031/\sqrt{T}$

Tabelle 12.7: Approximative kritische Werte für den Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstest auf Normalverteilung mit unbekannten Parametern.

hypothetischen Verteilung bekannt sind. Müssen diese zusätzlich aus der Zufallsstichprobe geschätzt werden, so gelten andere kritische Werte, die im Allgemeinen nicht mehr einfach zu bestimmen sind.

Für die Überprüfung einer Normalverteilungsannahme, bei der die Nullhypothese

$$H_0 : X \stackrel{L}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$$

gegen die Alternativhypothese

$$H_1 : X \not\stackrel{L}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$$

getestet wird, wobei μ und σ^2 unbekannt sind und folglich geschätzt werden müssen, finden sich bei LILLIEFORS [110], S. 400, entsprechend angepasste kritische Werte. Für $4 \leq T \leq 30$ sind diese Werte tabelliert, für $T > 30$ werden Approximationsfunktionen in Abhängigkeit von T genannt, die in Tabelle 12.7 wiedergegeben sind. Die benötigten Parameter μ und σ^2 werden durch das arithmetische Mittel der Stichprobenwerte beziehungsweise durch den in (3.12) angegebenen erwartungstreuen Varianzschätzer bestimmt.

Zum Abschluss dieses Abschnitts sollen kurz Vor- und Nachteile des Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstests im Vergleich zum zuvor vorgestellten χ^2 -Anpassungstest besprochen werden (vgl. MITTELHAMMER [120], S. 658 f.). Als Vorteil des KS-Tests ist zu nennen, dass dieser im Gegensatz zum asymptotischen χ^2 -Test auch für kleine Stichproben uneingeschränkt einsetzbar ist. Weiter arbeitet der KS-Anpassungstest direkt mit den beobachteten Daten, wohingegen der χ^2 -Test eine Einteilung in Klassen verlangt, die einerseits arbiträr ist und durch die andererseits Informationen verloren gehen können. So ist der KS-Test in den meisten Fällen trennschärfer als der χ^2 -Test (vgl. LILLIEFORS [110], S. 399). Eine Einschränkung des KS-Anpassungstests ist, dass dieser auf stetige Verteilungen beschränkt ist. Betrachtet man aber gerade stetige Verteilungen, so liefert der KS-Test eine präzisere Analyse als der χ^2 -Test. Ein Nachteil des KS-Tests ist, dass dieser im Gegensatz zum χ^2 -Test im Allgemeinen keine einfache Modifikation zulässt, wenn zusätzlich unbekannte Parameter aus einer vorliegenden Zufallsstichprobe zu schätzen sind. Wie oben beschrieben wurde, ist im Falle eines Anpassungstests auf Normalverteilung mit unbekannten Parametern dieses Problem jedoch gelöst.

Mit Hilfe der in diesem Kapitel dargestellten Kriterien soll nun für den Schweizer Aktienmarkt das Modellrisiko der Verwendung beziehungsweise der Nichtverwendung von Copulafunktionen im Allgemeinen und das Modellrisiko der in Kapitel 9 dargestellten parametrischen Copulafamilien im Speziellen abgeschätzt werden.

Kapitel 13

Abschätzung des Modellrisikos von Copulafunktionen

In diesem Kapitel werden die Resultate der für den Schweizer Aktienmarkt durchgeführten empirischen Studie präsentiert. Das Hauptziel ist es, das Modellrisiko der in Kapitel 9 eingeführten Copulafunktionen abzuschätzen und so diese Copulas auf ihre Eignung für die Zusammenhangsmodellierung von Aktien im Hinblick auf die Risikomessung entsprechender Portfolios zu untersuchen. In Abschnitt 1.3 wurde betont, dass das Modellrisiko nicht direkt beziffert werden kann. Deshalb werden für die diversen Copulafunktionen die in Kapitel 12 vorgestellten Kriterien berechnet, die Hinweise auf das Modellrisiko liefern. Diese Kriterien basieren jeweils auf dem in Abschnitt 2.2 definierten Value-at-Risk. Die Generierung der für die Schätzung des VaR benötigten Realisierungen einer Rendite- beziehungsweise Verlustverteilung werden insbesondere mit Hilfe der in Kapitel 10 dargestellten Monte-Carlo-Methode unter Verwendung von Copulafunktionen vorgenommen. Die Methode der in Abschnitt 3.2.1 beschriebenen historischen Simulation wird als nichtparametrisches Verfahren jeweils zu Vergleichszwecken herangezogen.

Im Rahmen eines Bewertungsproblems wird also der Frage nachgegangen, ob bestehende Modelle der Risikoschätzung von Finanzportfolios durch den Einsatz von Copulafunktionen im Sinne gewisser Zielkriterien verbessert werden können. Dabei wird das vom Basler Ausschuss für Bankenaufsicht und von der Eidgenössischen Bankkommission im Rahmen des Backtesting verbindlich vorgeschriebene Ampelkonzept als Hauptkriterium betrachtet. Weiter wird untersucht, welchen Preis in Form von Rechenaufwand die Verwendung der unterschiedlichen Copulas fordert. Ein weiteres Ziel der empirischen Studie ist ein Vergleich der in Kapitel 7 eingeführten Methoden zur Schätzung von Copulafunktionen sowohl im Hinblick

auf eventuelle Unterschiede in den Schätzergebnissen als auch auf den verursachten Rechenaufwand.

In einem ersten Abschnitt dieses Kapitels wird ein Überblick über die empirische Studie gegeben. Dabei wird ausgeführt, welche Portfolios und Copulavarianten untersucht werden und welche quantitativen Bestimmungsgrößen bei der Schätzung des Value-at-Risk Anwendung finden. In der Finanzpraxis wird beim Einsatz der Monte-Carlo-Methode wie in Abschnitt 3.3.2 beschrieben gemeinhin von der Annahme normalverteilter Portfoliorenditen ausgegangen. Diese Hypothese wird im zweiten Abschnitt für die betrachteten Portfolios überprüft. Im Anschluss wird eine erste Untersuchung vorgenommen, bei der die Renditeverteilungen der einzelnen Aktien in den betrachteten Portfolios als normalverteilt angenommen werden. Nach der Auswertung der verschiedenen Kriterien zur Modellrisikoabschätzung der einzelnen Copulavarianten wird ein Vergleich der jeweils benötigten Rechenzeiten angestellt. Den Abschluss dieses dritten Abschnitts bildet eine Zusammenfassung der Ergebnisse und eine Beurteilung der Eignung der untersuchten Modelle. Nachfolgend wird die Annahme normalverteilter Aktienrenditen überprüft. Den Abschluss des Kapitels bildet eine zweite Untersuchung, bei der die Einzelrenditen mit Hilfe der empirischen Verteilungsfunktion modelliert werden. Es werden erneut die Kriterien zur Abschätzung des Modellrisikos ausgewertet, die Ergebnisse zusammengefasst und die Eignung der betrachteten Copulafunktionen beurteilt.

13.1 Überblick über die empirische Studie

Untersuchte Portfolios

In der empirischen Studie werden Portfolios untersucht, die zwei, drei, vier, fünf oder zehn Titel umfassen. In den Kapiteln 5 und 9 wurde darauf hingewiesen, dass mit dem Übergang von bivariaten zu multivariaten Copulafunktionen eine massgebliche Komplexitätssteigerung einhergeht. Damit wird es interessant sein, ob die Eignungsbeurteilung der betrachteten Copulafunktionen bei aus zwei Aktien bestehenden Portfolios gleich ausfällt wie bei Portfolios, die drei und mehr Aktien umfassen. Der Grund für die verhältnismässig kleinen Portfolios von maximal zehn Titeln pro Portfolio ist im bewältigbaren Rechenaufwand der entsprechenden Schätzungen und Simulationen zu sehen.

Die konkreten Portfolios werden durch zufällige Kombination der in Tabelle 11.1 aufgeführten Schweizer Aktien erzeugt. Die Tabelle 13.1 gibt an, wie viele Portfolios einer bestimmten Grösse in der empirischen Studie untersucht werden. Insge-

samt fliessen 130 unterschiedlich zusammengesetzte Portfolios in die Untersuchung ein.

Anzahl Titel pro Portfolio	2	3	4	5	10	Total
Anzahl untersuchte Portfolios	30	30	30	20	20	130

Tabelle 13.1: Anzahl untersuchter Portfolios.

Untersuchte Modelle

In Tabelle 13.2 werden die in der empirischen Studie zu vergleichenden Modelle aufgeführt. Insgesamt werden 25 unterschiedliche Modelle untersucht, nämlich 24 Copulavarianten und als nichtparametrisches Vergleichsmodell die historische Simulation.

In der ersten Spalte der Tabelle 13.2 wird für jedes untersuchte Modell eine Kennung eingeführt, die nachfolgend zur Bezeichnung verwendet wird. Die Abkürzung „HS“ kennzeichnet die Methode der historischen Simulation. Im Falle der Copulavarianten umfasst die Kennung mehrere Teile. Der erste Teil nimmt dabei mit einem entsprechenden Kürzel Bezug auf die verwendete Copulafunktion. Diese wird in der zweiten Spalte mit der korrespondierenden Definitionsgleichung genannt. Der zweite Teil der Kennung benennt das Schätzverfahren. Dabei werden die Maximum-Likelihood-Methode und die Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse unterschieden, wie der dritten Spalte der Tabelle 13.2 zu entnehmen ist. Bei der letztgenannten Schätzmethode steht „ τ “ in der Kennung für die Verwendung des Rangkorrelationskoeffizienten von Kendall und „ ρ “ für den Einsatz des Rangkorrelationskoeffizienten von Spearman als Zusammenhangsmass. Bei den archimedischen Copulas gibt weiter eine „1“ beziehungsweise ein „ N “ am Ende der Kennung an, ob es sich um eine Copulafunktion der Form (9.51) mit einem einzigen Parameter oder um eine Copulafunktion der Form (9.56a) mit $N - 1$ Parametern handelt. Die Anzahl Parameter wird für jedes Modell in der vierten Spalte der Tabelle 13.2 aufgeführt.

Bereits an früherer Stelle wurde darauf hingewiesen, dass grosse Verluste von Aktienpositionen häufiger simultan auftreten als grosse Gewinne. Diese Asymmetrie lässt sich einerseits direkt durch Copulafunktionen modellieren, die asymptotische untere Randabhängigkeit implizieren. Andererseits kann das Phänomen simultan auftretender grosser Verluste aber auch durch Copulafunktionen erfasst werden, die asymptotische obere Randabhängigkeit implizieren. Hierfür ist zunächst das Vorzeichen der historisch beobachteten Renditen der Titel in einem untersuchten Portfolio zu wechseln. Mit Hilfe dieser so genannten invertierten Renditen werden

Kennung	Copulafunktion	Schätzmethode	Anzahl Parameter	Dimensionen	Anzahl Portfolios
HS			0	2, 3, 4, 5, 10	130
N-ML	Normal-Copula (9.4)	Maximum-Likelihood-Methode	$(N^2 - N)/2$	2, 3, 4, 5, 10	130
t -ML	t -Copula (9.19)	Maximum-Likelihood-Methode	$((N^2 - N)/2) + 1$	2, 3, 4, 5, 10	130
t - τ	t -Copula (9.19)	Copulabasierte Zusammenhangsmasse	$((N^2 - N)/2) + 1$	2, 3, 4, 5, 10	130
RFGM-ML	Reduzierte FGM-Copula (9.29)	Maximum-Likelihood-Methode	$(N^2 - N)/2$	2, 3, 4, 5, 10	130
RFGM- τ	Reduzierte FGM-Copula (9.29)	Copulabasierte Zusammenhangsmasse	$(N^2 - N)/2$	2, 3, 4, 5, 10	130
RFGM- ϱ	Reduzierte FGM-Copula (9.29)	Copulabasierte Zusammenhangsmasse	$(N^2 - N)/2$	2, 3, 4, 5, 10	130
Gu-ML-1	Gumbel-Copula (9.53)	Maximum-Likelihood-Methode	1	2, 3, 4, 5	110
Gu- τ -1	Gumbel-Copula (9.53)	Copulabasierte Zusammenhangsmasse	1	2, 3, 4, 5	110
Gu- τ - N	Gumbel-Copula (9.58)	Copulabasierte Zusammenhangsmasse	$N - 1$	3, 4, 5	80
iR-Gu-ML-1	Gumbel-Copula (9.53)	Maximum-Likelihood-Methode	1	2, 3, 4, 5	110
iR-Gu- τ -1	Gumbel-Copula (9.53)	Copulabasierte Zusammenhangsmasse	1	2, 3, 4, 5	110
iR-Gu- τ - N	Gumbel-Copula (9.58)	Copulabasierte Zusammenhangsmasse	$N - 1$	3, 4, 5	80
KS-ML-1	Kimeldorf-Sampson-Copula (9.54)	Maximum-Likelihood-Methode	1	2, 3, 4, 5	110
KS- τ -1	Kimeldorf-Sampson-Copula (9.54)	Copulabasierte Zusammenhangsmasse	1	2, 3, 4, 5	110
KS-ML- N	Kimeldorf-Sampson-Copula (9.59)	Maximum-Likelihood-Methode	$N - 1$	3	30
KS- τ - N	Kimeldorf-Sampson-Copula (9.59)	Copulabasierte Zusammenhangsmasse	$N - 1$	3, 4, 5	80
Ne-ML-1	Nelsen-Copula (9.55)	Maximum-Likelihood-Methode	1	2, 3, 4, 5	110
Ne- τ -1	Nelsen-Copula (9.55)	Copulabasierte Zusammenhangsmasse	1	2, 3, 4, 5, 10	130
Ne-ML- N	Nelsen-Copula (9.60)	Maximum-Likelihood-Methode	$N - 1$	3	30
Ne- τ - N	Nelsen-Copula (9.60)	Copulabasierte Zusammenhangsmasse	$N - 1$	3, 4, 5	80
iR-Ne-ML-1	Nelsen-Copula (9.55)	Maximum-Likelihood-Methode	1	2, 3, 4, 5	110
iR-Ne- τ -1	Nelsen-Copula (9.55)	Copulabasierte Zusammenhangsmasse	1	2, 3, 4, 5, 10	130
iR-Ne-ML- N	Nelsen-Copula (9.60)	Maximum-Likelihood-Methode	$N - 1$	3	30
iR-Ne- τ - N	Nelsen-Copula (9.60)	Copulabasierte Zusammenhangsmasse	$N - 1$	3, 4, 5	80

Tabelle 13.2: Untersuchte Modelle.

nachfolgend die Parameter einer entsprechenden Copulafunktion mit asymptotischer oberer Randabhängigkeit geschätzt und unter Verwendung dieser geschätzten Copulafunktion Portfoliorenditen für den gewünschten Prognosezeitpunkt simuliert. Durch erneuten Vorzeichenwechsel dieser prognostizierten Renditewerte erhält man schliesslich die zur Risikomessung des betrachteten Portfolios benötigten Realisierungen der Verteilung der Portfoliorendite. Wird diese Methode eingesetzt, dann wird der entsprechenden Kennung das Kürzel „iR“ vorangestellt, das für „invertierte Renditen“ steht.

Copulafunktionen mit asymmetrischem Randverhalten wurden in Abschnitt 9.3 bei der Einführung der archimedischen Copulafamilie präsentiert. Der Übergang zu invertierten Renditen macht insbesondere für die Gumbel- und die Nelsen-Copula Sinn, da die Gumbel-Copula einzig asymptotische obere Randabhängigkeit beinhaltet und die Nelsen-Copula sowohl asymptotische untere als auch obere Randabhängigkeit jedoch von unterschiedlicher Form impliziert.

Die fünfte Spalte der Tabelle 13.2 gibt die Portfoliogrößen an, für die ein bestimmtes Modell zum Einsatz gelangen. Die Anzahl Titel in einem Portfolio entsprechen dabei natürlich der Dimension der verwendeten Copulafunktion. Bei den archimedischen Copulas sind im zweidimensionalen Fall die Modelle mit $N - 1$ Parametern identisch mit den Modellen mit einem Parameter, weshalb die „2“ nur bei letztgenannten Modellen auftaucht.

Es fällt auf, dass bis auf zwei Ausnahmen keine archimedischen Copulafunktionen für die Untersuchung der aus zehn Titeln bestehenden Portfolios eingesetzt werden. Dies erklärt sich aus der in Abschnitt 9.3 ausführlich beschriebenen und in Tabelle 9.2 illustrierten mit wachsender Dimension überproportional steigenden Komplexität dieser Copulafunktionen. Die Schätzung der Kimeldorf-Sampson- und der Nelsen-Copula mit $N - 1$ Parametern mittels der Maximum-Likelihood-Methode ist aus dem gleichen Grund sogar nur für drei Dimensionen zu bewältigen. Im Fall der Gumbel-Copula mit $N - 1$ Parametern hat sich im Verlauf der empirischen Studie gezeigt, dass die numerischen Optimierungsverfahren, die bei der ML-Schätzung eingesetzt werden müssen, in keinem Fall konvergieren. Aus diesem Grund sind die entsprechenden Modelle in Tabelle 13.2 nicht aufgeführt.

Schliesslich wird in der sechsten Spalte für jedes Modell die Anzahl untersuchter Portfolios genannt.

Im Rahmen der empirischen Studie wurden für ein Portfolio jeweils sämtliche zum Einsatz kommenden Modelle in einem Zuge geschätzt und simuliert. Damit mussten von mehreren Modellen benötigte Komponenten wie beispielsweise die Rangkorrelationsmatrix von Kendall oder die der Simulation der Copulafunktionen zugrunde liegenden Zufallszahlen nur einmal geschätzt beziehungsweise generiert werden. Dies reduzierte auf der einen Seite die Rechenzeiten. Auf der anderen

Seite hat gerade die Verwendung identischer Zufallszahlen zusätzlich den Vorteil, dass ein unterschiedlicher Einfluss von dieser Seite auf die erzielten Ergebnisse ausgeschlossen werden kann.

Quantitative Bestimmungsgrößen für den Value-at-Risk im Rahmen des Backtesting

In Abschnitt 12.1.4 der vorliegenden Arbeit wurde erwähnt, dass das aufsichtliche Rahmenkonzept für Backtesting des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht (vgl. BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION [20]) in der Literatur durchaus kritisiert wird. Dennoch ist es der international anerkannte Standard der Finanzpraxis für das Backtesting und bildet die massgebliche Vorschrift für Banken und professionelle Vermögensverwalter in einer Vielzahl von Ländern. Dies gilt insbesondere für die Schweiz, da die Eidgenössische Bankenkommision die Vorgaben des Basler Ausschusses unverändert in ihre Richtlinien übernommen hat (vgl. EIDGENÖSSISCHE BANKENKOMMISSION [138], S. 26 ff.). Aus diesem Grund werden für die Durchführung der empirischen Studie ebenfalls diese Vorschriften herangezogen. Dabei handelt es sich in erster Linie um die in Abschnitt 2.5 beschriebenen quantitativen Bestimmungsgrößen für den Value-at-Risk im Rahmen des Backtesting.

So werden die VaR-Werte für ein Konfidenzniveau von 99% geschätzt und es wird eine Haltedauer von einem Tag zugrunde gelegt. Weiter basieren die Rückvergleiche auf einer Stichprobe von 250 historischen Beobachtungen. Den Basler Vorgaben folgend muss eine zur Modellschätzung verwendete Datenreihe einen Beobachtungszeitraum von mindestens einem Jahr abdecken. Diese Minimalforderung wird mit dem gewählten Schätzfenster von 500 Tagen sogar übertroffen. Insgesamt werden somit für Schätzung und Backtesting 750 Beobachtungen benötigt. Wie in Abschnitt 11.1 ausgeführt wurde, soll das Jahr 2001 betrachtet werden. Um eine erste VaR-Schätzung für den ersten Handelstag dieses Jahres, den 03.01.2001, zu erhalten, werden folglich die 500 Datenpunkte zwischen dem 11.01.1999 und dem 29.12.2000 für die Parameterschätzung der verwendeten Modelle verwendet. Durch das Verschieben dieses Schätzfensters um jeweils einen Tag über die gesamte Beobachtungsperiode gelangt man zuletzt zu einer VaR-Schätzung für den letzten Handelstag des Jahres 2001, den 28.12.01, und erhält so die Backtestingstichprobe von 250 Realisierungen. Hieraus wird ebenfalls klar, dass der VaR den aufsichtsrechtlichen Vorschriften entsprechend täglich geschätzt wird. Die genannten quantitativen Bestimmungsgrößen sind in Tabelle 13.3 zusammengefasst.

Bestimmungsgrösse	Parametrisierung
Konfidenzniveau	99%
Haltedauer	1 Tag
Schätzfenster	500 Tage
Backtestingstichprobe	250 Tage (03.01.01 – 28.12.01)

Tabelle 13.3: Verwendete quantitative Bestimmungsgrössen für den Value-at-Risk im Rahmen des Backtesting.

13.2 Untersuchung der Portfoliorenditen auf Normalverteiltheit

In Abschnitt 3.3.2 wurde aufgezeigt, dass das im Rahmen der Monte-Carlo-Simulation für die Beschreibung der zeitlichen Dynamik von Aktienrenditen standardmässig verwendete Modell der geometrischen brownischen Bewegung normalverteilte Portfoliorenditen impliziert. Ein erstes Indiz für die Adäquatheit oder Nichtadäquatheit dieses Modells kann somit die Überprüfung der Portfoliorenditen auf Normalverteiltheit mit Hilfe der beiden in Abschnitt 12.2 eingeführten univariaten Anpassungstests liefern.

Die Tabelle 13.4 zeigt für die 750 Tagesrenditen der Jahre 1999 bis 2001 die detaillierten Testresultate des χ^2 - und des Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstests für die dreissig untersuchten aus zwei Titeln zusammengesetzten Portfolios. Für den χ^2 -Anpassungstest wird sowohl die gemäss (12.15) berechnete Prüfgrösse w als auch die als P-Wert bezeichnete Überschreitungswahrscheinlichkeit angegeben. Für den KS-Anpassungstest wird die laut (12.16) bestimmte Prüfgrösse d_T aufgeführt. Weiter werden im Kopf der zweitletzten und der letzten Spalte für die Signifikanzniveaus $\alpha = 0.01$ und $\alpha = 0.05$ die kritischen Werte nach LILLIEFORS [110] genannt, die sich gemäss den Angaben in Tabelle 12.7 als

$$1.031/\sqrt{750} = 0.0377 \quad \text{und als} \quad 0.886/\sqrt{750} = 0.0324$$

berechnen.

Für beide Anpassungstests wird ferner in den mit „Ablehnung“ bezeichneten Spalten für die beiden zuvor genannten Signifikanzniveaus angegeben, ob für ein jeweiliges Portfolio die Nullhypothese normalverteilter Tagesportfoliorenditen zu verwerfen ist. Hierbei steht der Wert 1 für die Ablehnung und der Wert 0 für die Nichtablehnung der Hypothese H_0 . Aus diesen Angaben lässt sich der jeweilige Ablehnungsanteil ermitteln. So ist die Normalverteilungsannahme im Rahmen des

Portfolio	χ^2 -Anpassungstest				KS-Anpassungstest		
	w	P-Wert	Ablehnung		d_T	Ablehnung	
			0.01	0.05		0.01 0.0377	0.05 0.0324
ABBN-BAER	33.5047	0.0014	1	1	0.0525	1	1
ABBN-HOL	46.1081	0.0000	1	1	0.0578	1	1
ABBN-KUD	72.8959	0.0000	1	1	0.0806	1	1
ABBN-UHRN	37.9479	0.0003	1	1	0.0584	1	1
BAER-ROG	38.5033	0.0002	1	1	0.0528	1	1
BAER-UBSN	42.6475	0.0001	1	1	0.0480	1	1
BALN-RAN	227.5981	0.0000	1	1	0.1246	1	1
BALN-UNAX	29.0187	0.0065	1	1	0.0438	1	1
CFR-SCMN	31.4967	0.0029	1	1	0.0552	1	1
CIBN-BAER	31.4967	0.0029	1	1	0.0496	1	1
CIBN-ROG	39.6996	0.0002	1	1	0.0618	1	1
CIBN-UBSN	27.5661	0.0104	0	1	0.0457	1	1
CIBN-UHRN	43.0748	0.0000	1	1	0.0589	1	1
CIBN-ZURN	83.1495	0.0000	1	1	0.0792	1	1
CLN-SGSN	65.3338	0.0000	1	1	0.0654	1	1
HOL-ZURN	77.5955	0.0000	1	1	0.0762	1	1
NESN-SEO	52.0895	0.0000	1	1	0.0687	1	1
NESN-UBSN	21.2003	0.0691	0	0	0.0417	1	1
NOVN-ROG	55.3792	0.0000	1	1	0.0575	1	1
NOVN-SCMN	32.9493	0.0017	1	1	0.0567	1	1
NOVN-ZURN	80.6288	0.0000	1	1	0.0751	1	1
RUKN-UBSN	52.3885	0.0000	1	1	0.0670	1	1
SCMN-UBSN	33.4619	0.0015	1	1	0.0514	1	1
SEO-RUKN	83.7904	0.0000	1	1	0.0739	1	1
SGSN-RUKN	83.0214	0.0000	1	1	0.0716	1	1
SGSN-SCMN	59.6515	0.0000	1	1	0.0645	1	1
SGSN-UHR	46.7063	0.0000	1	1	0.0577	1	1
SUN-SCMN	23.2510	0.0388	0	1	0.0449	1	1
SUN-ZURN	92.2924	0.0000	1	1	0.0770	1	1
UHR-ZURN	67.8117	0.0000	1	1	0.0762	1	1
Ablehnungsanteil			0.900	0.967		1.000	1.000

Tabelle 13.4: Überprüfung der Nullhypothese normalverteilter Tagesportfoliorenditen. Resultate des χ^2 - und des Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstests für Portfolios mit zwei Titeln im Zeitraum von 1999 bis 2001.

Anzahl Titel	χ^2 -Anpassungstest		KS-Anpassungstest	
	0.01	0.05	0.01	0.05
2	0.900	0.967	1.000	1.000
3	0.767	0.867	0.967	1.000
4	0.900	1.000	0.967	1.000
5	0.850	0.950	1.000	1.000
10	0.700	0.900	0.950	1.000
Ablehnungsanteil	0.823	0.937	0.977	1.000

Tabelle 13.5: Ablehnungsanteile der Nullhypothese normalverteilter Tagesportfoliorenditen für den χ^2 - und den Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstest für die Jahre 1999 bis 2001.

χ^2 -Anpassungstests für $\alpha = 0.01$ in 90% der Fälle und für $\alpha = 0.05$ in 96.7% der Fälle zu verwerfen. Für den KS-Anpassungstest beträgt der Ablehnungsanteil bei beiden betrachteten Signifikanzniveaus 100%.

Die Tabelle 13.5 zeigt eine Zusammenfassung der Testresultate für sämtliche in der empirischen Studie untersuchten Portfolios. Zunächst werden die analog zu oben ermittelten nach der Portfoliogrösse unterschiedenen Ablehnungsanteile für den χ^2 - und den KS-Anpassungstest und die Signifikanzniveaus 0.01 und 0.05 ausgewiesen. Weiter werden in der letzten Zeile die als arithmetisches Mittel über die Ablehnungsanteile der verschiedenen Portfoliogrössen ermittelten durchschnittlichen Ablehnungsanteile angegeben. So ist beim χ^2 -Anpassungstest die Nullhypothese normalverteilter Tagesportfoliorenditen für $\alpha = 0.01$ im Mittel in 82.3% der Fälle und für $\alpha = 0.05$ im Mittel in 93.7% der Fälle zu verwerfen. Beim KS-Anpassungstest präsentiert sich der mittlere Ablehnungsanteil bei beiden betrachteten Signifikanzniveaus leicht höher. Für $\alpha = 0.01$ beträgt dieser 97.7%, für $\alpha = 0.05$ wird die Normalverteilungshypothese in jedem Fall verworfen.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Annahme normalverteilter Portfoliorenditen, wie sie die geometrische brownische Bewegung im Rahmen der Monte-Carlo-Simulation impliziert, in höchstem Masse zweifelhaft ist. Dies ist als erstes Indiz für die begrenzte Eignung dieses standardmässig verwendeten Modells zu werten. Dieser Umstand motiviert zusätzlich die Suche nach adäquateren Modellen, wobei nachfolgend eine Verbesserung durch die Verwendung von verschiedenen Copulafunktionen angestrebt wird.

13.3 Normalverteilte Randverteilungen

In Abschnitt 3.3.2 wurde erörtert, dass sich das im Rahmen der Monte-Carlo-Simulation standardmässig verwendete Modell der geometrischen brownischen Be-

wegung mit Hilfe der Normal-Copula und normalverteilter Randverteilungen erzeugen lässt. Da der Einfluss, den der Einsatz alternativer Copulafunktionen auf das Modellrisiko hat, gegenüber dem Standardmodell der geometrischen brownischen Bewegung isoliert ausgewiesen werden soll, wird in einem ersten Schritt der empirischen Untersuchung lediglich die Copulafunktion ersetzt. Die Randverteilungen werden weiterhin als normalverteilt angenommen. Damit entspricht das in Tabelle 13.2 als N-ML bezeichnete Modell gerade dem Modell der geometrischen brownischen Bewegung. Die Backtestingergebnisse dieses Modells werden nachfolgend zusammen mit denjenigen, die aus der Anwendung der historischen Simulation resultieren, als Referenzwerte betrachtet, mit denen die Ergebnisse der übrigen in Tabelle 13.2 aufgeführten Modelle verglichen werden.

Da mit der Normalverteilung eine parametrische Verteilung für die Randverteilungen angenommen wird – diese Annahme wird in Abschnitt 13.4 noch überprüft werden –, wird im ganzen Abschnitt 13.3 die Maximum-Likelihood-Schätzung in der Form der in Abschnitt 7.1.2 eingeführten Methode der Inferenzfunktionen für Randverteilungen angewendet. Hierbei werden in einem ersten Schritt die Lage- und Streuungsparameter sämtlicher normalverteilter Randverteilungen gemäss (7.9) geschätzt und in einem zweiten Schritt für die entsprechend transformierten Daten laut (7.10) der Parametervektor der jeweiligen Copulafunktion bestimmt.

13.3.1 Auswertung der Kriterien zur Modellrisikoabschätzung

Mittlere relative Abweichung

Die in Abschnitt 12.1.1 eingeführte mittlere relative Abweichung ist ein Mass, das die Höhe der aus einem bestimmten Modell resultierenden VaR-Schätzungen mit der jeweiligen mittleren VaR-Schätzung über alle betrachteten Modelle vergleicht und so eine erste Einteilung in eher konservative und eher aggressive Modelle im Hinblick auf die Risikobezifferung ermöglicht. Dabei weist ein so genannt konservatives Modell eine mittlere relative Abweichung grösser null auf. Ein Wert kleiner null steht für ein so genannt aggressives Modell. Diese Trennung wird in Abbildung 13.2 durch die vertikale Linie an der Stelle null verdeutlicht. Diese Abbildung zeigt so genannte Box-Plots der geschätzten mittleren relativen Abweichungen aller 25 betrachteten Modelle.

Das Grundschema eines Box-Plots ist in Abbildung 13.1 wiedergegeben. Ein Box-Plot stellt den minimalen Wert x_{\min} , das erste Quartil $x_{0.25}$, den Median x_{med} , das dritte Quartil $x_{0.75}$ und den maximalen Wert x_{\max} einer Stichprobe x_1, \dots, x_T dar

(vgl. FAHRMEIR et al. [69], S. 66 f., SCHLITTGEN [144], S. 38 ff.). Als zusätzliche Information wird nachfolgend ebenfalls das arithmetische Mittel der Daten \bar{x} in den Box-Plot eingetragen und durch einen Punkt markiert.

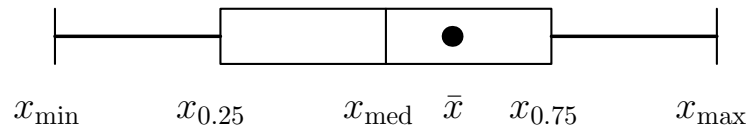


Abbildung 13.1: Grundschemata eines Box-Plots.

Die Abbildung 13.2 umfasst sämtliche untersuchten Portfolios und differenziert nicht nach der Portfoliogrösse. Es ist deshalb zu beachten, dass gemäss den Angaben in der sechsten Spalte der Tabelle 13.2 nicht jeder Box-Plot die gleiche Anzahl Daten repräsentiert. Eine solch zusammenfassende Darstellung ist gerechtfertigt, da es sich gezeigt hat, dass sich im Fall der mittleren relativen Abweichung die Resultate für die abweichenden Portfoliogrössen nicht wesentlich unterscheiden. Die nach der Portfoliogrösse differenzierten Abbildungen A.1 bis A.5 sind in Anhang A abgedruckt.

Die Ergebnisse in Abbildung 13.2 zeigen, dass sich die durch die unterschiedlichen Modelle generierten VaR-Schätzungen in ihrer Höhe nennenswert unterscheiden. So sind etwa die mit Hilfe der mit Ne- τ -1 gekennzeichneten Variante der Nelsen-Copula generierten VaR-Schätzungen bis zu rund 46% grösser beziehungsweise die mittels der mit RFGM-ML gekennzeichneten Variante der reduzierten Farlie-Gumbel-Morgenstern-Copula erzeugten VaR-Werte bis zu rund 26% kleiner als die jeweils entsprechende mittlere VaR-Schätzung über alle Modelle. Betrachtet man mit der historischen Simulation und der Normal-Copula die beiden Referenzmodelle, so stellt man fest, dass die historische Simulation in der grossen Mehrheit aller Fälle wesentlich konservativere VaR-Schätzungen liefert als die Normal-Copula, deren VaR-Schätzwerte im Durchschnitt rund 3% unter dem Mittel über alle Modelle zu liegen kommen. Aus Abbildung 13.2 erkennt man weiter, dass die Varianten der Gumbel-Copula mit invertierten Renditen sowie jene der mit der Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse geschätzten Kimeldorf-Sampson-Copula und der Nelsen-Copula ohne Vorzeichenwechsel der Renditen VaR-Schätzwerte liefern, die tendenziell grösser sind als das Mittel der VaR-Schätzungen aller Modelle. Dabei liefern die Varianten der letztgenannten Copula tendenziell sogar konservativere VaR-Schätzungen als die historische Simulation.

Bei der Nelsen-Copula ist weiter interessant, dass ein Vorzeichenwechsel der Renditen wesentlich kleinere VaR-Schätzwerte zur Folge hat, die meist sogar unter jenen der Normal-Copula zu liegen kommen. Ein ähnlicher wenn auch weniger stark ausgeprägter Effekt ist bei der Kimeldorf-Sampson-Copula zu verzeichnen,

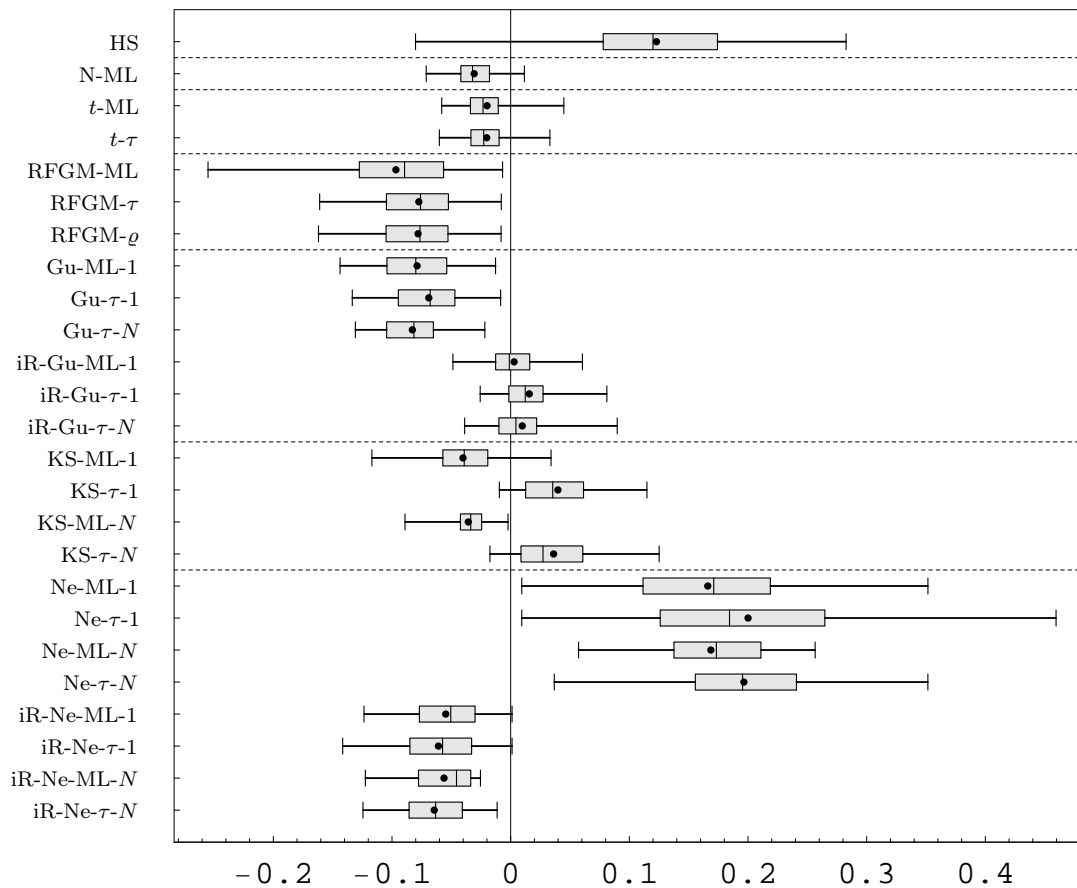


Abbildung 13.2: Mittlere relative Abweichungen. Zusammenfassung aller untersuchter Portfolios ohne Unterscheidung der Portfoliogrösse.

wenn die Copulaparameter anstatt mit der Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse mit der ML-Methode geschätzt werden.

Ebenfalls kleinere VaR-Schätzungen als das Mittel aller Modelle liefern die Varianten der Gumbel-Copula ohne Vorzeichenwechsel der Renditen und jene der reduzierten Farlie-Gumbel-Morgenstern-Copula. Von den beiden untersuchten Vertretern der elliptischen Copulafamilie liefert die t -Copula leicht konservativere VaR-Schätzwerte als die Normal-Copula.

Weiter zeigen die Box-Plots in Abbildung 13.2, dass die VaR-Schätzungen, die aus der Anwendung der historischen Simulation, der mittels der ML-Methode geschätzten reduzierten Farlie-Gumbel-Morgenstern-Copula und der Nelsen-Copula ohne Vorzeichenwechsel der Renditen resultieren, eine deutlich höhere Streuung aufweisen als diejenigen, die sich aus den übrigen Modellen ergeben.

Betrachtet man die Ergebnisse in Abbildung 13.2 in Abhängigkeit von der verwendeten Schätzmethode, so stellt man wie bereits angedeutet fest, dass sich die Resultate der Kimeldorf-Sampson-Copula deutlich unterscheiden. So liefert die Schätzung der Copulaparameter mit der Methode der copulabasierten Zusam-

menhangsmasse wesentlich konservativere VaR-Schätzwerte als die Schätzung der Copulaparameter mit der Maximum-Likelihood-Methode. Für alle übrigen Copulafunktionen äussert sich die Variation der Schätzmethode in viel geringerem Masse. Bemerkenswert ist ferner, dass es bei den archimedischen Copulafunktionen kaum eine Rolle spielt, ob die Ausprägung mit lediglich einem oder mit $N - 1$ Parametern vorliegt, was darauf hindeutet, dass die Stärke des Zusammenhangs der verschiedenen untersuchten Aktien in einem Portfolio jeweils sehr ähnlich ist.

An dieser Stelle soll erwähnt werden, dass eine Besonderheit der Nelsen-Copula in der zusammenfassenden Darstellung über alle untersuchten Portfolios ohne Unterscheidung der Portfoliogrösse, wie sie in Abbildung 13.2 gegeben wird, nicht zu erkennen ist. Betrachtet man etwa die Abbildungen A.1 bis A.4 in Anhang A, welche die in Box-Plots zusammengefassten geschätzten mittleren relativen Abweichungen für den Value-at-Risk nach Portfoliogrösse differenziert wiedergeben, so fällt auf, dass die Box-Plots einer Portfoliogrösse für die Varianten der Nelsen-Copula beziehungsweise für die Varianten der Nelsen-Copula mit invertierten Renditen sehr ähnlich, in den meisten Fällen sogar deckungsgleich sind. An dieser Stelle sei vorweggenommen, dass dieses Phänomen des beinahe gänzlichen Fehlens eines Einflusses sowohl der Anzahl Parameter im Modell als auch der Schätzmethode für die Varianten der Nelsen-Copula ebenfalls bei allen nachfolgend ermittelten Kriterien zur Modellrisikoabschätzung zu beobachten ist. Dies kann den Abbildungen A.6 bis A.30 in Anhang A entnommen werden. Der Grund für dieses Phänomen soll am Ende des Abschnitts 13.3.3 erörtert werden.

In Abschnitt 13.2 wurde aufgezeigt, dass die Annahme normalverteilter Portfoliorenditen in der Praxis meist verletzt ist. Als Konsequenz wird das Risiko eines Portfolios oft unterschätzt. Die Normalverteilungsannahme für Portfoliorenditen wird im vorliegenden Kontext durch den Einsatz der Normal-Copula repräsentiert. Folglich sind jene Modelle als vielversprechend einzustufen, die konservativere Risikoschätzungen als die Normal-Copula liefern.

Mit den nachfolgend präsentierten Kriterien soll weiter überprüft werden, ob die durch die mittlere relative Abweichung als konservativ ausgewiesenen Modelle auch zum richtigen Zeitpunkt, das heisst in Perioden erhöhten Marktrisikos, konservative Risikoschätzungen liefern.

Anzahl Überschreitungen, Kupiec-Test und Ampelkonzept des Basler Ausschusses

Inhalt dieses Unterabschnitts sind zunächst die im Jahre 2001 für die untersuchten Portfolios tatsächlich gezählten Überschreitungen, die durch den Vergleich der jeweiligen VaR-Schätzungen mit den an den entsprechenden Zeitpunkten effektiv

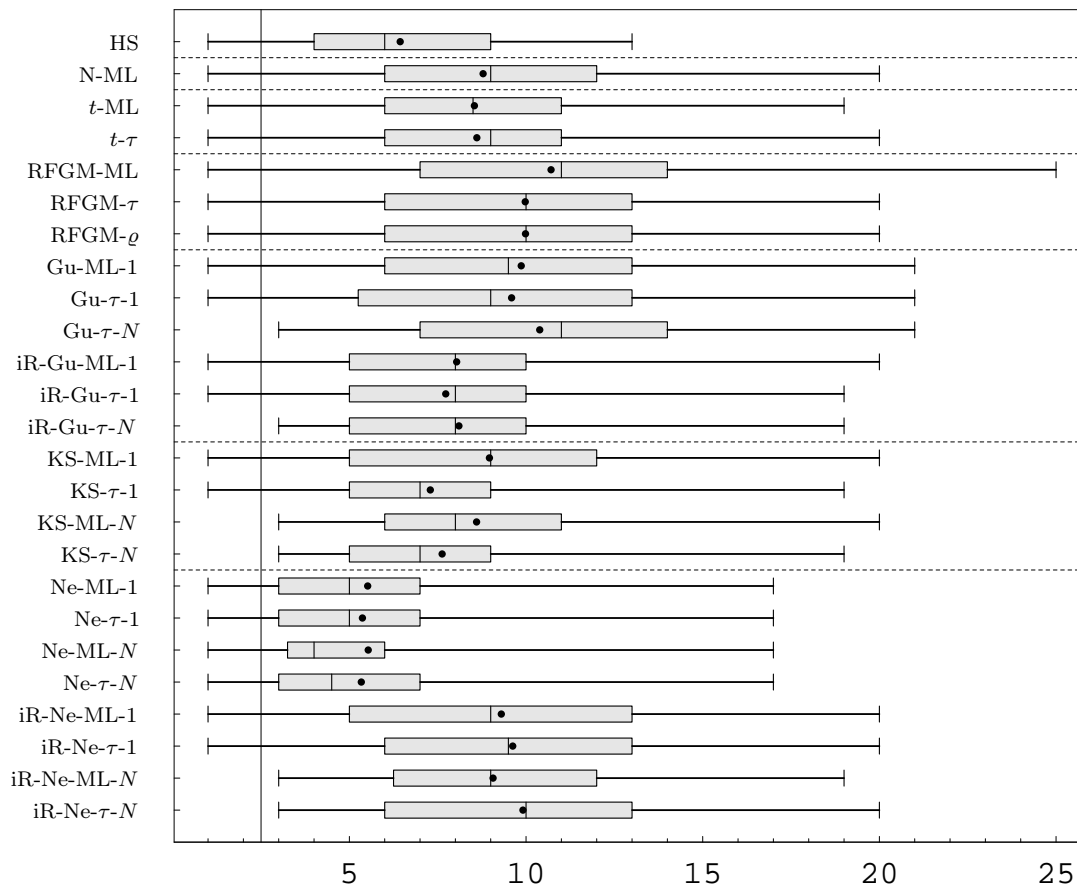


Abbildung 13.3: Anzahl Überschreitungen. Zusammenfassung aller untersuchter Portfolios ohne Unterscheidung der Portfoliogrösse.

beobachteten Verlusten ermittelt werden. Im Anschluss werden die darauf basierenden Resultate des Kupiec-Tests und die Ergebnisse im Rahmen des Basler Ampelkonzepts besprochen.

Gemäss den Richtlinien des Basler Ausschusses für das Backtesting wird die Wahrscheinlichkeit einer Überschreitung auf 1% gesetzt. Damit sollten bei der auf 250 historische Beobachtungen festgelegten Stichprobe für die Rückvergleiche gerade 2.5 Überschreitungen eintreten. Dieser Sollwert ist, ungeachtet der Tatsache, dass die Anzahl beobachteter Verluste stets ganzzahlig sein wird, in Abbildung 13.3 durch eine vertikale Linie eingezeichnet. Die Verteilungen der gezählten Überschreitungen sind in dieser Graphik für sämtliche untersuchten Modelle in Box-Plots zusammengefasst. Hierbei wird wie schon in Abbildung 13.2 nicht nach der Portfoliogrösse differenziert. Damit ist die Bemerkung weiterhin gültig, dass nicht jeder Box-Plot die gleiche Anzahl Daten repräsentiert. Die nach der Portfoliogrösse differenzierten Abbildungen A.6 bis A.10 sind in Anhang A wiedergegeben.

In Abbildung 13.3 sticht zunächst ins Auge, dass die mittlere Anzahl Überschreitungen in keinem Fall dem (gerundeten) Sollwert entspricht. Sämtliche untersuch-

Anzahl Titel	x_{\min}	$x_{0.25}$	x_{med}	$x_{0.75}$	x_{\max}	\bar{x}
2	1	4	6	11	19	7.280
3	1	5	8	11	21	8.161
4	1	6	9	13	21	9.730
5	1	4	7.5	10	18	7.716
10	3	7	9	12	25	9.944
alle Portfolios	1	5	8	12	25	8.441

Tabelle 13.6: Statistiken zur Anzahl Überschreitungen differenziert nach der Portfoliogrösse.

ten Modelle zur Generierung von Prognoseverteilungen führen bei Verwendung des Value-at-Risk in der grossen Mehrheit der Fälle zu einer Unterschätzung des Risikos in dem Sinn, dass mehr Überschreitungen als die theoretisch zu erwartende Anzahl auftreten. So beträgt das arithmetische Mittel über sämtliche Modelle für alle untersuchten Portfolios 8.441 Überschreitungen. Der Median liegt bei 8, das Maximum bei 25 Überschreitungen. Diese und weitere die Anzahl Überschreitungen betreffende Statistiken über alle untersuchten Modelle sind in Tabelle 13.6 aufgeführt.

Die Differenzierung nach der Portfoliogrösse in dieser Tabelle zeigt, dass sich die Ergebnisse in Abhängigkeit der Anzahl Titel in einem Portfolio nicht wesentlich unterscheiden. Die Abbildungen A.6 bis A.10 im Anhang A lassen weiter erkennen, dass sich vor allem auch die Güte der untersuchten Modelle relativ zueinander in Abhängigkeit der Portfoliogrösse nicht verändert. An dieser Stelle sei bemerkt, dass dieser Tatbestand ebenfalls bei den anschliessend in diesem Abschnitt 13.3.1 ausgewerteten Kriterien zutrifft, so dass in den nachfolgend verwendeten Abbildungen ebenfalls jeweils mit einer Zusammenfassung der Ergebnisse für alle untersuchten Portfolios gearbeitet wird.

Vergleicht man die Abbildungen 13.2 und 13.3, so zeigt sich folgende Tendenz: Je konservativer ein Modell durch das Kriterium der mittleren relativen Abweichung ausgewiesen wird, desto näher kommt es dem Sollwert an Überschreitungen. Folglich generieren die konservativen Modelle tatsächlich zum richtigen Zeitpunkt, das heisst in Perioden erhöhten Marktrisikos, konservativere VaR-Schätzungen. Betrachtet man etwa die beiden Referenzmodelle, so zeigt die durch die mittlere relative Abweichung als konservativ ausgewiesene historische Simulation im Mittel rund 6, die als eher aggressiv eingeschätzte Normal-Copula durchschnittlich rund 9 Überschreitungen.

Vor allem die als konservativ ausgewiesenen Varianten der Gumbel-Copula mit invertierten Renditen, die mit der Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse geschätzten Varianten der Kimeldorf-Sampson-Copula und die Varianten

der Nelsen-Copula ohne Vorzeichenwechsel der Renditen schneiden gemessen am Kriterium der Anzahl beobachteter Überschreitungen gut ab. Diese führen im Mittel zu rund 8, 7 beziehungsweise 4 bis 5 Überschreitungen. Im Vergleich zur Normal-Copula ebenfalls leicht vorteilhaft präsentieren sich mit durchschnittlich rund 8 bis 9 Überschreitungen die mit der ML-Methode geschätzten Varianten der Kimeldorf-Sampson-Copula und mit im Mittel 8.5 bis 9 Überschreitungen die Varianten der t -Copula. Alle übrigen Modelle schneiden im Vergleich zur Normal-Copula schlechter ab. Dies sind die Varianten der Nelsen-Copula mit invertierten Renditen, jene der Gumbel-Copula ohne Vorzeichenwechsel und jene der reduzierten Farlie-Gumbel-Morgenstern-Copula, die durchschnittlich zwischen 9 und 11 Überschreitungen hervorbringen.

In Abschnitt 12.1.3 wurde mit dem Likelihood-Quotienten-Test nach Kupiec ein statistischer Test dargestellt, mit dem die Nullhypothese überprüft werden kann, dass eine Überschreitung genau mit der theoretisch vorgesehenen Restwahrscheinlichkeit eintritt. Die Resultate dieses Tests sind in Tabelle 13.7 differenziert nach der Anzahl Titel in einem Portfolio zusammengefasst.

Die Werte in der Tabelle geben an, für welchen Anteil der untersuchten Portfolios die Nullhypothese, dass ein im Sinne des Kupiec-Tests adäquates Modell vorliegt, bei einem Signifikanzniveau von 0.01 zu verwerfen ist. Folglich ist ein möglichst niedriger Anteilswert wünschenswert. Ein Modell wird im Rahmen der hier angewendeten quantitativen Vorgaben des Basler Ausschusses und bei besagtem Signifikanzniveau laut Tabelle 12.2 als adäquat bezeichnet, wenn weniger als 8 Überschreitungen zu verzeichnen sind. Die auf diese Art ermittelten Ablehnungsanteile werden jeweils mit den entsprechenden der beiden Referenzmodelle verglichen. Ablehnungsanteile, die kleiner oder gleich dem jeweils entsprechende Ablehnungsanteil der Normal-Copula beziehungsweise der historischen Simulation sind, werden dabei fett gedruckt beziehungsweise mit einem Stern gekennzeichnet. In der letzten Spalte beziehungsweise in der letzten Zeile der Tabelle 13.7 werden weiter die jeweiligen arithmetischen Mittel über die nach der Portfolio-grösse beziehungsweise nach den diversen Modellen unterschiedenen Ergebnisse aufgeführt.

Tabelle 13.7 zeigt, dass der mittlere Ablehnungsanteil über alle Modelle und über alle Portfoliogrößen 54.1% beträgt und der Ablehnungsanteil für die einzelnen Modelle differenziert nach der Portfoliogrösse zwischen 10.0% und 95.0% variiert. Die Eignung der untersuchten Modelle wird, beurteilt durch den Likelihood-Quotienten-Test nach Kupiec, analog eingeschätzt wie auf der Basis der Box-Plots in Abbildung 13.3. So werden die Varianten der reduzierten Farlie-Gumbel-Morgenstern-Copula, jene der Gumbel-Copula ohne Vorzeichenwechsel und jene der Nelsen-Copula mit invertierten Renditen durch den Kupiec-Test am häufigsten als inadäquat eingestuft. Lediglich bei einer Portfoliogrösse von fünf Titeln

Modell	Anzahl Titel					Durchschnitt
	2	3	4	5	10	
HS	0.300	0.400	0.567	0.250	0.700	0.438
N-ML	0.433	0.533	0.700	0.600	0.800	0.600
t -ML	0.433	0.600	0.700	0.600	0.700*	0.600
t - τ	0.400	0.600	0.700	0.600	0.700*	0.592
RFGM-ML	0.467	0.733	0.767	0.650	0.950	0.700
RFGM- τ	0.467	0.733	0.767	0.650	0.850	0.685
RFGM- ϱ	0.467	0.733	0.767	0.650	0.850	0.685
Gu-ML-1	0.500	0.700	0.767	0.650		0.655
Gu- τ -1	0.500	0.667	0.767	0.600		0.636
Gu- τ - N		0.700	0.767	0.650		0.713
iR-Gu-ML-1	0.400	0.500	0.733	0.500		0.536
iR-Gu- τ -1	0.400	0.467	0.700	0.450		0.509
iR-Gu- τ - N		0.467	0.700	0.550		0.575
KS-ML-1	0.400	0.567	0.700	0.650		0.573
KS- τ -1	0.367	0.400*	0.533*	0.300		0.409*
KS-ML- N		0.567				0.567
KS- τ - N		0.433	0.600	0.400		0.488
Ne-ML-1	0.267*	0.167*	0.200*	0.150*		0.200*
Ne- τ -1	0.267*	0.167*	0.200*	0.150*	0.100*	0.185*
Ne-ML- N		0.167*				0.167*
Ne- τ - N		0.167*	0.200*	0.150*		0.175*
iR-Ne-ML-1	0.467	0.633	0.767	0.600		0.618
iR-Ne- τ -1	0.467	0.633	0.767	0.600	0.850	0.654
iR-Ne-ML- N		0.633				0.633
iR-Ne- τ - N		0.633	0.767	0.600		0.675
Durchschnitt	0.412	0.520	0.642	0.500	0.722	0.541

Tabelle 13.7: Ablehnungsanteile des Likelihood-Quotienten-Tests nach Kupiec bei einem Signifikanzniveau von 0.01.

schneiden diese in einzelnen Fällen gleich gut ab wie die Normal-Copula, die im Durchschnitt über alle Portfoliogrößen in 60.0% aller Fälle zu einer Ablehnung der Hypothese führt, dass die vorgegebene Restwahrscheinlichkeit eingehalten wird. Im Vergleich zur Normal-Copula präsentieren sich die mit der Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse geschätzte t -Copula und die mit der ML-Methode geschätzten Varianten der Kimeldorf-Sampson-Copula im Mittel leicht vorteilhaft.

Wie bereits zuvor werden die Varianten der Gumbel-Copula mit invertierten Renditen, jene der mit der Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse geschätzten Kimeldorf-Sampson-Copula und besonders jene der Nelsen-Copula ohne Vorzeichenwechsel der Renditen positiv bewertet. Letzteres Modell schneidet nicht nur besser ab als die Normal-Copula, sondern übertrifft auch systematisch die Ergebnisse der historischen Simulation, die ansonsten in diesem Rahmen alle

Modell	Anzahl Titel					Durchschnitt
	2	3	4	5	10	
HS	3.370	3.470	3.593	3.405	3.658	3.494
N-ML	3.567	3.698	3.783	3.578	3.843	3.691
<i>t</i> -ML	3.553	3.707	3.783	3.555	3.793	3.679
<i>t</i> - τ	3.550	3.707	3.783	3.570	3.820	3.685
RFGM-ML	3.565	3.767	3.840	3.680	3.943	3.751
RFGM- τ	3.573	3.758	3.818	3.633	3.888	3.730
RFGM- ϱ	3.573	3.758	3.818	3.640	3.888	3.731
Gu-ML-1	3.580	3.760	3.835	3.648		3.711
Gu- τ -1	3.568	3.733	3.818	3.643		3.695
Gu- τ - <i>N</i>		3.750	3.832	3.653		3.756
iR-Gu-ML-1	3.532	3.612	3.738	3.538		3.611
iR-Gu- τ -1	3.510	3.570	3.713	3.528		3.585
iR-Gu- τ - <i>N</i>		3.603	3.713	3.538		3.628
KS-ML-1	3.542	3.663	3.798	3.633		3.661
KS- τ -1	3.497	3.538	3.668	3.495		3.555
KS-ML- <i>N</i>		3.678				3.678
KS- τ - <i>N</i>		3.560	3.680	3.513		3.593
Ne-ML-1	3.438	3.297*	3.410*	3.235*		3.355*
Ne- τ -1	3.438	3.297*	3.410*	3.235*	3.228*	3.335*
Ne-ML- <i>N</i>		3.297*				3.297*
Ne- τ - <i>N</i>		3.297*	3.410*	3.235*		3.324*
iR-Ne-ML-1	3.562	3.705	3.818	3.623		3.682
iR-Ne- τ -1	3.562	3.713	3.818	3.623	3.873	3.713
iR-Ne-ML- <i>N</i>		3.713				3.713
iR-Ne- τ - <i>N</i>		3.713	3.818	3.623		3.730
Durchschnitt	3.528	3.615	3.723	3.537	3.770	3.623

Tabelle 13.8: Mittlerer Multiplikationsfaktor nach dem Ampelkonzept des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht.

übrigen Copulas dominiert. Der durchschnittliche Ablehnungsanteil der Varianten der Nelsen-Copula präsentiert sich nur gerade rund halb so gross wie derjenige der historischen Simulation und nur rund einen Drittel so gross wie jener der Normal-Copula.

In Abschnitt 12.1.4 wurde das Ampelkonzept des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht dargestellt. Dieses stellt das für die Bankpraxis bedeutsamste Backtestingkriterium dar, da dessen Verwendung sowohl vom Basler Ausschuss als auch von der Eidgenössischen Bankenkommision im Rahmen des Backtesting verbindlich vorgeschrieben wird. Tabelle 13.8, die den gleichen Aufbau wie Tabelle 13.7 aufweist, zeigt für alle untersuchten Modelle den mittleren Multiplikationsfaktor, der sich aus der Anwendung des Ampelkonzepts ergibt. Zur Ermittlung dieses mittleren Faktors wurde zunächst gemäss den Angaben in Tabelle 12.3 für jedes untersuchte Modell und jedes untersuchte Portfolio in Abhängigkeit der Anzahl

beobachteter Überschreitungen der jeweilige Multiplikator bestimmt. Dieser beträgt bei einem als adäquat eingestuften Modell 3 und wird bei Bedarf auf maximal 4 angehoben. Der in Tabelle 13.8 angegebene mittlere Multiplikationsfaktor wurde für ein Modell im Anschluss daran als arithmetisches Mittel der Multiplikatorwerte über alle für dieses Modell untersuchten Portfolios errechnet. Als natürliches Ziel eines Finanzunternehmens ist ein möglichst geringer Multiplikationsfaktor anzusehen.

Der in Tabelle 13.8 angegebene durchschnittliche mittlere Multiplikator über alle Modelle und alle Portfoliogrößen beträgt 3.623. Für die einzelnen Modelle variiert der mittlere Multiplikator zwischen 3.228 und 3.943. Vergleicht man die Tabelle 13.8 mit der Tabelle 13.7, so erkennt man, dass sich die ausgewiesene Eignung der einzelnen Modelle relativ zu den beiden Referenzmodellen in Einzelfällen unterscheidet. Man stellt aber besonders mit Blick auf die in der letzten Spalte angegebenen über alle Portfoliogrößen zusammengefassten Resultate auch fest, dass sich dieselbe Reihenfolge der Eignung der untersuchten Modelle wie schon beim Vergleich der Box-Plots und bei der Anwendung des Kupiec-Tests ergibt. Die Varianten der Nelsen-Copula ohne Vorzeichenwechsel der Renditen etwa dominieren erneut sämtliche übrigen Modelle inklusive der beiden Referenzmodelle.

Weiter zeigt die Betrachtung der Box-Plots in Abbildung 13.3 sowie der Ergebnisse des Kupiec-Tests und der mittleren Multiplikationsfaktoren nach dem Basler Ampelkonzept, dass wie schon bei der mittleren relativen Abweichung die Unterscheidung von einem beziehungsweise von $N - 1$ Parametern bei den archimedischen Copulafunktionen kaum Auswirkungen zeigt. Der Einfluss der gewählten Schätzmethode ist erneut bei der Kimeldorf-Sampson-Copula am stärksten ausgeprägt. Dabei erzeugt die Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse jeweils eine Anzahl Überschreitungen, die näher am theoretisch vorgegebenen Sollwert liegt als jene der ML-Methode. Für alle übrigen Copulafunktionen hat die Wahl der Schätzmethode einen viel geringeren Einfluss. Hieraus ergibt sich, dass verschiedene Copulavarianten als gleichermassen geeignet ausgewiesen werden.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass alle drei in diesem Unterabschnitt betrachteten Kriterien zur Modellrisikoabschätzung zu einer übereinstimmenden Beurteilung der betrachteten Modelle führen. Als besonders geeignet stellen sich dabei die durch die mittlere relative Abweichung als konservativ ausgewiesenen Modelle heraus. Mit der Nelsen-Copula ohne Vorzeichenwechsel der Renditen, der Kimeldorf-Sampson-Copula und der Gumbel-Copula mit invertierten Renditen stellen sich zudem Copulafunktionen als besonders geeignet heraus, die asymmetrisches Randverhalten aufweisen und bei denen asymptotische untere Randabhängigkeit entweder inhärent ist oder durch das Wechseln des Vorzeichens der Renditen „konstruiert“ wurde. Einzige Ausnahme hiervon bildet die Nelsen-Copula mit invertierten Renditen. Diese weist ebenfalls die genannten Charak-

teristiken auf, ist in der Eignungsrangfolge aber selbst nach dem schlechter abschneidenden der beiden Referenzmodelle einzuordnen.

Multiplikator zur Erreichung von $\alpha \cdot 100\%$ Überschreitungen

In Abschnitt 12.1.5 wurde der Multiplikator eingeführt, mit dem sämtliche aus einem bestimmten Modell resultierenden VaR-Schätzungen zu multiplizieren sind, um die theoretisch zu erwartende Anzahl Überschreitungen zu erhalten. Ein adäquates Modell, das die vorgegebene Restwahrscheinlichkeit α exakt einhält, weist dabei einen Faktor von 1 auf. Damit ist klar, dass ein Multiplikator nahe bei 1 für die Verwendung eines bestimmten Modells spricht.

Aus dem vorhergehenden Unterabschnitt ist bekannt, dass sämtliche untersuchten Modelle zur Generierung von Prognoseverteilungen in der grossen Mehrheit der Fälle zu einer Unterschätzung des Risikos führen, so dass mehr Überschreitungen als die theoretisch zu erwartende Anzahl auftreten. Die Abbildung 13.4, die sämtliche untersuchten Portfolios zusammenfasst und nicht nach der Portfoliogrösse differenziert, zeigt, dass die meisten gemäss (12.8) ermittelten Multiplikatoren über dem durch eine vertikale Linie eingezeichneten Sollwert von 1 liegen. Das arithmetische Mittel über sämtliche Modelle für alle untersuchten Portfolios beträgt 1.638. Der entsprechende Median liegt bei 1.549, das Minimum bei 0.756 und das Maximum bei 4.000. Ein Vergleich der Abbildung 13.4 mit der Abbildung 13.3 zeigt weiter, dass sich die Eignung der untersuchten Modelle bei Verwendung des Multiplikators zur Erreichung von genau $\alpha \cdot 100\%$ Überschreitungen als Kriterium analog präsentiert wie bei der Anwendung des Kriteriums der Anzahl Überschreitungen. Weiterhin gilt, dass die Unterscheidung von einem beziehungsweise von $N - 1$ Parametern bei den archimedischen Copulafunktionen kaum Auswirkungen zeigt und dass die Wahl der Schätzmethode lediglich bei der Kimeldorf-Sampson-Copula ins Gewicht fällt.

Mittlere relative Abweichung skaliertter VaR-Schätzungen

Die mittlere relative Abweichung hat eine Einteilung der untersuchten Modelle in eher konservative und eher aggressive Modelle ermöglicht. Mit dem Kriterium der Anzahl beobachteter Überschreitungen konnte im Rahmen der empirischen Studie weiter aufgezeigt werden, dass die als konservativ ausgewiesenen Modelle wie gewünscht in Perioden erhöhten Marktrisikos höhere VaR-Werte liefern. Mit Hilfe der mittleren relativen Abweichung skaliertter VaR-Schätzungen, die in Abschnitt 12.1.6 dargestellt wurde und die unter Verwendung der im vorangehenden Unterabschnitt besprochenen Ergebnisse des Multiplikators zur Erreichung

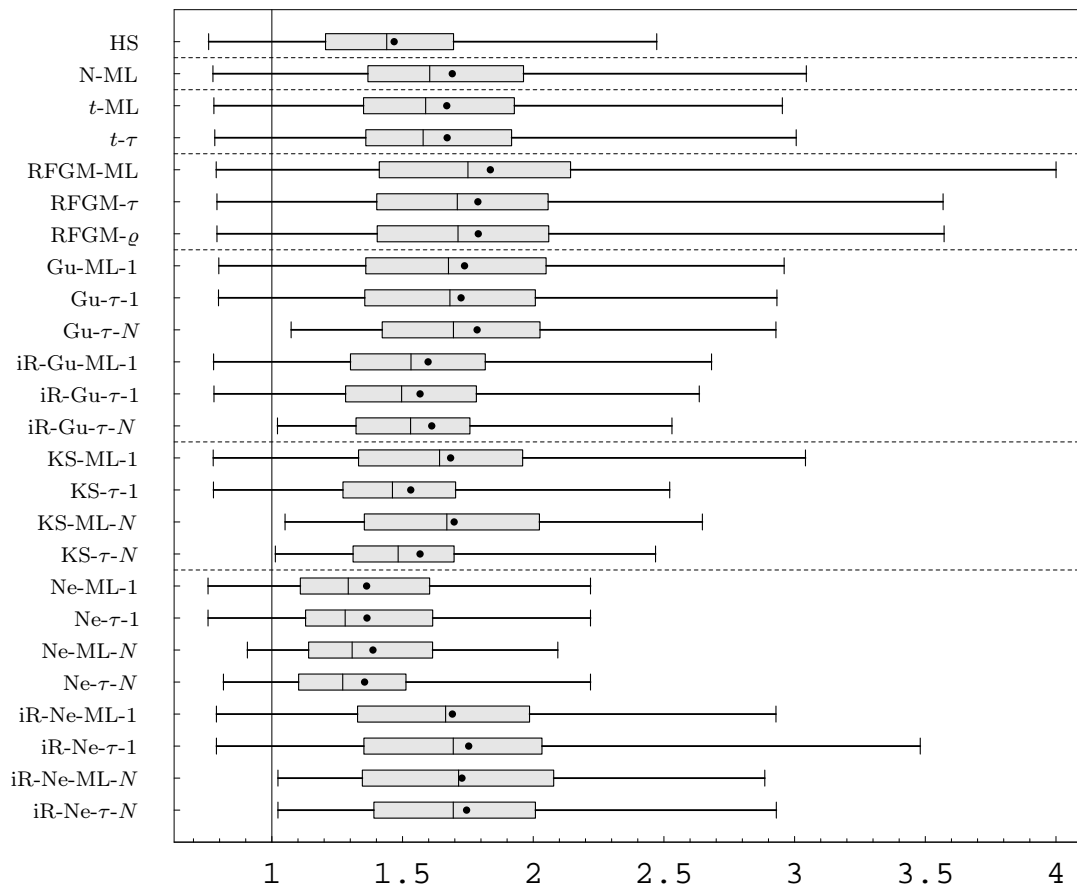


Abbildung 13.4: Multiplikatoren zur Erreichung von $\alpha \cdot 100\%$ Überschreitungen. Zusammenfassung aller untersuchter Portfolios ohne Unterscheidung der Portfoliogrösse.

von $\alpha \cdot 100\%$ Überschreitungen geschätzt werden kann, soll nun überprüft werden, ob die konservativen Modelle ausschliesslich in Zeiten grosser Verluste oder generell über die ganze Beobachtungsdauer höhere VaR-Werte generieren. Idealerweise sollte ein Modell nicht permanent hohe VaR-Schätzungen liefern, sondern die aktuelle Risikosituation abbilden. Fallen dabei lediglich kleine Verluste beziehungsweise Gewinne an, dann sollten die VaR-Schätzungen diesem Trend folgen und ebenfalls tiefer ausfallen. Es wird somit die Frage nach der Reagibilität eines Modells gestellt. Dasjenige Modell, das die kleinste mittlere relative Abweichung skaliert VaR-Schätzungen aufweist, gilt nun als das effizienteste in dem Sinn, dass die geforderte Anzahl Überschreitungen mit der verhältnismässig kleinsten Eigenmittelunterlegung eingehalten wird.

Abbildung 13.5 zeigt eine Zusammenfassung der mittleren relativen Abweichungen skaliert VaR-Schätzungen für alle untersuchten Portfolios. Es fällt auf, dass sich die Ergebnisse der untersuchten Copulavarianten nur geringfügig unterscheiden. So liegen die durchschnittlichen mittleren relativen Abweichungen skaliert

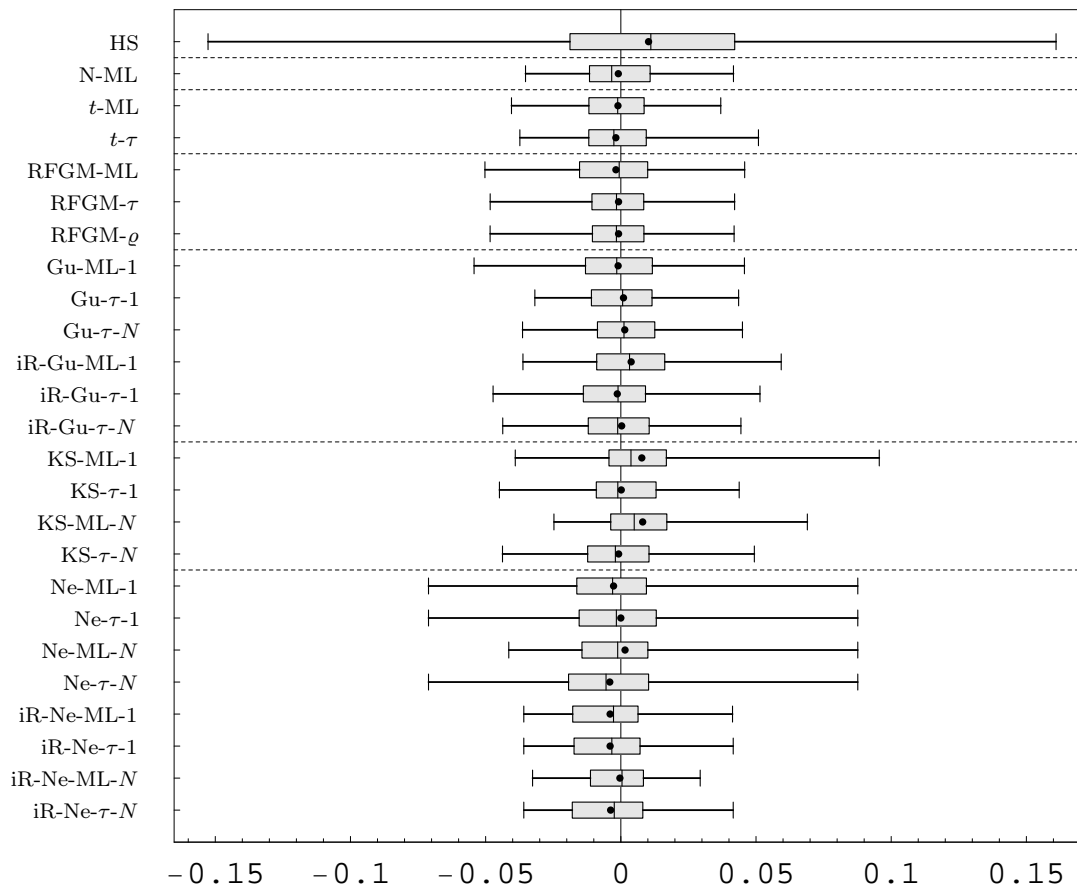


Abbildung 13.5: Mittlere relative Abweichungen skaliertter VaR-Schätzungen. Zusammenfassung aller untersuchter Portfolios ohne Unterscheidung der Portfolio-grösse.

VaR-Schätzungen jeweils beinahe auf der Nulllinie und die Boxen der jeweiligen Box-Plots, welche die zentralen 50% der Daten repräsentieren, befinden sich im engen Bereich von -0.02 und $+0.02$. Einzige Ausnahme hierzu bildet das Modell der historischen Simulation, das skalierte VaR-Schätzungen generiert, die einerseits im Mittel moderat höher als der Durchschnitt über alle Modelle ausfallen und die andererseits eine massiv höhere Streuung als die skalierten VaR-Werte der übrigen Modelle aufweisen. So beträgt die Standardabweichung der skalierten VaR-Schätzungen der historischen Simulation 0.055 gegenüber einer durchschnittlichen Standardabweichung über alle Modelle von 0.020 . Eine im Vergleich zu den anderen Copulafunktionen ebenfalls leicht erhöhte Variabilität der skalierten VaR-Schätzungen ist bei der Nelsen-Copula ohne Vorzeichenwechsel der Renditen auszumachen. Die durchschnittliche Standardabweichung der vier Varianten dieses Modells liegt bei 0.026 .

Wie aufgezeigt wurde, lassen sich die verschiedenen Modelle durch das Kriterium der mittleren relativen Abweichung skaliertter VaR-Schätzungen kaum gegeneinan-

der abgrenzen. Sind die VaR-Werte einmal mit dem Multiplikator zur Erreichung von $\alpha \cdot 100\%$ Überschreitungen skaliert worden, so unterscheiden sie sich in ihrer Höhe nur mehr unwesentlich. Dies bedeutet aber weiter, dass die als konservativ ausgewiesenen Copulafunktionen – dies sind insbesondere die Gumbel-Copula mit invertierten Renditen, die mit der Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse geschätzte Kimeldorf-Sampson-Copula und die Nelsen-Copula ohne Vorzeichenwechsel der Renditen –, die sich betreffend der bisher besprochenen Kriterien als besonders geeignet herausgestellt haben, ihre Vorteile nicht durch einen Verlust an Effizienz bezahlen. Einzig die historische Simulation, die gemäss den bisher ausgewerteten Kriterien nach der Nelsen-Copula als zweitgeeignetstes Modell einzustufen ist, büsst an Effizienz ein in dem Sinn, dass die Einhaltung der geforderten Anzahl Überschreitungen nur mit einem verhältnismässig grösseren risikobedingten Eigenkapital erreicht werden kann.

Mittlerer und maximaler Überschreitungsverlust relativ zum VaR

Die bisher ausgewerteten Kriterien zur Modellrisikoabschätzung betrachteten hauptsächlich, in welchem Masse die untersuchten Modelle die theoretisch zu erwartende Anzahl Überschreitungen einzuhalten vermögen. Da im Risikomanagement aber gerade auch die extrem hohen Verluste von Bedeutung sind, werden nachfolgend mit dem mittleren und dem maximalen Überschreitungsverlust relativ zum VaR zwei Kriterien beigezogen, die sich auf die Höhe der Überschreitungsverluste konzentrieren. An dieser Stelle soll daran erinnert werden, dass ein Modell zur Generierung von Prognoseverteilungen durch auf dem VaR aufbauende Ex-post-Kriterien nicht aufgrund hoher Überschreitungen als inadäquat bezeichnet werden kann, da der VaR über diese Grössen keine Aussage macht. Aus diesem Grund sind die beiden nachfolgenden Kriterien eher als Zusatzkriterien zu den bisher ausgewerteten zu verstehen. Als eine wünschenswerte Eigenschaft eines Modells wird dabei erachtet, wenn dieses hohe Verluste möglichst gut zu „prognostizieren“ vermag. Damit sprechen möglichst kleine Werte sowohl des mittleren als auch des maximalen Überschreitungsverlusts relativ zum VaR für die Verwendung eines bestimmten Modells.

Die beiden Abbildungen 13.6 und 13.7, welche die mittleren beziehungsweise die maximalen Überschreitungsverluste relativ zu den jeweiligen VaR-Schätzungen für die verschiedenen Modelle zusammengefasst für alle untersuchten Portfolios wiedergeben, zeigen ein sehr ähnliches Bild, was die relative Position der Box-Plots zueinander betrifft. Aus diesem Grund werden die beiden Kriterien gemeinsam in einem Unterabschnitt besprochen. Einzig die Skala unterscheidet sich. Dabei kommen die maximalen Überschreitungsverluste relativ zum VaR natürlicherweise über den mittleren zu liegen. So ist der maximale Überschreitungsverlust im

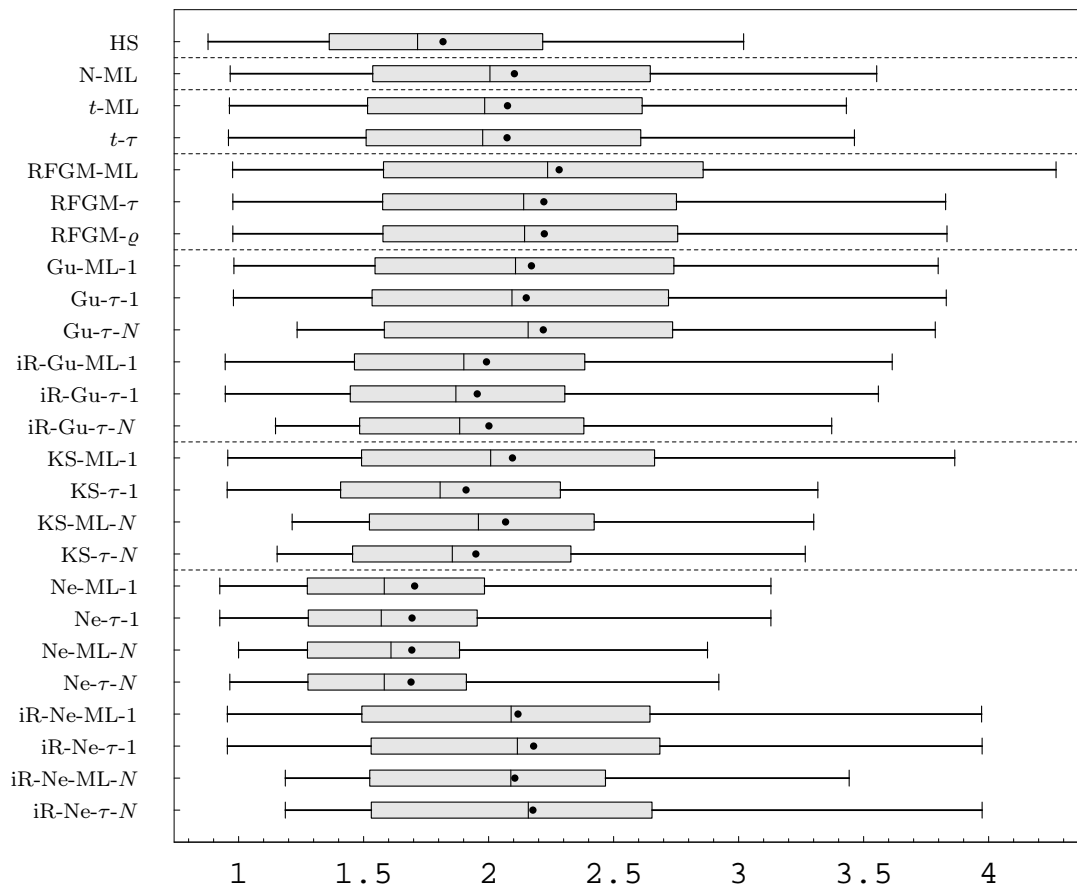


Abbildung 13.6: Mittlere Überschreitungsverluste relativ zu den jeweiligen VaR-Schätzungen. Zusammenfassung aller untersuchter Portfolios ohne Unterscheidung der Portfoliogrösse.

Durchschnitt über alle Modelle und alle Portfolios rund 2.5-mal so gross wie die jeweils entsprechende VaR-Schätzung. Der korrespondierende Faktor für den mittleren Überschreitungsverlust beträgt dahingegen nur rund 2.

Abbildung 13.7 macht deutlich, dass der VaR sogar bei dem sehr hohen Konfidenzniveau von 99% auch nicht annähernd als obere Grenze für Portfolioverluste zu interpretieren ist. Die Ergebnisse zeigen, dass der jeweils maximale über sämtliche Portfolios ermittelte Überschreitungsverlust für die verschiedenen Modelle bis zu zwischen 4.3- und 5.5-mal so gross ist wie die entsprechende VaR-Schätzung. Dabei ist zu beachten, dass sich diese Werte nicht direkt mit dem Multiplikator des Basler Ausschusses zur Ermittlung der Eigenmittelunterlegung vergleichen lassen, der auf den ersten Blick mit einem maximalen Wert von 4 im Vergleich zu den oben stehenden Resultaten verhältnismässig klein erscheint.

Der Basler Multiplikationsfaktor ist zwar auf der Basis von VaR-Schätzungen mit einer Haltedauer von einem Tag, wie sie hier vorliegen, zu ermitteln, er ist aber auf VaR-Werte mit einer Haltedauer von zehn Tagen anzuwenden. In Abschnitt 2.5

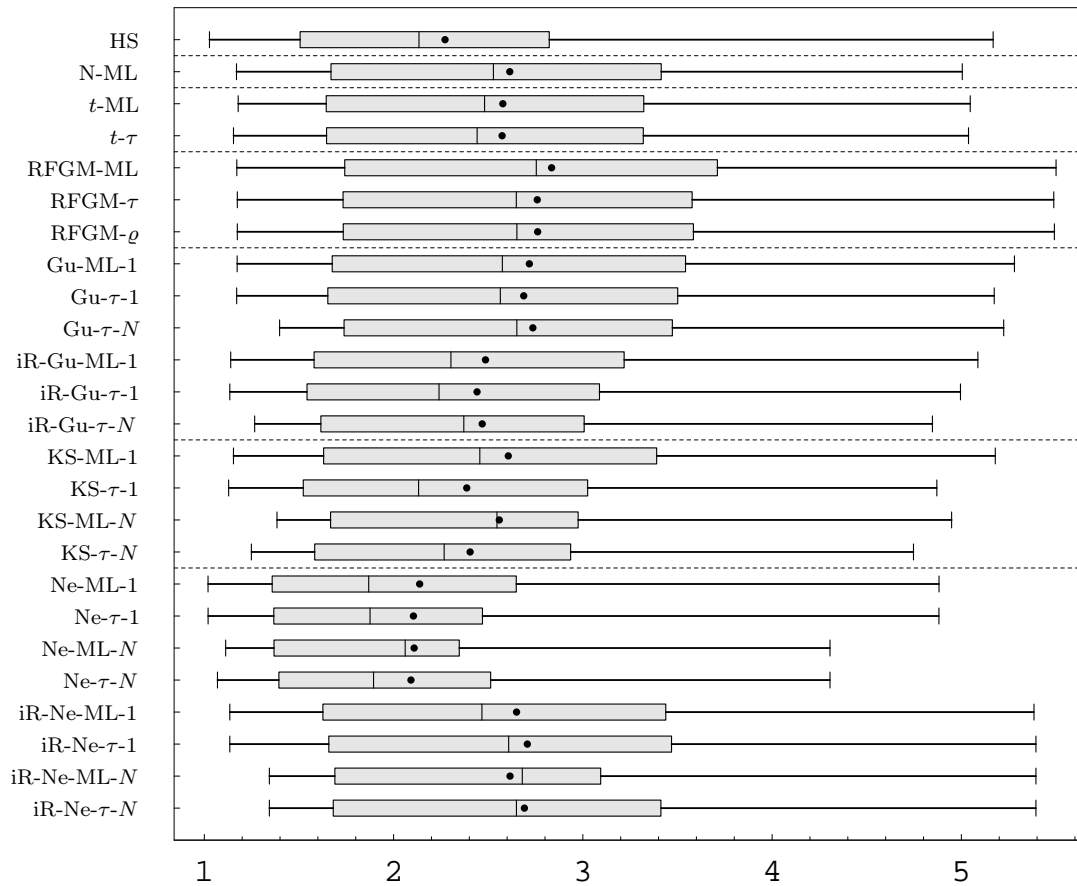


Abbildung 13.7: Maximale Überschreitungsverluste relativ zu den jeweiligen VaR-Schätzungen. Zusammenfassung aller untersuchter Portfolios ohne Unterscheidung der Portfoliogrösse.

wurde ausgeführt, dass die Aufsichtsbehörden explizit eine Transformation von eintägigen in zehntägige Halteperioden vorsehen. Dabei kann ein VaR-Wert, der auf einer eintägigen Haltedauer basiert, durch Multiplikation mit dem Faktor $\sqrt{10}$ in einen VaR mit einer Haltedauer von zehn Tagen umgerechnet werden. Obwohl diese Transformation implizit von einer normalverteilten Prognoseverteilung ausgeht und folglich kritisch zu betrachten ist, wird klar, dass VaR-Werte mit zehntägiger Haltedauer höher ausfallen als VaR-Werte mit eintägiger Haltedauer. Man erkennt folglich, dass der Quotient zwischen dem maximalen Überschreitungsverlust und der jeweiligen VaR-Schätzung bei einer zehntägigen Haltedauer für die verschiedenen Modelle zwischen rund $4.3/\sqrt{10} = 1.360$ und $5.5/\sqrt{10} = 1.739$ zu liegen kommen dürfte. Selbst wenn man berücksichtigt, dass die Normalverteilung im vorliegenden Kontext oft nur als unzureichende Näherung betrachtet werden kann, ist folglich der Basler Multiplikator mit einem minimalen Wert von 3 als konservativ einzustufen.

Die relative Güte der Modelle unterscheidet sich gemessen an den beiden in diesem Unterabschnitt präsentierten Kriterien nicht von der Eignungsbeurteilung

durch die vorgängig ausgewerteten Backtestingkriterien. Wie zuvor gilt auch, dass die Unterscheidung von einem beziehungsweise von $N - 1$ Parametern bei den archimedischen Copulafunktionen kaum Auswirkungen zeigt und dass die Wahl der Schätzmethode lediglich bei der Kimeldorf-Sampson-Copula einen merklichen Einfluss hat. Somit werden wiederum verschiedene Copulavarianten als gleichermassen geeignet ausgewiesen. Betrachtet man zunächst die historische Simulation als Vergleichsmodell, so liefern nur gerade die Varianten der Nelsen-Copula ohne Vorzeichenwechsel der Renditen weniger hohe maximale und mittlere Überschreitungsverluste relativ zum VaR. Im Vergleich zur Normal-Copula schneiden weiter die mit der Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse geschätzte Kimeldorf-Sampson-Copula, die Gumbel-Copula mit invertierten Renditen, die t -Copula und die mit der ML-Methode geschätzte Kimeldorf-Sampson-Copula leicht besser ab. Höhere mittlere und maximale Überschreitungsverluste relativ zum VaR liefern die Nelsen-Copula mit invertierten Renditen, die Gumbel-Copula ohne Vorzeichenwechsel der Renditen und die reduzierte Farlie-Gumbel-Morgenstern-Copula. Die Streuung der jeweiligen Schätzungen unterscheidet sich für die diversen Modelle nur geringfügig.

13.3.2 Vergleich der Rechenzeiten

Bevor die Ergebnisse aus dem Backtesting zusammengefasst werden, soll die jeweils benötigte Zeitdauer für die Schätzung und die Simulation der untersuchten Modelle angegeben werden. Die Tabelle 13.9 führt für jedes Modell differenziert nach der Anzahl Titel in einem Portfolio die Schätz- und Simulationszeiten auf, die im Mittel über die jeweils untersuchten Portfolios für die Erzeugung einer Backtestingstichprobe vom Umfang 250, wie sie vom Basler Ausschuss gefordert wird, im Programmpaket GAUSSTM in der Version 4.0 benötigt wurden. Diese durchschnittlichen Rechenzeiten wurden auf einem Computer mit einem Pentium-4-Prozessor mit 1.5 GHz Taktfrequenz und 256 MB Arbeitsspeicher unter Windows 98 ermittelt. Die Summen der durchschnittlichen Rechenzeiten über sämtliche Modelle sind in der letzten Zeile der Tabelle 13.9 wiedergegeben.

Fasst man die jeweilige aufsummierte Schätz- und Simulationszeit zusammen, so entspricht dies der Dauer, die zur Erarbeitung der Ergebnisse für ein einzelnes die angegebene Anzahl Titel umfassendes Portfolio im Durchschnitt benötigt wurde. Multipliziert man folglich diese aufsummierten Rechenzeiten mit der jeweils entsprechenden in Tabelle 13.1 angegebenen Anzahl untersuchter Portfolios, so erhält man die auf Basis der durchschnittlichen Rechenzeiten hochgerechneten nach Portfoliogrösse differenzierten Gesamtrechendauern. Diese sind wie die Gesamtrechenzeiten über alle untersuchten Portfolios in Tabelle 13.10 aufgeführt. Dieser Tabelle kann entnommen werden, dass für die Erzeugung der in Abschnitt

Modell	Anzahl Titel									
	2		3		4		5		10	
	Schätzung	Simulation	Schätzung	Simulation	Schätzung	Simulation	Schätzung	Simulation	Schätzung	Simulation
HS	00:00:00	00:00:00	00:00:00	00:00:00	00:00:00	00:00:00	00:00:00	00:00:00	00:00:00	00:00:00
N-ML	00:00:03	00:16:44	00:00:04	00:27:44	00:00:05	00:39:44	00:00:05	00:51:23	00:00:12	01:47:39
t -ML	00:41:17	00:17:10	02:44:02	00:28:46	07:43:50	00:40:33	09:56:27	00:52:02	40:37:25	01:49:40
t - τ	00:06:50	00:17:04	00:12:30	00:28:57	00:17:59	00:40:31	00:22:17	00:52:24	01:24:33	01:49:42
RFGM-ML	00:00:05	00:06:21	00:00:20	00:12:22	00:01:20	00:18:29	00:05:28	00:24:58	04:42:32	00:59:20
RFGM- τ	00:01:18	00:06:20	00:03:59	00:12:29	00:07:49	00:18:24	00:13:36	00:24:58	00:59:46	00:58:59
RFGM- ϱ	00:00:00	00:06:19	00:00:00	00:12:18	00:00:00	00:18:28	00:00:00	00:24:56	00:00:00	00:58:28
Gu-ML-1	00:01:52	00:41:07	00:05:00	01:22:31	00:09:35	02:02:07	00:16:19	02:45:36		
Gu- τ -1	00:01:18	00:40:50	00:03:59	01:22:35	00:07:49	02:01:53	00:13:36	02:44:22		
Gu- τ - N			00:03:59	01:22:42	00:07:50	02:01:24	00:13:39	02:44:12		
iR-Gu-ML-1	00:01:47	00:40:59	00:04:56	01:23:19	00:09:24	02:02:08	00:16:02	02:44:07		
iR-Gu- τ -1	00:01:18	00:40:51	00:03:59	01:22:45	00:07:49	02:01:51	00:13:36	02:44:51		
iR-Gu- τ - N			00:03:59	01:21:59	00:07:49	02:01:57	00:13:39	02:44:58		
KS-ML-1	00:01:33	00:40:43	00:04:20	01:22:16	00:08:16	02:01:16	00:14:08	02:43:53		
KS- τ -1	00:01:18	00:40:13	00:03:59	01:20:52	00:07:49	01:59:05	00:13:36	02:40:45		
KS-ML- N			00:11:32	01:22:15						
KS- τ - N			00:03:59	01:21:05	00:07:50	01:59:29	00:13:42	02:40:38		
Ne-ML-1	00:01:29	00:01:00	00:04:21	00:01:35	00:08:29	00:02:07	00:14:38	00:02:43		
Ne- τ -1	00:01:18	00:00:59	00:03:59	00:01:33	00:07:49	00:02:07	00:13:36	00:02:40	00:59:46	00:05:45
Ne-ML- N			00:03:59	00:01:34						
Ne- τ - N			00:04:00	00:01:35	00:07:49	00:02:08	00:13:38	00:02:45		
iR-Ne-ML-1	00:01:35	00:01:00	00:04:21	00:01:33	00:08:31	00:02:07	00:15:01	00:02:43		
iR-Ne- τ -1	00:01:18	00:01:01	00:03:59	00:01:34	00:07:49	00:02:07	00:13:36	00:02:42	00:59:46	00:05:41
iR-Ne-ML- N			00:04:00	00:01:35						
iR-Ne- τ - N			00:03:59	00:01:36	00:07:50	00:02:11	00:13:37	00:02:47		
Summe	01:04:27	05:18:47	04:23:26	15:57:40	10:13:41	21:20:16	14:10:24	28:40:32	49:44:04	08:35:16

Tabelle 13.9: Durchschnittliche Rechenzeiten in Stunden für die Erzeugung einer Backtestingstichprobe vom Umfang 250.

Anzahl Titel	Schätzung	Simulation	Total
2	1 d 08:13:58	6 d 15:23:54	7 d 23:37:52
3	5 d 11:43:26	19 d 22:50:24	25 d 10:33:50
4	12 d 18:50:52	26 d 16:08:28	39 d 10:59:20
5	11 d 19:28:03	23 d 21:30:51	35 d 16:58:55
10	41 d 10:41:27	7 d 03:45:37	48 d 14:27:05
Summe	72 d 20:57:48	84 d 07:39:15	157 d 04:37:03

Tabelle 13.10: Gesamtrechenzeiten für alle untersuchten Portfolios in Tagen (d).

13.3.1 präsentierten Ergebnisse eine Rechendauer von rund 157 Tagen, 4 Stunden, 37 Minuten und 3 Sekunden benötigt wurde. Dabei wird ein Tag mit 24 Stunden veranschlagt. Dies macht klar, dass die Berechnungen nur in einer sinnvollen Frist zu realisieren waren, indem die Arbeit auf mehrere Computer aufgeteilt wurde.

Betrachtet man die Tabelle 13.9, so fällt zunächst auf, dass bei der Methode der historischen Simulation sowohl bei der Schätzung als auch bei der Simulation unabhängig von der Portfoliogrösse Rechenzeiten von null ausgewiesen werden. Da es sich hierbei um ein nichtparametrisches Verfahren handelt, ist klar, dass keine Parameterschätzungen und somit keine Schätzzeiten anfallen. Weiter kann das Übernehmen historischer Renditen als Prognoseverteilung, das bei dieser Methode der Simulation entspricht, im Bereich von wenigen Hundertstelsekunden abgewickelt werden und wird folglich nicht vermerkt. Bei allen übrigen Modellen wachsen sowohl die Schätz- als auch die Simulationszeiten mit zunehmender Portfoliogrösse an. Dieser Zuwachs ist am ausgeprägtesten bei der Schätzdauer der mit Hilfe der ML-Methode geschätzten t -Copula zu verzeichnen. Bei einem aus zehn Titeln zusammengesetzten Portfolio beträgt die durchschnittliche Schätzdauer für 250 Zeitschritte bereits mehr als 40 Stunden. Dies erklärt sich aus der in Abschnitt 9.1.2 dargestellten aufwändigen Schätzprozedur, bei der auf numerische Optimierungsmethoden zurückgegriffen werden muss.

Vergleicht man weiter die jeweiligen Dauern der Schätzung mit den entsprechenden der Simulation, so erkennt man, dass bei der mittels der ML-Methode geschätzten t -Copula und bei sämtlichen Varianten der Nelsen-Copula die Schätzung mehr Zeit in Anspruch nimmt als die Simulation. Bis auf die Varianten der reduzierten Farlie-Gumbel-Morgenstern-Copula mit den Kennungen RFGM-ML und RFGM- τ , für die bei einem aus zehn Aktien bestehenden Portfolio ebenfalls die Schätzung länger dauert als die Simulation, liegt bei allen weiteren Copulavarianten gerade die entgegengesetzte Beziehung vor.

Beachtenswert ist ausserdem, dass sich die Schätzung mit Hilfe der ML-Methode jeweils zeitintensiver darstellt als die Schätzung mit Hilfe der Methode der copula-basierten Zusammenhangsmasse. Die einzige markante Ausnahme hiervon liefern

wiederum die beiden bereits zuvor genannten Varianten der reduzierten Farlie-Gumbel-Morgenstern-Copula, bei denen sich dieses Verhältnis erst bei aus zehn Aktien bestehenden Portfolios einstellt. Auch erkennt man, dass der Unterschied in der Dauer der beiden Schätzmethoden bei den drei Vertretern der archimedischen Copulafamilie nur sehr gering ausfällt. Für diese drei Copulafunktionen ist weiter zu verzeichnen, dass es für die Schätzdauer kaum einen Unterschied macht, ob jeweils die Variante mit einem oder mit $N - 1$ Parametern vorliegt.

Da sich die Varianten der einzelnen Copulafunktionen betreffend der Simulation nicht unterscheiden – es wird jeweils ein und derselbe Algorithmus verwendet –, präsentieren sich die Simulationsdauern für die Varianten einer Copulafunktion für eine feste Portfoliogrösse bis auf minimale Unterschiede jeweils gleich. In diesem Kontext fällt auf, dass die Simulation der Nelsen-Copula im Vergleich zu den beiden anderen Vertretern der archimedischen Copulafamilie weit weniger Zeit beansprucht. Dies ist darauf zurückzuführen, dass wie am Ende des Abschnitts 9.3 erörtert sowohl die Gumbel- als auch die Kimeldorf-Sampson-Copula bei der Simulation die numerische Bestimmung der Inversen einer Funktion erfordern. Dies steht im Gegensatz zur Nelsen-Copula, für welche die benötigte Inverse explizit angegeben werden kann. Da auch die Schätzzeiten dieser Copulafunktion nicht übermässig lang ausfallen, führt dieser Umstand dazu, dass die Varianten der Nelsen-Copula nach der Methode der historischen Simulation die geringsten Gesamtrechendauern aufweisen.

13.3.3 Zusammenfassung und weiterführende Betrachtungen

Zur Beurteilung der Eignung verschiedener Copulafunktionen für die Zusammenhangsmodellierung von Aktien im Hinblick auf die Risikomessung entsprechender Portfolios wurden in Abschnitt 13.3.1 die in Kapitel 12 eingeführten Kriterien zur Modellrisikoabschätzung ausgewertet. Diese wurden auf der Basis von Daten für den Schweizer Aktienmarkt aus den Jahren 1999 bis 2001 ermittelt. Ergänzt durch das Modell der historischen Simulation wurden sechs Copulafunktionen in jeweils unterschiedlichen Varianten untersucht, womit schliesslich 25 verschiedene Modelle in die Studie einfließen. Die Untersuchung erfolgte für im SMI gelistete Aktien, die zufällig zu Portfolios verschiedener Grösse kombiniert wurden. Der Rahmen für das Backtesting wurde weiter durch die quantitativen Vorgaben des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht gesetzt. Damit der Effekt der verschiedenen Copulavarianten gegenüber dem im Finanzbereich standardmässig eingesetzten Modell der geometrischen brownischen Bewegung, das normalverteilte Aktienrenditen unterstellt, isoliert ausgewiesen werden konnte, wurde zudem mit normalverteilten Randverteilungen gearbeitet.

Nachfolgend soll stellvertretend diejenige Eignungsrangfolge der untersuchten Modelle angegeben werden, die aus der Anwendung des Ampelkonzepts des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht folgt. Dieses Backtestingkriterium kann als das bedeutsamste der Bankpraxis betrachtet werden, da dessen Verwendung von den massgeblichen Aufsichtsbehörden verbindlich vorgeschrieben wird. Für die Bestimmung der Rangfolge wird der in der letzten Spalte von Tabelle 13.8 angegebene durchschnittliche Multiplikationsfaktor über alle untersuchten Portfoliogrößen als Kriterium herangezogen. Daraus ergibt sich die nachfolgende Rangfolge der betrachteten Modelle, wobei diese nach absteigender Eignung sortiert ist:

- | | | |
|---------------------|-------------------------|-------------------------|
| 1. Ne-ML- N | 10. iR-Gu- τ - N | 18. Gu-ML-1 |
| 2. Ne- τ - N | 11. KS-ML-1 | 19. iR-Ne- τ -1 |
| 3. Ne- τ -1 | 12. KS-ML- N | 20. iR-Ne-ML- N |
| 4. Ne-ML-1 | 13. t -ML | 21. iR-Ne- τ - N |
| 5. HS | 14. iR-Ne-ML-1 | 22. RFGM- τ |
| 6. KS- τ -1 | 15. t - τ | 23. RFGM- ϱ |
| 7. iR-Gu- τ -1 | 16. N-ML | 24. RFGM-ML |
| 8. KS- τ - N | 17. Gu- τ -1 | 25. Gu- τ - N |
| 9. iR-Gu-ML-1 | | |

Man erkennt, dass sich im vorliegenden Kontext mit den Varianten der Nelsen-Copula ohne Vorzeichenwechsel der Renditen, jenen der mit der Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse geschätzten Kimeldorf-Sampson-Copula und jenen der Gumbel-Copula mit invertierten Renditen vor allem Copulavarianten zur Zusammenhangsmodellierung von Renditen eignen, die asymmetrisches Randverhalten aufweisen und inhärente oder mittels Vorzeichenwechsel der Renditen konstruierte asymptotische untere Randabhängigkeit implizieren. Dieses Merkmal ist sicherlich ein wichtiges aber offensichtlich nicht das einzige, das die Eignung einer Copulavariante ausmacht. So unterscheiden sich etwa trotz gleichem Randverhalten die Resultate der Varianten der Kimeldorf-Sampson-Copula in Abhängigkeit der verwendeten Schätzmethode. Weiter stellen sich die Ergebnisse der Nelsen-Copula ohne Vorzeichenwechsel der Renditen sowie der Kimeldorf-Sampson-Copula nicht analog dar, obwohl diese wie in Abschnitt 9.3 beschrieben die gleiche asymptotische untere Randabhängigkeit implizieren. Ausserdem wird die Nelsen-Copula mit invertierten Renditen durch die Ex-post-Kriterien als vergleichsweise ungeeignet eingestuft, obwohl diese ebenfalls asymmetrisches Randverhalten und asymptotische untere Randabhängigkeit aufweist.

Die im Rahmen der Monte-Carlo-Simulation standardmässig eingesetzte Normal-Copula erreicht gemäss dem Basler Ampelkonzept lediglich Rang 16. Das nichtparametrische Modell der historischen Simulation, das zu Vergleichszwecken hinzugezogen wurde, rangiert nach den Varianten der Nelsen-Copula ohne Vorzeichenwechsel der Renditen auf Platz 5. Dies dürfte darauf zurückzuführen sein, dass

dieser Ansatz durch die direkte Verwendung von historischen Daten in der Lage ist, das in der Praxis häufiger beobachtete simultane Auftreten von grossen Verlusten in die Prognoseverteilungen einzubringen. Weiter schneidet die historische Simulation hinsichtlich der benötigten Rechenzeit besser ab als alle untersuchten Copulafunktionen. Es ist jedoch zu beachten, dass die Methode der historischen Simulation gemäss der mittleren relativen Abweichung skalierteter VaR-Schätzungen im Durchschnitt als ineffizienter ausgewiesen wurde als sämtliche untersuchten Copulavarianten.

Bei der Bewertung der Copulafunktionen ist sicherlich auch deren Eignung zur Anwendung auf grössere als die in dieser Studie betrachteten Portfolios zu berücksichtigen. Sowohl bei der historischen Simulation als auch bei den beiden elliptischen Copulafunktionen und der reduzierten Farlie-Gumbel-Morgenstern-Copula stellt die Erhöhung der Dimension kein Problem dar. Dies gilt im Allgemeinen nicht für die archimedische Copulafamilie. In Abschnitt 13.1 wurde erwähnt, dass die untersuchten Varianten dieser Copulafamilie bis auf zwei Ausnahmen aufgrund der zu hohen Komplexität bereits bei Portfolios mit zehn Titeln nicht eingesetzt werden können. Damit beschränkt sich die praktische Anwendung dieser Copulavarianten auf verhältnismässig kleine Portfolios. Bei den Ausnahmen handelt es sich um die beiden Varianten der mit der Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse geschätzten Nelsen-Copula mit einem Parameter. Sowohl bei Verwendung von nicht invertierten als auch von invertierten Renditen ist eine Erhöhung der Dimension unproblematisch. Dies kann als weiterer Pluspunkt der Variante mit der Kennung $Ne-\tau-1$ gewertet werden, die aufgrund des Basler Ampelkonzepts mit minimalem Unterschied zu den mit $Ne-ML-N$ und $Ne-\tau-N$ bezeichneten Varianten als am drittgeeignetsten ausgewiesen wird.

Die oben wiedergegebene Eignungsrangfolge der untersuchten Modelle basiert auf dem Ampelkonzept des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht. Wie die Auswertungen in Abschnitt 13.3.1 jedoch gezeigt haben, liefern die übrigen Backtestingkriterien jeweils eine sehr ähnliche Eignungsrangfolge der untersuchten Modelle. Einzige Ausnahme bildet das Kriterium der mittleren relativen Abweichung skalierteter VaR-Schätzungen, das kaum eine Unterscheidung der untersuchten Copulavarianten zulässt.

Allgemein hat die Auswertung der Backtestingkriterien in Abschnitt 13.3.1 gezeigt, dass die untersuchten Copulavarianten relativ zueinander trotz der massgeblichen Komplexitätssteigerung, die mit dem Übergang von bivariaten zu multivariaten Copulafunktionen einhergeht, unabhängig von der Portfoliogrösse jeweils sehr ähnlich abschneiden. Aus diesem Grund wurde jeweils eine zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse über alle untersuchten Portfolios präsentiert und die nach der Portfoliogrösse unterschiedenen Resultate lediglich in Anhang A wiedergegeben.

Wie aus Kapitel 9 bekannt ist, ist der besagte Komplexitätssprung vor allem auch bei den Vertretern der archimedischen Copulafamilie der Funktionsform (9.56a) mit $N - 1$ Parametern zu verzeichnen. Es hat sich nun aber für sämtliche Kriterien ergeben, dass aus der Anwendung dieser komplexeren Copulafunktionen im Vergleich zu den jeweiligen Copulas der Form (9.51) mit lediglich einem Parameter kaum unterschiedliche Ergebnisse resultieren. Dies kann als Indiz gewertet werden, dass die Stärke des Zusammenhangs der verschiedenen untersuchten Aktien in einem Portfolio jeweils sehr ähnlich ist. Weiterführende Untersuchungen müssten zeigen, ob sich die Ähnlichkeit der Resultate ebenfalls bei anders zusammengesetzten Aktienportfolios und bei aus alternativen Vermögenswerten bestehenden Portfolios einstellt. Für die in dieser Studie untersuchte Situation ist festzuhalten, dass sich die Verwendung der komplexeren archimedischen Copulafunktionen mit mehr Parametern nicht bezahlt macht.

Wie in Abschnitt 7.1.4 erwähnt wurde, herrscht über die Schätzqualitäten der Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse Ungewissheit. Dies im Gegensatz zur ML-Methode, die wie in Abschnitt 7.1.1 ausgeführt eine Reihe wünschenswerter Eigenschaften aufweist. Die Auswertung hat nun für sämtliche Backtestingkriterien gezeigt, dass die Wahl der Schätzmethode bis auf eine Ausnahme keinen massgeblichen Einfluss auf die Ergebnisse hat. Ein Vergleich der jeweils benötigten Rechenzeiten zeigt aber, dass tendenziell die Schätzung mit Hilfe der Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse weniger zeitintensiv ist als die Schätzung mittels der ML-Methode. Dies gilt insbesondere bei der t -Copula, bei der die ML-Methode gleich mehrfach höhere Schätzzeiten erfordert. Diese Umstände sprechen im vorliegenden Kontext trotz der unsicheren Schätzqualitäten für die Verwendung der Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse zur Schätzung von Copulaparametern.

Die einzige Copulafamilie, bei der die Auswertung der Backtestingkriterien einen wesentlichen Einfluss der verwendeten Schätzmethode gezeigt hat, ist die Kimeldorf-Sampson-Copulafamilie. Dabei erzeugt die Schätzung der Copulaparameter mit der Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse stets konservativere und gemäss den ausgewerteten Kriterien immer auch geeignetere Risikoschätzungen als die ML-Methode. Dies spricht erneut für die Verwendung der Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse zur Schätzung der entsprechenden Copulaparameter. Es kann nun spekuliert werden, dass sich die in Abschnitt 11.2.3 aufgezeigte Verletzung der für die ML-Methode grundlegenden Annahme unabhängiger und identisch verteilter Renditen für einzelne Titel negativ auf die Ergebnisse dieser Schätzmethode bei der Kimeldorf-Sampson-Copula auswirkt. Um Sicherheit hierüber zu erhalten, müssten jedoch weitere Untersuchungen folgen.

Zum Schluss dieses Abschnitts soll dem bei der Nelsen-Copula beobachteten Phä-

	ABBN	ADEN	BALN	...	UBSN	UNAX	ZURN
ABBN	1.000	0.209	0.206	...	0.322	0.320	0.254
ADEN	0.209	1.000	0.171		0.275	0.219	0.184
BALN	0.206	0.171	1.000		0.240	0.182	0.265
⋮	⋮			⋱			⋮
UBSN	0.322	0.275	0.240		1.000	0.287	0.335
UNAX	0.320	0.219	0.182		0.287	1.000	0.189
ZURN	0.254	0.184	0.265	...	0.335	0.189	1.000

Tabelle 13.11: Auszug aus der Rangkorrelationsmatrix von Kendall für die Tagesrenditen der untersuchten 24 Schweizer Aktien der Jahre 1999 bis 2001.

nomen nachgegangen werden, dass sowohl die Anzahl Parameter im Modell als auch die Schätzmethode keinen Einfluss auf die VaR-Schätzungen zeigen. Zunächst sei daran erinnert, dass die Parameter der Nelsen-Copula im Intervall $[1, \infty)$ liegen und dass folglich für Kendalls τ gemäss (9.64) $\tau \in [1/3, 1)$ gilt. Für die Datenbasis der präsentierten Studie, nämlich die Tagesrenditen der untersuchten 24 Schweizer Aktien der Jahre 1999 bis 2001, wurde die Rangkorrelationsmatrix von Kendall geschätzt. Diese entspricht laut Satz 6.4 gerade auch jener Rangkorrelationsmatrix von Kendall, die sich aus den mit der jeweiligen Verteilungsfunktion transformierten zur Schätzung der jeweiligen Copulaparameter benötigten Daten ergibt. Aufgrund ihrer Dimension ist die besagte Matrix lediglich auszugsweise in Tabelle 13.11 wiedergegeben. Betrachtet man die ganze Matrix, so stellt man fest, dass nur gerade die grössten 8 der insgesamt 276 paarweisen Rangkorrelationen grösser als $1/3$ sind und somit im Bereich liegen, der von der Nelsen-Copula überhaupt modelliert werden kann. Alle übrigen geschätzten Rangkorrelationen sind zwar positiv aber kleiner als $1/3$.

Zum weiteren Verständnis des fehlenden Einflusses der Anzahl Parameter im Modell und der Schätzmethode muss nun die konkrete Umsetzung der Schätzung der Copulaparameter betrachtet werden. Bei der Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse wurde die Schätzung so realisiert, dass bei einer Unterschreitung des minimal vorgesehenen Werts von $1/3$ durch die geschätzte Rangkorrelation der korrespondierende Copulaparameter auf den minimal möglichen Wert von 1 gesetzt wurde. Bei der Umsetzung der Maximum-Likelihood-Methode wurde entsprechend im Programmpaket GAUSSTM mit Hilfe des Zusatzpakets Constrained Maximum Likelihood das Einhalten der genannten Parameterrestriktionen erzwungen. Demnach erfolgte die Generierung von Prognoseverteilungen mit Hilfe der Nelsen-Copula in der weitaus grössten Zahl aller Fälle unter Verwendung dieses minimal möglichen Wertes von 1 für die jeweiligen Copulaparameter. Dies

erklärt das fast gänzliche Fehlen eines Einflusses sowohl der Anzahl Parameter im Modell als auch der Schätzmethode.

Aus einem ökonometrisch-statistischen Blickwinkel kann dieses Vorgehen natürlich kritisiert werden. So kann man sich durchaus auf den Standpunkt stellen, dass mit der Nelsen-Copula ein Modell verwendet wurde, das den vorliegenden Gegebenheiten nicht gerecht zu werden vermag. Andererseits haben die Ergebnisse des Backtesting und die Auswertung der entsprechenden Kriterien gezeigt, dass die Varianten dieser Copulafunktion ohne Vorzeichenwechsel der Renditen im verwendeten Kontext alle übrigen Modelle dominieren. Weiter schneidet die Nelsen-Copula unter allen untersuchten Copulafunktionen hinsichtlich der Rechenzeit am besten ab und für eine Ausprägung dieser Copulafunktion stellt die Erhöhung der Dimension im praktischen Gebrauch kein Problem dar. Mit Blick auf die Anwendung in der Finanzpraxis kann man also durchaus auch die Meinung vertreten, dass die Nelsen-Copula besser als alle übrigen Modelle den Anforderungen des praktischen Risikomanagements entspricht und die oben beschriebene Einschränkung als lediglich kleiner Schönheitsfehler zu bewerten ist.

13.4 Untersuchung der einzelnen Aktienrenditen auf Normalverteilttheit

In Abschnitt 3.3.2 wurde gezeigt, dass das im Rahmen der Monte-Carlo-Simulation standardmässig verwendete Modell der geometrischen brownischen Bewegung von der Annahme multivariat normalverteilter Aktienrenditen ausgeht. Eine solche multivariate Normalverteilung kann, wie ebenfalls dargelegt wurde, durch die Verbindung normalverteilter Randverteilungen mit Hilfe der Normal-Copula erzeugt werden. Bisher wurden gegenüber dem Standardmodell der geometrischen brownischen Bewegung lediglich die Copulafunktionen ersetzt. Die Renditeverteilungen der einzelnen Aktien wurden jeweils als normalverteilt angenommen. Es soll nun mit Hilfe der beiden in Abschnitt 12.2 eingeführten univariaten Anpassungstests überprüft werden, ob diese Annahme mit der Realität vereinbar ist.

Die Realisierung dieser beiden Tests verläuft genau analog wie in Abschnitt 13.2, in dem die Renditen der untersuchten Portfolios auf Normalverteilttheit überprüft wurden. Die Tabelle 13.12, die den gleichen Aufbau wie die Tabelle 13.4 aufweist, zeigt für die 24 in der Studie verwendeten Schweizer Aktien die detaillierten Testresultate des χ^2 - und des Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstests basierend auf den jeweils 750 Tagesrenditen der Jahre 1999 bis 2001. Man erkennt, dass nach dem χ^2 -Anpassungstest die Annahme normalverteilter Tagesrenditen bei einem

Titel	χ^2 -Anpassungstest				KS-Anpassungstest		
	w	P-Wert	Ablehnung		d_T	Ablehnung	
			0.01	0.05		0.01 0.0377	0.05 0.0324
ABBN	82.5514	0.0000	1	1	0.0835	1	1
ADEN	41.1095	0.0001	1	1	0.0545	1	1
BALN	141.5955	0.0000	1	1	0.0997	1	1
CIBN	147.8758	0.0000	1	1	0.0936	1	1
CLN	97.3338	0.0000	1	1	0.0862	1	1
CSGN	50.7223	0.0000	1	1	0.0642	1	1
HOL	50.5087	0.0000	1	1	0.0523	1	1
BAER	39.3578	0.0002	1	1	0.0540	1	1
KUD	78.9199	0.0000	1	1	0.0696	1	1
NESN	40.3832	0.0001	1	1	0.0560	1	1
NOVN	52.9439	0.0000	1	1	0.0553	1	1
RAN	247.0374	0.0000	1	1	0.1260	1	1
CFR	44.6555	0.0000	1	1	0.0534	1	1
ROG	74.6903	0.0000	1	1	0.0808	1	1
SEO	77.4673	0.0000	1	1	0.0682	1	1
SGSN	108.6983	0.0000	1	1	0.0667	1	1
SUN	139.5875	0.0000	1	1	0.1109	1	1
UHR	21.8838	0.0572	0	0	0.0408	1	1
UHRN	67.6409	0.0000	1	1	0.0718	1	1
RUKN	101.7770	0.0000	1	1	0.0885	1	1
SCMN	39.6142	0.0002	1	1	0.0575	1	1
UBSN	52.3031	0.0000	1	1	0.0529	1	1
UNAX	39.6996	0.0002	1	1	0.0536	1	1
ZURN	95.6248	0.0000	1	1	0.0849	1	1
Ablehnungsanteil			0.958	0.958		1.000	1.000

Tabelle 13.12: Resultate des χ^2 - und des Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstests für einzelne Aktien im Zeitraum von 1999 bis 2001.

Konfidenzniveau von sowohl $\alpha = 0.01$ als auch $\alpha = 0.05$ nur für die Swatch Inhaberaktie nicht zu verwerfen ist, was einem Ablehnungsanteil der entsprechenden Nullhypothese über sämtliche Aktien von 95.8% entspricht. Im Rahmen des Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstests wird die Hypothese der Normalverteiltheit bei beiden betrachteten Signifikanzniveaus sogar für alle 24 Aktien verworfen.

Diese Testresultate erhärten, was in mehreren Studien bereits aufgezeigt wurde, nämlich dass die Normalverteilung meist nur als unzureichende Näherung für empirische Renditeverteilungen betrachtet werden kann (vgl. hierzu etwa FAMA [70], DOWD [55], S. 87 f., JOHANNING [95], S. 29 f., und WEBER [161]).

13.5 Empirische Randverteilungen

Aus eben genanntem Grund soll im Folgenden im Gegensatz zur zuvor vorgelegten Studie nicht mehr mit normalverteilten, sondern mit empirischen Randverteilungen gearbeitet werden. Die Verwendung solcher nichtparametrischer Verteilungen hat den Vorteil, dass sich diese direkt aus den konkreten Daten berechnen und sich somit kein Anpassungsproblem ergibt. Aufgrund der Verwendung empirischer Randverteilungen entspricht in der folgenden Untersuchung die Maximum-Likelihood-Methode zur Schätzung der jeweiligen Copulaparameter gerade der in Abschnitt 7.2 eingeführten kanonischen Maximum-Likelihood-Methode.

Der Austausch der Randverteilungen stellt gegenüber der bisher vorgestellten Untersuchung die einzige Änderung dar. So werden die nachfolgend präsentierten Resultate weiterhin im Rahmen der Vorgaben des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht, wie sie in Tabelle 13.3 zusammengefasst sind, ermittelt. Zudem werden die gleichen Portfolios wie in der vorhergehenden Studie untersucht. Damit können die nachfolgend dargestellten Ergebnisse jeweils direkt mit den bisherigen Resultaten verglichen werden und der Effekt des Austausches der Randverteilungen kann getrennt ausgewiesen werden.

13.5.1 Auswertung der Kriterien zur Modellrisikoabschätzung

Mittlere relative Abweichung

Mit Hilfe des Kriteriums der mittleren relativen Abweichung sollen die 25 betrachteten Modelle im Hinblick auf die Risikobezifferung wiederum in eher konservative und in eher aggressive Modelle eingeteilt werden. Abbildung 13.8 zeigt die in Box-Plots zusammengefassten geschätzten mittleren relativen Abweichungen und umfasst sämtliche untersuchten Portfolios. Damit repräsentiert erneut nicht jeder Box-Plot die gleiche Anzahl Daten. Da sich, wie den entsprechenden Abbildungen in der Datei `abbildungen.pdf` auf der beigelegten CD zu entnehmen ist, die Resultate für die unterschiedlichen Portfoliogrößen jeweils analog präsentieren, ist eine solch zusammenfassende Darstellung zweckmässig. Es sei an dieser Stelle bereits vorweggenommen, dass dieser Tatbestand für alle in diesem Kontext ausgewerteten Kriterien gegeben ist, so dass bei sämtlichen Abbildungen dieses Abschnitts mit einer derartigen Zusammenfassung gearbeitet wird.

Ein Vergleich von Abbildung 13.8 und Abbildung 13.2 zeigt eine deutliche Veränderung bei den Varianten der Nelsen-Copula mit invertierten Renditen. Lieferten diese Copulavarianten bei der zuvor präsentierten Studie vergleichsweise kleine

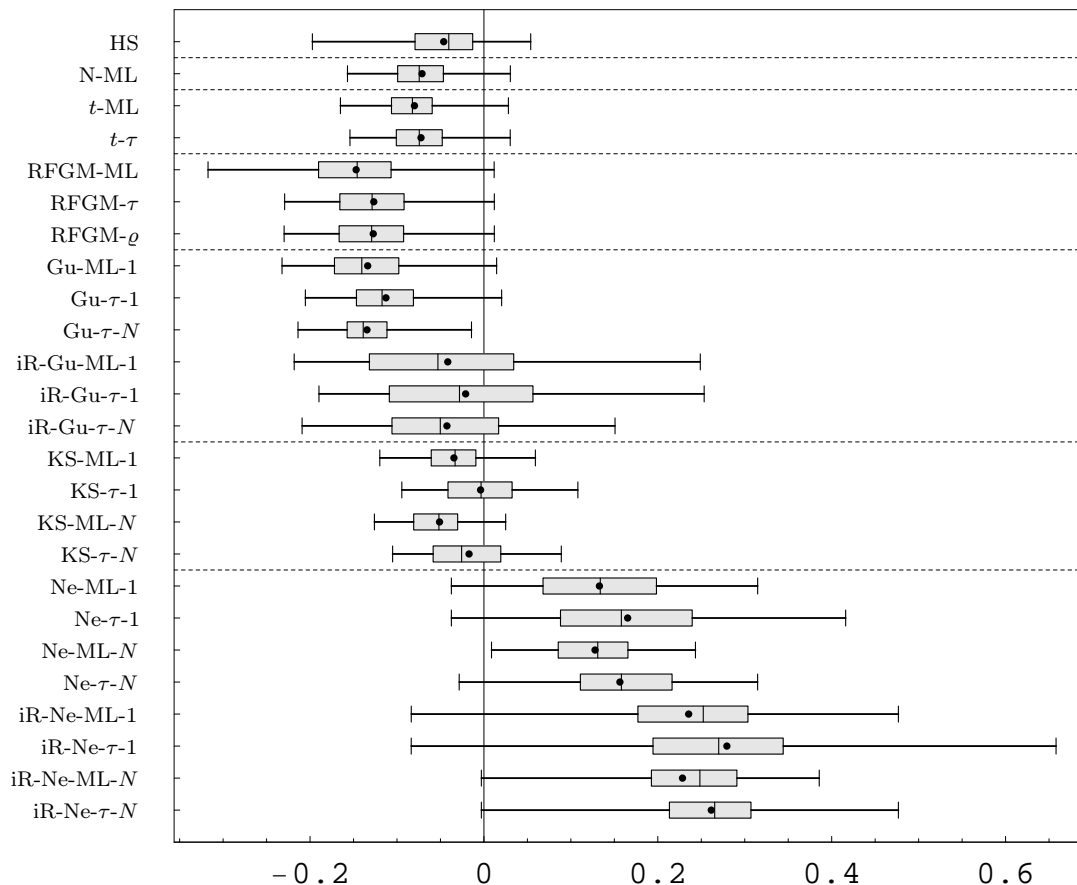


Abbildung 13.8: Mittlere relative Abweichungen. Zusammenfassung aller untersuchter Portfolios ohne Unterscheidung der Portfoliogrösse.

Schätzungen des Value-at-Risk, so erzeugen diese Modelle nun bei einer deutlichen Zunahme der Streuung der mittleren relativen Abweichungen die im Durchschnitt konservativsten Risikoschätzungen.

Weitere Unterschiede sind bei der Methode der historischen Simulation auszumachen. Bei Verwendung von normalverteilten Randverteilungen wurde diese als deutlich konservativ eingeordnet. Beim Einsatz empirischer Randverteilungen liefert diese Methode nun im Durchschnitt rund 5% kleinere Risikoschätzungen als das Mittel über alle Modelle und wird so als eher aggressiv ausgewiesen.

Weitere Differenzen zeigen sich bei der Gumbel-Copula mit invertierten Renditen und der Kimeldorf-Sampson-Copula. So ist etwa bei den angesprochenen Varianten der Gumbel-Copula eine klar gesteigerte Variabilität der geschätzten mittleren relativen Abweichungen auszumachen. Bei der Kimeldorf-Sampson-Copula zeigte die Wahl der Schätzmethode bei der früheren Untersuchung einen deutlichen Einfluss in dem Sinn, dass die Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse jeweils höhere Risikoschätzungen generierte. In Abbildung 13.8 ist dieser Umstand zwar noch immer aber nur mehr in viel geringerem Masse zu erkennen. So

kann festgehalten werden, dass die Wahl der Schätzmethode bei Verwendung empirischer Randverteilungen bei keiner der untersuchten Copulafunktionen einen markanten Einfluss zeigt. Weiter spielt es bei den archimedischen Copulas wie bereits in der vorhergehenden Untersuchung im Wesentlichen keine Rolle, ob die Ausprägung mit einem Parameter der Form (9.51) oder mit $N - 1$ Parametern der Form (9.56a) verwendet wird.

Bei der zuvor präsentierten Studie, bei der die Randverteilungen als normalverteilt angenommen wurden, wurden diejenigen Modelle durch die auf dem VaR basierenden Ex-post-Kriterien als besonders geeignet ausgewiesen, die durch das Kriterium der mittleren relativen Abweichung hinsichtlich der hervorgebrachten VaR-Schätzungen als konservativ eingestuft wurden. In der Folge soll nun überprüft werden, ob sich dies auch bei der Verwendung empirischer Randverteilungen bewahrheitet.

Anzahl Überschreitungen, Kupiec-Test und Ampelkonzept des Basler Ausschusses

Bei einem adäquaten Modell sollten weiterhin gerade 2.5 Überschreitungen eintreten. Die Abbildung 13.9 zeigt für sämtliche untersuchten Portfolios die Anzahl der effektiv beobachteten Verluste, die über der jeweiligen VaR-Schätzung für den entsprechenden Zeitpunkt zu liegen kommen. Diese gezählten Überschreitungen sind für alle betrachteten Modelle in Box-Plots dargestellt, die sämtliche untersuchten Portfolios umfassen. Wie bereits zuvor sollen zusätzlich zu dieser graphischen Darstellung der Anzahl beobachteter Überschreitungen die in Tabelle 13.13 dargestellten Resultate des Likelihood-Quotienten-Tests nach Kupiec und die in Tabelle 13.14 angegebenen Ergebnisse der Anwendung des für die Bankpraxis bedeutsamen Basler Ampelkonzepts besprochen werden. Die Werte in Tabelle 13.13 geben weiterhin an, für welchen Anteil der untersuchten Portfolios die Nullhypothese, dass eine Überschreitung genau mit der theoretisch vorgesehenen Restwahrscheinlichkeit eintritt, bei einem Signifikanzniveau von 0.01 zu verwerfen ist. Die Tabelle 13.14 zeigt die mittleren Multiplikationsfaktoren, die sich nach dem Ampelkonzept ergeben. Schneidet eine Copulafunktion in einer Situation besser oder gleich gut ab wie die Normal-Copula, wird der entsprechende Tabelleneintrag wie bereits zuvor fett gedruckt. Bei einer gleich guten oder besseren Eignung einer Copulafunktion im Vergleich zur historischen Simulation wird der entsprechende Wert durch einen Stern gekennzeichnet.

Ein Vergleich der Abbildungen 13.8 und 13.9 zeigt zunächst, dass erneut die als am konservativsten ausgewiesenen Modelle tendenziell dem Sollwert an Überschreitungen am nächsten kommen. Folglich generieren diese Modelle wie angestrebt tatsächlich dann höhere VaR-Schätzungen, wenn grössere Verluste auftreten. Wie

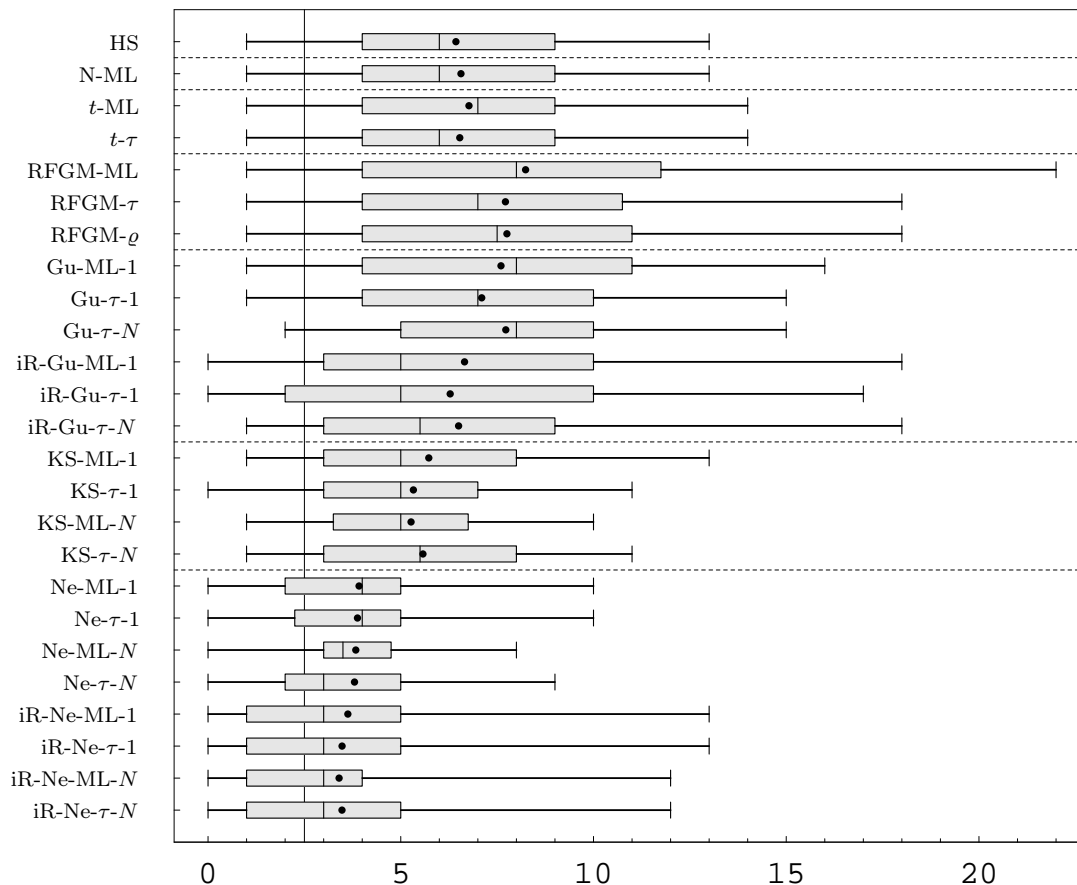


Abbildung 13.9: Anzahl Überschreitungen. Zusammenfassung aller untersuchter Portfolios ohne Unterscheidung der Portfoliogrösse.

schon bei der Auswertung des Kriteriums der mittleren relativen Abweichung festgestellt wurde, hat die Wahl der Schätzmethode im vorliegenden Kontext bei keiner der untersuchten Copulafunktionen einen markanten Einfluss. Bei den archimedischen Copulas spielt es zudem im Wesentlichen keine Rolle, ob die Ausprägung mit einem einzigen oder mit $N - 1$ Parametern verwendet wird. Aus diesem Grund werden bei der nachfolgenden Besprechung der Ergebnisse die entsprechenden Copulavarianten zusammengefasst betrachtet.

Man erkennt, dass im Gegensatz zur früheren Untersuchung nun sowohl die Varianten der Nelsen-Copula mit als auch ohne Vorzeichenwechsel der Renditen als besonders geeignet ausgewiesen werden. Diese liefern im Mittel zwischen 3 und 4 Überschreitungen und kommen so dem Sollwert von allen untersuchten Modellen am nächsten. Aufgrund der Box-Plots in Abbildung 13.9 und der mittleren Basler Multiplikationsfaktoren lässt sich nicht eindeutig feststellen, ob die Ausprägung der Nelsen-Copula mit nicht invertierten oder invertierten Renditen zu bevorzugen ist. Die Ergebnisse des Kupiec-Tests zeigen einen minimalen Vorteil der Varianten ohne Vorzeichenwechsel der Renditen an.

Modell	Anzahl Titel					Durchschnitt
	2	3	4	5	10	
HS	0.300	0.400	0.567	0.250	0.700	0.438
N-ML	0.267	0.300	0.500	0.400	0.600	0.400
t -ML	0.300*	0.300*	0.533*	0.400	0.650*	0.423*
t - τ	0.267*	0.300*	0.500*	0.350	0.550*	0.385*
RFGM-ML	0.300*	0.433	0.667	0.500	0.900	0.538
RFGM- τ	0.300*	0.433	0.600	0.450	0.750	0.492
RFGM- ϱ	0.300*	0.433	0.633	0.450	0.750	0.500
Gu-ML-1	0.333	0.500	0.700	0.500		0.509
Gu- τ -1	0.300*	0.433	0.633	0.450		0.455
Gu- τ - N		0.400*	0.667	0.500		0.525
iR-Gu-ML-1	0.300*	0.300*	0.600	0.350		0.391*
iR-Gu- τ -1	0.300*	0.233*	0.533*	0.250*		0.336*
iR-Gu- τ - N		0.233*	0.533*	0.300		0.363*
KS-ML-1	0.233*	0.200*	0.400*	0.250*		0.273*
KS- τ -1	0.233*	0.200*	0.333*	0.150*		0.236*
KS-ML- N		0.200*				0.200*
KS- τ - N		0.167*	0.367*	0.300		0.275*
Ne-ML-1	0.167*	0.100*	0.100*	0.100*		0.118*
Ne- τ -1	0.167*	0.100*	0.100*	0.100*	0.000*	0.100*
Ne-ML- N		0.100*				0.100*
Ne- τ - N		0.100*	0.100*	0.100*		0.100*
iR-Ne-ML-1	0.233*	0.133*	0.100*	0.150*		0.155*
iR-Ne- τ -1	0.233*	0.133*	0.100*	0.150*	0.000*	0.131*
iR-Ne-ML- N		0.133*				0.133*
iR-Ne- τ - N		0.133*	0.100*	0.150*		0.125*
Durchschnitt	0.267*	0.256*	0.426*	0.300	0.544*	0.330*

Tabelle 13.13: Ablehnungsanteile des Likelihood-Quotienten-Tests nach Kupiec bei einem Signifikanzniveau von 0.01.

Die Varianten der Kimeldorf-Sampson-Copula schneiden gefolgt von den Varianten der Gumbel-Copula mit invertierten Renditen mit im durch den Median ausgedrückten Mittel zwischen 5 und 5.5 Überschreitungen etwas schlechter ab als die Varianten der Nelsen-Copula. Dieses Bild liefern ebenfalls sowohl der Kupiec-Test als auch das Ampelkonzept.

Sämtliche bisher genannten Copulavarianten werden im Durchschnitt über alle untersuchten Portfolios als passender beurteilt als die beiden Referenzmodelle der historischen Simulation und der Normal-Copula. Diese beiden Ansätze wiederum können allein mit Hilfe der entsprechenden Box-Plots kaum differenziert werden. Aufgrund des Kupiec-Tests ist die Normal-Copula gegenüber der historischen Simulation leicht zu favorisieren, da sie im Durchschnitt über alle Portfoliogrößen in 3.8% weniger Fällen zu einer Ablehnung der Hypothese führt, dass die vorgegebene Restwahrscheinlichkeit eingehalten wird. Betrachtet man hingegen die

Modell	Anzahl Titel					Durchschnitt
	2	3	4	5	10	
HS	3.370	3.470	3.593	3.405	3.658	3.494
N-ML	3.375	3.413	3.613	3.465	3.705	3.503
t -ML	3.378	3.425*	3.638	3.483	3.753	3.523
t - τ	3.380	3.410*	3.613	3.460	3.710	3.504
RFGM-ML	3.405	3.562	3.718	3.545	3.888	3.609
RFGM- τ	3.405	3.557	3.682	3.535	3.845	3.592
RFGM- ϱ	3.405	3.560	3.685	3.535	3.845	3.593
Gu-ML-1	3.405	3.615	3.758	3.565		3.588
Gu- τ -1	3.397	3.540	3.703	3.540		3.545
Gu- τ - N		3.565	3.720	3.525		3.613
iR-Gu-ML-1	3.348*	3.375*	3.625	3.428		3.445*
iR-Gu- τ -1	3.348*	3.352*	3.598	3.418		3.430*
iR-Gu- τ - N		3.333*	3.598	3.383*		3.445*
KS-ML-1	3.325*	3.318*	3.553*	3.445		3.407*
KS- τ -1	3.322*	3.280*	3.490*	3.325*		3.357*
KS-ML- N		3.345*				3.345*
KS- τ - N		3.303*	3.497*	3.358*		3.389*
Ne-ML-1	3.235*	3.160*	3.212*	3.135*		3.190*
Ne- τ -1	3.235*	3.160*	3.212*	3.135*	3.105*	3.177*
Ne-ML- N		3.160*				3.160*
Ne- τ - N		3.160*	3.212*	3.135*		3.173*
iR-Ne-ML-1	3.277*	3.162*	3.237*	3.150*		3.211*
iR-Ne- τ -1	3.277*	3.162*	3.237*	3.150*	3.060*	3.188*
iR-Ne-ML- N		3.162*				3.162*
iR-Ne- τ - N		3.162*	3.237*	3.150*		3.187*
Durchschnitt	3.346*	3.348*	3.520*	3.376*	3.619*	3.416*

Tabelle 13.14: Mittlerer Multiplikationsfaktor nach dem Ampelkonzept des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht.

Bewertung nach dem Ampelkonzept, so dreht das Bild. Hier sind zur Ermittlung des risikobedingten Eigenkapitals die auf der Normal-Copula basierenden VaR-Werte mit einem höheren Faktor zu multiplizieren als die VaR-Schätzungen der historischen Simulation.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass der Übergang von normalverteilten zu empirischen Randverteilungen die historische Simulation nicht beeinflusst, da diese Methode ohne entsprechende Annahmen auskommt. Damit sind die Ergebnisse für dieses nichtparametrische Modell in der zweiten Studie genau analog zu denjenigen der zuvor durchgeführten Untersuchung, wie ein Vergleich der jeweils korrespondierenden Abbildungen und Tabellen zeigt.

Wie schon bei den beiden Referenzmodellen herrscht auch bei der Eignungsbeurteilung der beiden Varianten der zweiten untersuchten elliptischen Copulafamilie, nämlich der t -Copula, keine Einigkeit, wenn man die Durchschnittswerte über

sämtliche Portfolios betrachtet. Wird die mit der ML-Methode geschätzte Variante durch den Likelihood-Quotienten-Test nach Kupiec als passender als die historische Simulation und die mit der Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse geschätzte Ausprägung gar als geeigneter als beide Referenzmodelle eingestuft, so erscheinen die entsprechenden Werte in Tabelle 13.14 weder fett gedruckt noch mit einem Stern versehen. Es ist aber zu bemerken, dass die Unterschiede in den jeweiligen Ergebnissen sehr klein ausfallen und sich die Einordnung gegenüber den Referenzmodellen in Abhängigkeit der Portfoliogrösse durchaus ändern kann.

Übereinstimmung herrscht hingegen wiederum bei der Einschätzung der verbleibenden Modellvarianten, die bis auf einzelne Ausnahmen schlechter abschneiden als die beiden Referenzmodelle. Hierbei handelt es sich um die Varianten der Gumbel-Copula ohne Vorzeichenwechsel der Renditen und die als am ungeeigneten eingestuften Varianten der reduzierten Farlie-Gumbel-Morgenstern-Copula.

Betrachtet man die eben kommentierte Eignungsrangfolge der untersuchten Modelle, so fällt auf, dass sich wie bereits in der zuvor durchgeführten Studie diejenigen Copulavarianten als besonders geeignet herausstellen, die asymmetrisches Randverhalten aufweisen und inhärente oder mittels Vorzeichenwechsel der Renditen konstruierte asymptotische untere Randabhängigkeit implizieren. Im Gegensatz zur früheren Untersuchung bildet nun auch die Nelsen-Copula mit invertierten Renditen hiervon keine Ausnahme mehr.

Weiter soll allgemein der Effekt der Verwendung empirischer Randverteilungen im Vergleich zum Einsatz normalverteilter Randverteilungen untersucht werden. Eine Gegenüberstellung der Abbildung 13.9 und der Abbildung 13.3 lässt erkennen, dass sämtliche Copulafunktionen bei Verwendung empirischer Randverteilungen zu weniger Überschreitungen führen als beim Einsatz normalverteilter Randverteilungen. So beträgt das arithmetische Mittel über sämtliche Modelle für alle untersuchten Portfolios nun 5.938 Überschreitungen gegenüber 8.441 in der zuvor betrachteten Studie. Dieser tiefere Wert entspricht einer Restwahrscheinlichkeit von rund 2.4%. Der entsprechende Medianwert der gezählten Überschreitungen sinkt bei Verwendung empirischer Randverteilungen ebenfalls von 8 auf 5, das Maximum von 25 auf 22 Überschreitungen. In Anlehnung an Tabelle 13.6 sind diese und weitere die Anzahl Überschreitungen betreffende Statistiken über alle untersuchten Modelle in Tabelle 13.15 differenziert nach der Portfoliogrösse aufgeführt. Die Verbesserung sämtlicher Copulafunktionen bei Verwendung empirischer Randverteilungen zeigt sich überdies sowohl in den Ergebnissen des Kupiec-Tests als auch in der Bewertung nach dem Basler Ampelkonzept. So beträgt der mittlere Ablehnungsanteil über alle Modelle und über alle Portfolios nun 33.0% gegenüber 54.1% beim Einsatz normalverteilter Randverteilungen, der entsprechende mittlere Multiplikationsfaktor sinkt von zuvor 3.623 auf 3.416.

Anzahl Titel	x_{\min}	$x_{0.25}$	x_{med}	$x_{0.75}$	x_{\max}	\bar{x}
2	0	2	4	8	17	5.171
3	0	3	4	8	16	5.264
4	0	4	7	10	17	6.967
5	0	3	5	8	18	5.543
10	0	5	8	10	22	8.117
alle Portfolios	0	3	5	9	22	5.938

Tabelle 13.15: Statistiken zur Anzahl Überschreitungen differenziert nach der Portfoliogrösse.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass sämtliche Copulafunktionen beim Einsatz empirischer Randverteilungen besser abschneiden als bei Verwendung normalverteilter Randverteilungen. Dennoch werden gegenüber dem Sollwert weiterhin tendenziell zu viele Überschreitungen gezählt, was als Unterschätzung des Risikos zu interpretieren ist.

Es sei nun noch einmal das im Rahmen der Monte-Carlo-Simulation standardmässig verwendete Modell der geometrischen brownischen Bewegung betrachtet, das sich mit Hilfe der Normal-Copula und normalverteilter Randverteilungen erzeugen lässt. Das Abschneiden dieses Modells kann unter anderem der jeweils entsprechenden Zeile der Tabellen 13.7 und 13.8 entnommen werden. Im Durchschnitt über alle untersuchten Portfolios führt dieses Modell in 60.0% aller Fälle zu einer Ablehnung der Hypothese, dass die theoretisch vorgesehene Anzahl Überschreitungen eingehalten wird. Der entsprechende Basler Multiplikator beträgt 3.691. Man erkennt nun in den beiden genannten Tabellen, dass bei Beibehaltung normalverteilter Randverteilungen durch den Einsatz alternativer Copulafunktionen der Ablehnungsanteil durch den Kupiec-Test über alle Portfolios bis auf 16.7%, der Basler Multiplikationsfaktor bis auf 3.297 gesenkt werden kann. Den Tabellen 13.13 und 13.14 ist im Gegenzug zu entnehmen, dass bei Beibehaltung der Normal-Copula und durch die Verwendung alternativer Randverteilungen – im betrachteten Fall wird für jede Randverteilung einheitlich die empirische Verteilung eingesetzt – der Ablehnungsanteil durch den Kupiec-Test über alle Portfolios 40.0% beträgt und der Multiplikator nach dem Ampelkonzept den Wert 3.503 annimmt. Es ist nun nicht auszuschliessen, dass durch den Einsatz anderer Randverteilungen sowie die spezifische Wahl eines besonders geeigneten Ansatzes für jede einzelne Randverteilung die mit der Normal-Copula erzielten Ergebnisse noch verbessert werden können. Der vorliegende Vergleich zeigt jedenfalls, dass durch die Wahl einer adäquaten Copulafunktion bestehende Ansätze zur Messung von Marktrisiken massgeblich verbessert werden können.

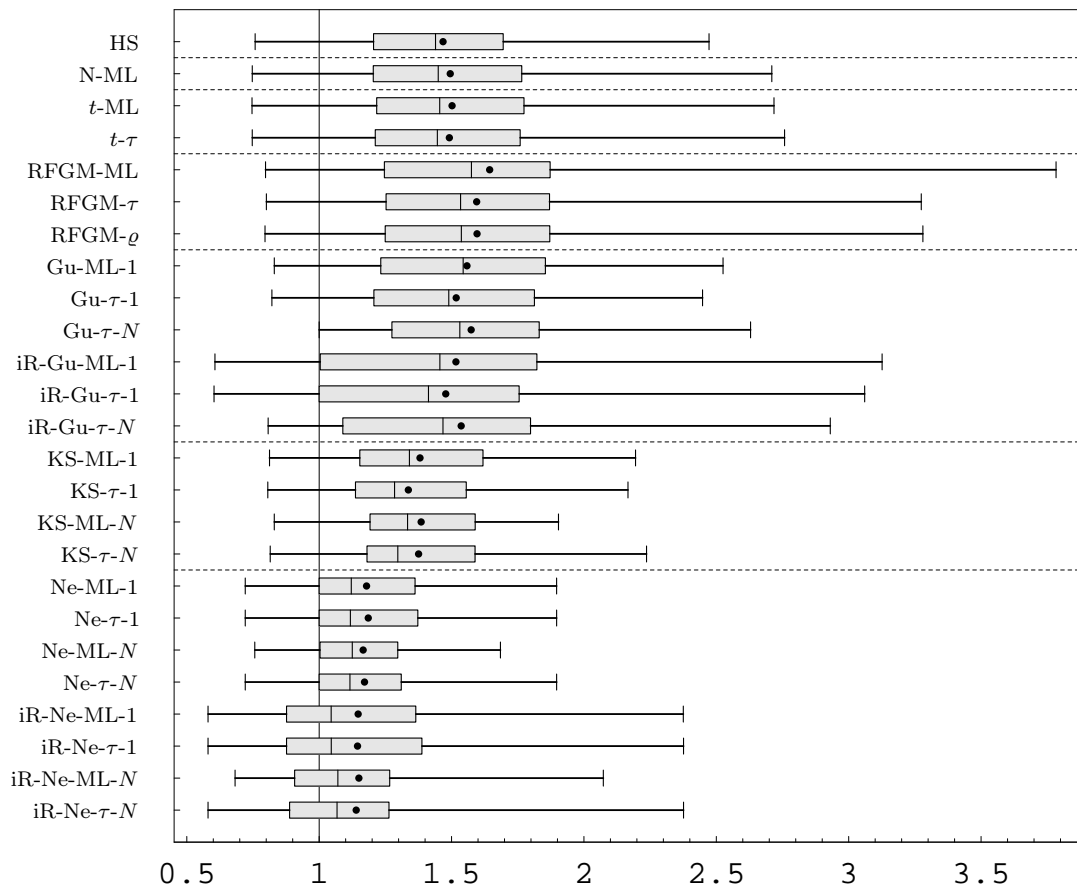


Abbildung 13.10: Multiplikatoren zur Erreichung von $\alpha \cdot 100\%$ Überschreitungen. Zusammenfassung aller untersuchter Portfolios ohne Unterscheidung der Portfoliogrösse.

Mittlere relative Abweichung skaliertter VaR-Schätzungen

Für die Bestimmung der mittleren relativen Abweichungen skaliertter VaR-Schätzungen werden bekanntlich die Multiplikatoren zur Erreichung von genau $\alpha \cdot 100\%$ Überschreitungen benötigt. Diese sind in Abbildung 13.10 für alle untersuchten Modelle und Portfolios wiedergegeben. Wie ein Vergleich dieser Abbildung mit der Abbildung 13.9 erkennen lässt, stellt sich die Eignung der untersuchten Modelle bei Verwendung dieses Kriteriums analog dar wie bei der Anwendung des gerade ausführlich besprochenen Kriteriums der Anzahl Überschreitungen. Aus diesem Grund soll an dieser Stelle nicht ausführlicher auf besagten Multiplikator eingegangen werden.

Mit Hilfe der mittleren relativen Abweichungen skaliertter VaR-Schätzungen soll nun wiederum eine Einteilung der Modelle in effizientere und weniger effiziente vorgenommen werden. Dabei wird dasjenige Modell als das effizienteste betrachtet, das die geforderte Anzahl Überschreitungen mit den verhältnismässig kleins-

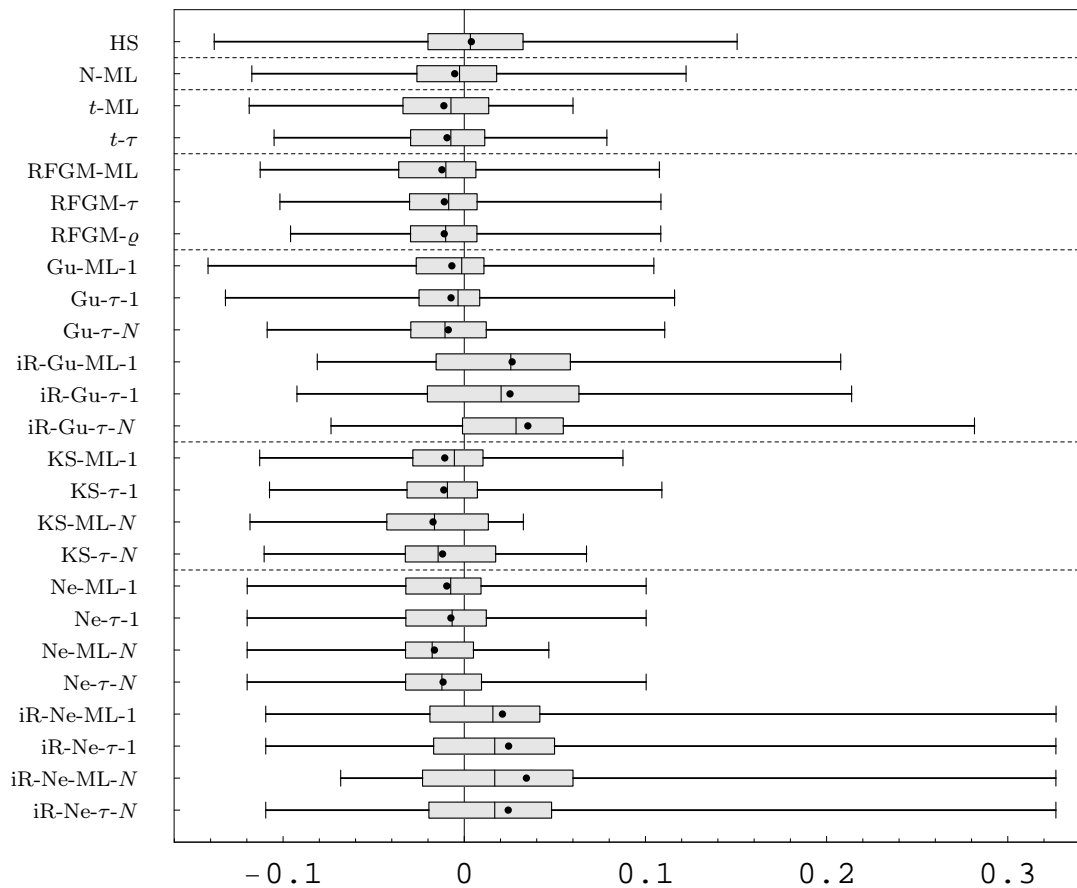


Abbildung 13.11: Mittlere relative Abweichungen skaliertter VaR-Schätzungen. Zusammenfassung aller untersuchter Portfolios ohne Unterscheidung der Portfolio-grösse.

ten VaR-Schätzungen einhält, was möglichst kleinen mittleren relativen Abweichungen skaliertter VaR-Schätzungen entspricht. Diese Werte sind in Abbildung 13.11 für sämtliche untersuchten Portfolios dargestellt. Es fällt auf, dass sich die Ergebnisse der untersuchten Modelle wie bereits in der zuvor besprochenen Studie nicht dramatisch unterscheiden. So liegen die durchschnittlichen mittleren relativen Abweichungen skaliertter VaR-Schätzungen für alle Modelle jeweils sehr nahe an der Nulllinie. Sämtliche Boxen der jeweiligen Box-Plots befinden sich zwischen -0.043 und $+0.063$.

Sind die Unterschiede der Modelle hinsichtlich der mittleren relativen Abweichungen skaliertter VaR-Schätzungen auch nicht sehr gross, so kann dieses Merkmal doch als Zusatzkriterium verwendet werden, um diejenigen Modelle gegeneinander abzugrenzen, die auf der Grundlage der erzeugten Anzahl Überschreitungen kaum zu unterscheiden waren. Schaut man sich etwa die Varianten der Nelsen-Copula an, so zeigt sich, dass diejenigen ohne Vorzeichenwechsel der Renditen im Mittel als effizienter ausgewiesen werden als diejenigen mit invertierten Renditen. Dabei weisen letztere Varianten zusätzlich einzelne höhere positive mittlere rela-

tive Abweichungen skalierteter VaR-Schätzungen auf. Nachdem die Varianten ohne Vorzeichenwechsel bereits aufgrund des Kriteriums der Anzahl Überschreitungen als leicht vorteilhaft bewertet wurden, werden diese somit überdies als effizienter eingestuft.

Kaum zu differenzieren waren zuvor ebenfalls das Modell der historischen Simulation, die Normal-Copula und die beiden Ausprägungen der t -Copula. Die Abbildung 13.11 weist nun die Varianten der t -Copula als leicht effizienter aus als die Normal-Copula, die selbst wiederum besser bewertet wird als die historische Simulation. Von den zuvor als besonders geeignet eingestuften Varianten der archimedischen Copulafunktionen, die asymmetrisches Randverhalten und asymptotische untere Randabhängigkeit implizieren, weisen nebst den Varianten der Nelsen-Copula mit invertierten Renditen ebenfalls die Varianten der Gumbel-Copula mit invertierten Renditen im Durchschnitt leicht höhere mittlere relative Abweichungen skalierteter VaR-Schätzungen auf. Die so angezeigte Effizienzeinbusse fällt jedoch nur gering aus.

Mittlerer und maximaler Überschreitungsverlust relativ zum VaR

Es sollen nun mit dem mittleren und dem maximalen Überschreitungsverlust relativ zum VaR die beiden Kriterien betrachtet werden, die das Hauptaugenmerk auf die Höhe der Überschreitungsverluste richten. Die geschätzten mittleren beziehungsweise maximalen Überschreitungsverluste relativ zum VaR sind in Abbildung 13.12 respektive 13.13 wiedergegeben. Diese zeigen, was die relative Position der Box-Plots zueinander betrifft, ein sehr ähnliches Bild, so dass die gemeinsame Besprechung der beiden Kriterien zweckmässig ist.

Ein Vergleich dieser beiden Abbildungen mit den bisherigen in Abschnitt 13.5.1 präsentierten Ergebnissen lässt erkennen, dass sich die Beurteilung der Eignung der untersuchten Modelle gemessen an der Befähigung, hohe Verluste möglichst gut zu „prognostizieren“, ähnlich darstellt, wie wenn der Fokus auf das Einhalten der vorgegebenen Anzahl Überschreitungen gerichtet ist. So schneiden mit den Varianten der Nelsen- und der Kimeldorf-Sampson-Copula erneut diejenigen Copulavarianten am besten ab, die asymmetrisches Randverhalten und inhärente oder konstruierte asymptotische untere Randabhängigkeit implizieren. Eine Abweichung hiervon ist nun aber bei den Varianten der Gumbel-Copula mit invertierten Renditen festzustellen, die bei Verwendung der Kriterien, die auf die Überschreitungshöhe abstützen, im Durchschnitt schlechter einzustufen sind als die beiden Referenzmodelle. Dabei präsentiert sich die historische Simulation leicht vorteilhafter als die Normal-Copula. Wie bereits bei den Kriterien, die auf der Anzahl Überschreitungen aufbauen, unterscheiden sich die Ergebnisse der t -Copula auch bei der Voraussage hoher Verluste kaum von denjenigen der

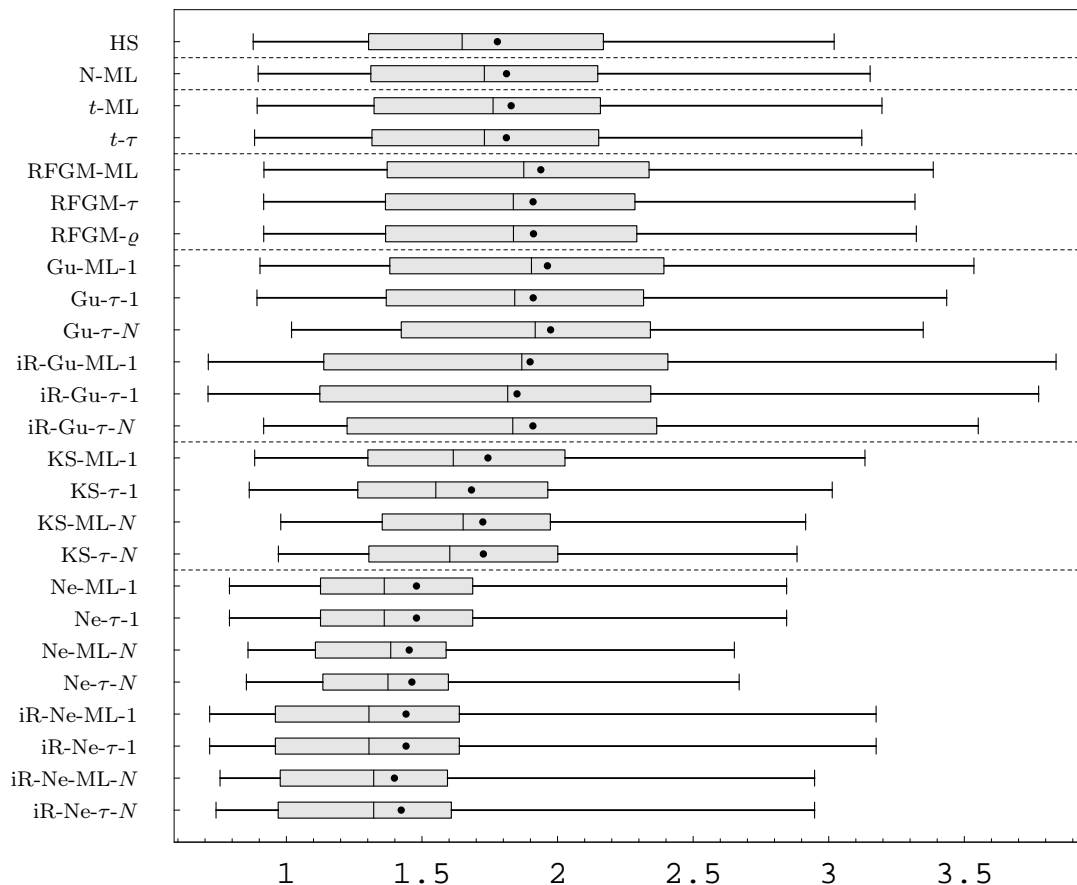


Abbildung 13.12: Mittlere Überschreitungsverluste relativ zu den jeweiligen VaR-Schätzungen. Zusammenfassung aller untersuchter Portfolios ohne Unterscheidung der Portfoliogrösse.

Normal-Copula. Weniger geeignet als die beiden Referenzmodelle zeigen sich erneut die Gumbel-Copula ohne Vorzeichenwechsel der Renditen und die reduzierte Farlie-Gumbel-Morgenstern-Copula.

Ein Vergleich der Abbildungen 13.12 und 13.13 mit den Abbildungen 13.6 und 13.7 des Abschnitts 13.3.1 zeigt erneut das bessere Abschneiden sämtlicher Copulafunktionen bei Verwendung empirischer Randverteilungen. War im Durchschnitt über alle Modelle und alle Portfolios der mittlere Überschreitungsverlust relativ zum VaR beim Einsatz normalverteilter Randverteilungen in der zuvor betrachteten Studie rund 2-mal und der maximale Überschreitungsverlust relativ zum VaR rund 2.5-mal so gross wie die jeweils entsprechende VaR-Schätzung, so sinken die korrespondierenden Faktoren bei Verwendung empirischer Randverteilungen auf 1.76 beziehungsweise auf 2.21. Doch auch dieses bessere Abschneiden sämtlicher Copulafunktionen verhindert weiterhin nicht, dass einzelne Verluste die jeweiligen VaR-Schätzungen deutlich übertreffen können. So ist der jeweils maximale über alle untersuchten Portfolios ermittelte Überschreitungsverlust für die verschiede-

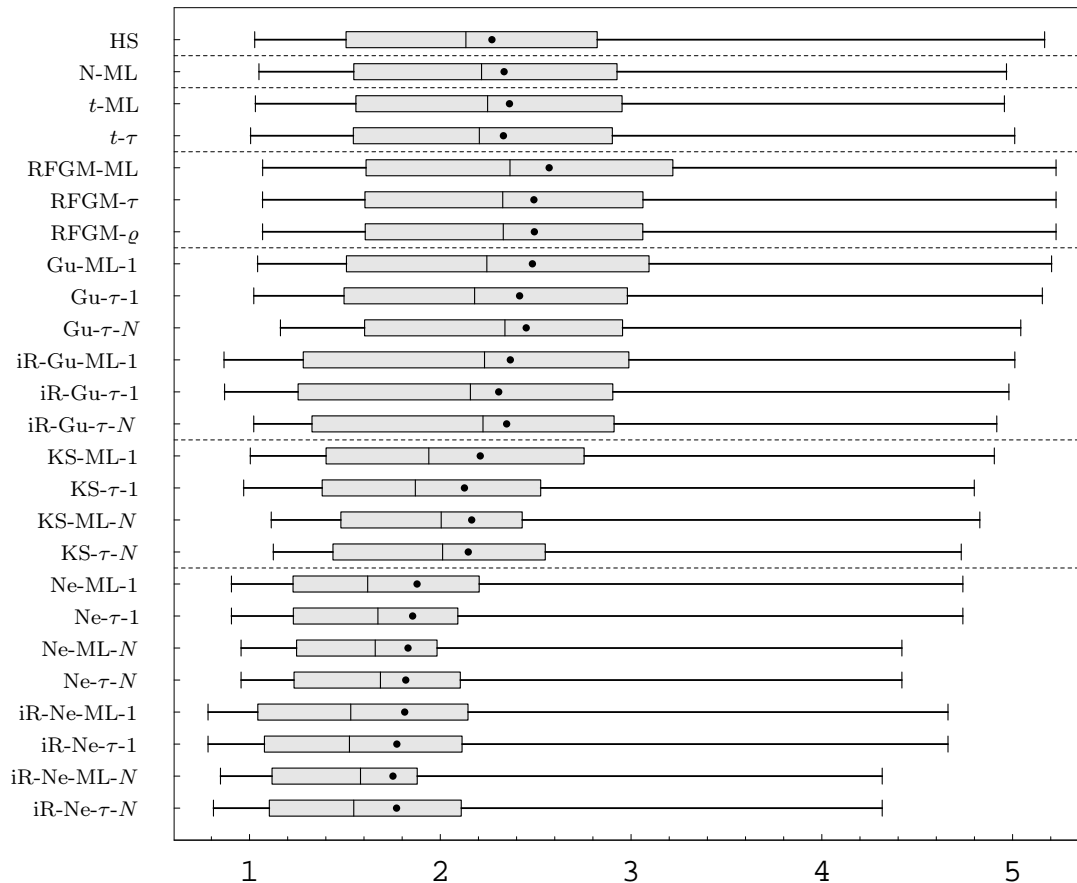


Abbildung 13.13: Maximale Überschreitungsverluste relativ zu den jeweiligen VaR-Schätzungen. Zusammenfassung aller untersuchter Portfolios ohne Unterscheidung der Portfoliogrösse.

nen Modelle zwischen 4.3- und 5.2-mal so gross wie der entsprechende VaR-Wert. Dabei gilt, wie in der früheren Studie erörtert wurde, dass diese Werte nicht direkt mit dem Multiplikator des Basler Ausschusses zur Ermittlung der Eigenmittelunterlegung verglichen werden können.

13.5.2 Zusammenfassung und weiterführende Betrachtungen

Da Copulaparameter aufgrund von Daten geschätzt werden, die bereits vorgängig mit den entsprechenden Randverteilungsfunktionen transformiert wurden, hat die gewählte Form der Randverteilungen auf die für die Schätzung der jeweiligen Copulaparameter benötigten Rechenzeiten keinen Einfluss. Da weiter die Simulationszeiten von Copulafunktionen unabhängig von den jeweiligen Randverteilungen sind, präsentieren sich die Rechenzeiten für die hier betrachtete Studie gleich wie in Tabelle 13.9 des Abschnitts 13.3.2. Damit ist für die Erzeugung der Ergebnisse dieser zweiten Untersuchung erneut eine Gesamtrechendauer von rund 157 Tagen

à 24 Stunden zu veranschlagen. In der Folge sollen die Ergebnisse dieser Studie zusammengefasst werden.

In Abschnitt 13.4 wurde mit Hilfe von zwei Anpassungstests gezeigt, dass für den betrachteten Zeitraum von 1999 bis 2001 die Normalverteilung nur als unzureichende Näherung der Verteilungen der Tagesrenditen der 24 untersuchten Schweizer Aktien betrachtet werden kann. Infolgedessen wurde nicht mehr wie zuvor mit normalverteilten, sondern mit empirischen Randverteilungen gearbeitet. Ansonsten wurden gegenüber der ersten Untersuchung keine Änderungen vorgenommen. Es wurden die gleichen Portfolios untersucht und weiterhin die quantitativen Vorgaben für das Backtesting des Basler Ausschusses angewendet.

Es hat sich gezeigt, dass sämtliche Copulavarianten bei Verwendung empirischer Randverteilungen besser abschneiden als beim Einsatz normalverteilter Randverteilungen. Damit erweist sich diese nichtparametrische Verteilung im untersuchten Kontext als geeigneter als die Normalverteilung, den Besonderheiten der benötigten Renditeverteilungen gerecht zu werden.

Nachfolgend soll stellvertretend wiederum diejenige Eignungsrangfolge der untersuchten Modelle angegeben werden, die aus der Anwendung des für die Bankpraxis wichtigen Ampelkonzepts des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht folgt. Für die Bestimmung der Rangfolge wird auf den in der letzten Spalte von Tabelle 13.14 angegebenen durchschnittlichen Multiplikationsfaktor über alle untersuchten Portfoliogrößen als Kriterium zurückgegriffen. Daraus ergibt sich die nachfolgende nach absteigender Eignung sortierte Rangfolge der betrachteten Modelle:

- | | | |
|------------------------|-------------------------|----------------------|
| 1. Ne-ML- N | 10. KS- τ -1 | 18. t - τ |
| 2. iR-Ne-ML- N | 11. KS- τ - N | 19. t -ML |
| 3. Ne- τ - N | 12. KS-ML-1 | 20. Gu- τ -1 |
| 4. Ne- τ -1 | 13. iR-Gu- τ -1 | 21. Gu-ML-1 |
| 5. iR-Ne- τ - N | 14. iR-Gu- τ - N | 22. RFGM- τ |
| 6. iR-Ne- τ -1 | 15. iR-Gu-ML-1 | 23. RFGM- ϱ |
| 7. Ne-ML-1 | 16. HS | 24. RFGM-ML |
| 8. iR-Ne-ML-1 | 17. N-ML | 25. Gu- τ - N |
| 9. KS-ML- N | | |

Man erkennt, dass sich erneut diejenigen Copulavarianten am besten zur Zusammenhangsmodellierung von Renditen eignen, die asymmetrisches Randverhalten aufweisen und inhärente oder mittels Vorzeichenwechsel der Renditen konstruierte asymptotische untere Randabhängigkeit implizieren. Die Ränge 1 bis 15 der oben angegebenen Eignungsrangfolge sind ausnahmslos von Varianten archimedischer Copulafunktionen belegt, die diese Charakteristiken aufweisen. Im Gegensatz zur ersten Untersuchung trifft dies nun ebenfalls für die Varianten der Nelsen-Copula mit invertierten Renditen zu, die zusammen mit den Varianten der Nelsen-Copula

ohne Vorzeichenwechsel der Renditen im Rahmen dieser zweiten Untersuchung allen übrigen Modellvarianten überlegen sind.

Die praktische Anwendung der archimedischen Copulafunktionen ist im Allgemeinen auf Portfolios beschränkt, die verhältnismässig wenig Titel umfassen. Diese Restriktion, die sich je nach Verwendungszweck durchaus negativ auf die Eignungsbewertung dieser Copulafunktionen auswirken kann, gilt wie zuvor gesehen nicht für die Varianten der mit der Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse geschätzten Nelsen-Copula mit einem Parameter. Dies kann als weiterer Vorteil der mit $\text{Ne-}\tau\text{-1}$ und $\text{iR-Ne-}\tau\text{-1}$ bezeichneten Varianten dieser Copulafunktion betrachtet werden, die gemäss dem Basler Ampelkonzept Rang 4 beziehungsweise Rang 6 innehaben.

Die im Rahmen der Monte-Carlo-Simulation standardmässig eingesetzte Normal-Copula erreicht gemäss dem Basler Ampelkonzept lediglich Rang 17. Der Übergang von normalverteilten zu empirischen Randverteilungen beeinflusst die Ergebnisse der historischen Simulation nicht. Da im Gegensatz dazu sämtliche Copulavarianten bei Verwendung empirischer Randverteilungen besser abschneiden, wird die historische Simulation im Rahmen dieser zweiten Studie vergleichsweise schlechter bewertet als in der ersten: Sie fällt vom 5. auf den 16. Rang zurück.

Wie die Auswertungen in Abschnitt 13.5.1 gezeigt haben, liefern die übrigen Backtestingkriterien jeweils eine sehr ähnliche Eignungsrangfolge der untersuchten Modelle wie das Basler Ampelkonzept. Eine Ausnahme bildet die Beurteilung der Varianten der Gumbel-Copula mit invertierten Renditen durch die beiden Kriterien des mittleren und des maximalen Überschreitungsverlustes relativ zum VaR. Besagte Modellvarianten können bei der Fähigkeit, extrem hohe Überschreitungsverluste zu prognostizieren, die oben angegebenen Ränge nicht halten. Eine weitere Ausnahme bildet wie schon bei der ersten Untersuchung das Kriterium der mittleren relativen Abweichung skalierteter VaR-Schätzungen, aufgrund dessen die untersuchten Copulavarianten kaum differenziert werden können.

Allgemein haben die Auswertungen in Abschnitt 13.5.1 gezeigt, dass die Anzahl der Titel in einem Portfolio keinen merklichen Einfluss auf die Eignungsbeurteilung der untersuchten Modelle hat, weshalb jeweils zusammenfassende Darstellungen über sämtliche betrachteten Portfolios präsentiert wurden. Damit wirkt sich die massgebliche Komplexitätssteigerung, die mit dem Übergang von bivariaten zu multivariaten Copulafunktionen einhergeht, erneut nicht auf die Ergebnisse im betrachteten Kontext aus.

Wie bereits in der ersten Untersuchung spielt es zudem im Wesentlichen keine Rolle, ob bei den drei archimedischen Copulafunktionen die Ausprägung mit einem oder mit $N - 1$ Parametern verwendet wird. Damit macht sich die Verwendung der komplexeren Form erneut nicht bezahlt.

Weiter zeigt die Wahl der Schätzmethode bei keiner der untersuchten Copulafunktionen einen nennenswerten Einfluss auf die Ergebnisse des Backtesting. Dies steht im Gegensatz zur vorhergehenden Untersuchung bei der sich die Kimeldorf-Sampson-Copula sensitiv auf das verwendete Schätzverfahren gezeigt hat. Für die Wahl einer Schätzmethode kann damit etwa auf die jeweils benötigten Rechenzeiten abgestützt werden. Da die gewählte Form der Randverteilungen, wie zuvor ausgeführt wurde, weder auf die für die Schätzung der jeweiligen Copulaparameter noch auf die für die Simulation der Copulafunktionen benötigten Rechenzeiten einen Einfluss hat, präsentieren sich letztere für die hier betrachtete Studie gleich wie in Tabelle 13.9. So ist aufgrund dieses Kriteriums den mittels der Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse geschätzten Copulavarianten tendenziell der Vorrang gegenüber denjenigen zu geben, die mit Hilfe der ML-Methode geschätzt werden.

So ist aufgrund dieses Kriteriums denjenigen Copulavarianten, die mittels der Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse geschätzten Varianten tendenziell gegenüber den mit Hilfe der ML-Methode geschätzten der Vorrang zu geben.

Ein Vergleich der Ergebnisse der ersten und der zweiten Untersuchung hat weiter gezeigt, dass gegenüber dem im Rahmen der Monte-Carlo-Simulation standardmässig verwendeten Modell der geometrischen brownischen Bewegung durch die Wahl einer adäquateren Copulafunktion eine vergleichsweise höhere Verbesserung erreicht werden kann als durch den Übergang von normalverteilten zu empirischen Randverteilungen. Dies soll weder suggerieren, dass das Verbesserungspotential der Wahl passender Randverteilungen zu vernachlässigen ist, noch dass der Einsatz empirischer Randverteilungen allgemein als die bestmögliche Wahl zu betrachten ist. Vielmehr zeigt sich hier, dass das Konzept der Copulafunktion für die Zusammenhangsmodellierung im untersuchten Kontext ein durchaus mächtiges Werkzeug darstellt.

Zum Schluss dieses Abschnitts soll das bei der Nelsen-Copula beobachtete und am Ende des Abschnitts 13.3.3 erklärte Phänomen in Erinnerung gerufen werden, dass sowohl die Anzahl Parameter im Modell als auch die Schätzmethode nur in äusserst raren Einzelfällen einen Einfluss auf die VaR-Schätzungen zeigen. Da die zweite Untersuchung die gleichen Tagesrenditen als Datengrundlage verwendet wie die erste und da der Übergang von normalverteilten auf empirische Randverteilungen keinen Einfluss auf die in diesem Zusammenhang relevante geschätzte Rangkorrelationsmatrix von Kendall hat, ist dieses Phänomen erneut zu beobachten. Von einem ökonometrisch-statistischen Gesichtspunkt aus können somit unverändert Vorbehalte gegenüber der Verwendung der Nelsen-Copula geäussert werden. Der Finanzpraktiker dürfte sich aber weiterhin für diese Copulafunktion interessieren, da sich beim Einsatz empirischer Randverteilungen nun gar die Va-

rianten mit und die Varianten ohne Vorzeichenwechsel der Renditen als besonders geeignet herausgestellt haben.

Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen ihres Risikomanagements müssen Banken unter anderem Marktrisiken messen. Die traditionelle Messung dieser Art von Risiko wurde in *Teil I* der vorliegenden Arbeit thematisiert.

In *Kapitel 1* wurde einleitend geklärt, was unter dem Begriff „Risiko“ verstanden werden soll. Anschliessend wurden Arten von finanziellem und statistischem Risiko unterschieden und erörtert. Es wurde ausgeführt, dass im Rahmen der vorliegenden Arbeit ausschliesslich Marktrisiken und dabei speziell Aktienkursrisiken untersucht werden sollten. Weiter wurde dargelegt, dass das Ziel der Arbeit, nämlich die Beurteilung der Eignung von Copulafunktionen im Rahmen der Marktrisikomessung, einer Untersuchung des Modellrisikos von Copulafunktionen entspricht.

In *Kapitel 2* wurde der Value-at-Risk dargestellt. Dieses Risikomass hat Eingang in die für Banken massgeblichen Aufsichtsregeln des Basler Ausschusses gefunden und kann so als Standardrisikomass zur Messung von Marktrisiken betrachtet werden. Es wurde auf alternative Schreibweisen des Value-at-Risk, die Schätzung dieses Risikomasses und das so genannte Backtesting im Rahmen des Value-at-Risk-Konzeptes eingegangen. Am Ende des Kapitels wurden die in den Richtlinien des Basler Ausschusses vorgeschriebenen quantitativen Bestimmungsgrössen für den Value-at-Risk vorgestellt.

Die Schätzung des Value-at-Risk setzt stets Realisierungen einer Verteilung von Kursen oder Renditen der Finanztitel in einem Portfolio voraus. In *Kapitel 3* wurden mit der historischen Simulation und der Monte-Carlo-Simulation zwei vom Basler Ausschuss explizit vorgesehene Verfahren zur Generierung von Realisierungen solcher Verteilungen präsentiert und gewürdigt. Es wurde ausgeführt, dass das im Rahmen der Monte-Carlo-Methode standardmässig verwendete Modell der geometrischen brownischen Bewegung von der Annahme multivariat normalverteilter Renditen der Vermögenswerte in einem Portfolio ausgeht. Diese Annahme schreibt zwingend vor, dass der Zusammenhang zwischen den Renditen

der betrachteten Vermögenswerte über die Varianz-Kovarianz- beziehungsweise die Korrelationsmatrix modelliert wird.

In *Teil II* dieser Arbeit wurde auf die Messung von Marktrisiken unter Verwendung von Copulafunktionen eingegangen.

In *Kapitel 4* wurden kurz Vor- und Nachteile der Kovarianz beziehungsweise der Korrelation aufgezeigt und es wurde auf mögliche Fehlschlüsse im Umgang mit diesen Zusammenhangsmassen hingewiesen. Diese Fehlschlüsse sind besonders für die Risikomessung problematisch, da sie zu inadäquaten Risikoschätzungen führen können. Damit muss die standardmässig vorgenommene Modellierung des Zusammenhangs von Renditen mittels der Varianz-Kovarianz- beziehungsweise der Korrelationsmatrix im Rahmen der Monte-Carlo-Methode als kritisch beurteilt werden.

In *Kapitel 5* wurde mit dem Konzept der Copulafunktion ein Ansatz zur Zusammenhangsmodellierung vorgestellt, der das Umgehen der Probleme von Kovarianz und Korrelation ermöglicht. Mit dem Satz von Sklar folgte die Präsentation des für die Anwendung des Copulakonzpts in der vorliegenden Arbeit zentralen Satzes. Weiter wurden die wesentlichen Eigenschaften von Copulafunktionen besprochen. Im abschliessenden Abschnitt dieses Kapitels wurde das Konzept der bivariaten Copulafunktion auf den multivariaten Fall verallgemeinert.

In *Kapitel 6* wurden verschiedene so genannte copulabasierte Zusammenhangsmasse dargestellt. So wurde mit Hilfe der Fréchet-Hoeffding-Unter- und -Obergrenze das Konzept der Ko- und Kontramonotonie eingeführt. Mit der Randabhängigkeit wurde weiter ein Mass präsentiert, das Aussagen über den paarweisen Zusammenhang von Extremwerten der zugrunde liegenden Verteilungen zulässt. Ferner wurden mit der Rangkorrelation von Kendall und der Rangkorrelation von Spearman zwei Konkordanzmasse eingeführt, die im Hinblick auf die in *Kapitel 7* präsentierte Schätzmethode der copulabasierten Zusammenhangsmasse von besonderem Interesse sind. Dieses parametrische Schätzverfahren greift grundsätzlich die Idee der Momentenmethode auf. Da im Fall von Copulafunktionen die Bestimmung von Momenten jedoch problematisch sein kann, werden diese hier durch copulabasierte Zusammenhangsmasse ersetzt.

Als weitere parametrische Schätzmethode wurde die Maximum-Likelihood-Methode betrachtet. Dabei wurden die exakte Maximum-Likelihood-Methode und die Methode der Inferenzfunktionen für Randverteilungen unterschieden. Bei der ersteren werden die Parameter der Randverteilungen und die Copulaparameter simultan, bei der letzteren in zwei aufeinander folgenden Etappen geschätzt. Mit der kanonischen Maximum-Likelihood-Methode wurde schliesslich ein semiparametrisches Schätzverfahren eingeführt, bei dem die Modellparameter ebenfalls in zwei Schritten geschätzt werden. Im Gegensatz zur Methode der

Inferenzfunktionen für Randverteilungen werden für die univariaten Randverteilungen hier jedoch keine parametrischen Funktionen vorgegeben, sondern die Randverteilungen werden nichtparametrisch mittels der empirischen Verteilung geschätzt.

Kapitel 8 befasste sich mit einer allgemein gültigen Methode zur Erzeugung von Realisierungen einer Copula. Da für viele Copulafunktionen dem jeweiligen Einzelfall angepasste Algorithmen existieren, wurden in *Kapitel 9*, in dem verschiedene parametrische Copulafamilien eingeführt wurden, immer auch adäquate Algorithmen zur Zufallszahlengenerierung vorgestellt. Mit der Normal- und der t -Copula wurden zunächst die beiden wichtigsten Vertreter der elliptischen Copulafamilie präsentiert. Weiter folgte die Darstellung der Farlie-Gumbel-Morgenstern- sowie der archimedischen Copulafamilie. Aus der Vielfalt der Copulafunktionen der letztgenannten Familie wurden die Gumbel-, die Kimeldorf-Sampson- und die so genannte Nelsen-Copula ausgewählt. Für sämtliche untersuchten Copulafunktionen wurde nebst der Simulation jeweils die Schätzung thematisiert, es wurden copulabasierte Zusammenhangsmasse betrachtet sowie im Hinblick auf die empirische Studie Hinweise zur konkreten Umsetzung gegeben.

In *Kapitel 10*, das diesen zweiten Teil beschliesst, wurde aufgezeigt, wie Copulafunktionen im Rahmen der Monte-Carlo-Simulation zur Zusammenhangsmodellierung der Renditen von Vermögenswerten eingesetzt werden können. Dadurch wird eine Flexibilisierung der Monte-Carlo-Methode gegenüber ihrer im Rahmen der Marktrisikomessung klassischerweise eingesetzten Form erreicht. Dies wiederum eröffnet die Möglichkeit, die Besonderheiten von beobachteten Renditeverteilungen adäquater zu modellieren, als dies die vom standardmässig verwendeten Modell der geometrischen brownischen Bewegung implizierte multivariate Normalverteilung zulässt.

Im abschliessenden Teil der Arbeit, *Teil III*, wurden die Ergebnisse der empirischen Studie für den Schweizer Aktienmarkt präsentiert.

Als Datengrundlage dienten die Tagesschlusskurse der Jahre 1999 bis 2001 von 24 im Swiss Market Index gelisteten Aktien, die durch zufällige Kombination zu Portfolios verschiedener Grösse zusammengestellt wurden. In *Kapitel 11* wurde zunächst ein Überblick über die Entwicklung des Schweizer Aktienmarktes in diesem Zeitraum gegeben. Im Anschluss wurden zwei statistische Tests zur Überprüfung der Annahme unabhängiger und identisch verteilter Tagesrenditen eingeführt, auf der die Methoden zur Schätzung von Copulafunktionen im Wesentlichen beruhen. Die Durchführung dieser statistischen Tests hat gezeigt, dass diese Annahme für die meisten der untersuchten Schweizer Aktien im betrachteten Zeitraum nicht verworfen werden musste.

Da das Modellrisiko von Copulafunktionen nicht direkt beziffert werden kann,

wurden in *Kapitel 12* entsprechende Backtestingkriterien zur Abschätzung dieser Art von Risiko bei Value-at-Risk-Schätzungen dargestellt. Hierbei wurde insbesondere das aufsichtliche Rahmenkonzept für Backtesting des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht besprochen. Das dort eingeführte Ampelkonzept kann als das für die Bankpraxis bedeutsamste Backtestingkriterium betrachtet werden. Weiter wurden der χ^2 - und der Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstest vorgestellt.

In *Kapitel 13* wurden schliesslich die Ergebnisse der empirischen Studie präsentiert. Es wurden 24 Copulavarianten und das Modell der historischen Simulation untersucht. Insgesamt wurden 130 unterschiedlich zusammengesetzte und unterschiedlich umfangreiche Portfolios betrachtet. Zunächst wurde mit Hilfe des χ^2 - und des Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstests die Normalverteiltetheit der Portfoliorenditen überprüft. Diese vom im Rahmen der Monte-Carlo-Simulation standardmässig verwendeten Modell der geometrischen brownischen Bewegung implizierte Annahme wurde als in höchstem Masse zweifelhaft ausgewiesen.

In der Folge wurden zwei Untersuchungen durchgeführt, wobei jeweils die vom Basler Ausschuss für Bankenaufsicht vorgeschriebenen quantitativen Vorgaben angewendet wurden. In der ersten Untersuchung wurden die Renditeverteilungen der einzelnen Aktien in einem Portfolio als normalverteilt angenommen. Damit konnte im Rahmen der Monte-Carlo-Simulation der Effekt isoliert ausgewiesen werden, der auf den Einsatz von zur Normal-Copula alternativen Copulafunktionen zurückzuführen ist. Die Normal-Copula ist diejenige Zusammenhangsstruktur, die bei Verwendung der geometrischen brownischen Bewegung unterstellt wird. Sie wurde in beiden Untersuchungen jeweils als Referenzmodell betrachtet.

Für die Zusammenhangsmodellierung von Renditen erwiesen sich in der ersten Untersuchung jene Copulafunktionen als besonders geeignet, die asymmetrisches Randverhalten aufweisen und inhärente oder mittels Vorzeichenwechsel der Renditen konstruierte asymptotische untere Randabhängigkeit implizieren. Besonders hervorzuheben sind die Varianten der Nelsen-Copula ohne Vorzeichenwechsel der Renditen. Sie schnitten klar besser ab als die Normal-Copula und stellten sich als einzige Copulavarianten auch gegenüber der in der Praxis häufig verwendeten historischen Simulation als überlegen heraus.

Eine anschliessende Überprüfung der Annahme normalverteilter Einzelrenditen erhärtete, was bereits aus mehreren anderen Studien bekannt ist, nämlich dass die Normalverteilung nur eine unzureichende Näherung für empirische Renditeverteilungen darstellt. Deshalb wurde in der zweiten Untersuchung mit empirischen Randverteilungen gearbeitet.

Wie schon in der ersten Untersuchung erwiesen sich für die Zusammenhangsmodellierung von Renditen jene Copulafunktionen als besonders geeignet, die asymmetrisches Randverhalten aufweisen und über untere Randabhängigkeit verfügen.

Als am geeignetsten wurde erneut die Nelsen-Copula ausgewiesen. Im Unterschied zur ersten Untersuchung waren nicht mehr nur die Varianten ohne Vorzeichenwechsel der Renditen, sondern neu auch jene mit invertierten Renditen ganz vorne in der Eignungsrangfolge der untersuchten Modelle zu finden. Überdies hat sich gezeigt, dass sämtliche Copulavarianten beim Einsatz empirischer Randverteilungen besser abschnitten als bei Verwendung normalverteilter Randverteilungen. Da dieser Austausch der Randverteilungen im Gegenzug keinen Einfluss auf die historische Simulation hat, wurde diese in der zweiten Untersuchung vergleichsweise schlechter eingestuft als in der ersten. Damit schnitten in der zweiten Untersuchung nebst sämtlichen betrachteten Varianten der Nelsen-Copula auch jene der Kimeldorf-Sampson-Copula und jene der Gumbel-Copula mit invertierten Renditen besser ab als die Normal-Copula und die historische Simulation.

Eine weitergehende Untersuchung hat für die Nelsen-Copula gezeigt, dass bei der Schätzung ihrer Parameter Kompromisse eingegangen werden mussten, die aus einem ökonometrisch-statistischen Blickwinkel kritisiert werden können. Da die Nelsen-Copula aber nicht nur bezüglich der Auswertung der Backtestingkriterien am besten abschnitt, sondern auch von sämtlichen untersuchten Copulafunktionen am wenigsten rechenintensiv ist und ihre Anwendung im Gegensatz zu den übrigen archimedischen Copulafunktionen nicht auf Portfolios mit verhältnismässig wenig Titeln beschränkt bleibt, dürfte diese Copulafunktion für die praktische Anwendung bei der Messung von Marktrisiken dennoch interessant sein. Eine tiefer greifende Untersuchung des guten Abschneidens der Nelsen-Copula trotz des genannten Vorbehaltes wäre jedoch sicherlich von Interesse.

Nachfolgend soll ein Ausblick auf weitere Forschungsfragen gegeben werden. In dieser Arbeit wurden stets die vom Basler Ausschuss für Bankenaufsicht vorgeschriebenen quantitativen Vorgaben angewendet. Interessant wäre demnach die Überprüfung, inwieweit die Verwendung alternativer quantitativer Bestimmungsgrössen einen Einfluss auf die Eignungsbeurteilung der untersuchten Copulafunktionen zeigt. Da sich die Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse zur Schätzung von Copulaparametern in der empirischen Studie als vielversprechend erwiesen hat, wäre weiter die Untersuchung der Schätzqualitäten dieses Verfahrens von Interesse. Ausserdem wäre die Anwendung von Copulafunktionen bei der Messung von anderen finanziellen Risiken wie etwa von Kreditrisiken interessant.

Aus den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit lässt sich das Fazit ziehen, dass das Konzept der Copulafunktion für die Zusammenhangsmodellierung der Renditen von Aktien ein durchaus mächtiges Werkzeug darstellt und massgeblich zur Verbesserung der Messung von Marktrisiken beitragen kann. Dies wird insbesondere durch die in der empirischen Studie gewonnene Erkenntnis unterstrichen, wonach durch die Wahl einer adäquaten Copulafunktion eine vergleichsweise höhere Ver-

besserung erreicht werden kann als durch den Übergang von normalverteilten zu empirischen Randverteilungen.

Anhang

Anhang A

Nach der Portfoliogrösse differenzierte Abbildungen

Die in Kapitel 13 wiedergegebenen Abbildungen umfassen für alle betrachteten Modelle jeweils sämtliche untersuchten Portfolios. Damit werden die Ergebnisse nicht differenziert nach der Anzahl Titel in einem Portfolio ausgewiesen. Eine solche Zusammenfassung ist zweckmässig, da sich die Resultate für die abweichenden Portfoliogrössen jeweils analog präsentieren. Durch diese Darstellungsweise werden aber gewisse Details kaschiert. So ist etwa die Besonderheit der Nelsen-Copula, dass sowohl die Anzahl Parameter im Modell als auch die verwendete Schätzmethode kaum je einen Einfluss zeigen, nicht zu erkennen. Aus diesem Grund werden im Anschluss für einzelne Kriterien die nach der Portfoliogrösse differenzierten Abbildungen angegeben. Damit repräsentieren nachfolgend sämtliche Box-Plots in einer Abbildung die gleiche Anzahl Daten. Gemäss den Angaben in Tabelle 13.1 gilt aber weiterhin, dass nicht für jede Portfoliogrösse die gleiche Anzahl Portfolios untersucht wird.

Sämtliche anschliessend angegebenen Graphiken basieren auf der Verwendung normalverteilter Randverteilungen. Die jeweils korrespondierenden Graphiken, die sich beim Einsatz empirischer Randverteilungen ergeben, können in der Datei `abbildungen.pdf` eingesehen werden. Diese ist auf der beigelegten CD zu finden.

Mittlere relative Abweichung

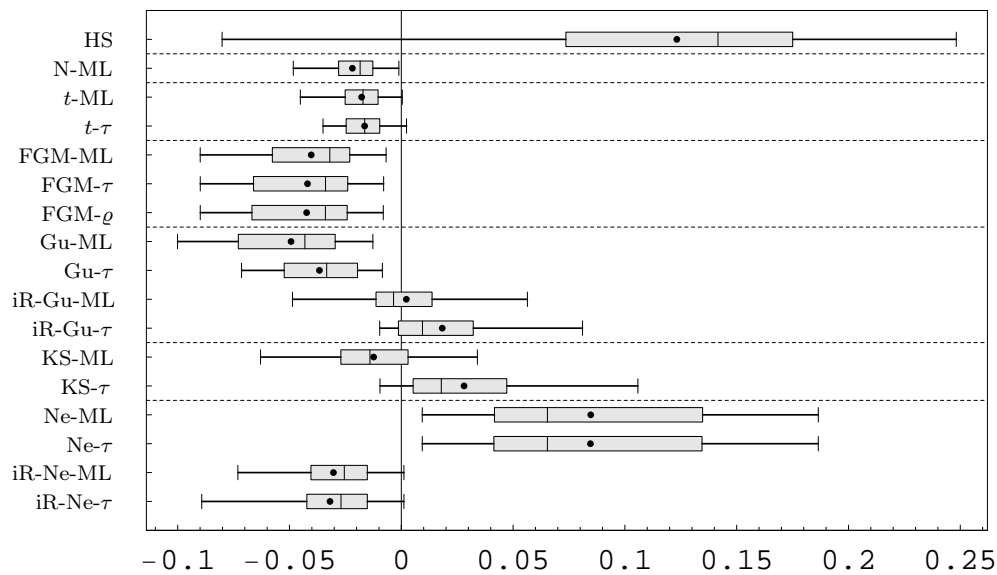


Abbildung A.1: Mittlere relative Abweichungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit zwei Aktien.

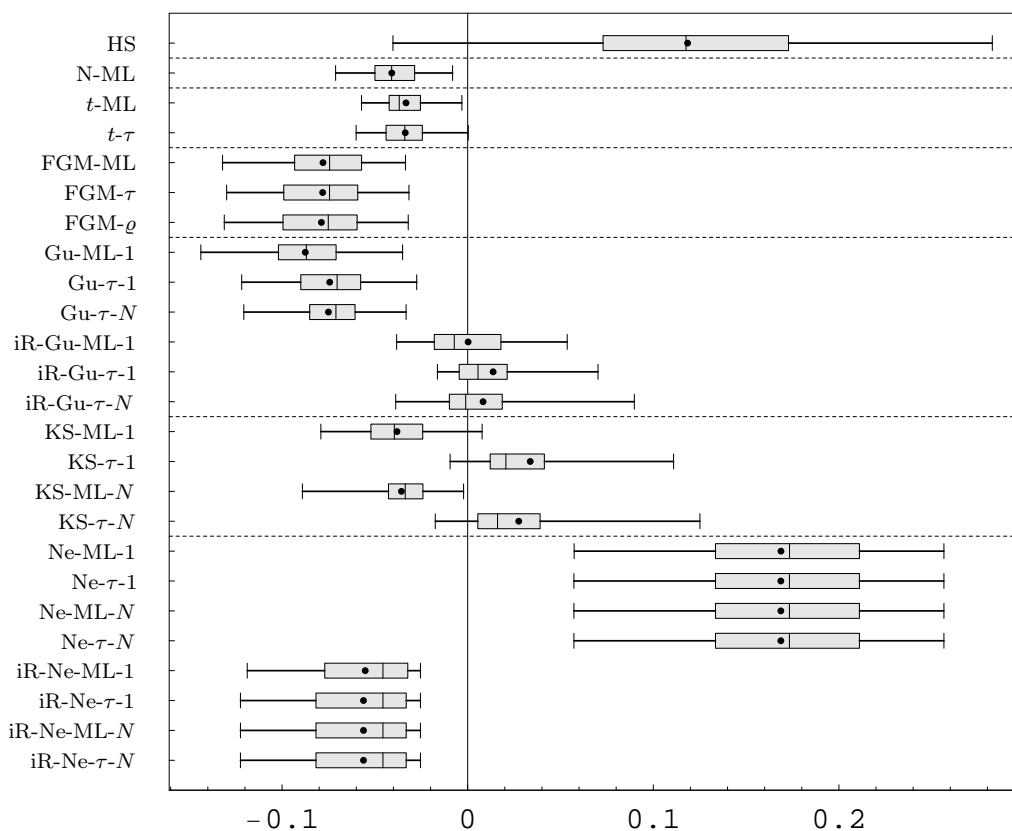


Abbildung A.2: Mittlere relative Abweichungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit drei Aktien.

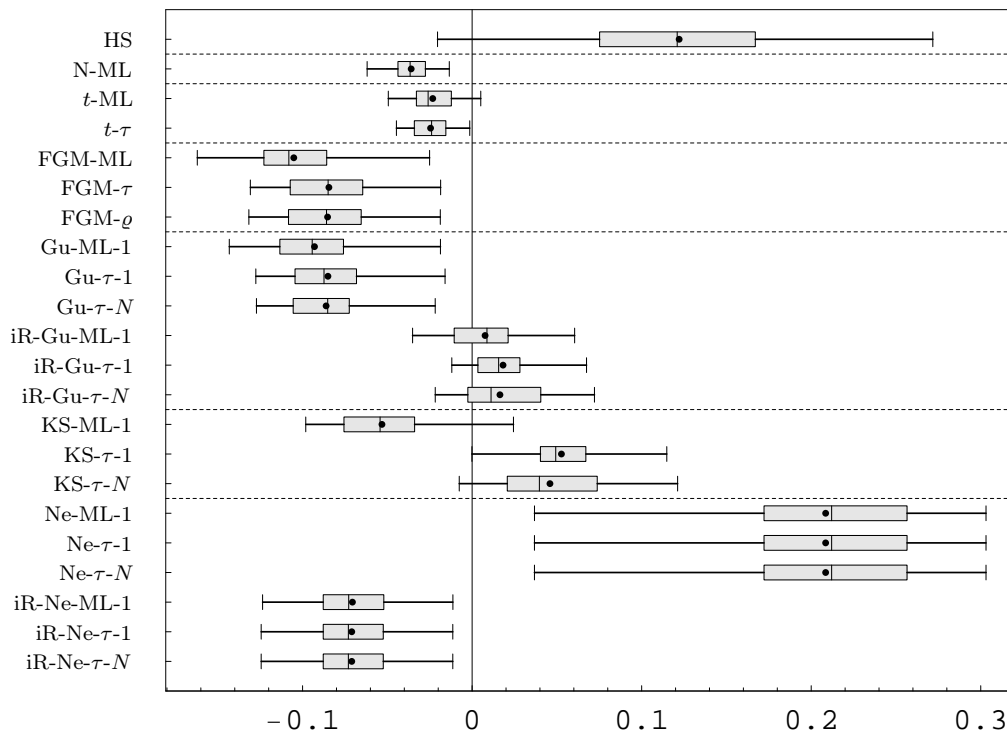


Abbildung A.3: Mittlere relative Abweichungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit vier Aktien.

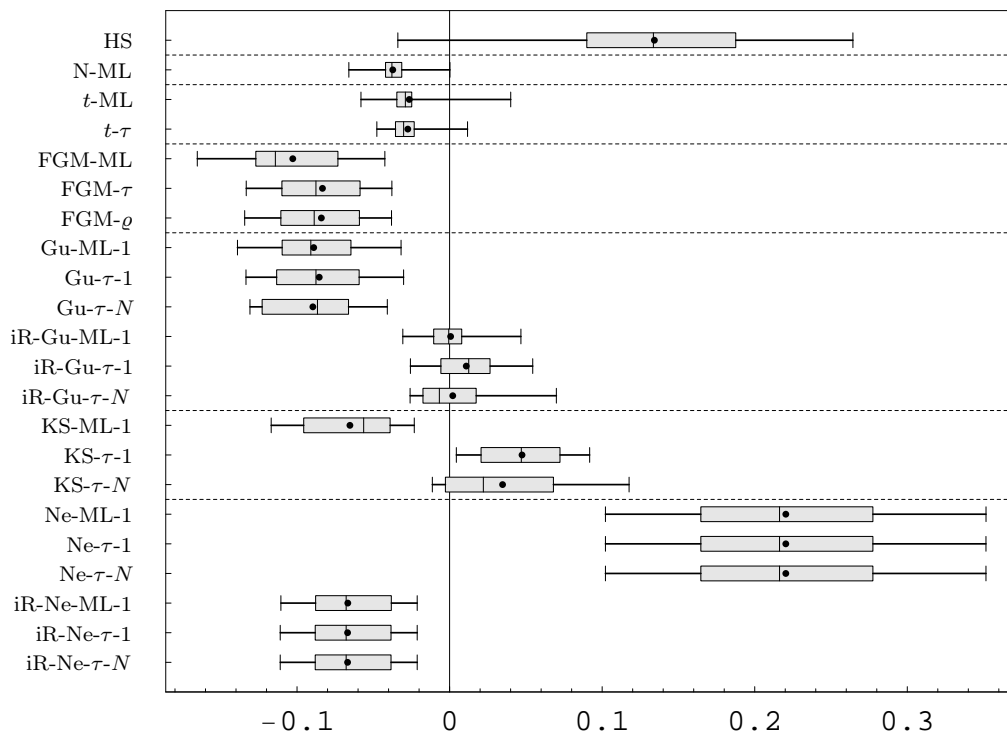


Abbildung A.4: Mittlere relative Abweichungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit fünf Aktien.

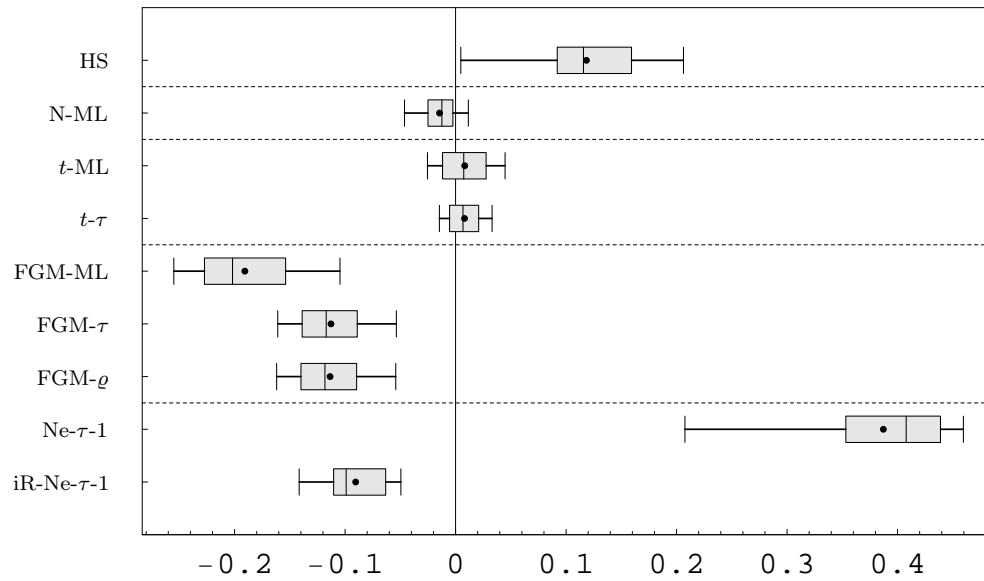


Abbildung A.5: Mittlere relative Abweichungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit zehn Aktien.

Anzahl Überschreitungen

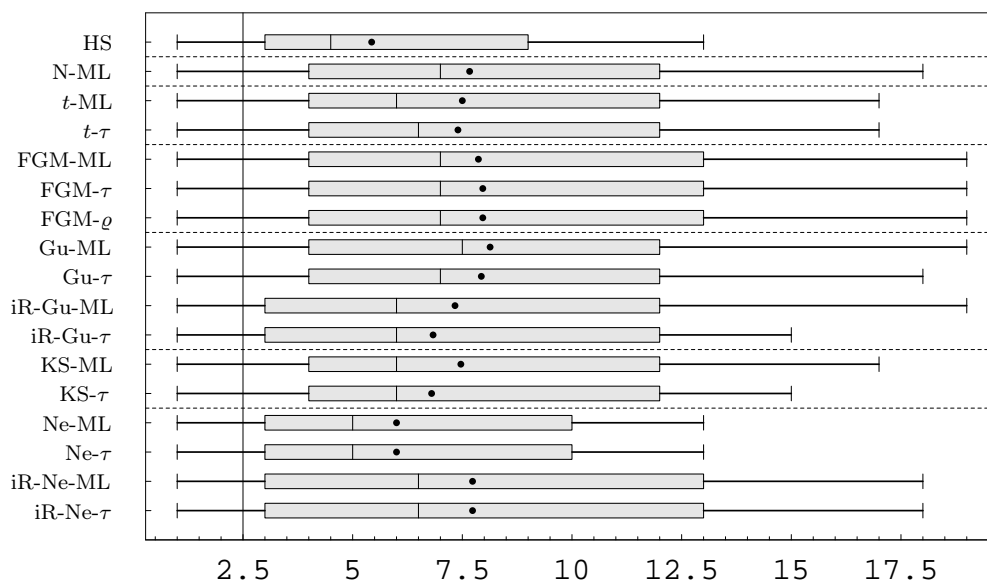


Abbildung A.6: Anzahl Überschreitungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit zwei Aktien.

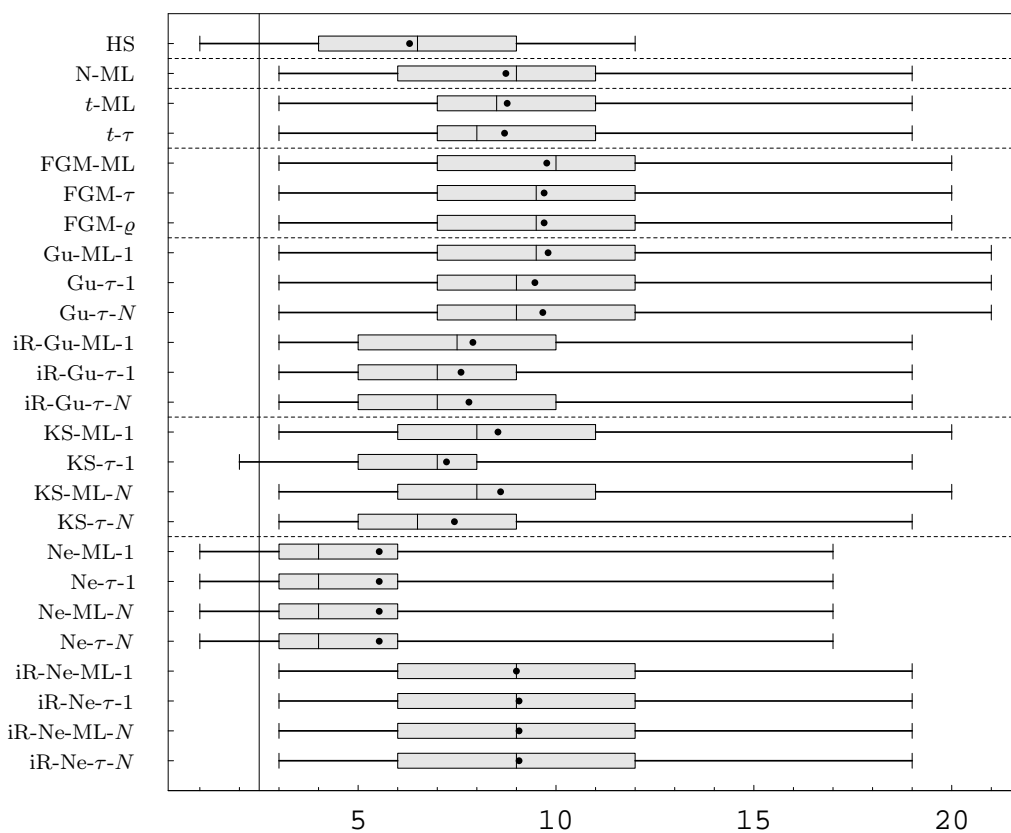


Abbildung A.7: Anzahl Überschreitungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit drei Aktien.

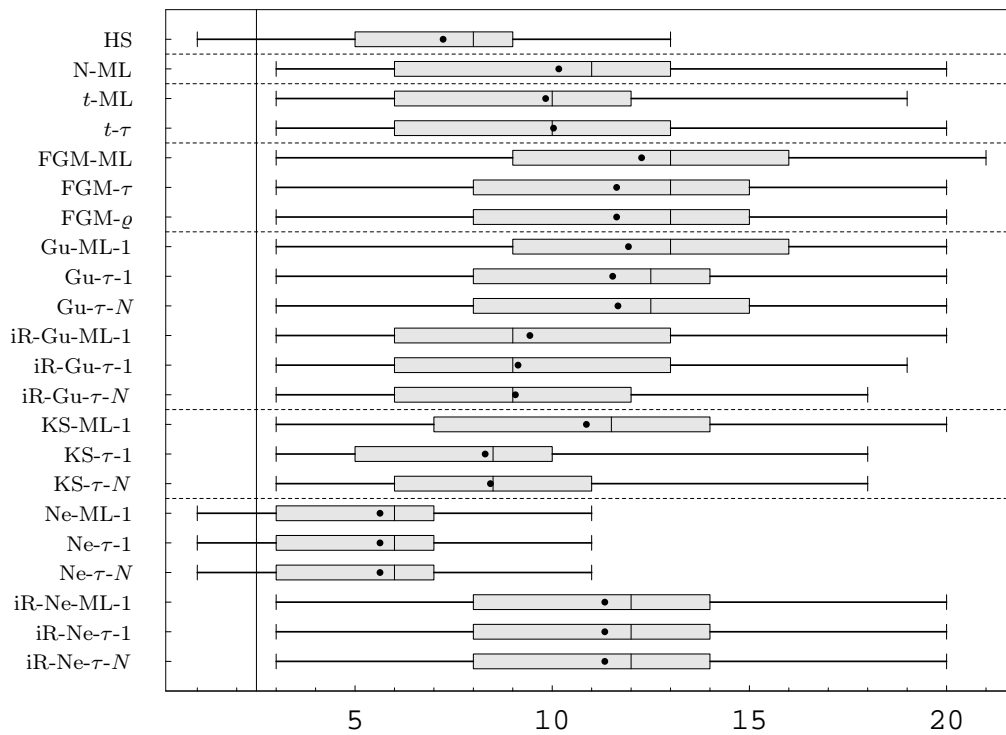


Abbildung A.8: Anzahl Überschreitungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit vier Aktien.

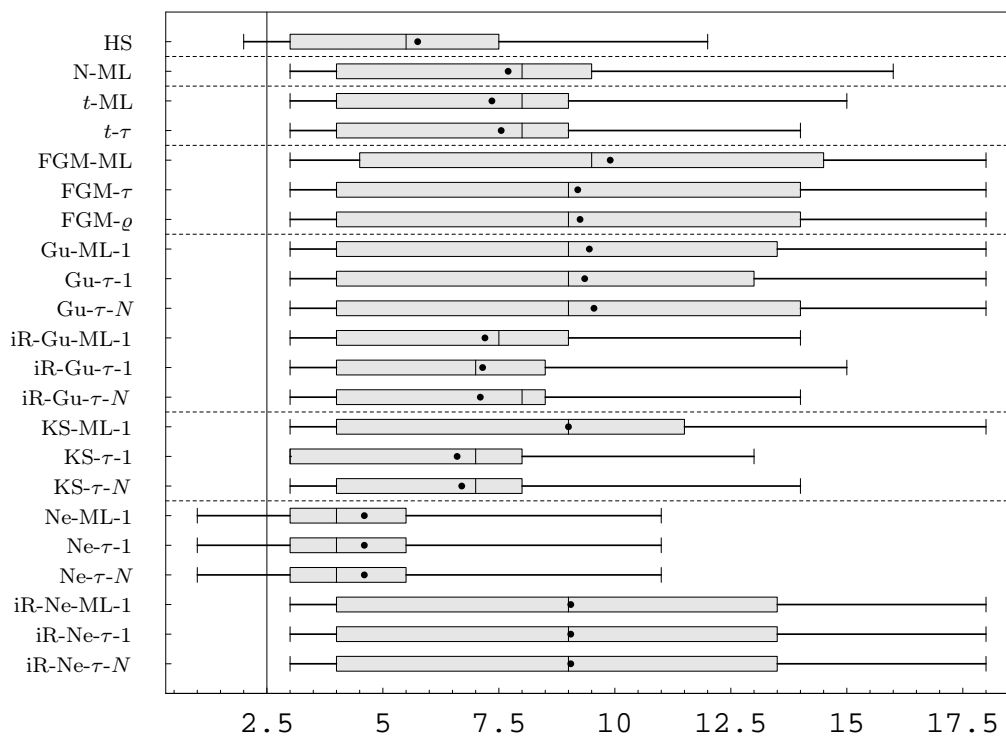


Abbildung A.9: Anzahl Überschreitungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit fünf Aktien.

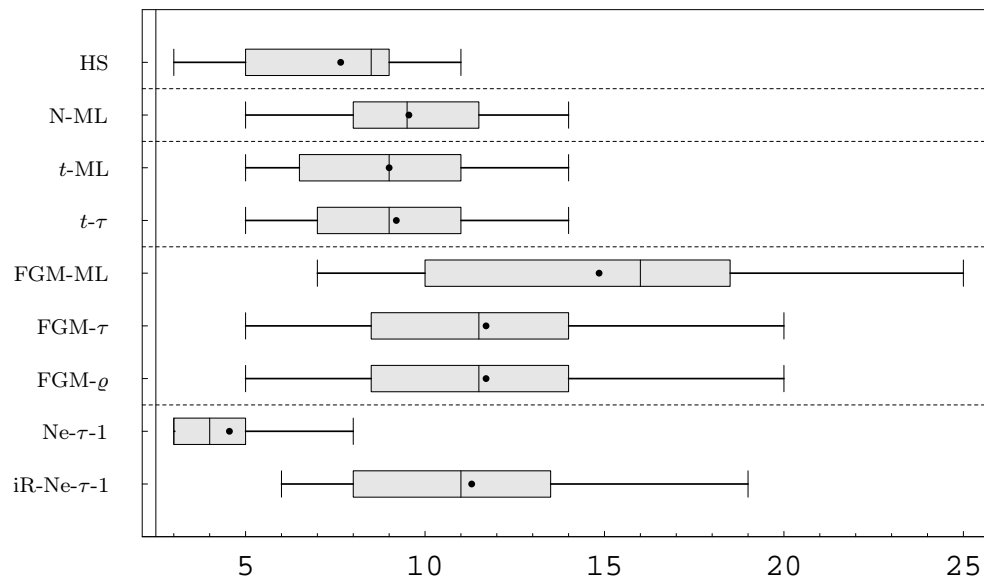


Abbildung A.10: Anzahl Überschreitungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit zehn Aktien.

Multiplikator zur Erreichung von genau $\alpha \cdot 100\%$ Überschreitungen

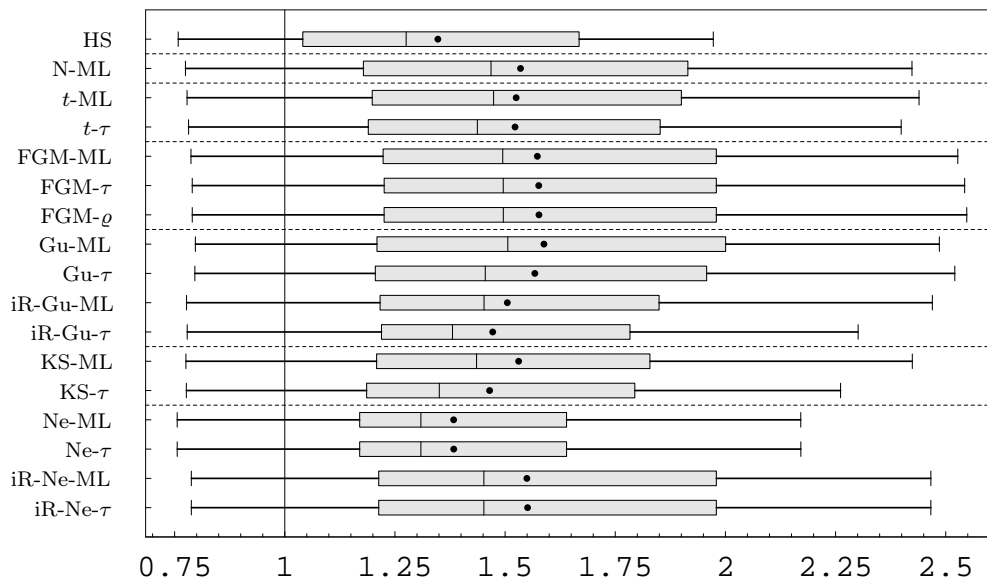


Abbildung A.11: Multiplikatoren zur Erreichung von $\alpha \cdot 100\%$ Überschreitungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit zwei Aktien.

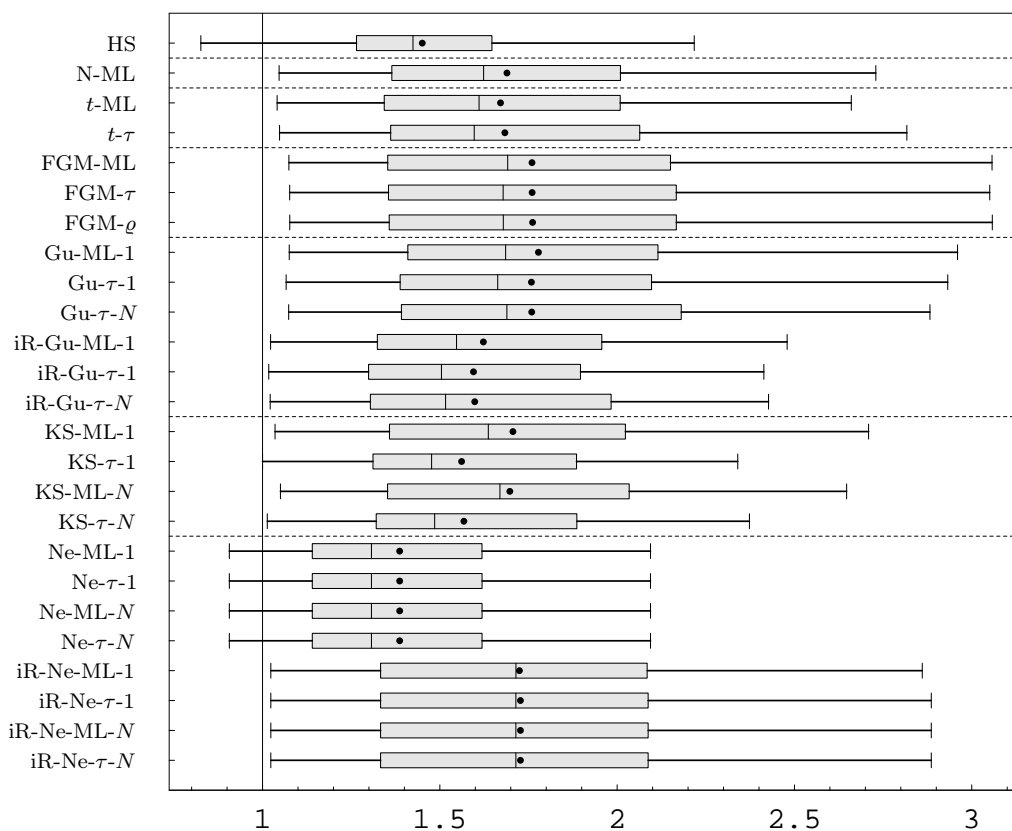


Abbildung A.12: Multiplikatoren zur Erreichung von $\alpha \cdot 100\%$ Überschreitungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit drei Aktien.

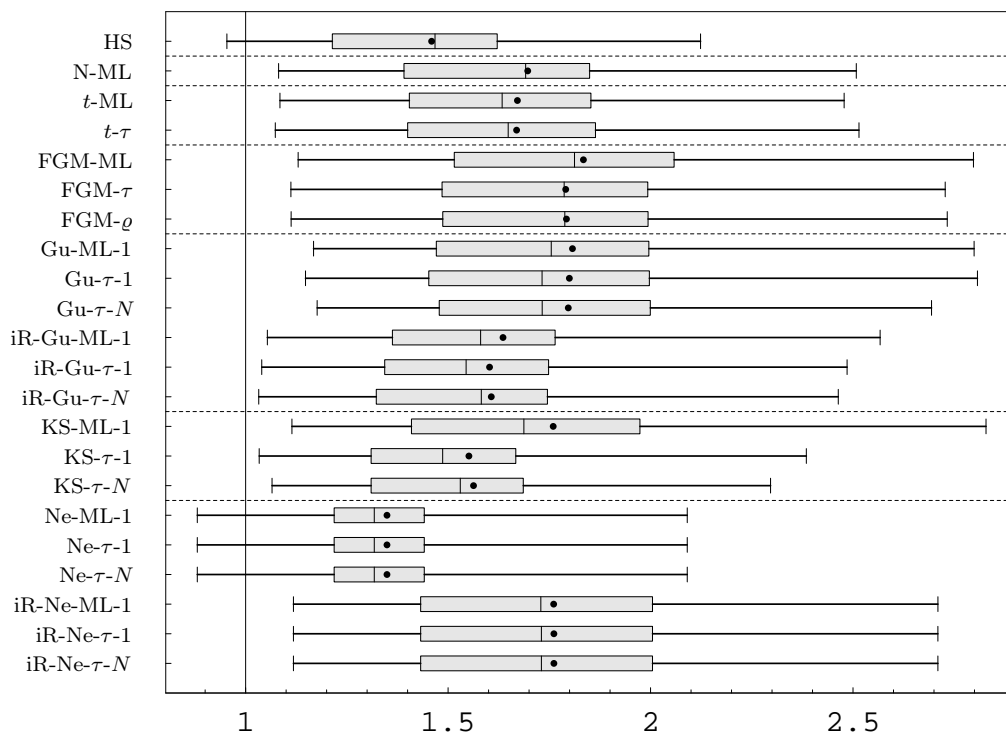


Abbildung A.13: Multiplikatoren zur Erreichung von $\alpha \cdot 100\%$ Überschreitungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit vier Aktien.

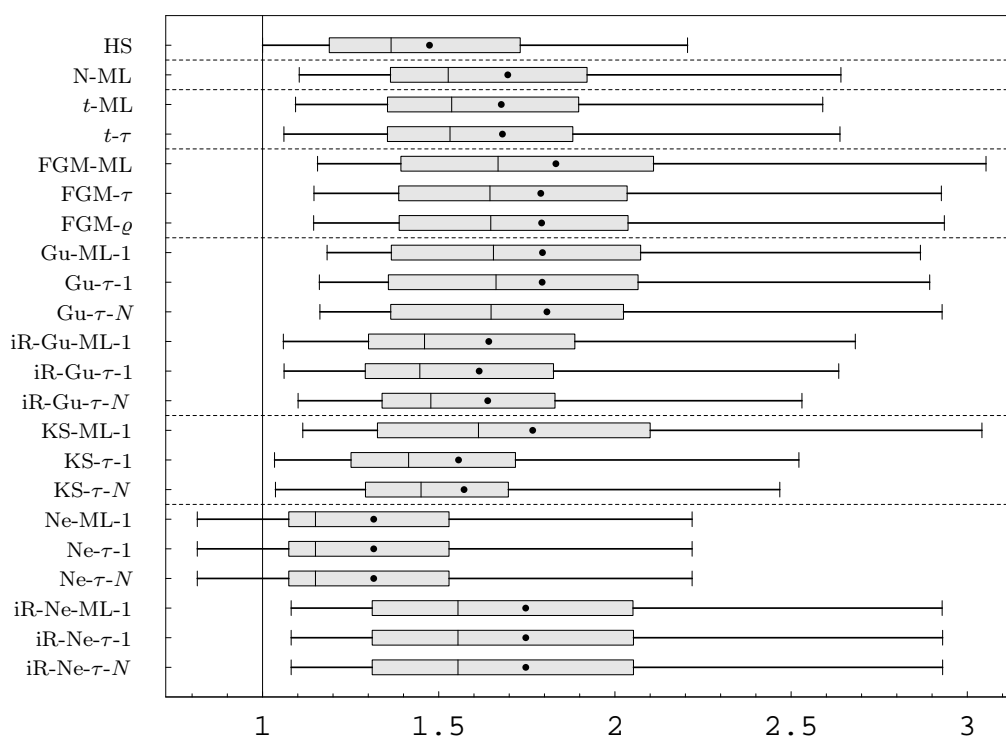


Abbildung A.14: Multiplikatoren zur Erreichung von $\alpha \cdot 100\%$ Überschreitungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit fünf Aktien.

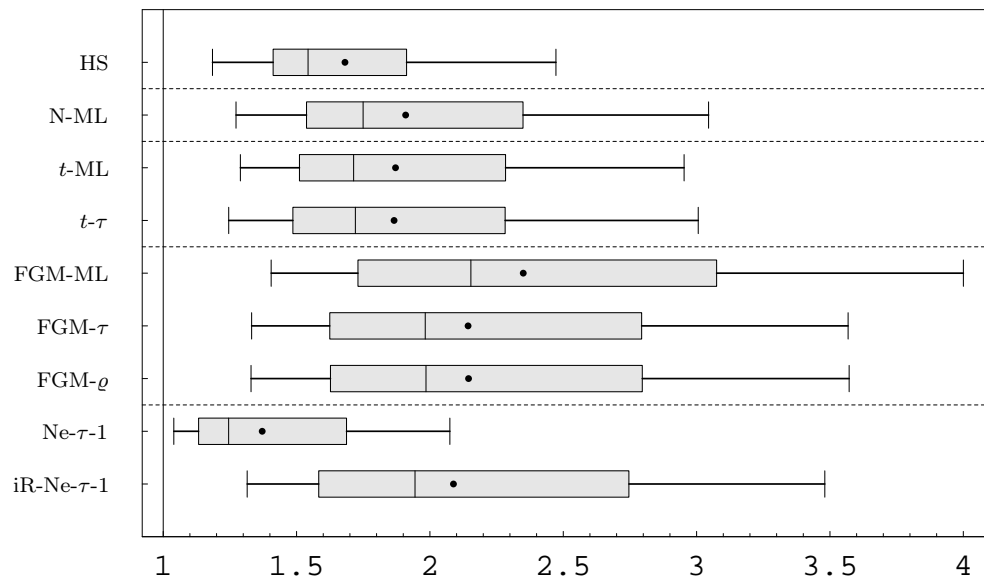


Abbildung A.15: Multiplikatoren zur Erreichung von $\alpha \cdot 100\%$ Überschreitungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit zehn Aktien.

Mittlere relative Abweichung skaliertter VaR-Schätzungen

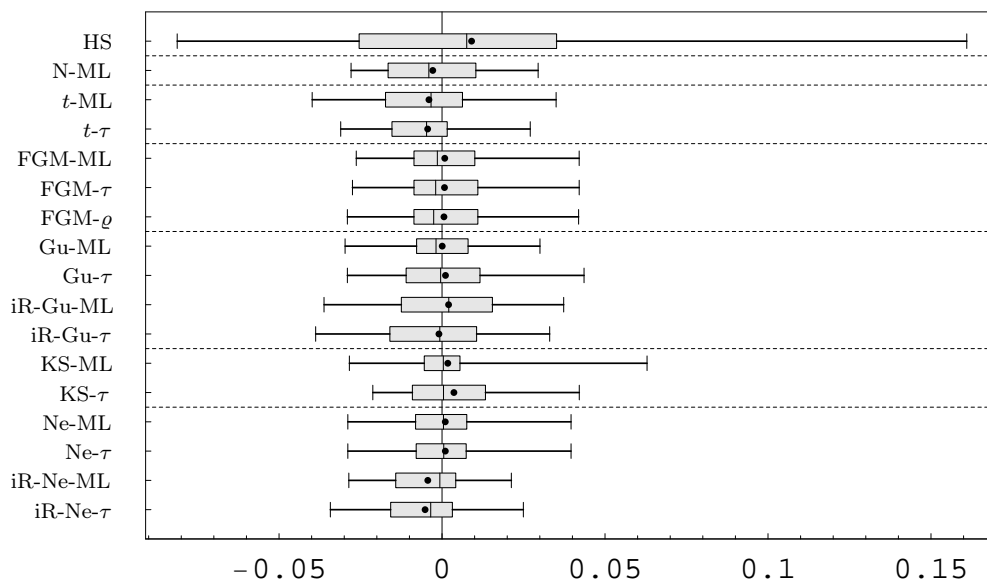


Abbildung A.16: Mittlere relative Abweichungen skaliertter VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit zwei Aktien.

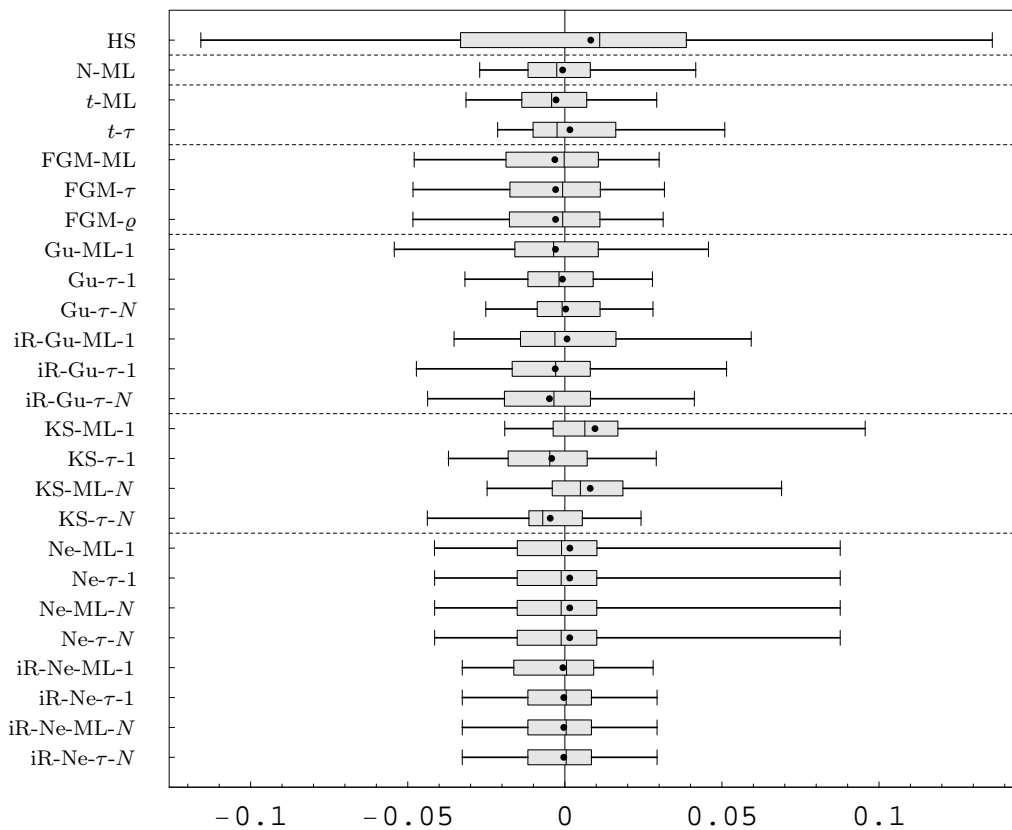


Abbildung A.17: Mittlere relative Abweichungen skaliertter VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit drei Aktien.

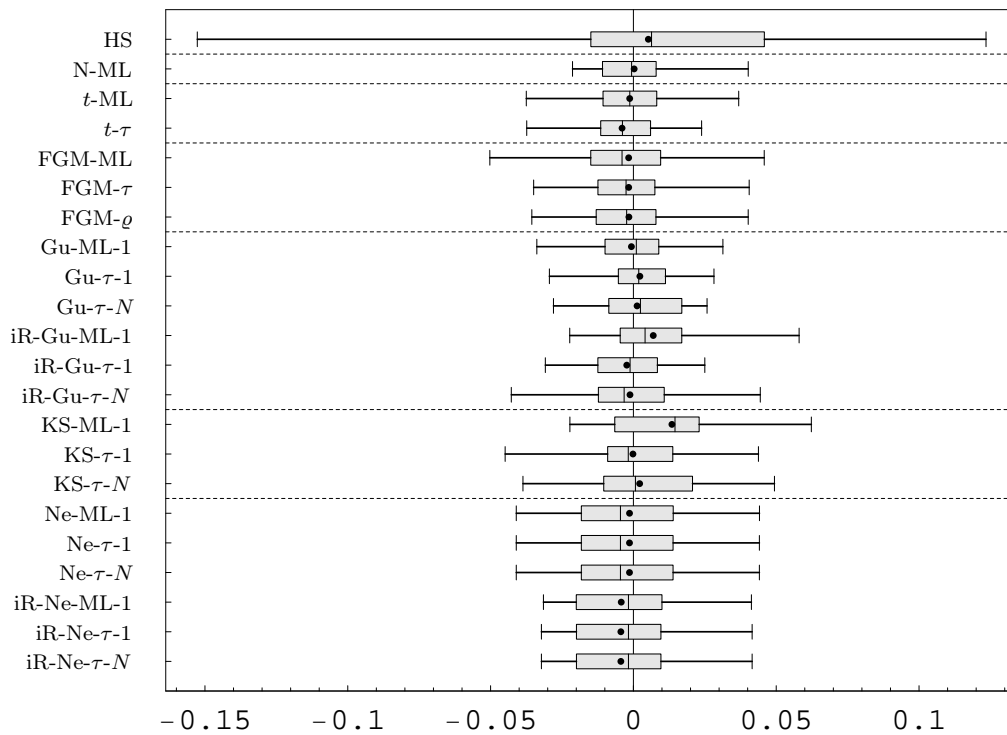


Abbildung A.18: Mittlere relative Abweichungen skaliertter VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit vier Aktien.

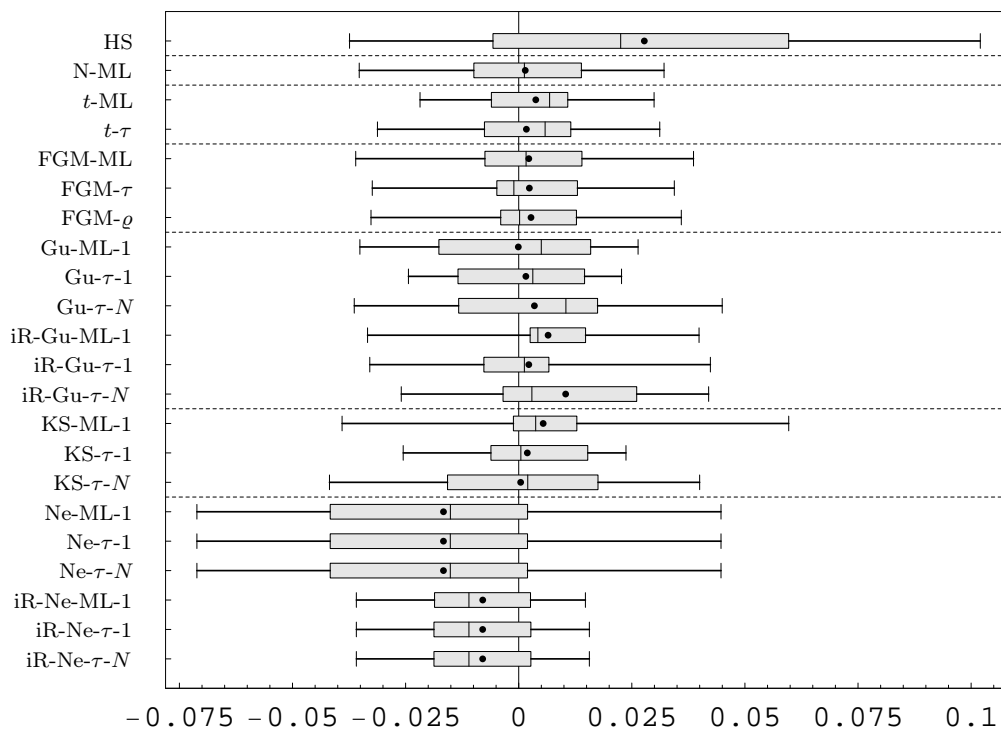


Abbildung A.19: Mittlere relative Abweichungen skaliertter VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit fünf Aktien.

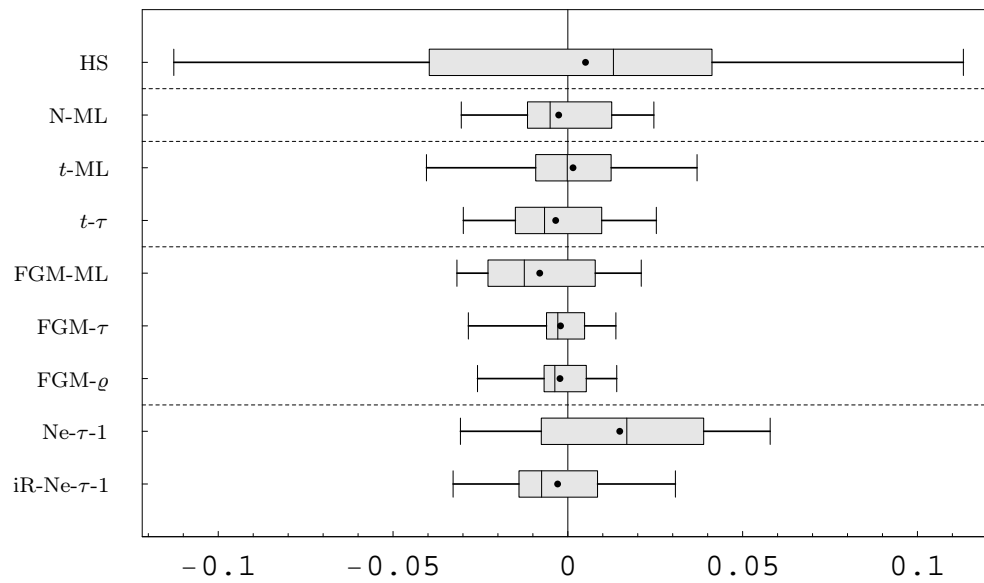


Abbildung A.20: Mittlere relative Abweichungen skaliertter VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit zehn Aktien.

Mittlerer Überschreitungsverlust relativ zum VaR

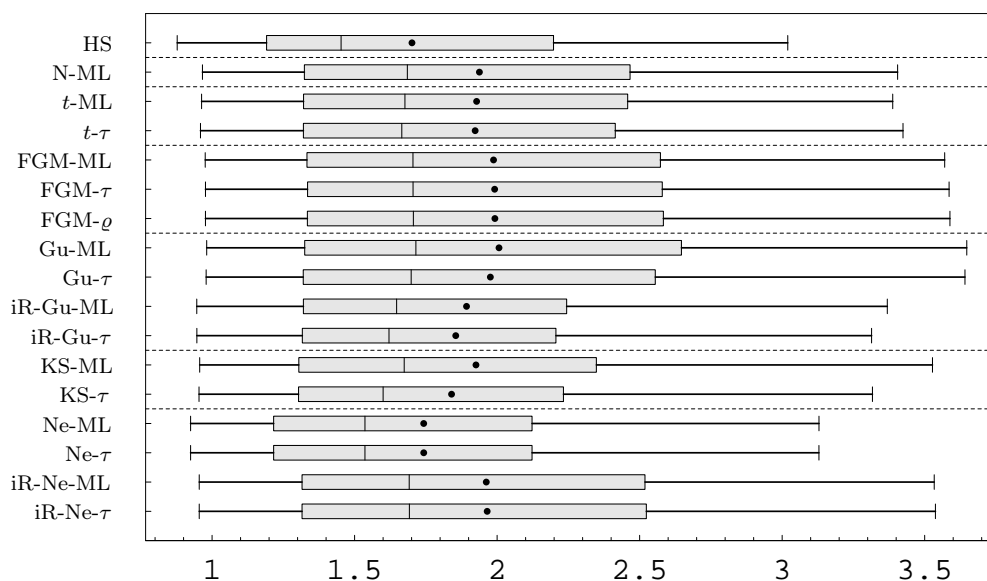


Abbildung A.21: Mittlere Überschreitungsverluste relativ zu den VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit zwei Aktien.

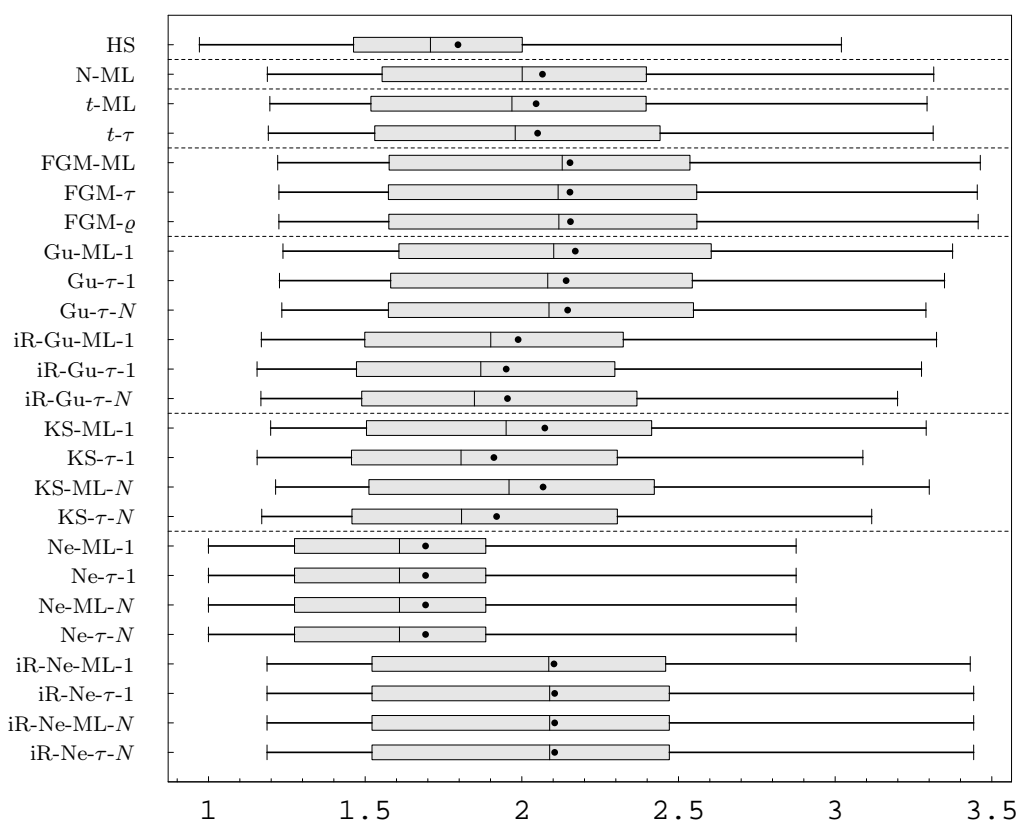


Abbildung A.22: Mittlere Überschreitungsverluste relativ zu den VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit drei Aktien.

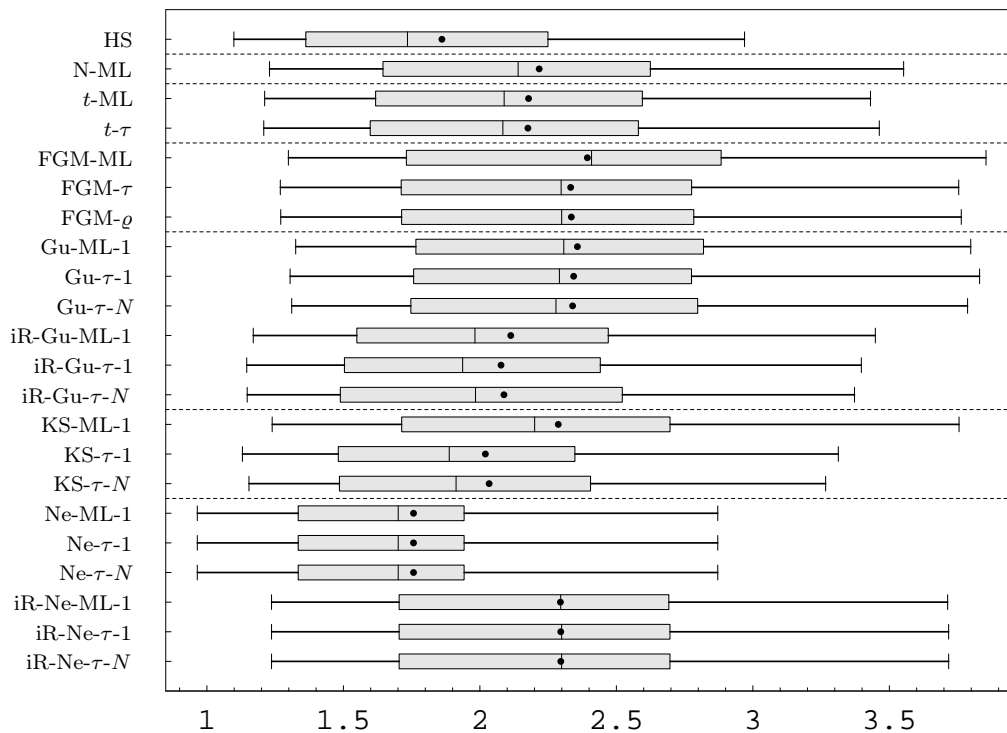


Abbildung A.23: Mittlere Überschreitungsverluste relativ zu den VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit vier Aktien.

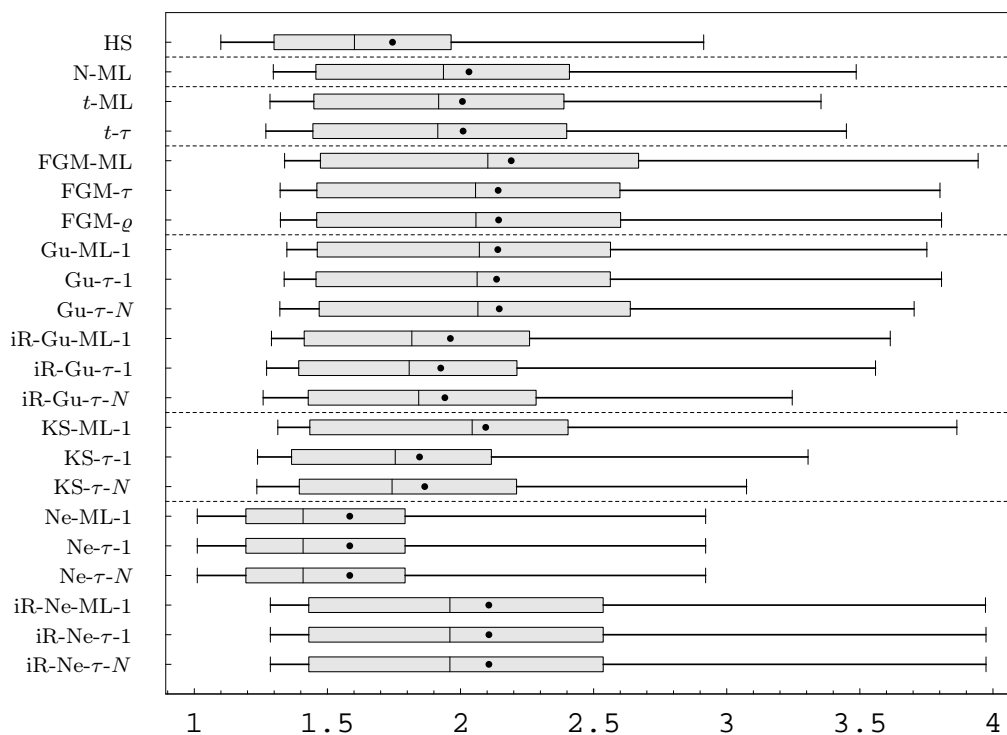


Abbildung A.24: Mittlere Überschreitungsverluste relativ zu den VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit fünf Aktien.

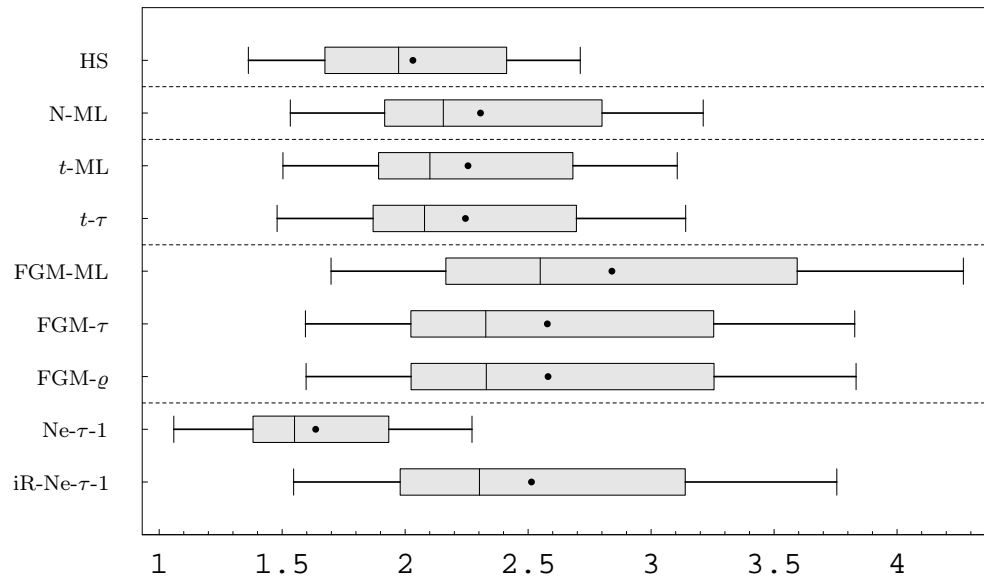


Abbildung A.25: Mittlere Überschreitungsverluste relativ zu den VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit zehn Aktien.

Maximaler Überschreitungsverlust relativ zum VaR

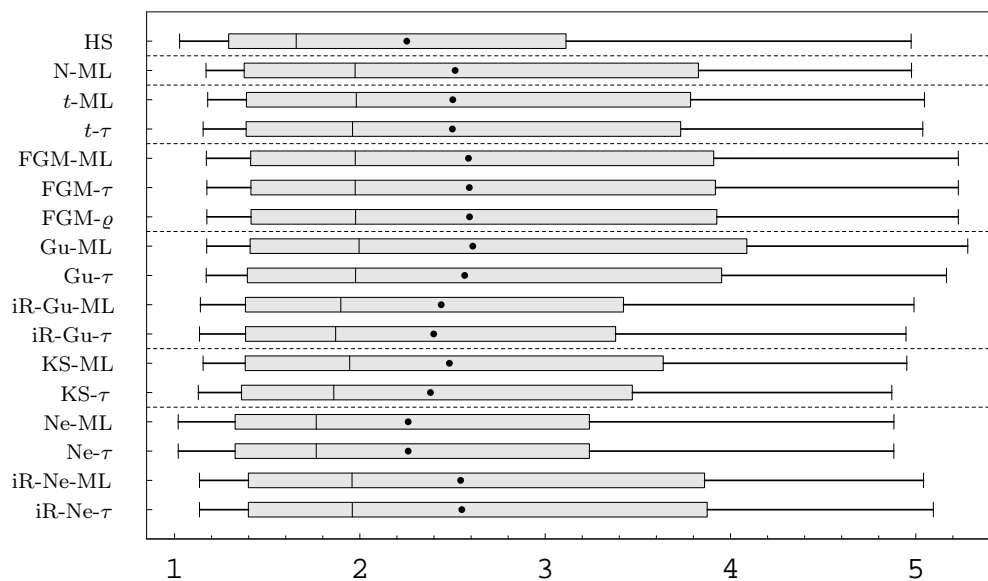


Abbildung A.26: Maximale Überschreitungsverluste relativ zu den VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit zwei Aktien.

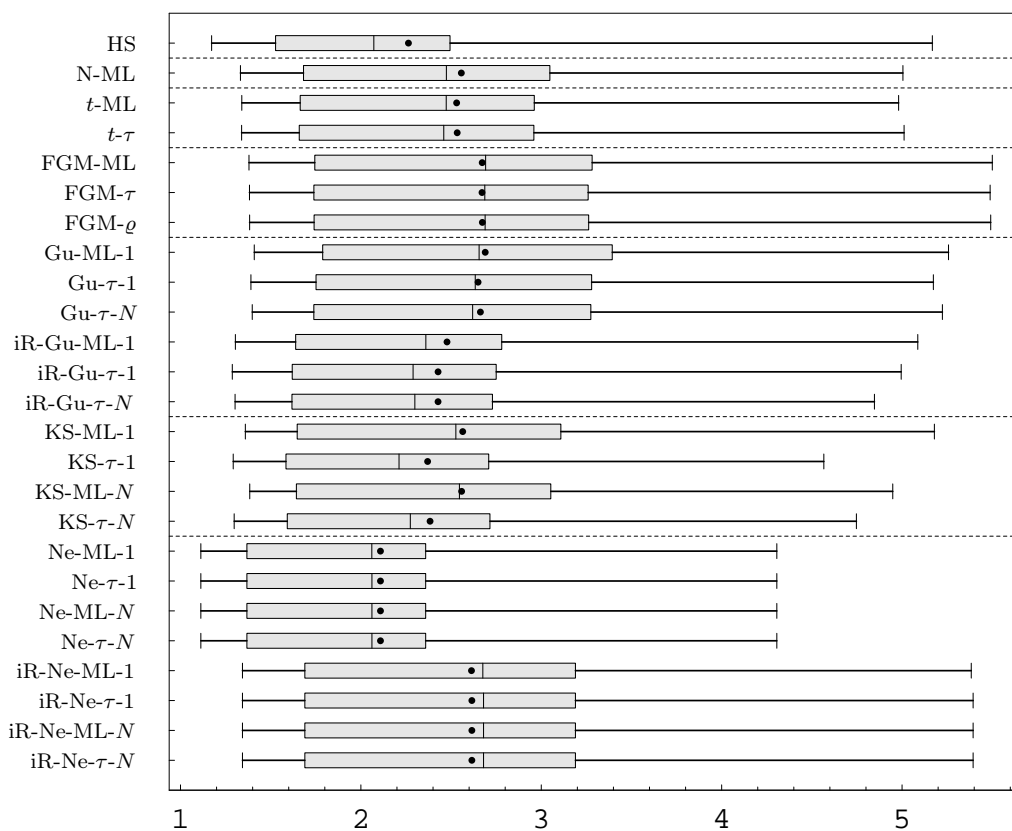


Abbildung A.27: Maximale Überschreitungsverluste relativ zu den VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit drei Aktien.

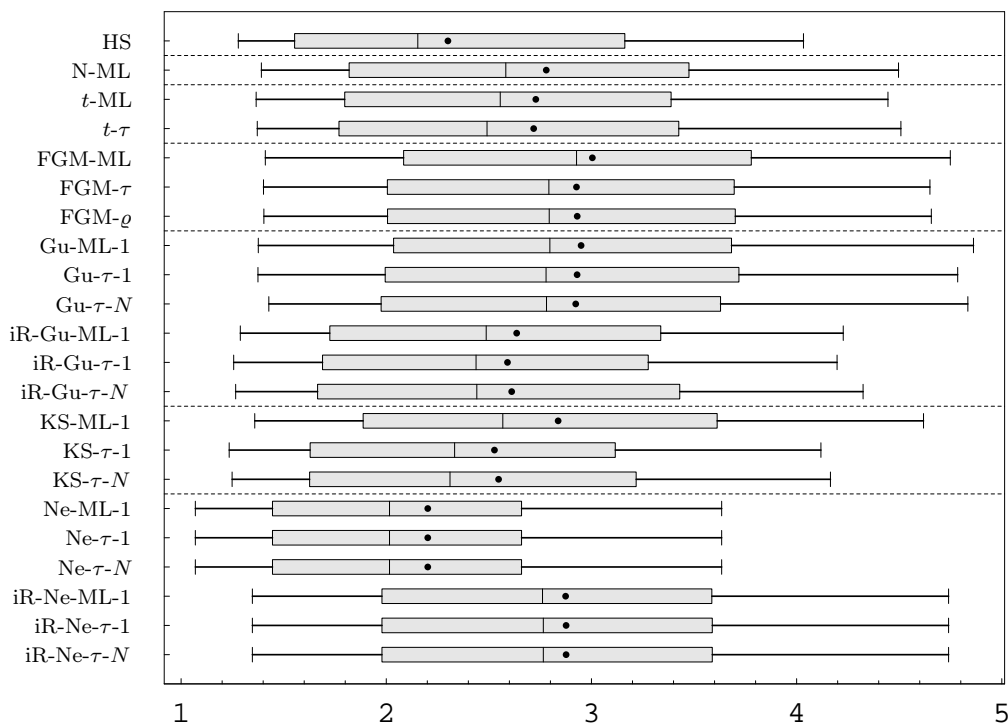


Abbildung A.28: Maximale Überschreitungsverluste relativ zu den VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit vier Aktien.

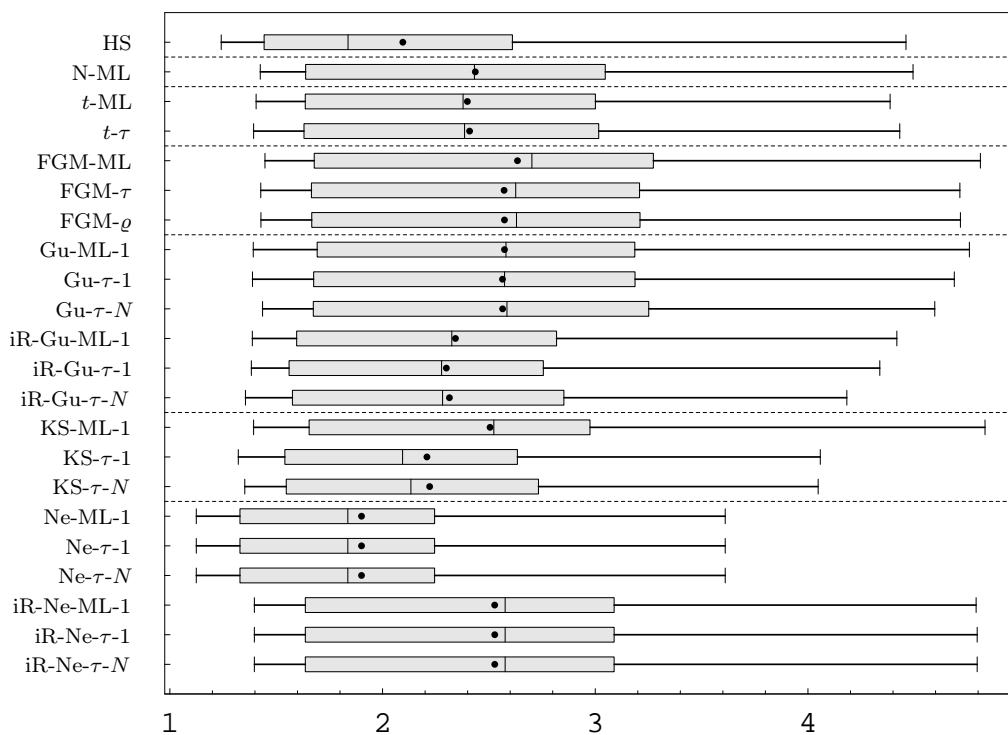


Abbildung A.29: Maximale Überschreitungsverluste relativ zu den VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit fünf Aktien.

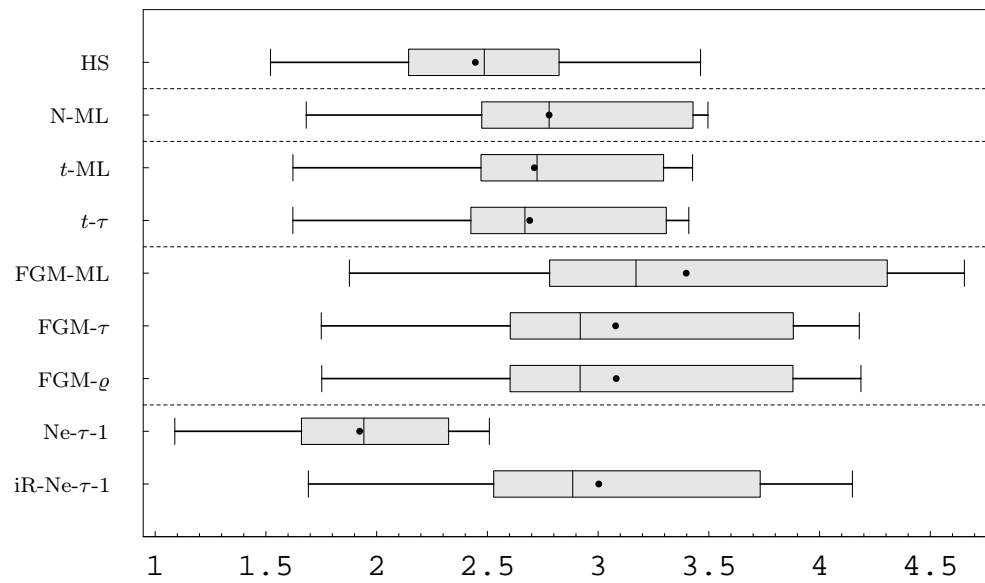


Abbildung A.30: Maximale Überschreitungsverluste relativ zu den VaR-Schätzungen bei normalverteilten Randverteilungen für Portfolios mit zehn Aktien.

Anhang B

Beigelegte Software

Die im Rahmen dieser Dissertation zur Schätzung und Simulation der betrachteten Copulafunktionen notwendigen Programme sowie die benötigten Hilfsprozeduren wurden in der Programmierumgebung GAUSSTM 4.0 der Firma Aptech Systems, Inc. realisiert. Dabei wurde ferner auf das Zusatzpaket Constrained Maximum Likelihood in der Version 2.0 zurückgegriffen, das Algorithmen für die numerische Maximum-Likelihood-Schätzung unter Berücksichtigung von Parameterrestriktionen bereitstellt (vgl. APTECH SYSTEMS, INC. [8]).

Die so entstandene 121 Prozeduren umfassende Programmbibliothek für Copulafunktionen ist sowohl in der selbstextrahierenden Zip-Datei `copulas.exe` als auch in der gewöhnlichen Zip-Datei `copulas.zip` zusammengefasst und wird mitsamt der für die Durchführung der empirischen Studie verwendeten Steuerdateien auf der beigelegten CD zur Verfügung gestellt. Die Prozedur `rchisquare` zur Generierung von χ^2 -verteilten Zufallszahlen konnte dabei aus der von SCHLITTGEN und NOACK [145] zur Verfügung gestellten Programmbibliothek DISTRIB übernommen werden. Die beiden genannten Zip-Dateien, die im Verzeichnis `Programmbibliothek` abgelegt sind, sind so aufgebaut, dass sie die enthaltenen Dateien direkt in die von GAUSSTM vorgegebene Verzeichnisstruktur einfügen. Für die Installation der besagten Programmbibliothek muss somit lediglich eine der beiden Zip-Dateien in das Stammverzeichnis von GAUSSTM extrahiert werden.

Die Beschreibung der 121 Prozeduren findet sich in der ebenfalls auf der beigelegten CD befindlichen Datei `handbuch.pdf`. Die Darstellung ist in Englisch abgefasst und wird in dem Stil präsentiert, der bei der Beschreibung von in GAUSSTM geschriebenen Routinen üblicherweise gepflegt wird (vgl. APTECH SYSTEMS, INC. [6] und [7]). Dabei wird zunächst der Zweck einer Prozedur kurz umrissen und es wird die Syntax für den Prozeduraufruf angegeben. Anschliessend werden Input und Output beschrieben, wobei es sich, wie in GAUSSTM vorausgesetzt, jeweils um Matrizen handelt. Optional folgen Beispiele, Bemerkungen und Verweise auf ver-

wandte Prozeduren. Den Abschluss bildet jeweils die Angabe der Quelldatei und der Bibliothek, in der die entsprechende Prozedur zu finden ist.

Die beigelegten Steuerdateien befinden sich im gleichnamigen Verzeichnis auf der CD. Sämtliche dieser Dateien enthalten jeweils direkt in den Programmcode eingefügte Kommentare, weshalb nachfolgend lediglich allgemeine Ausführungen zu den einzelnen Dateien gegeben werden. Bei diesen Steuerdateien handelt es sich zunächst um Routinen zur Erzeugung von Backtestingstichproben unter Verwendung der diversen untersuchten Modelle. Diese tragen den Namen **study- $\langle i \rangle$ - $\langle j \rangle$** . Dabei gilt $\langle i \rangle \in \{2, 3, 4-5, N\}$ und $\langle j \rangle \in \{\text{norm}, \text{emp}\}$. Erstere Menge steht dabei für die Anzahl Titel in einem Portfolio, letztere gibt an, ob mit normalverteilten oder empirischen Randverteilungen gearbeitet wird. Die gewünschten quantitativen Bestimmungsgrößen sind jeweils am Anfang einer solchen Steuerdatei zu definieren. Die gewählten Namen sind dabei selbst erklärend. Als weiterer Input ist der vollständige Pfad der Datei anzugeben, welche die Tagesschlusskurse der untersuchten Aktien enthält. Diese Aktienkurse sind in einer ASCII-Datei der folgenden Form zu speichern:

```
3
Datum   ABBN   BAER
110199  25.54   488.38
120199  25.05   483.42
130199  24.37   478.46
:
```

Dabei bezeichnet die Zahl zu Beginn der ASCII-Datei die Anzahl der in der File enthaltenen Spalten. Der Output einer solchen Routine besteht aus 12 Dateien, die im Stammverzeichnis von **GAUSS™** gespeichert werden.

Die 12 solcherart erzeugten Dateien werden als Input für das Backtesting benötigt, das über die Datei **backtest** gesteuert werden kann. Der Output dieser Routine ist eine ASCII-Datei mit Namen **report.txt**, welche Schätzungen der in der Arbeit verwendeten Kriterien zur Modellrisikoabschätzung von Copulafunktionen für das jeweils betrachtete Portfolio enthält.

Zwei weitere Steuerdateien sind **ww-test** und **norm-dist-test**. Erstere Datei dient der Durchführung des Wald-Wolfowitz'schen Iterationstests, letztere der Durchführung des χ^2 - und des Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstests auf Normalverteiltheit. Als Input wird jeweils im Wesentlichen der vollständige Pfad der Datei benötigt, welche die zu untersuchenden Daten enthält. Diese sind erneut in einer ASCII-Datei der oben beschriebenen Form zu speichern. Als Output liefern die beiden Routinen jeweils ASCII-Dateien mit Namen **ww.txt** beziehungsweise **norm-dist.txt**, die im Stammverzeichnis von **GAUSS™** gespeichert werden.

Für den Wald-Wolfowitz'schen Iterationstest und den χ^2 -Anpassungstest werden die Werte der jeweiligen Prüfgrösse und die korrespondierenden Überschreitungswahrscheinlichkeiten in die jeweilige ASCII-Datei geschrieben. Beim Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstest werden die Werte der Prüfgrösse und die approximativen kritischen Werte nach Lilliefors ausgegeben. Weiter wird angegeben, ob die Nullhypothese der Normalverteiltetheit zu verwerfen ist. Hierbei steht der Wert 1 für die Ablehnung und der Wert 0 für die Nichtablehnung der Hypothese H_0 .

Für die Durchführung des Brock-Dechert-Scheinkmann-Tests konnte auf ein Programm zurückgegriffen werden, das auf der Website

<http://dechert.econ.uh.edu/software/bds.html> [Stand 2003-08-08]

von W. D. Dechert zur Verfügung gestellt wird.

Die Routine in der Steuerdatei **backtest** liefert eine ASCII-Datei, die für jeweils ein untersuchtes Portfolio die entsprechenden Schätzungen der verschiedenen Kriterien zur Modellrisikoabschätzung enthält. Die Präsentation der Resultate erfolgte in der vorliegenden Arbeit nun aber nicht nach Portfolios, sondern nach Kriterien geordnet, wodurch ein Umsortieren der Ergebnisse notwendig wurde. Zur Automatisierung dieses Vorgangs wurden Makros in Microsoft Excel geschrieben. Ein solches Makro mit dem Namen **makro-bsp.xls** ist im Verzeichnis **Excel-Makro** auf der CD abgelegt. Dieses setzt eine spezielle Verzeichnisstruktur voraus und dient folglich nur als Beispiel. Für das Verständnis der einzelnen Schritte des Makros wurden Kommentare direkt in den Makrocode integriert.

Literaturverzeichnis

- [1] ACERBI, C., NORDIO, C., SIRTORI, C.: Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management, Februar 2001. Online in Internet: URL: <http://www.gloriamundi.org/picsresources/ncs.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [2] ACERBI, C., TASCHE, D.: Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk, Mai 2001. Online in Internet: URL: <http://www.gloriamundi.org/picsresources/expshortfall.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [3] ACERBI, C., TASCHE, D.: On the coherence of Expected Shortfall, April 2002. Online in Internet: URL: <http://www.gloriamundi.org/picsresources/cadt.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [4] ALBRECHT, P., MAURER, R., STEPHAN, T. G.: Return and Shortfall Risks of Rollover Hedge-Strategies with Options. In: Beitrag in Tagungsband der Konferenz AFIR 1995, Bd. 3, S. 975–1001, Brüssel, 1995. Und Online in Internet: URL: <http://www.actuaries.org/members/en/AFIR/colloquia/Brussels/papers.cfm> [Stand 2003-08-08].
- [5] APTECH SYSTEMS, INC.: GAUSS™ – Supplement for OS/2 and Windows. Maple Valley, 1996.
- [6] APTECH SYSTEMS, INC.: GAUSS™ – System and Graphics Manual. Maple Valley, 1996.
- [7] APTECH SYSTEMS, INC.: GAUSS™ – Command Reference Manual. Maple Valley, 1997.
- [8] APTECH SYSTEMS, INC.: Constrained Maximum Likelihood Estimation for GAUSS™ – Version 2.0, August 2001.
- [9] APTECH SYSTEMS, INC.: Maximum Likelihood Estimation for GAUSS™ – Version 5.0, Juni 2001.

- [10] ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.-M., HEATH, D.: Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, Bd. 9(3), S. 203–228, 1999. Und Online in Internet: URL: <http://www.math.ethz.ch/~delbaen/ftp/preprints/CoherentMF.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [11] ASCHINGER, G.: Börsenkrach und Spekulation – eine ökonomische Analyse. Verlag Vahlen, München, 1995.
- [12] BANK FOR INTERNATIONAL SETTLEMENTS – MONETARY AND ECONOMIC DEPARTMENT: BIS Quarterly Review – International Banking and Financial Market Developments, Dezember 2001. Online in Internet: URL: http://www.bis.org/publ/r_qt0112.pdf [Stand 2003-08-08].
- [13] BANK FOR INTERNATIONAL SETTLEMENTS – MONETARY AND ECONOMIC DEPARTMENT: BIS Quarterly Review – International Banking and Financial Market Developments, Juni 1999. Online in Internet: URL: http://www.bis.org/publ/r_qt9906.pdf [Stand 2003-08-08].
- [14] BANK FOR INTERNATIONAL SETTLEMENTS – MONETARY AND ECONOMIC DEPARTMENT: BIS Quarterly Review – International Banking and Financial Market Developments, Juni 2001. Online in Internet: URL: http://www.bis.org/publ/r_qt0106.pdf [Stand 2003-08-08].
- [15] BARBE, P., GENEST, C., GHOUDI, K., RÉMILLARD, B.: On Kendall's Process. *Journal of Multivariate Analysis*, Bd. 58, S. 197–229, 1996.
- [16] BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, Juli 1988. Online in Internet: URL: <http://www.bis.org/publ/bcbs04A.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [17] BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION: Risk Management Guidelines for Derivatives, Juli 1994. Online in Internet: URL: <http://www.bis.org/publ/bcbsc211.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [18] BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION: Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks, Januar 1996. Online in Internet: URL: <http://www.bis.org/publ/bcbs24.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [19] BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION: Overview of the Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks, Januar 1996. Online in Internet: URL: <http://www.bis.org/publ/bcbs23.pdf> [Stand 2003-08-08].

- [20] BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION: Supervisory Framework for the Use of “Backtesting” in Conjunction with the Internal Models Approach to Market Risk Capital Requirements, Januar 1996. Online in Internet: URL: <http://www.bis.org/publ/bcbs22.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [21] BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION: Asset Securitisation, Supporting Document to the New Basel Capital Accord, Consultative Document, Januar 2001. Online in Internet: URL: <http://www.bis.org/publ/bcbsca06.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [22] BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION: Operational Risk, Supporting Document to the New Basel Capital Accord, Consultative Document, Januar 2001. Online in Internet: URL: <http://www.bis.org/publ/bcbsca07.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [23] BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION: Overview of The New Basel Capital Accord, Consultative Document, Januar 2001. Online in Internet: URL: <http://www.bis.org/publ/bcbsca02.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [24] BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION: Pillar 2 (Supervisory Review Process), Supporting Document to the New Basel Capital Accord, Consultative Document, Januar 2001. Online in Internet: URL: <http://www.bis.org/publ/bcbsca08.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [25] BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION: Pillar 3 (Market Discipline), Supporting Document to the New Basel Capital Accord, Consultative Document, Januar 2001. Online in Internet: URL: <http://www.bis.org/publ/bcbsca10.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [26] BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION: The Internal Ratings-Based Approach, Supporting Document to the New Basel Capital Accord, Consultative Document, Januar 2001. Online in Internet: URL: <http://www.bis.org/publ/bcbsca05.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [27] BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION: The New Basel Capital Accord: an explanatory note, Januar 2001. Online in Internet: URL: <http://www.bis.org/publ/bcbsca01.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [28] BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION: The New Basel Capital Accord, Consultative Document, Januar 2001. Online in Internet: URL: <http://www.bis.org/publ/bcbsca03.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [29] BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION: The Standardised Approach to Credit Risk, Supporting Document to the New Basel Capital

- Accord, Consultative Document, Januar 2001. Online in Internet: URL: <http://www.bis.org/publ/bcbsca04.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [30] BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION: Basel Committee reaches agreement on New Capital Accord issues, Press Release, 10. Juli 2002. Online in Internet: URL: <http://www.bis.org/press/p020710.htm> [Stand 2003-08-08].
- [31] BLEUEL, J.: Zitation von Internet-Quellen. In: HUG, T. (Hg.) Wie kommt Wissenschaft zu Wissen? Band 1: Einführung in das wissenschaftliche Arbeiten, Hohengehren: Schneider Verlag, 2001. Und Online in Internet: PURL: <http://purl.oclc.org/NET/Bleuel/Zitieren> oder URL: <http://www.bleuel.com/ip-zit.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [32] BOUYÉ, E., DURRLEMAN, V., NIKEGHBALI, A., RIBOULET, G., RONCALLI, T.: Copulas for Finance – A Reading Guide and Some Applications, Juli 2000. Working Paper, Groupe de Recherche Opératinelle, Crédit Lyonnais, Paris. Online in Internet: URL: <http://gro.creditlyonnais.fr/content/wp/copula-survey.pdf> oder URL: [http://www.business.city.ac.uk/ferc/eric/copula-survey\(1\).pdf](http://www.business.city.ac.uk/ferc/eric/copula-survey(1).pdf) [Stand 2003-08-08].
- [33] BOUYÉ, E., DURRLEMAN, V., NIKEGHBALI, A., RIBOULET, G., RONCALLI, T.: Copulas: an open field for risk management, März 2001. Working Paper, Groupe de Recherche Opérationelle, Crédit Lyonnais, Paris. Online in Internet: URL: <http://gro.creditlyonnais.fr/content/wp/copula-rm.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [34] BRACHINGER, H. W.: „Statistische Lügen“: Ein Plädoyer für einen angemessenen Wahrheitsbegriff der Wirtschaftsstatistik. *Swiss Journal of Economics and Statistics*, Bd. 130(3), S. 377–389, 1994.
- [35] BRACHINGER, H. W.: Das Parameterrisiko von Risikomanagement-Systemen – Eine synoptische Betrachtung standardisierter Risikomasse. *Der Schweizer Treuhänder*, Bd. 10, S. 1015–1022, 1998.
- [36] BRACHINGER, H. W.: From Variance to Value at Risk: A Unified Perspective on Standardized Risk Measures. In: GAUL, H., LOCAREK-JUNGE, H. (Hg.) *Classification in the Information Age*, S. 91–99, Springer, Berlin, 1999.
- [37] BRACHINGER, H. W.: Statistik zwischen Lüge und Wahrheit – Zur Aussagekraft wirtschafts- und sozialstatistischer Aussagen. *Alt und Jung Metten*, Bd. 68(2), S. 190–213, 2001/02.

- [38] BRACHINGER, H. W.: Measurement of Risk. In: DERIGS, U. (Hg.) Optimization and Operations Research, Encyclopedia of Life Support Systems (EOLSS), S. 1119–1137, United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization (UNESCO), 2002. Und Online in Internet: URL: <http://www.unifr.ch/stat/forschung/publikationen/Braching-Risk02.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [39] BRACHINGER, H. W., WEBER, M.: Risk as a primitive: a survey of measures of perceived risk. *OR Spektrum*, Bd. 19(4), S. 235–250, 1997. Und Online in Internet: URL: <http://www.unifr.ch/stat/forschung/publikationen/Braching-Risk97.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [40] BRENNER, B.: Ebner muss seine Visionen verkaufen – Kontrolle der Stimmen durch die Zürcher Kantonalbank. *Neue Zürcher Zeitung*, S. 23, 2002-08-02.
- [41] BROCK, W. A., DECHERT, W. D., SCHEINKMAN, J. A., LEBARON, B.: A Test for Independence Based on the Correlation Dimension, 1991. Online in Internet: URL: <http://dechert.econ.uh.edu/software/bds1.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [42] BROCK, W. A., HSIEH, D. A., LEBARON, B.: Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence. The MIT Press, Cambridge, 3. Aufl., 1993.
- [43] BUNDESAMT FÜR STATISTIK: 3 Arbeit und Erwerb – Beschäftigte nach Wirtschaftsabteilungen, 2002. Online in Internet: URL: http://www.statistik.admin.ch/stat_ch/ber03/du0305.htm [Stand 2003-08-08].
- [44] BUNDESAMT FÜR STATISTIK: Statistisches Jahrbuch der Schweiz 2003. Verlag Neue Zürcher Zeitung, Zürich, 2003.
- [45] CAMPBELL, J. Y., LO, A. W., CRAIG, M. A.: The Econometrics of Financial Markets. Princeton University Press, Princeton, 1997.
- [46] CAPÉRAÀ, P., FOUGÈRES, A.-L., GENEST, C.: Bivariate Distributions with Given Extreme Value Attractor. *Journal of Multivariate Analysis*, Bd. 72, S. 30–49, 2000.
- [47] CESKE, R., HERNÁNDEZ, J.: Where theory meets practice. *Risk Magazine (Operational Risk Report)*, Bd. 12, S. 17–20, November 1999.
- [48] CLAYTON, D., CUZICK, J.: Multivariate Generalizations of the Proportional Hazards Model. *Journal of the Royal Statistical Society*, Bd. A 148(2), S. 82–117, 1985.

- [49] CONWAY, D.: Farlie-Gumbel-Morgenstern Distributions. In: KOTZ, S., JOHNSON, N. L. (Hg.) *Encyclopedia of Statistical Sciences – Volume 3*, S. 28–31, John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [50] COOK, D. R., JOHNSON, M. E.: A Family of Distributions for Modelling Non-elliptically Symmetric Multivariate Data. *Journal of the Royal Statistical Society*, Bd. B 43(2), S. 210–218, 1981.
- [51] COSTINOT, A., RONCALLI, T., TEÏLETCHÉ, J.: Revisiting the dependence between financial markets with copulas (Work in progress), Oktober 2000. Working Paper, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, Paris, Laboratoire de Finance-Assurance CREST, ENSAE. Online in Internet: URL: <http://gro.creditlyonnais.fr/content/wp/copula-contagion.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [52] DAVIDSON, R., MACKINNON, J. G.: *Estimation and Inference in Econometrics*. Oxford University Press, New York, Oxford, 1993.
- [53] DAVIS, C. E., STEINBERG, S. M.: Quantile Estimation. In: KOTZ, S., JOHNSON, N. L. (Hg.) *Encyclopedia of Statistical Sciences – Volume 7*, S. 408–412, John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [54] DEHEUVELS, P.: La fonction de dépendance empirique et ses propriétés – Un test non paramétrique d'indépendance. *Bulletin de la Classe des Sciences – Académie Royale de Belgique*, Bd. 5(6), S. 274–292, 1979.
- [55] DOWD, K.: *Beyond Value at Risk – The New Science of Risk Management*. John Wiley & Sons, Chichester, 1998.
- [56] DURRLEMAN, V., NIKEGHBALI, A., RONCALLI, T.: A simple transformation of copulas, Juli 2000. Working Paper, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, Paris. Online in Internet: URL: <http://gro.creditlyonnais.fr/content/wp/copula-transform.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [57] DURRLEMAN, V., NIKEGHBALI, A., RONCALLI, T.: How to get bounds for distribution convolutions? A simulation study and an application to risk management, September 2000. Working Paper, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, Paris. Online in Internet: URL: <http://gro.creditlyonnais.fr/content/wp/copula-bounds.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [58] DURRLEMAN, V., NIKEGHBALI, A., RONCALLI, T.: Which copula is the right one?, August 2000. Working Paper, Groupe de Recherche

- Opérationelle, Crédit Lyonnais, Paris. Online in Internet: URL: <http://gro.creditlyonnais.fr/content/wp/copula-choice.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [59] EISENFÜHR, F., WEBER, M.: Rationales Entscheiden. Springer, Berlin, 4. Aufl., 2003.
- [60] ELLER, R., DEUTSCH, H.-P.: Derivate und Interne Modelle – Modernes Risikomanagement. Schäffer-Poeschel Verlag, Stuttgart, 1998.
- [61] ELTON, E. J., GRUBER, M. J.: Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. John Wiley & Sons, New York, 5. Aufl., 1995.
- [62] EMBRECHTS, P., KLÜPPELBERG, C., MIKOSCH, T.: Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, Bd. 33 von *Applications of Mathematics – Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer, Berlin, 1997.
- [63] EMBRECHTS, P., LINDSKOG, F., MCNEIL, A.: Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management, September 2001. Working Paper, Department of Mathematics, ETH, Zürich. Online in Internet: URL: <http://www.risklab.ch/ftp/papers/DependenceWithCopulas.pdf> oder URL: <http://www.math.ethz.ch/~baltes/ftp/copchapter.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [64] EMBRECHTS, P., MCNEIL, A., STRAUMANN, D.: Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls, Juli 1999. Working Paper, Department of Mathematics, ETH, Zürich. Online in Internet: URL: <http://www.risklab.ch/ftp/papers/CorrelationPitfalls.pdf> oder URL: <http://www.math.ethz.ch/~strauman/preprints/pitfalls.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [65] EMBRECHTS, P., MCNEIL, A., STRAUMANN, D.: Correlation: Pitfalls and Alternatives – A short, non-technical article. *RISK Magazine*, S. 69–71, Mai 1999. Und Online in Internet: URL: <http://www.math.ethz.ch/~strauman/light/risk.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [66] ENGEL, J., GIZYCKI, M.: Conservatism, Accuracy and Efficiency: Comparing Value-at-Risk Models, März 1999. Working Paper, Australian Prudential Regulation Authority und Reserve Bank of Australia. Online in Internet: URL: http://www.apra.gov.au/RePEc/RePEcDocs/Archive/working_papers/wp0002.pdf [Stand 2003-08-08].
- [67] EUBANK, R. L.: Quantiles. In: KOTZ, S., JOHNSON, N. L. (Hg.) *Encyclopedia of Statistical Sciences – Volume 7*, S. 424–432, John Wiley & Sons, New York, 1986.

- [68] FAHRMEIR, L., HAMERLE, A.: Grundlegende multivariate Schätz- und Testprobleme. In: FAHRMEIR, L., HAMERLE, A., TUTZ, G. (Hg.) Multivariate statistische Verfahren, Kap. 3, Walter de Gruyter, Berlin, 2., überarbeitete Aufl., 1996.
- [69] FAHRMEIR, L., KÜNSTLER, R., PIGEOT, I., TUTZ, G.: Statistik – Der Weg zur Datenanalyse. Springer, Berlin, 2003.
- [70] FAMA, E. F.: The Behavior of Stock-Market Prices. *The Journal of Business*, Bd. 38(1), S. 34–105, Januar 1965.
- [71] FANG, K.-T., KOTZ, S., NG, K.-W.: Symmetric Multivariate and Related Distributions, Bd. 36 von *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman & Hall, London, 1990.
- [72] FISHBURN, P. C.: Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns. *The American Economic Review*, Bd. 67(2), S. 116–126, 1977.
- [73] FISHER, N. I.: Copulas. In: KOTZ, S., JOHNSON, N. L. (Hg.) Encyclopedia of Statistical Sciences – Update Volume 1, S. 159–163, John Wiley & Sons, New York, 1997.
- [74] FRANKE, J., HÄRDLE, W., HAFNER, C.: Einführung in die Statistik der Finanzmärkte. Springer e-book, Berlin, 2001. Und Online in Internet: URL: <http://www.quantlet.de/scripts/sfm/html/> [Stand 2003-08-08].
- [75] FREES, E. W., VALDEZ, E. A.: Understanding relationships using Copulas. *North American Actuarial Journal*, Bd. 2(1), S. 1–25, 1998.
- [76] GALLAROTTI, E.: Die BZ-Gruppe in der Schuldenfalle? Zurückhaltung bei ABB, VP Bank und Rieter. *Neue Zürcher Zeitung*, S. 19, 2002-08-29.
- [77] GENEST, C., GHOUDI, K., RIVEST, L.-P.: A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions. *Biometrika*, Bd. 82(3), S. 543–552, 1995.
- [78] GENEST, C., RIVEST, L.-P.: Statistical Inference Procedures for Bivariate Archimedean Copulas. *Journal of the American Statistical Association*, Bd. 88(423), S. 1034–1043, September 1993.
- [79] GIBBONS, J. D.: Nonparametric Methods for Quantitative Analysis, Bd. 2 von *American Series in Mathematical and Management Sciences*. American Sciences Press, Columbus, 2. Aufl., 1985.

- [80] GREENE, W. H.: *Econometric Analysis*. Prentice Hall, New Jersey, 4. Aufl., 2000.
- [81] GUTHOFF, A., PFINGSTEN, A., WOLF, J.: Der Einfluss einer Begrenzung des Value at Risk oder des Lower Partial Moment One auf die Risikoübernahme. In: OEHLER, A. (Hg.) *Credit Risk und Value-at-Risk Alternativen – Herausforderungen für das Risk Management*, S. 111–153, Schäffer-Poeschel Verlag, Stuttgart, 1998.
- [82] HARTUNG, J., ELPELT, B., KLÖSENER, K.-H.: *Statistik – Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik*. Oldenbourg, München, 10. Aufl., 1995.
- [83] HENDRICKS, D.: Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data. *Federal Reserve Bank of New York, Economic Policy Review.*, S. 39–69, April 1996. Und Online in Internet: URL: http://www.ny.frb.org/rmaghome/econ_pol/496end.pdf [Stand 2003-08-08].
- [84] HOEFFDING, W.: Maßstabinvariante Korrelationstheorie. *Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin*, Bd. 5(3), S. 179–233, 1940.
- [85] HOEFFDING, W.: Maßstabinvariante Korrelationsmasse für diskontinuierliche Verteilungen. *Archiv für mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung*, Bd. 7, S. 49–70, 1941.
- [86] HOEFFDING, W.: Stochastische Abhängigkeit und funktionaler Zusammenhang. *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, Bd. 25, S. 200–227, 1942.
- [87] HOGG, R. V., CRAIG, A. T.: *Introduction to Mathematical Statistics*. Prentice Hall, New Jersey, 5. Aufl., 1995.
- [88] HOUGAARD, P.: Fitting a Multivariate Failure Time Distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, Bd. 38(4), S. 444–448, Oktober 1989.
- [89] HULL, J. C.: *Options, Futures, and other Derivatives*. Prentice Hall, New Jersey, 4. Aufl., 2000.
- [90] HUSCHENS, S.: Confidence intervals for the Value-at-Risk. In: BOL, G., NAKHAEIZADEH, G., VOLLMER, K.-H. (Hg.) *Risk Measurement, Econometrics and Neural Networks (Selected Articles of the 6th Econometric-Workshop in Karlsruhe, Germany)*, S. 233–244, Physica-Verlag, Heidelberg, 1998.

- [91] HUSCHENS, S.: Historische Simulation, Bd. 19 von *Dresdner Beiträge zu Quantitativen Verfahren*. Technische Universität Dresden – Fakultät für Wirtschaftswissenschaften, 1998.
- [92] JACKSON, P., MAUDE, D. J., PERRAUDIN, W.: Bank capital and Value at Risk. *Journal of Derivatives*, Bd. 4(3), S. 73–90, 1997.
- [93] JOE, H.: Multivariate Models and Dependence Concepts, Bd. 73 von *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman & Hall, London, 1997.
- [94] JOE, H., XU, J. J.: The Estimation Method of Inference Functions for Margins for Multivariate Models. *Technical Report*, Bd. 166, 1996.
- [95] JOHANNING, L.: Value-at-Risk zur Marktrisikosteuerung und Eigenkapitalallokation, Bd. 1 von *Risikomanagement und Finanzcontrolling*. Uhlenbruch Verlag, Bad Soden, 1998.
- [96] JOHNSON, N. L., KOTZ, S.: Distributions in Statistics: Continuous Multivariate Distributions. *Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics – Applied*, John Wiley & Sons, New York, 1972.
- [97] JOHNSON, N. L., KOTZ, S., BALAKRISHNAN, N.: Continuous Univariate Distributions – Volume 2. *Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, New York, 2. Aufl., 1995.
- [98] JORION, P.: Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk. McGraw-Hill, New York, 2. Aufl., 2001.
- [99] J.P. MORGAN: RiskMetrics™ – Technical Document. New York, 4. Aufl., Dezember 1996. Online in Internet: URL: <http://www.riskmetrics.com/rmcovv.html> [Stand 2003-08-08].
- [100] KLEINWEFERS, H., JANS, A.: Einführung in die volkswirtschaftliche und wirtschaftspolitische Modellbildung. Verlag Vahlen, München, 1983.
- [101] KLOEDEN, P. E., PLATEN, E., SCHURZ, H.: Numerical Solution of SDE through Computer Experiments. Springer, Berlin, 2. Aufl., 1997.
- [102] KLUGMAN, S. A., PARSA, R.: Fitting bivariate loss distributions with copulas. *Insurance: Mathematics and Economics*, Bd. 24, S. 139–148, 1999.
- [103] KOHLER, J.: Jahresrückblick 1999. Alpenbank Aktiengesellschaft, Innsbruck, 1999. Online in Internet: URL: <http://www.alpenbank.at/downloads/r1999.pdf> [Stand 2003-08-08].

- [104] KOTZ, S., JOHNSON, N. L. (Hg.): Encyclopedia of Statistical Sciences, Bd. 1-9. John Wiley & Sons, New York, 1982-1988.
- [105] KOTZ, S., JOHNSON, N. L. (Hg.): Encyclopedia of Statistical Sciences – Supplement Volume. John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [106] KUPIEC, P. H.: Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models. *The Journal of Derivatives*, Bd. 3(2), S. 73–84, 1995.
- [107] LEESON, N.: Rogue Trader: How I Brought Down Barings Bank and Shook the Financial World. Little Brown, Boston, 1996.
- [108] LEHMANN, E. L.: Testing Statistical Hypotheses. *Springer Texts in Statistics*, Springer, New York, 2. Aufl., 1986.
- [109] LI, D. X.: On Default Correlation: A Copula Function Approach, Februar 2000. Working Paper, RiskMetrics Group. Online in Internet: URL: <http://www.riskmetrics.com/products/system/cdo/PDFDocs/defaultcorr.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [110] LILLIEFORS, H. W.: On the Kolmogorov-Smirnov Test for Normality with Mean and Variance unknown. *Journal of The American Statistical Association*, S. 399–402, Juni 1967.
- [111] LINDSKOG, F.: Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management, März 2000. Master Thesis, ETH, Zürich.
- [112] LINDSKOG, F., MCNEIL, A., SCHMOCK, U.: Kendall's Tau for Elliptical Distributions, Juni 2001. Working Paper, Department of Mathematics, ETH, Zürich. Online in Internet: URL: <http://www.risklab.ch/ftp/papers/KendallsTau.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [113] LOPEZ, J. A.: Methods for Evaluating Value-at-Risk Estimates. *Federal Reserve Bank of New York, Economic Policy Review*, S. 119–124, Oktober 1998. Und Online in Internet: URL: http://www.ny.frb.org/rmaghome/econ_pol/1098jlop.pdf [Stand 2003-08-08].
- [114] MAGNUS, J. R., NEUDECKER, H.: Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics. *Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
- [115] MAHONEY, J. M.: Empirical-based Versus Model-based Approaches to Value-at-Risk, 1995. Online in Internet: URL: <http://www.ny.frb.org/rmaghome/economist/mahoney/var.pdf> [Stand 2003-08-08].

- [116] MARKOWITZ, H. M.: Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, Bd. 7, S. 77–91, 1952.
- [117] MARKOWITZ, H. M.: Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments, Bd. 16 von *Cowles Foundation Monograph*. Yale University Press, London, 1959.
- [118] MARRISON, C.: The Fundamentals of Risk Measurement. McGraw-Hill, New York, 2002.
- [119] MENGE, H.: Langenscheidts Grosswörterbuch Lateinisch – Teil 1: Lateinisch – Deutsch – unter Berücksichtigung der Etymologie. Langenscheidt, Berlin, 1984.
- [120] MITTELHAMMER, R. C.: Mathematical Statistics for Economics and Business. Springer, New York, 1996.
- [121] MORGENSTERN, D.: Einfache Beispiele zweidimensionaler Verteilungen. *Mitteilungsblatt für Mathematische Statistik*, Bd. 8, S. 234–235, 1956.
- [122] NELSEN, R. B.: An Introduction to Copulas, Bd. 139 von *Lecture Notes in Statistics*. Springer, New York, 1999.
- [123] OAKES, D.: A Model for Association in Bivariate Survival Data. *Journal of the Royal Statistical Society*, Bd. B 44(3), S. 414–422, 1982.
- [124] OAKES, D.: Semiparametric inference in a model for association in bivariate survival data. *Biometrika*, Bd. 73, S. 353–361, 1986.
- [125] OAKES, D.: Multivariate Survival Distributions. *Journal of Nonparametric Statistics*, Bd. 3, S. 343–354, 1994.
- [126] PELDA, K.: Tagesgespräch an der Börse: Kurseinbruch der UBS-Aktien – Schockwellen einer unerwarteten Pressekonferenz. *Neue Zürcher Zeitung*, S. 33, 1998-09-25.
- [127] PFIFFNER, F.: Ebner hat zu hoch gepokert – Eine grosse Schuldenlast brachte die BZ Gruppe Holding in Nöte. *NZZ am Sonntag*, S. 37, 2002-08-04.
- [128] PIRIE, W.: Spearman Rank Correlation Coefficient. In: KOTZ, S., JOHNSON, N. L. (Hg.) *Encyclopedia of Statistical Sciences – Volume 8*, S. 584–587, John Wiley & Sons, New York, 1988.
- [129] RASCH, M.: Die Baisse fügt der BZ-Gruppe Blessuren zu – Sechs Forderungen zur Corporate Governance. *Neue Zürcher Zeitung*, S. 25, 2002-07-06.

- [130] RAWNSLEY, J.: Going for Broke – Nick Leeson and the Collapse of Barings Bank. Collins, London, 1995.
- [131] RIDDER, T.: Basics of Statistical VaR-Estimation. In: BOL, G., NAKHAEIZADEH, G., VOLLMER, K.-H. (Hg.) Risk Measurement, Econometrics and Neural Networks (Selected Articles of the 6th Econometric-Workshop in Karlsruhe, Germany), S. 161–187, Physica-Verlag, Heidelberg, 1998.
- [132] RINNE, H.: Taschenbuch der Statistik für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften. Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main, 1995.
- [133] RODRIGUEZ, R.: Correlation. In: KOTZ, S., JOHNSON, N. L. (Hg.) Encyclopedia of Statistical Sciences – Volume 2, S. 193–204, John Wiley & Sons, New York, 1982.
- [134] ROHATGI, V. K.: An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, New York, 1976.
- [135] ROSE, C., SMITH, M. D.: Symbolic maximum likelihood estimation with Mathematica. *Journal of the Royal Statistical Society*, Bd. D 49(2), S. 229–240, 2000.
- [136] ROY, A. D.: Safety First and the Holding of Assets. *Econometrica*, Bd. 20, S. 431–449, 1952.
- [137] RUDOLF, M.: Diversifikation. In: GEHRIG, B., ZIMMERMANN, H. (Hg.) Fit for Finance, Kap. 3, S. 39–54, Verlag Neue Zürcher Zeitung, Zürich, 4. Aufl., 1997.
- [138] RUNDSCHREIBEN DER EIDGENÖSSICHEN BANKENKOMMISSION: Richtlinien zur Eigenmittelunterlegung von Marktrisiken, Art. 12l – 12p BankV, 22. Oktober 1997 mit Änderungen vom 1. Oktober 1999. Online in Internet: URL: <http://www.ebk.ch/d/publik/rundsch/97-1-rem1.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [139] SALTELLI, A., CHAN, K., SCOTT, E. M. (Hg.): Sensitivity Analysis. John Wiley & Sons, Chichester, 2000.
- [140] SAUERBIER, T.: Wahrscheinlichkeitsverteilungen. In: VOSS, W. (Hg.) Taschenbuch der Statistik, Kap. 10, S. 309–349, Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, München, 2000.
- [141] SAUNDERS, R., LAUD, P.: The multidimensional Kolmogorov goodness-of-fit test. *Biometrika*, Bd. 67(1), S. 237, 1980.

- [142] SCHAICH, E., MÜNNICH, R.: Mathematische Statistik für Ökonomen – Lehrbuch. Verlag Vahlen, München, 2001.
- [143] SCHEIPER, U.: Bivariate Statistik. In: VOSS, W. (Hg.) Taschenbuch der Statistik, Kap. 5, S. 169–208, Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, München, 2000.
- [144] SCHLITTGEN, R.: Einführung in die Statistik – Analyse und Modellierung von Daten. Oldenbourg, München, 6. Aufl., 1996.
- [145] SCHLITTGEN, R., NOACK, T.: DISTRIB – a GAUSS Library for Statistical Distributions, Mai 2001. Institute for Statistics and Econometry, University of Hamburg. Online in Internet: URL: <http://www.american.edu/academic.depts/cas/econ/gaussres/pdf/distrib.zip> [Stand 2003-08-08].
- [146] SCHRÖDER, M.: Ein verallgemeinerter Value-at-Risk-Ansatz. In: SCHRÖDER, M. (Hg.) Quantitative Verfahren im Finanzmarktbereich, Bd. 5 von *ZEW-Wirtschaftsanalysen*, S. 81–98, Nomos, Baden-Baden, 1996.
- [147] SCHWARZ, H. R.: Numerische Mathematik. B. G. Teubner, Stuttgart, 1997.
- [148] SCHWEIZER, B., WOLFF, E. F.: On Nonparametric Measures of Dependence for Random Variables. *The Annals of Statistics*, Bd. 9(4), S. 879–885, 1981.
- [149] SCHWEIZERISCHE BANKIERVEREINIGUNG: Richtlinien für das Risikomanagement im Handel und bei der Verwendung von Derivaten, Januar 1996. Online in Internet: URL: http://www.swissbanking.org/8017_d.pdf [Stand 2003-08-08].
- [150] SKLAR, A.: Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, Bd. 8, S. 229–231, 1959.
- [151] STADLER, W.: New Economy – New Finance; Krise und Zukunft der Unternehmensfinanzierung in Europa, August 2001. Investkredit Bank AG, E-Business-Tagung des Europäischen Forum Alpbach. Online in Internet: URL: <http://www.wko.at/alpbach/bm/dok/Stadler.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [152] STONE, B. K.: A General Class of Three-Parameter Risk Measures. *The Journal of Finance*, Bd. 28(3), S. 675–685, 1973.

- [153] STUART, A.: Kendall's tau. In: KOTZ, S., JOHNSON, N. L. (Hg.) *Encyclopedia of Statistical Sciences – Volume 4*, S. 367–369, John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [154] SWED, F. S., EISENHART, C.: Tables for Testing Randomness of Grouping in a Sequence of Alternatives. *Annals of Mathematical Statistics*, Bd. 14(1), S. 66–87, März 1943.
- [155] THE GROUP OF THIRTY: Global Derivatives: Practices & Principles. *Special Report on Global Derivatives*, 1993.
- [156] TZERMIAS, N.: Kostspielige Rettungsaktion für einen Hedge Fund – Kapitalspritze in Milliardenhöhe für Long-Term Capital. *Neue Zürcher Zeitung*, S. 33, 1998-09-25.
- [157] TZERMIAS, N.: LTCM-Debakel nur die Spitze eines Eisbergs? Erstaunlich gute Performance vieler Hedge Funds. *Neue Zürcher Zeitung*, S. 33, 1998-09-29.
- [158] Verordnung des Bundesrats über die Banken und Sparkassen vom 17. Mai 1972 (SR 952.02).
- [159] WALD, A., WOLFOWITZ, J.: On a Test Whether Two Samples are from the Same Population. *Annals of Mathematical Statistics*, Bd. 11(2), S. 147–162, Juni 1940.
- [160] WALDE, S.: Jahresrückblick 2000. Alpenbank Aktiengesellschaft, Innsbruck, 2000. Online in Internet: URL: <http://www.alpenbank.at/downloads/r2000.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [161] WEBER, F.: Modellrisiko bei Value-at-Risk-Schätzungen: eine empirische Untersuchung für den schweizerischen Aktien- und Optionenmarkt. Dissertation, Universität Freiburg Schweiz, 2001.
- [162] WIDDER, D. V.: The Laplace Transform. Princeton University Press, Princeton, 1946.
- [163] WILSON, T. C.: Calculating Risk Capital. In: ALEXANDER, C. (Hg.) *The Handbook of Risk Management and Analysis*, Kap. 7, S. 193–232, John Wiley & Sons, Chichester, 1996.
- [164] YAARI, M. E.: The Dual Theory of Choice under Risk. *Econometrica*, Bd. 55, S. 95–115, 1987.

- [165] ZANGARI, P.: When is non-normality a problem? The case of 15 time series from emerging markets. *RiskMetricsTM Monitor*, S. 20–32, 1996. Und Online in Internet: URL: <http://www.riskmetrics.com/pdf/journals/rmm4q96.pdf> [Stand 2003-08-08].
- [166] ZUBERBÜHLER, D.: Der Wandel des Aufsichtsrechts zur Risikoerfassung. In: NOBEL, P. (Hg.) Aktuelle Rechtsprobleme des Finanz- und Börsenplatzes Schweiz, Bd. 6, S. 89–124, Stämpfli Verlag AG, Bern, 1997.

Index

- Aktienkursrisiko, 11
- Ampelkonzept des Basler Ausschusses
 - für Bankenaufsicht, 171–175, 202–204, 214, 222–227, 233
- Anpassungstest
 - univariat, 180–184
- archimedische Copula, 126–146
 - bivariat, 127
 - copulabasierte Zusammenhangsmasse, 134–141
 - Dichtefunktion, 143
 - Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse, 136–138
 - ML-Schätzung, 141–144
 - multivariat, 129–134
 - Randabhängigkeit
 - obere, 139
 - untere, 139
 - Rangkorrelation von Kendall, 134, 136
 - Simulation, 144–146
 - strikt, 127
- Backtesting im Rahmen des Value-at-Risk-Konzepts, **25**, 26, 169
- Basel II, 16
- Basler Ausschuss für Bankenaufsicht, **15**, 26, 31, 171
- Basler Eigenkapitalvereinbarung, 15
- Beobachtungszeitraum, 28, 35
- Bindung, **73**, 74, 77, 78
- Bootstrap-Methode, 35
- Box-Plot, 194
- Brock-Dechert-Scheinkmann-Test, 159–162
- χ^2 -Anpassungstest, 180–181, 183, 191, 218
- Cholesky-Zerlegung, 108, 118
- Copula, *siehe* Copulafunktion
- copulabasiertes Zusammenhangsmasse, 69–86, 104, 110, 121, 134
 - Methode, *siehe* Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse
- Copulafamilie
 - archimedisch, *siehe* archimedische Copula
 - elliptisch, 102–118
 - Farlie-Gumbel-Morgenstern-, *siehe* Farlie-Gumbel-Morgenstern-Copula
 - Gumbel-, *siehe* Gumbel-Copula
 - Kimeldorf-Sampson-, *siehe* Kimeldorf-Sampson-Copula
 - Nelsen-, *siehe* Nelsen-Copula
 - Normal-, *siehe* Normal-Copula
 - t -, *siehe* t -Copula
- Copulafunktion, 57
 - bivariat, 58, 101, 127
 - Dichtefunktion, 62, 67
 - Eigenschaften, 61–63
 - Existenz, 59, 66
 - Fortsetzung in gemeinsame Verteilungsfunktion, 61, 67
 - Grenzen, 62, 67
 - Konstruktionsmethode, 61, 67
 - multivariat, 65, 101, 130
 - nichtparametrisch, 87

- parametrisch, 87, 101
- Schätzung, 87–97
 - parametrisch, 87–95
 - semiparametrisch, 96–97
- Simulation, 99–100
- zu X und Y gehörige, 60
- zu X_1, X_2, \dots, X_N gehörige, 66
- Datenaktualisierung, 28
- Derivat, 9, 51
- Differentialgleichung
 - stochastisch, 36
- Diffusionsanteil, 36
- diskordant, **71**, 75
- Driftanteil, 36
- Durchschnittsrang, **73**, 78
- EBK, *siehe* Eidgenössische Bankenkommission
- Eidgenössische Bankenkommission, 16, 26, 31, 172
- Eigenmittelunterlegung, **29**, 172
- elliptische Verteilungsfamilie, 49–52, 102, 109
- EML, *siehe* exakte Maximum-Likelihood-Methode
- empirische Verteilungsfunktion, 77, **78**, 96, 182
- Euler-Approximation, 36
- Ex-post-Kriterium, 169
- exakte Maximum-Likelihood-Methode, **88**, 91, 92, 96
- Expected Shortfall, 17
- Farlie-Gumbel-Morgenstern-Copula, 87, 118–125
 - bivariat, 118
 - copulabasierte Zusammenhangsmasse, 121–123
 - Dichtefunktion, 119
 - Log-Likelihoodfunktion, 123
 - ML-Schätzung, 123
 - multivariat, 119
 - reduziert, *siehe* reduzierte Farlie-Gumbel-Morgenstern-Copula
 - Restriktionen, 119
- Fehler
 1. Art, 173
 2. Art, 173
- FGM-Copula, *siehe* Farlie-Gumbel-Morgenstern-Copula
- Fréchet-Hoeffding-Obergrenze, **63**, 67, 128, 129
- Fréchet-Hoeffding-Ungleichung, **62**, 68, 69
- Fréchet-Hoeffding-Untergrenze, **63**, 67
- G-10-Staaten, 15
- Generator, 127
 - strikt, 127
- geometrische brownische Bewegung, **36**, 41, 147, 148, 180, 191, 193, 194, 218, 227, 235
 - diskrete Approximation, 37, 39
 - Normalverteilungsannahme, 37, 39
 - Zusammenhangsmodellierung, 39, 40
- Gewinn, **18**, 126
- Gumbel-Copula, 82, 189, 214, 234
 - bivariat, 127
 - Generator, 127
 - Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse, 136
 - multivariat, 131, 132
 - Randabhängigkeit, 139
 - Simulation, 145
- Haltedauer, 18, 27, 29, 33, 35, 42
 - Transformation, 27
- Halteperiode, *siehe* Haltedauer
- historische Simulation, **32**, 187, 212, 214, 234
 - Faktoransatz, 32

- gewichtete, 35
- Portfolioansatz, 32
- Würdigung, 34, 42
- identische Verteiltheit, 157, 160, 162
- IFR, *siehe* Inferenzfunktionen für Randverteilungen
- Inferenzfunktionen für Randverteilungen, **90**, 91, 95–97, 101, 194
- Iteration, 158
- kanonische Maximum-Likelihood-Methode, **96**, 97, 102, 220
- Kendalls τ , *siehe* Rangkorrelation von Kendall
- Kimeldorf-Sampson-Copula, 214
 - bivariat, 128
 - Generator, 128
 - Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse, 137
 - multivariat, 131, 133
 - Randabhängigkeit, 140
 - Simulation, 145
- KML, *siehe* kanonische Maximum-Likelihood-Methode
- Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstest, 181–184, 191, 218
- komonoton, 54, **71**, 81
- Konfidenzniveau, 18, 24, 27, 29
- konkordant, **71**, 75
- Konkordanz, **71**, 75
- kontramonoton, 54, **71**, 81
- Korrelation, **39**, 48, 50–52, 54, 63, 71, 77, 79, 104, 105, 110, 114, 117
 - mögliche Fehlschlüsse, 52–55
 - Nachteile, 51–52
 - Schätzung, *siehe* Korrelationskoeffizient von Bravais-Pearson
 - Vorteile, 47–51
- Korrelationskoeffizient von Bravais-Pearson, **40**, 77
- Korrelationsmatrix, **40**, 40, 103, 104, 107–110, 114, 118, 148
- Kovarianz, **39**, 50, 71, 79
 - mögliche Fehlschlüsse, 52–55
 - Nachteile, 51–52
 - Schätzung, 39
 - Vorteile, 47–51
- KS-Anpassungstest, *siehe* Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstest
- KS-Copula, *siehe* Kimeldorf-Sampson-Copula
- Likelihood-Quotienten-Test von Kupec, **170**, 200–204, 222–227
- Likelihoodfunktion, **88**, 90, 144
- Linearkombination, 41, 48
 - Varianz, 81
- Log-Likelihoodfunktion, **88**, 90, 91, 96, 106, 107, 113, 123, 144
- Lower Partial Moments, 17
- Marktrisiko, **8**, 15
- maximaler Überschreitungsverlust relativ zum Value-at-Risk, **179**, 207–210, 230–232
- Maximum-Likelihood-Methode, **88**, 94, 102, 105, 112, 123, 141, 157, 187, 216, 235
 - exakt, *siehe* exakte Maximum-Likelihood-Methode
 - kanonisch, *siehe* kanonische Maximum-Likelihood-Methode
 - Rechenzeiten, 212
 - Schätzeigenschaften, 89
- MC-Simulation, *siehe* Monte-Carlo-Simulation
- Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse, 94–95, 97, 101, 121, 187, 216, 235
 - Rechenzeiten, 212
- mittlere relative Abweichung, **168**, 194–197, 220–222

- mittlere relative Abweichung skalierter VaR-Schätzungen, **176**, 204–207, 228–230
- mittlerer Überschreitungsverlust relativ zum Value-at-Risk, **178**, 207–210, 230–232
- ML-Methode, *siehe* Maximum-Likelihood-Methode
- Modell
 - aggressiv, 169
 - konservativ, 169
- Modellrisiko, **12**, 167
 - Abschätzung, 194–210, 220–232
 - Kriterien zur Abschätzung, 168–180
 - von Copulafunktionen, 12, 185
- Momentenbedingung
 - empirisch, 92, 93
 - invertierbar, 92, 93
- Momentenmethode, 92–95, 97, 157
 - Schätzeigenschaften, 93
 - verallgemeinert, 94
- Monte-Carlo-Methode, *siehe* Monte-Carlo-Simulation
- Monte-Carlo-Simulation, 36–41
 - Faktoransatz, 41
 - für ein Portfolio, 38
 - für einen Vermögenswert, 36
 - Portfolioansatz, 41
 - unter Verwendung von Copulafunktionen, 147
 - Würdigung, 41
- Multiplikator zur Erreichung von $\alpha \cdot 100\%$ Überschreitungen, **175**, 204, 228
- multivariate t -Verteilung, 50, **109**
 - Dichtefunktion, 109
- multivariate Normalverteilung, 49, **103**
- multivariate Standardnormalverteilung, 49, **103**
- Dichtefunktion, 103
- Log-Likelihoodfunktion, 107
- N -Copula, 65, 130
- Nelsen-Copula, 189, 214, 216–218, 233, 235
 - bivariat, 129
 - Generator, 129
 - Methode der copulabasierten Zusammenhangsmasse, 137
 - multivariat, 131, 134
 - Randabhängigkeit, 140
 - Simulation, 146
- Normal-Copula, **104**, 102–108, 214, 234
 - copulabasierte Zusammenhangsmasse, 104–105
 - Dichtefunktion, 106
 - explizit, 104
 - Log-Likelihoodfunktion, 106
 - ML-Schätzung, 105–107
 - Simulation, 108
- Normalverteilung
 - multivariat, *siehe* multivariate Normalverteilung
- numerische Optimierungsmethode, 89–91, 97, 100, 114, 123, 144, 145, 189, 212
- Optimierungsmethode
 - numerisch, *siehe* numerische Optimierungsmethode
- Parameterrisiko, 12
- perfekte Abhängigkeit, **69**, 80
 - negativ, 55, **71**
 - positiv, 55, **71**
- Periodizität, 28
- Portfoliotheorie, 1, 48
- Produkt-Copula, 63, 73, 76, 84, 86, 119, 128, 129
 - bivariat, 58
 - multivariat, 65

- Pseudo-Inverse, **126**, 130
- Quantilschätzer, 23
 - Konfidenzintervall, 23
- Quantilschätzung bei einer geordneten Stichprobe, 22
- Quasi-Inverse, **60**, 61, 67
- Randabhängigkeit, 81
 - asymmetrisch, 126, 141, 189, 214, 233
 - obere, 82, 83, 105, 111, 122, 139–141, 187, 233
 - symmetrisch, 126
 - untere, 85, 105, 111, 122, 139–141, 187, 214
- Rang, **73**, 78
- Rangkorrelation von Kendall, **72**, 79, 80, 94, 104, 110, 121, 134, 135, 217
 - Schätzung, *siehe* Rangkorrelationskoeffizient von Kendall
- Rangkorrelation von Spearman, **75**, 77, 79, 80, 94, 104, 121, 138
 - Schätzung, *siehe* Rangkorrelationskoeffizient von Spearman
- Rangkorrelationskoeffizient von Kendall, **73**, 74, 95, 135, 187
- Rangkorrelationskoeffizient von Spearman, **77**, 78, 95, 187
- Rechenzeit, 210–213
- reduzierte Farlie-Gumbel-Morgenstern-Copula, **119**, 215
 - copulabasierte Zusammenhangsmasse, 121–123
 - Dichtefunktion, 119
 - Log-Likelihoodfunktion, 123
 - ML-Schätzung, 123
 - Restriktionen, 120
 - Simulation, 124–125
- Referenzergebnis, 7, 8, 18
- Rendite
 - einfache, **17**, 51, 63, 79
 - Log-, **17**, 52, 63, 79
- RFGM-Copula, *siehe* reduzierte Farlie-Gumbel-Morgenstern-Copula
- Risiko, 7
 - finanzielles, 8
 - statistisches, 11
- Risikofaktor, 32
- Risikomass, 12
- Satz von Sklar, **59**, 62, 89, 99, 148
 - in N Dimensionen, 66
 - Korollar, 60, 67, 103, 109
- Schätzrisiko, 12
- SMI, *siehe* Swiss Market Index
- Spearman's ρ , *siehe* Rangkorrelation von Spearman
- sphärische Verteilungsfamilie, 48
- Standardnormalverteilung
 - multivariat, *siehe* multivariate Standardnormalverteilung
- Startwert, 97
- Students t -Copula, *siehe* t -Copula
- Swiss Market Index, 74, 77, **153**
- t -Copula, **109**, 108–118
 - copulabasierte Zusammenhangsmasse, 110–112
 - Dichtefunktion, 113
 - explizit, 110
 - Log-Likelihoodfunktion, 113
 - ML-Schätzung, 112–117
 - Simulation, 117–118
- t -Verteilung
 - multivariat, *siehe* multivariate t -Verteilung
- Test
 - Brock-Dechert-Scheinkmann-, *siehe* Brock-Dechert-Scheinkmann-Test
 - χ^2 -, *siehe* χ^2 -Anpassungstest

- Kolmogorov-Smirnov-, *siehe* Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstest
- Kupiec-, *siehe* Likelihood-Quotienten-Test von Kupiec
- Wald-Wolfowitz-, *siehe* Wald-Wolfowitz'scher Iterationstest
- Wald-Wolfowitz'scher Iterationstest, 157–159, 162
- Zeitpfad, 38, 41
- Zusammenhangsmass
copulabasiert, *siehe* copulabasiertes Zusammenhangsmass
- Überschreitung, 25
- Unabhängigkeit, 35, 51, 58, 65, 73, 76, 81, 84, 86, 88, 157, 160, 162
- Unkorreliertheit, 51
- Value-at-Risk, 15, **18**, 167
 - absolut, 22
 - Backtesting, *siehe* Backtesting im Rahmen des Value-at-Risk-Konzepts
 - explizit, 19
 - implizit, 18
 - in Abhängigkeit von Gewinnen, 19
 - in Abhängigkeit von Preisen, 19
 - in Abhängigkeit von Renditen, 20
 - in Abhängigkeit von Verlusten, 18
 - quantitative Bestimmungsgrößen, 26, 190
 - relativ, 22
 - Schätzung, 22, 26
- VaR, *siehe* Value-at-Risk
- Varianz-Kovarianz-Matrix, **40**, 48, 49, 51, 52, 103, 108
- Varianz-Kovarianz-Methode, 31
- Verlust, **18**, 126
- Verlustfunktion, 169
 - binär, **170**, 172, 175
- Verteilungsfamilie
 - elliptisch, *siehe* elliptische Verteilungsfamilie
 - sphärisch, *siehe* sphärische Verteilungsfamilie
- Volatilität, 37, 154, 156
- vollständig monoton, 130